李青航 SA22225226

325

特征方程$x-4=0, \quad x=4$

所以齐次通解 $c_1 4^n$

设非齐次特解 $an\cdot 4^n$

又有$h_0=3, \quad h_1=4\times 3+4=16$

有

$$\begin{cases} c_1=3 \\ c_1\cdot 4+a\cdot 4=16 \end{cases}$$

得$c_1=3, \quad a=1$

所以

$$h_n=3\cdot 4^n+n\cdot 4^n$$

331

$$\begin{aligned} g(x)=&\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n \\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{2}x^n \\ =&x^2\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}x^{n-2} \\ =&x^2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n \\ =&\frac{x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

341

$$h_1(x)=h_3(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$h_5(x)=h_7(x)=h_9(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$
\begin{aligned}
g^{(e)}(x) &= h_1(x)h_3(x)h_5(x)\dots h_9(x) \\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{3x} \\
&= \frac{e^{5x}+2e^{3x}+e^x}{4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

所以

$$
h_n = \frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}
$$

343

将圆上的点划分为两部分（这两部分连续），第一部分有$2k$个点，第二部分有$2n-2k$个点，总的方法数

$$
h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad n \geq 1, \quad h_0 = h_1 = 1
$$

所以由凸多边形三角剖分的例题知，解就是卡特兰数

$$
h_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
$$

346 见图

348

$$
h_n = 2n^2 - n + 3
$$

差分表

$$
3, 4, 9, 18, 31, 48, 69, 94, 123, 156\dots
$$

$$
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 2, 33\dots
$$

$$
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\dots
$$

$$
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\dots
$$

所以$h_n = 3\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + 4\binom{n}{2}$，进而

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} h_k =& 3\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0} + \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} + 4\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} \\
=& 3\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + 4\binom{n+1}{3} \quad n \geq 0
\end{aligned}
$$

1((23)(45)6)