SA22225226 李青航

74

将分数记为两个正整数m和n的比值，即m/n。对于整数$i=0,1,\cdots,n$，考察分数$10^i m/n$，并且记余数为r_i，显然余数的取值范围是$r_i=0,1,\cdots,n-1$，一共有n个，因此由鸽巢原理可以断定，存在整数$i,j(0\le i<j\le n)$满足$r_i=\ r_j$

之后考虑分数$(10^j m-10^i m)/n$，并且记$s=j-i$，这样存在整数q满足$10^i(10^s-1)m=nq$，并且记$q/(10^s-1)$的余数为r。同样可以判断r的取值范围是$r=0,1,\cdots,10^s-2$。可以写作$q=b(10^s-1)+r$

那么分数$10^i m/n$就可以展开为等比级数的和

$$\begin{aligned}\frac{10^i m}{n}&=\frac{q}{10^s-1}\\&=b+\frac{r}{10^s-1}\\&=b+\frac{r}{10^s}+\frac{r}{10^{2s}}+\frac{r}{10^{3s}}+...+\frac{r}{10^{ns}}+....\end{aligned}$$

所以，$10^i m/n$可以表示为循环小数的形式，循环部分的长度是$j-i$，那么m/n是$10^i m/n$小数点左移i位，不改变循环部分，因此最终也是循环的。

85 看错了，这题没布置，多做了

i. 将边长为1的正三角形，划分为4个相同的边长为$\frac{1}{2}$的小正三角形，第1–4个点分别在4个小正三角形中，根据鸽巢原理，存在第5个点，与其中1个点在同一个小正三角形中，两点最大距离为$\frac{1}{2}$（分别在两个顶点）

ii. 同理，划分为边长为$\frac{1}{3}$的9个正三角形

iii. 将其划分为$m_n-1=n^2$个边长为$\frac{1}{n}$的小正三角形，在大三角形中，有m_n个点，根据鸽巢原理，存在两个点在同一个小三角形中，其最大距离为$\frac{1}{n}$(在三角形的两个顶点)

86

考虑$K_{17}\to K_3,K_3,K_3$，并且使用红色、蓝色和绿色进行染色。

任选一个点x，与它相连的边有16条，由鸽巢原理加强版可知，至少存在$\lceil\dfrac{16}{3}\rceil=6$条边的颜色相同，不妨设为红色。

那么对于与x相连的点$\{x\}_{i=1}^{6}$，如果他们之中的连线存在一条红边，则该条边上的两点和x则可以构成一个K_3；否则（即不存在红边），由$r(3,3)=6$可知，6个顶点染色一定可以构造出一个蓝色或绿色的K_3。

综上，17个点可以构造出K_3，不少于17个点也一定能构造出K_3，即$r(3,3,3)\leq 17$

95

没有限制：四位数，每一位都是5种取法，共5^4种

(a)限制：$5\times4\times3\times2$种

(b)限制：末尾是偶数，末尾2种取法，其他三位都是5种取法，共2×5^3种

(a)(b)限制：末尾是偶数2种取法，其他三位各，4，3，2种取法，共$2\times 4\times3\times2$种

101

i. 葫芦

先选一对，再选三条；或者先选三条，再选一对

共$13\times\binom{4}{2}\times12\times\binom{4}{3}$种

ii. 顺子

顺子从12345到10JQKA有10种，其中每张牌花色都有四种可能,减去40种同花顺

共$10\times4^5-40$种

iii. 同花

4种花色，每种13张牌选5张，减去40种同花顺

共$4\times\binom{13}{5}-40$种

iv. 同花顺

顺子从12345到10JQKA有10种，因为要同花色，所以只乘4,共$4\times10=40$种

v. 两对

第一步选数字，两对中的数字组合，13个数字选2个数字，有$\binom{13}{2}$种

第二步，第一对牌又是4种花色种选2种，有$\binom{4}{2}$
第三步，第二对牌同理
第四步，第5张牌，不能和两对中的数字一样（不然就变葫芦了）$52-8=44$
所以，一共$\binom{13}{2}\times\binom{4}{2}^2\times 44$种

vi. 一对
13种数字，每对从4张选2张，剩下三张单牌有48，44，40种可能，除以三张牌的排列3!
总的来说，$13\times\binom{4}{2}\times(48\times 44\times 40)/3!$种

122

i. 走17个街区，向东北走，9次向东，8次向北，每次只有两种选择，向东或者向北,所以有 $\binom{17}{9}=\binom{17}{8}$种走法

ii. 经过水路的数量

$$\binom{7}{4}\binom{10}{5}+\binom{7}{3}\binom{9}{4}+\binom{7}{2}\binom{9}{4}$$

用i. 的结果减去上式就是结果