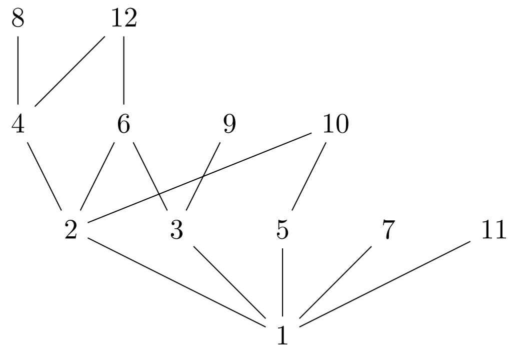
SA22225226 李青航

254

Hasse图如下



i.

其中一条最大链{1,2,4,8}

根据定理5.6.1，最小反链数目是4，其中一种划分是：

$$\{8, 12\}$$

$$\{4, 6, 9, 10\}$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$\{1\}$$

ii.

其中一条最大反链{7,8,9,10,11,12}

根据定理5.6.2 Dilworth定理，最小链数目6，其中一种划分是：

$$\{1, 2, 4, 8\}$$

$$\{3, 6, 12\}$$

$$\{5, 10\}$$

$$\{9\}$$

$$\{7\}$$

$$\{11\}$$

257

设能被4,6,7,10整除的数为A_1, A_2, A_3, A_4

$|A_1| = \lfloor 10000/4 \rfloor = 2500$

$|A_2| = \lfloor 10000/6 \rfloor = 1666$

$|A_3| = \lfloor 10000/7 \rfloor = 1428$

$|A_4| = \lfloor 10000/10 \rfloor = 1000$

$|A_1 \bigcap A_2| = \lfloor 10000/12 \rfloor = 833$

$|A_1 \bigcap A_3| = \lfloor 10000/28 \rfloor = 357$

同理算出所有$|A_i \bigcap A_j|$ $|A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$ $|A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4|$

由容斥原理

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \overline{A_3} \bigcap \overline{A_4}| \\
&= |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \bigcap A_j| - \sum |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| + |A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4| \\
&= 5429
\end{aligned}
$$

262

设A_1为$\{x | x \in \mathbb{Z}^+, x \geq 9\}$,$A_2, A_3, A_4$同理

设$y_1 = x_1 - 9$,$y_2 = x_2, y_3 = x_3$...转化为$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$

所以$|A_1| = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{3} = |A_2| = \ldots$

设$y_1 = x_1 - 9, y_2 = x_2 - 9$转化为$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -4$

所以$|A_i \bigcap A_j| = 0$

$A_i \bigcap A_j \bigcap A_k$和四项全有的，同理为0

相当于

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \overline{A_3} \bigcap \overline{A_4}| &= \binom{17}{3} - 4\binom{8}{3} \\
&= 456
\end{aligned}
$$

264

设$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - 4, y_4 = x_4 - 2$

所以原方程转化为$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$,其中 $0 \leq y_1 \leq 5, 0 \leq y_2 \leq 7, 0 \leq y_3, x_4 \leq 4$

设A_1为$\{y | y \in \mathbb{Z}, y \geq 6\}$,同理$A_2, A_3, A_4$分别为$y \geq 8, y \geq 5, y \geq 5$

转化为$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$

设$z_1 = y_1 - 6$,有$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 7$ 所以$|A_1| = \binom{7+4-1}{7}$

同理$|A_2| = 0$，$|A_3| = \binom{8+4-1}{8} = |A_4|$

同理再算出所有$|A_i \bigcap A_j|$,$|A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$,$|A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_4|$

用容斥原理，得出结果96

272

设A_1, A_2, A_3分别表示$aaa, bbbb, cc$出现

则A_1表示$\{aaa, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$的排列，使用多重集合的排列公式

$$|A_1| = \frac{7}{1!4!2!} = 105$$

同理

$$|A_2| = \frac{6}{3!1!2!} = 60, |A_3| = \frac{8}{3!4!1!} = 280$$

$$|A_1 \bigcap A_2| = \frac{4}{1!1!2!} = 12,\ |A_1 \bigcap A_3| = \frac{6}{1!4!1! = 30}$$

$$|A_2| \bigcap A_3| = 20,\ |A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3| = 6$$

所以

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| - \sum |A_i A_j A_k| \\ =& 1260 - (105 + 60 + 280) + (12 + 30 + 20) - 6 \\ =& 871\end{aligned}$$

279

(a)

设r_k为k个禁止位上摆放棋子的方法数

显然

$$r_0 = 1, r_1 = 6$$

将禁止位分三部分，每一部分最多只能放置一辆车,用乘法原理

$$r_2 = \binom{3}{2} \times 2^2 = 12$$

$$r_3 = \binom{3}{3} \times 2^3 = 8$$

禁止位置上无法摆放四辆及以上的车，因此，$r_i = 0, i \geq 4$

所以总的方法数为

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (-1)^k (n-k)! = 1 \times 6! - 6 \times 5! + 12 \times 4! - 8 \times 3! = 240$$

(b)

同理

$$r_0 = 1, r_1 = 12$$

将禁止位分三部分，每一部分最多只能放置2辆车，用乘法原理

一部分放2个车，每部分2种放法，3个部分，所以2×3；加上一部分放一个车，3部分选2部分放车，每部分4种放法，$\binom{3}{2}\times 4^2$

$$r_2 = 2\times 3 + \binom{3}{2}\times 4^2 = 54$$

3车放三部分，分为一一一和二一零，两种方法，加法原理。

$$r_3 = 4^3 + 3!\times 2\times 4 = 112$$

4车放三部分，分为二二零，二一一

$$r_4 = \binom{3}{2}\times 2^2 + \binom{3}{1}\times 4^2\times 2 = 108$$

5车放三部分，只能二二一

$$r_5 = \binom{3}{1}\times 2^2\times 4 = 48$$

6车放三部分，只能二二二

$$r_6 = 2^3 = 8$$

禁止位置上无法摆放7个及以上的车，因此$r_i = 0, i\geq 7$

总的摆放数

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} r_k(-1)^k(n-k)! &= 1\times 6! - 12\times 5! + 54\times 4! - 112\times 3! + 108\times 2! - 48\times 1! + 8\times 0!\\ &= 80\end{aligned}$$

(c)

将棋盘禁止位分为相互独立的F_1和F_2，分别求出F_1和F_2能摆放车的方法数，如下表

k	0	1	2	3
$F_1(k)$	1	5	6	1

k	0	1	2
$F_2(k)$	1	3	1

总的，使用乘法原理与加法原理

$$r_k = \sum_{j=0}^{k} F_1(j)F_2(k-j)$$

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	8	22	24	9	1	0

所以总的方法数为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} r_k(-1)^k(n-k)! &= 1\times 6! - 8\times 5! + 22\times 4! - 24\times 3! + 9\times 2! - 1\times 1! + 0\times 0! \\ &= 161\end{aligned}$$

<u>下一页还有</u>
<u>下一页还有</u>
<u>下一页还有</u>

281

转化为棋盘放车问题

⊠	⊠	⊠			
⊠					
⊠					
				⊠	⊠
				⊠	⊠

对于每一部分，先计算摆放车可能的种类数

k	0	1	2	3
$F_1(k)$	1	5	4	0

k	0	1	2	3
$F_2(k)$	1	4	2	0

总的种类,见表1

$$r_k = \sum_{i=0}^{n} F_1(i) \times F_2(k-i)$$

表 1: 281题 r_i

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	9	26	26	8	0	0

总数

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (-1)^k (n-k)! = 1 \times 6! - 9 \times 5! + 26 \times 4! - 26 \times 3! + 8 \times 2! = 124$$