297

i.

$f_0=0$偶数，$f_1=1$奇数，$f_2=1$奇数

$f_3=2$偶数，$f_4=3$奇数，$f_5=5$奇数

$f_6=8$偶数 $\ldots$

因为奇+奇=偶，奇+偶=奇，所以以3个为一组循环，当且仅当 $3|n$ 时，f_n 是偶数

ii.

$f_n \div 3$的余数,即$f_n \bmod 3$从$n=1$开始

$1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0\ldots$

推测当$n=4,8,12\ldots$时，余数为0(能被3整除)

由于Fibonacci 数列性质，$f_n \bmod 3 = (f_{n-1} \bmod 3 + f_{n-2} \bmod 3) \bmod 3$

所以必然4个一组继续循环下去，当且仅当 $4|n$ 时，$3|f_n$

iii.

使用数学归纳法证明，当n被6整除时，f_n一定被4整除。

首先，$f_0=0$能被4整除，$f_1,f_2\ldots f_5$都不能被4整除，$f_6=8$能被4整除

设f_{n-6}被4整除，当且仅当n被6整除时

当f_n时候

$$\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1}+f_{n-2} \\
&= 2f_{n-2}+f_{n-3} \\
&= 3f_{n-3}+2f_{n-4} \\
&= \ldots \\
&= 8f_{n-5}+5f_{n-6}
\end{aligned}$$

因此$f_n \bmod 4 = (8f_{n-5}+5f_{n-6}) \bmod 4 = f_{n-6}$，即$f_n \equiv f_{n-6} (\bmod 4)$，并且$f_0 = 0, f_1=f_2=1, f_3=2, f_4=3$，因而$f_n$被3整除当且仅当$n$可被4整除。

300

证明 $n|m \Rightarrow f_n|f_m$ 其中 $n,m\in\mathbb{N}$

因为

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\ &= 2f_{n-2} + f_{n-3} \\ &= 3f_{n-3} + 2f_{n-4} \\ &= \dots \\ &= 8f_{n-5} + 5f_{n-6} \\ &= \dots \\ &= f_{m+1}f_{n-m} + f_m f_{n-m-1} \end{aligned}$$

所以令$n = (k+1)m$

$$f_{(k+1)m} = f_{m+1}f_{km} + f_m f_{km-1} \quad (\star)$$

由数学归纳法
设$n = km, f_m | f_{km}, k \in \mathbb{N}$，得
当$n = 1$时，显然$f_m | f_m$
当$n = (k+1)m$时候,由 $(\star)$ 式得$f_m | f_{(k+1)m}$

306

特征方程为$q^2 = 4$ 所以$q = \pm 2$
齐次通解为$h_n = c_1 2^n + c_2(-2)^n$
将初值$h_0 = 0,\ h_1 = 1$带入得

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = 2c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

得$c_1 = \frac{1}{4},\ c_2 = -\frac{1}{4}$
所以

$$h_n = \frac{1}{4}2^n - \frac{1}{4}2^n \quad ,n \in \mathbb{N}$$

307

$$
\begin{aligned}
h_n &= (n+2)h_{n-1} \\
&= (n+2)(n+1)h_{n-2} \\
&= (n+2)(n+1)nh_{n-3} \\
&= (n+2)(n+1)n(n-1)h_{n-4} \\
&= \dots \\
&= (n+2)(n+1)(n)(n-1)...h_0 \\
&= (n+2)!
\end{aligned}
$$

318

导出齐次方程的特征方程$r^2 - 3r = 0$　所以$r_1 = 0$，$r_2 = 3$
对应齐次解$h_n = c_1 \cdot 0 + c_2 3^n$
设非齐次特解$h_n^* = s$
将$h_0 = 1, h_1 = 1$带入$c_2 + s = 1, 3c_2 + s = 1$
所以$c_2 = 0$，$s = 1$，最终$h_n = 1$

324

i.

观察序列知道，生成函数

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x + 4x^3 + 16x^5 + \cdots + 4^{(n-1)/2}x^n \\
&= x(1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + (2x)^{2n}) \\
&= \frac{x}{1-(2x)^2} \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - (-2)^n}{4} x^n
\end{aligned}
$$

所以

$$
h_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4} \quad , n \in \mathbb{N}
$$

ii.

设生成函数为$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots$，分别用$-x$和$-x^2$乘以$g(x)$得到，

$$
\begin{aligned}
-xg(x) &= -h_0 x - h_1 x^2 - h_2 x^3 - \cdots \\
-x^2 g(x) &= -h_0 x^2 - h_1 x^3 - h_2 x^4 - \cdots
\end{aligned}
$$

三式相加，两边求和化简得，

$$(1-x-x^2)g(x)=h_0+(h_0-h_1)x+(h_2-h_1-h_0)x^2+\cdots+(h_n-h_{n-1}-h_{n-2})x^n+\cdots$$

再由$h_n-h_{n-1}-h_{n-2}=0,(n\geq 2)$知，生成函数

$$\begin{aligned}g(x)=&\frac{1+2x}{1-x-x^2}\\=&\frac{r}{1-rx}+\frac{s}{1-sx}\\=&\frac{(r+s)-2rsx}{1-(r+s)x+rsx^2}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}(r^{n+1}+s^{n+1})x^n\end{aligned}$$

其中$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},r+s=1,rs=-1$
因此

$$h_n=r^{n+1}+s^{n+1}\quad,n\in\mathbb{N}$$

iii.
同**ii.** 的理
设生成函数为

$$\begin{aligned}(1-x-9x^2-9x^3)g(x)&=h_0+(1-h_0)x+(h_2-h_1-9h_0)x^2+\\&\quad(h_3-h_2-9h_1-9h_0)x^3+\dots\\&=x+x^2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{x+x^2}{(1-x-9x^2-9x^3)}\\&=\frac{1}{3(1-3x)}-\frac{1}{12(1+3x)}-\frac{1}{4(1-x)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}3^n-\frac{1}{12}(-3)^n-\frac{1}{4}\right)x^n\end{aligned}$$

最终

$$h_n=\frac{1}{3}3^n-\frac{1}{12}(-3)^n-\frac{1}{4}\quad,n\in\mathbb{N}$$

iv.
同理

$$(1-8x-16x^2)g(x)=8x-1$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{8x-1}{1-8x-16x^2} \\
&= \frac{8x-1}{(1-4x)^2} \\
&= (8x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)4^n x^n
\end{aligned}
$$

最终

$$
h_n = (n-1)4^n
$$

vi.

设生成函数为$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots$，分别用$-5x$、$6x^2$、$4x^3$和$-8x^4$乘以g(x)化简得到，

$$
\begin{aligned}
g(x) =&\frac{x-4x^2+3x^3}{1-5x+6x^2+4x^3-8x^4} \\
=&\frac{x-4x^2+3x^3}{(1-2x)^3(1+x)} \\
=&\frac{ax^2+bx+c}{(1-2x)^3} + \frac{d}{1+x} \\
=&\frac{(a-8d)x^3+(a+b+12d)x^2+(b+c-6d)x+(c+d)}{(1-2x)^3(1+x)}
\end{aligned}
$$

设

$$
\begin{cases}
a-8d=3 \\
a+b+12d=-4 \\
b+c-6d=1 \\
c+d=0
\end{cases}
$$

解得，$a=\frac{17}{27}, b=-\frac{29}{27}, c=-\frac{8}{27}, d=\frac{8}{27}$。

$$
g(x) = \frac{1}{27}\frac{17x^2-29x-8}{(1-2x)^3} + \frac{8}{(1+x)}
$$

h_n略