TP Logique n^o 1. Assistant de preuve Coq.

Ce sujet consiste à utiliser l'assistant de preuve COQ pour démontrer des théorèmes de la logique des propositions. Les règles de déduction naturelle exploitées par COQ sont différentes de celles étudiées en cours et travaux dirigés. Dans une première étape, nous utiliserons un codage en COQ des règles de déduction naturelle puis nous effectuerons des preuves en utilisant les règles disponibles en COQ.

1 Préliminaires

1. Ouvrir un terminal texte ;
2. Créer un répertoire de travail pour la première année, puis pour la matière Modélisation et enfin le premier TP, puis se placer dans ce répertoire ;

   ```
   mkdir -p 1A/Modelisation/TP1
   cd 1A/Modelisation/TP1
   ```
3. Configurer votre environnement de travail en exécutant les commandes suivantes dans le terminal utilisé (vous pouvez ajouter ces lignes dans le fichier de configuration `${HOME}/.bashrc` pour qu'elles soient exécutées lors du démarrage de l'interprète de commande) :

   ```
   test -r /applications/opam/opam-init/init.sh &&
   . /applications/opam/opam-init/init.sh > /dev/null 2> /dev/null || true
   ```
4. Télécharger depuis `moodle` le fichier `Naturelle.v` contenant une bibliothèque COQ pour disposer des règles de preuve habituelles en déduction naturelle ;
5. Compiler la bibliothèque avec la commande : `coqc Naturelle.v` qui produit le fichier `Naturelle.vo` ;
6. Démarrer COQ avec la commande : `coqide`

2 Démonstrations en calcul des propositions

Pour utiliser COQ pour prouver les théorèmes suivants, il est nécessaire d'effectuer les commandes :

```
(* Les règles de la déduction naturelle doivent être ajoutées à Coq. *)
Require Import Naturelle.

(* Ouverture d'une section *)
Section LogiqueProposition.

(* Déclaration de variables propositionnelles *)
Variable A B C E Y R : Prop.
```

Télécharger depuis `moodle` le fichier `tp1.v` qui contient ces commandes ainsi que l'exemple détaillé par la suite.

Les hypothèses en COQ sont toutes nommées. Le nom `H` est précisé lors de l'utilisation des règles de l'hypothèse (`Hyp H.`) et $I_\rightarrow$ (`I_imp H.`).

2.1 Déduction naturelle

Les règles suivantes de la déduction naturelle étudiées en cours et TD ont été modélisées en COQ au sein de la librairie `Naturelle.vo`. Chaque règle est annotée par la commande COQ permettant d'appliquer la règle et avec les informations qui doivent lui être transmises.

$$\Gamma, \mathtt{H} : \varphi \vdash \varphi \quad (\mathtt{Hyp}\ \mathtt{H}.) \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{H} : \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad (\mathtt{I\_imp}\ \mathtt{H}.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \quad (\mathtt{E\_imp}\ \varphi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \quad (\mathtt{I\_et}.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\mathtt{E\_et\_g}\ \psi.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad (\mathtt{E\_et\_d}\ \varphi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad (\mathtt{I\_ou\_g}.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad (\mathtt{I\_ou\_d}.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \mathtt{H} : \varphi \vdash \chi \quad \Gamma, \mathtt{H} : \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi} \quad (\mathtt{E\_ou}\ \varphi\ \psi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot} \quad (\mathtt{I\_antiT}\ \varphi.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\mathtt{E\_antiT}.) \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{H} : \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\mathtt{absurde}\ \mathtt{H}.)$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{H} : \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \quad (\mathtt{I\_non}\ \mathtt{H}.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot} \quad (\mathtt{E\_non}\ \varphi.) \qquad \Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi \quad (\mathtt{TE}.)$$

La preuve suivante en déduction naturelle est construite avec les annotations appropriées.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathtt{H} : A \wedge B \vdash A \wedge B \quad (\mathtt{Hyp}\ \mathtt{H}.)}{\mathtt{H} : A \wedge B \vdash B}\ (\mathtt{E\_et\_d}\ A.) \quad \cfrac{\mathtt{H} : A \wedge B \vdash A \wedge B \quad (\mathtt{Hyp}\ \mathtt{H}.)}{\mathtt{H} : A \wedge B \vdash A}\ (\mathtt{E\_et\_g}\ B.)}{\mathtt{H} : A \wedge B \vdash B \wedge A}\ (\mathtt{I\_et}.)}{\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)}\ (\mathtt{I\_imp}\ \mathtt{H}.)$$

Elle s'exprime en COQ sous la forme :

```
Theorem Thm_0 : A /\ B -> B /\ A.
I_imp H.
I_et.
E_et_d A.
Hyp H.
E_et_g B.
Hyp H.
Qed.
```

1. Démontrer de manière constructive (sans utiliser l'absurde ou le tiers-exclu) :
   `Theorem Thm_1 : ((A \/ B) -> C) -> (B -> C).`
2. Démontrer de manière constructive (sans utiliser l'absurde ou le tiers-exclu) :
   `Theorem Thm_2 : A -> ~~A.`
3. Démontrer de manière constructive (sans utiliser l'absurde ou le tiers-exclu) :
   `Theorem Thm_3 : (A -> B) -> (~B -> ~A).`
4. Démontrer de manière classique en utilisant l'absurde :
   `Theorem Thm_4 : ~~A -> A.`
5. Démontrer de manière classique en utilisant l'absurde :
   `Theorem Thm_5 : (~B -> ~A) -> (A -> B).`
6. Démontrer de manière constructive (sans utiliser l'absurde ou le tiers-exclu) :
   `Theorem Thm_6 : ((E -> (Y \/ R)) /\ (Y -> R)) -> (~R -> ~E).`

2.2 Preuve avec COQ

Le système COQ exploite une variante de la déduction naturelle qui permet de coder les règles de celle-ci. Il permet en particulier de travailler à la fois sur les conclusions comme la déduction naturelle et sur les hypothèses. Voici quelques règles spécifiques :

$$\frac{\Gamma,\ \texttt{Hphi} : \varphi,\ \texttt{Hpsi} : \psi \vdash \chi}{\Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \wedge \psi \vdash \chi}\quad (\texttt{destruct H as (Hphi,Hpsi).})$$

$$\frac{\Gamma,\ \texttt{Hphi} : \varphi \vdash \chi \quad \Gamma,\ \texttt{Hpsi} : \psi \vdash \chi}{\Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \vee \psi \vdash \chi}\quad (\texttt{destruct H as [Hphi | Hpsi].})$$

$$\Gamma,\ \texttt{H} : \bot \vdash \varphi \quad (\texttt{elim H.})$$

$$\Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \vdash \varphi \quad (\texttt{exactr H.}) \qquad \frac{\Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\quad (\texttt{intro H.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\quad (\texttt{E\_imp}\ \varphi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\quad (\texttt{split.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\quad (\texttt{E\_et\_g}\ \psi.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\quad (\texttt{E\_et\_d}\ \varphi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\quad (\texttt{left.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\quad (\texttt{right.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \vdash \chi \quad \Gamma,\ \texttt{H} : \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\quad (\texttt{E\_ou}\ \varphi\ \psi.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\quad (\texttt{I\_antiT}\ \varphi.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\quad (\texttt{E\_antiT.})$$

$$\frac{\Gamma,\ \texttt{H} : \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\quad (\texttt{I\_non H.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\quad (\texttt{E\_non}\ \varphi.) \qquad \frac{\Gamma,\ \texttt{H} : \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\quad (\texttt{absurde H.})$$

Les autres règles de déduction de COQ et les correspondances avec la déduction naturelle sont fournies en annexe. Nous allons les utiliser pour prouver certaines règles de la déduction naturelle.

La preuve de la commutativité de la conjonction s'écrit alors.

```
Theorem Coq_Thm_0 : A /\ B -> B /\ A.
intro H.                (* introduction implication *)
destruct H as (HA,HB).  (* élimination conjonction *)
split.                  (* introduction conjonction *)
exact HB.               (* hypothèse *)
exact HA.               (* hypothèse *)
Qed.
```

1. Démontrer :

   `Theorem Coq_E_imp : ((A -> B) /\ A) -> B.`

2. Démontrer :

   `Theorem Coq_E_et_g : (A /\ B) -> A.`

3. Démontrer :

   `Theorem Coq_E_ou : ((A \/ B) /\ (A -> C) /\ (B -> C)) -> C.`

4. Démontrer :

   `Theorem Coq_Thm_7 : ((E -> (Y \/ R)) /\ (Y -> R)) -> (~R -> ~E).`

5. Enfin, il est nécessaire de fermer la section avant de passer à la séance suivante (logique des prédicats) :

   `End LogiqueProposition.`