Capítulo 2: Transformações Geométricas (parte 2)

1. Transformações Comuns em PDI:

* 1 - coordenadas cartesianas

* 2 - coorrdenadas esféricas

* 3 - conversão entre sistemas

* 4 - translação

* 5 - transformação de escala

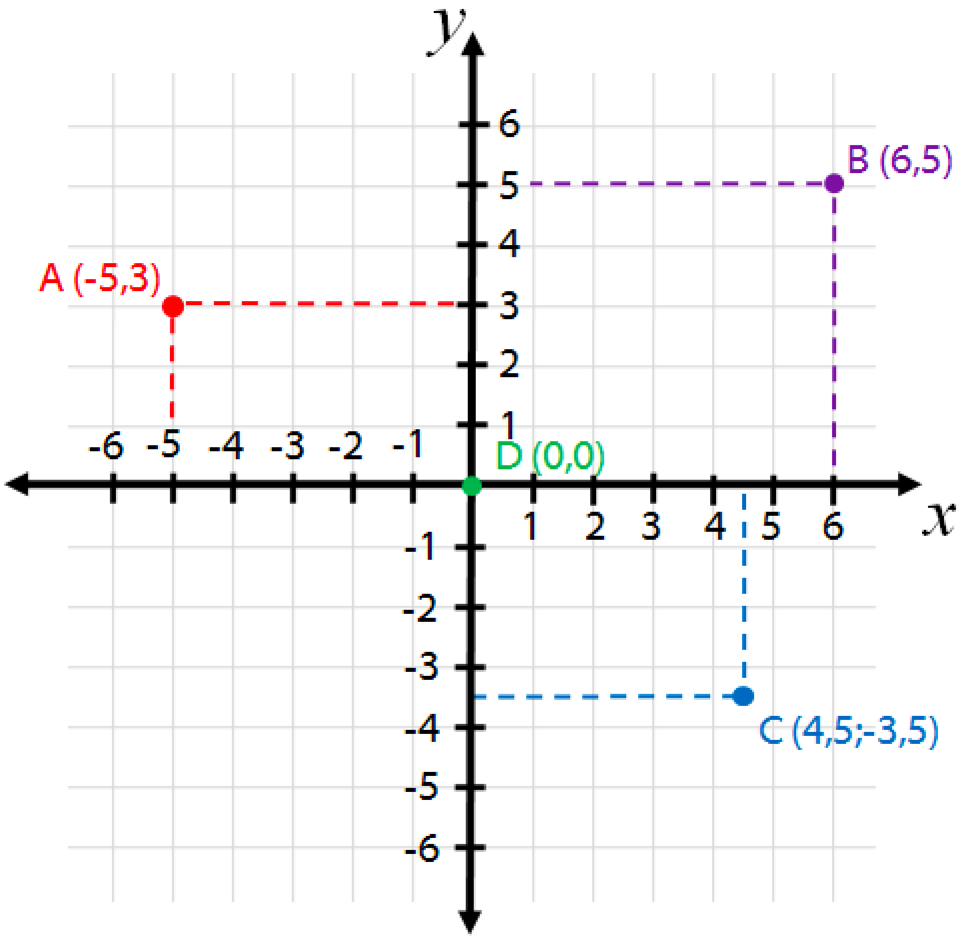
* 6 - rotação

* 7 – transformação de reflexão

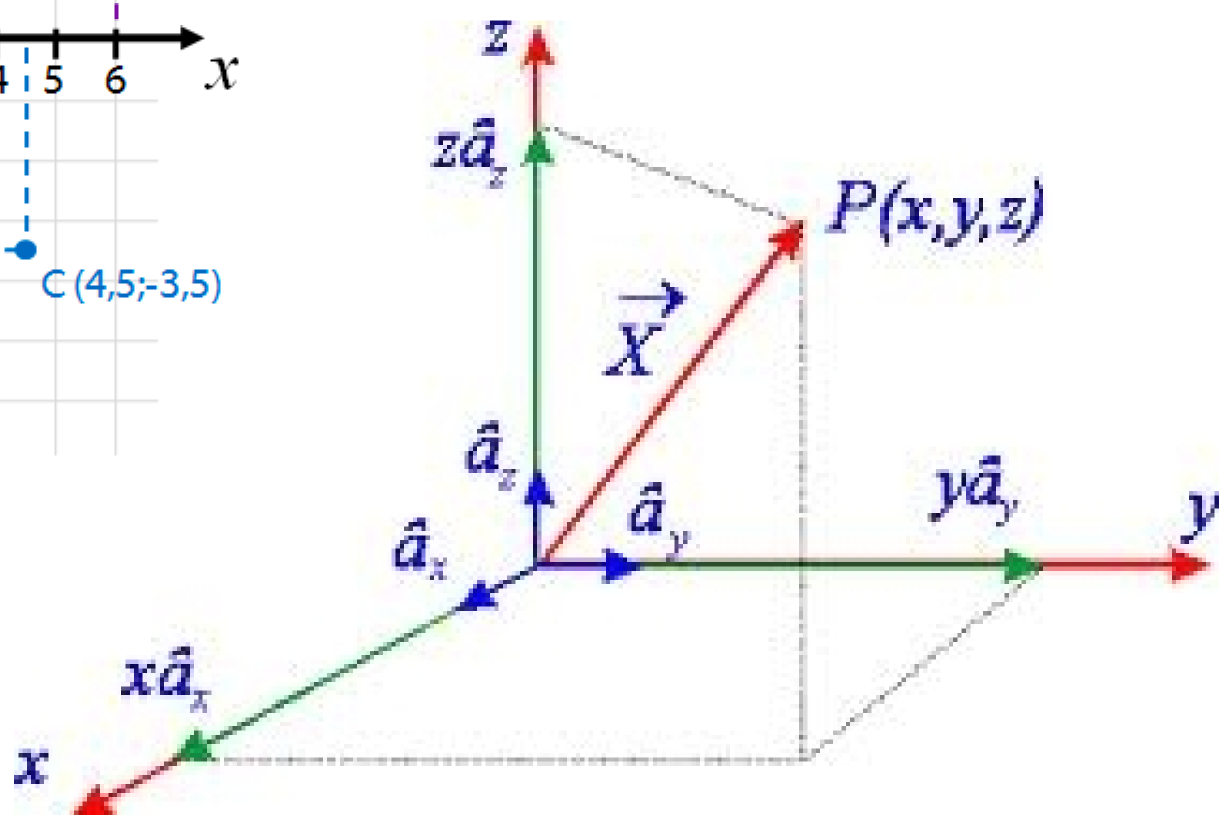
* 8 - transformação de perspectiva

2. Propriedades de um Imagem Digital (pixels)

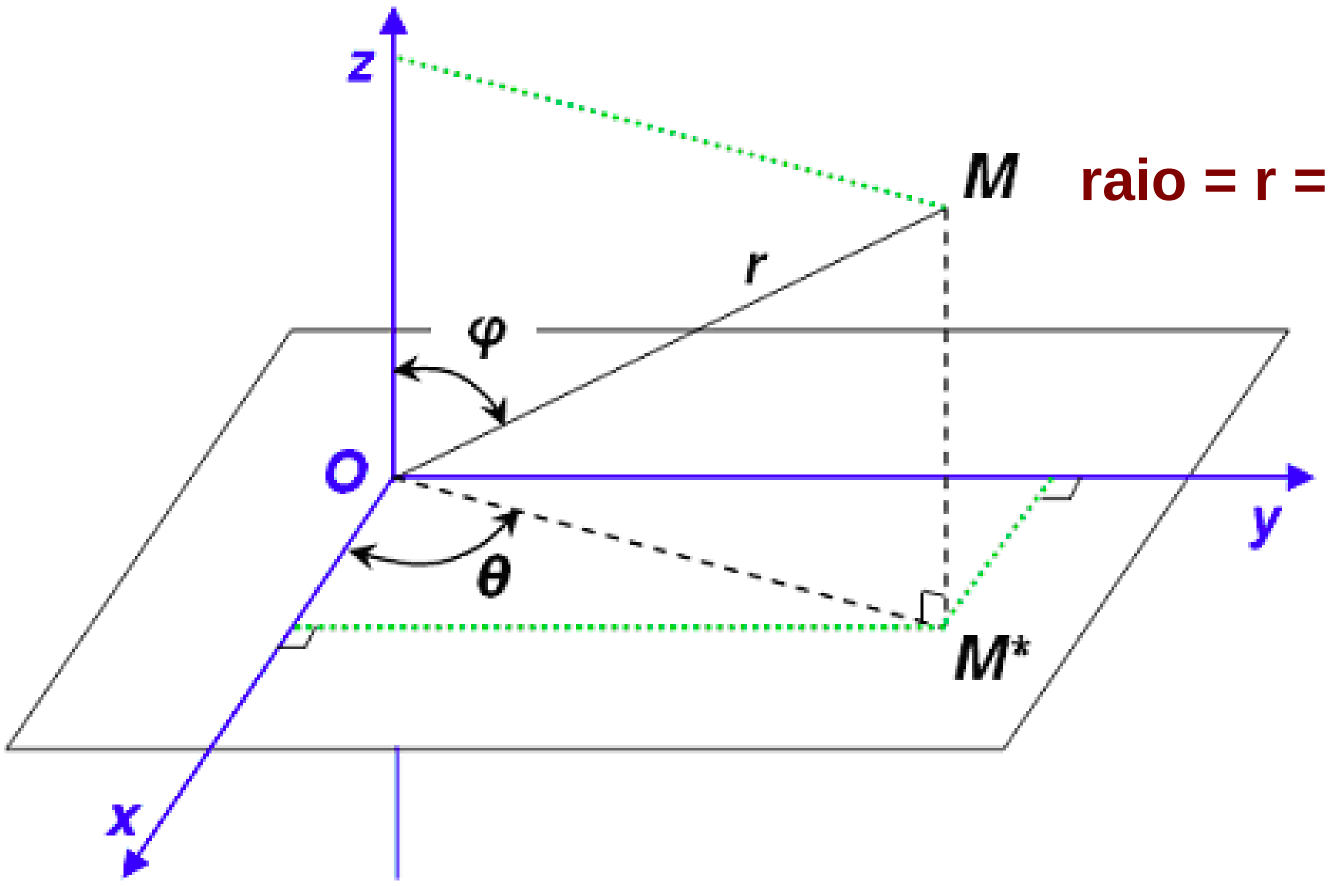
1 - Coordenadas Cartesianas (x,y,z)



$$\vec{X} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$



2 - Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ)

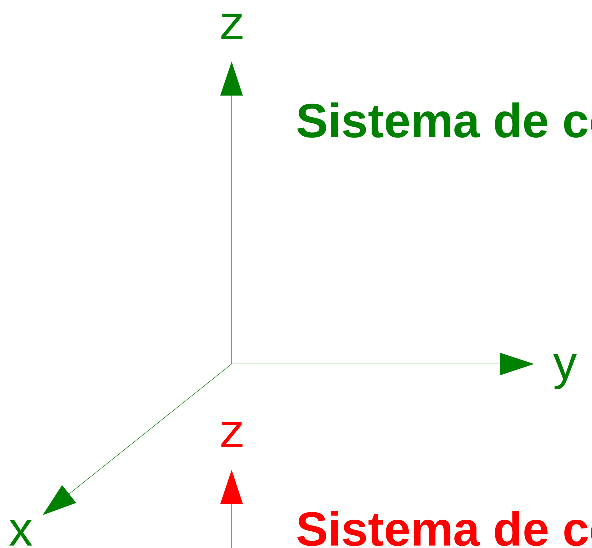


raio = r = unitário

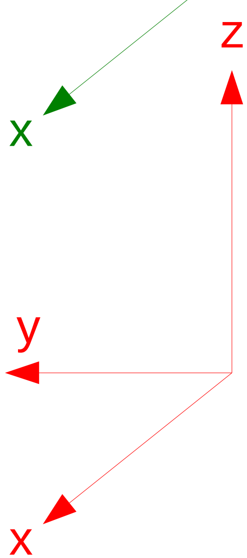
$x = \cos\phi . \cos\theta$
$y = \cos\phi . \sin\theta$
$z = \sin\phi$

$$\begin{vmatrix} x & = & \cos\phi . \cos\theta \\ y & = & \cos\phi . \sin\theta \\ z & = & \sin\phi \end{vmatrix}$$

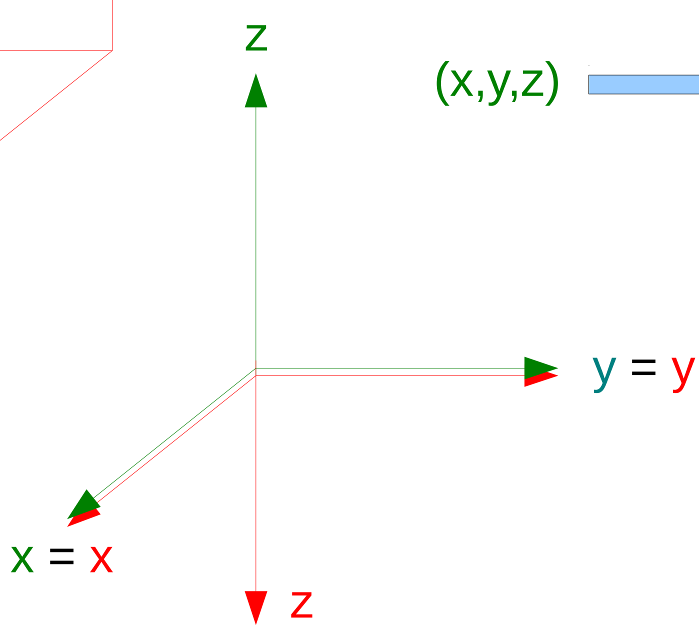
3 - Conversão entre Sistemas



Sistema de coordenada direto (ou da mão direita) (ou anti-horário)



Sistema de coordenada indireto (ou da mão esquerda) (ou horário)



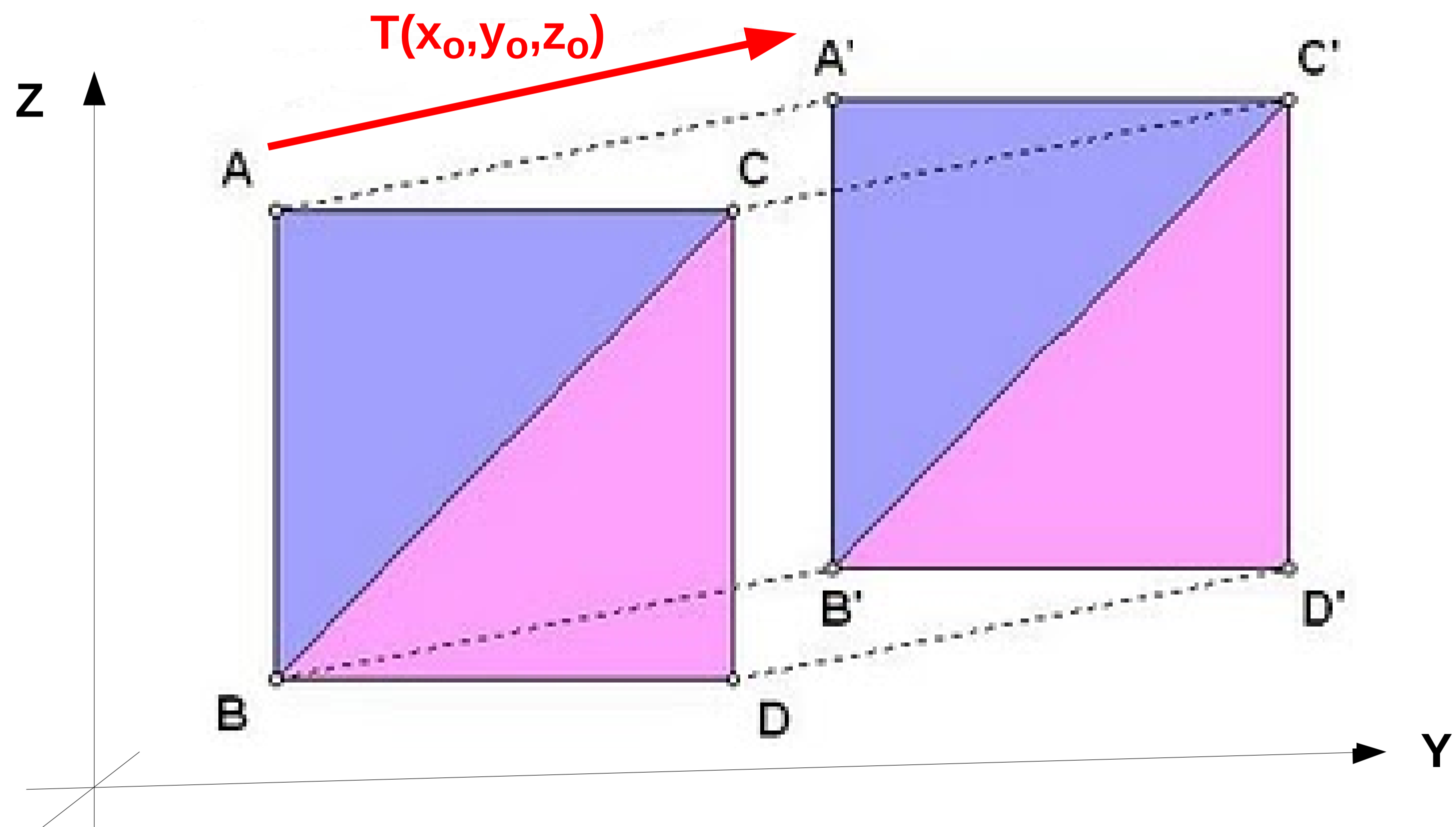
$(x,y,z) \Rightarrow (x,y,z)$

$$x = x$$
$$y = y$$
$$z = -z$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

4 - Translação: movimento que um objeto realiza de um ponto a outro **(não altera a topologia do objeto)**.

Deslocamento paralelo, em linha reta na mesma direção e no mesmo sentido de um objeto ou figura, em função de um vetor percorrendo a mesma distância.



X

A'(x',y',z')

$$x' = x + x_o$$
$$y' = y + y_o$$
$$z' = z + y_o$$

A(x,y,z) **ou**

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} = \\ = \\ = \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \\ 0 & 1 & 0 & y_o \\ 0 & 0 & 1 & z_o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} = \\ = \\ = \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \\ 0 & 1 & 0 & y_o \\ 0 & 0 & 1 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \\ 0 & 1 & 0 & y_o \\ 0 & 0 & 1 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(matriz de translação)

5 – Tranformação de Escala: modifica as dimensões, **mas não a topologia**.

(em geral, aplica-se um fator de escala)

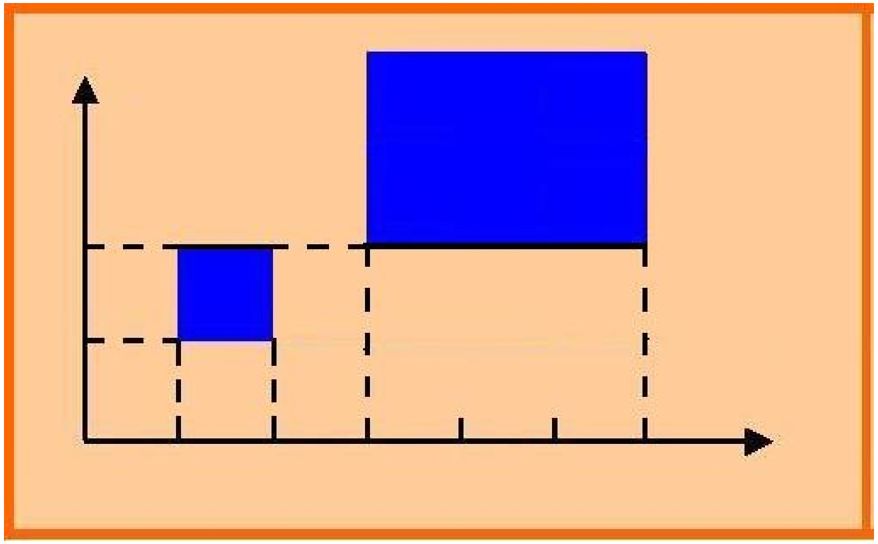
Fx: fator de escala no eixo X
Fy: fator de escala no eixo Y

$\Rightarrow$

X' = X * Fx
Y' = Y * Fy

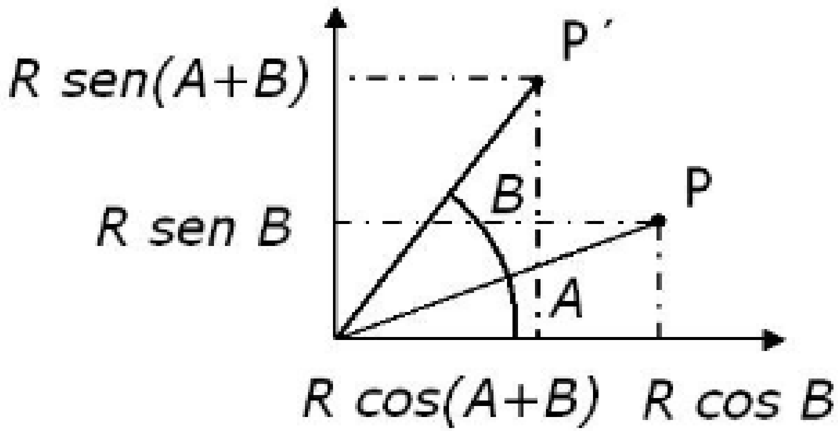
$$S = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & x_o \\ 0 & b & 0 & y_o \\ 0 & 0 & c & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(matriz de transformação de escala)



6. Rotação: uma transformação angular de um sistema de coordenadas.

Se um ponto P de coordenadas (x, y) for rotacionado de um ângulo B em torno da origem, suas coordenadas, que antes eram definidas como: x = R cos A, y = R sen A, passam a ser descritas como x' = R cos(A+B), y' = R sen (A+B).



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos B & -\operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} B & \cos B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

x' = R cos (A+B) = R cosAcosB – R senAsenB

y' = R sem (A+B) = R senAcosB + R cosAsenB

x' = x cos B - y sen B

y' = y cos B + y sen B

Um ponto qualquer do espaço teria, no sistema (x,y,z), coordenadas dadas pela equação matricial:

$$\begin{vmatrix} x \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} \cos\phi . \cos\theta \\ \cos\phi . \sin\theta \\ \sin\phi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} = \\ = \\ = \end{vmatrix} \begin{matrix} \cos\phi . \cos\theta \\ \cos\phi . \sin\theta \\ \sin\phi \end{matrix} \Big|$$

Esse mesmo ponto, no sistema (x',y',z') teria:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} = \\ = \\ = \end{vmatrix} \begin{matrix} \cos\phi' . \cos\theta' \\ \cos\phi' . \sin\theta' \\ \sin\phi' \end{matrix} \Big|$$

Relacionado ambos sistemas, obtemos equações que também poderiam ser obtidas pela equação matricial:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = R_x(\theta) \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$R_x(\theta)$: matriz de rotação de ângulo θ em torno do eixo x

$$R_x(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = R_y(\phi) \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$R_y(\phi)$: matriz de rotação de ângulo ϕ em torno do eixo y

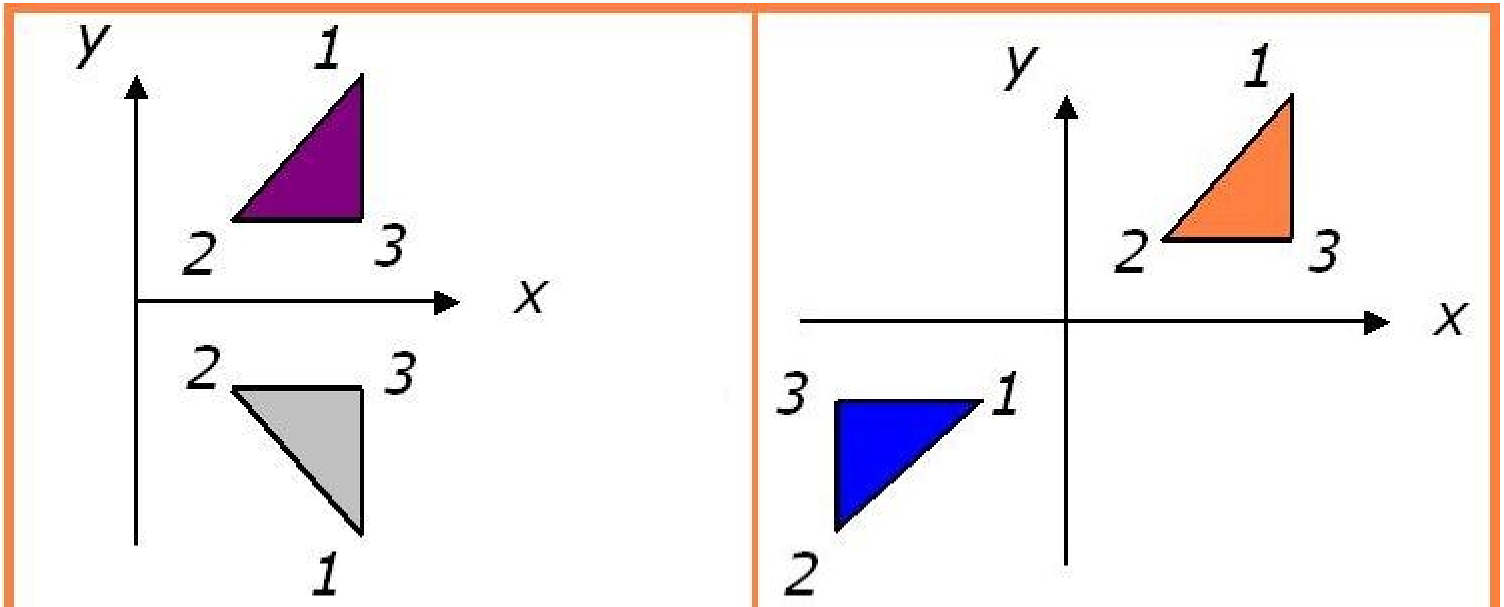
$$R_y(\phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin f & 0 & \cos\phi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = R_z(\psi) \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$R_z(\psi)$: matriz de rotação de ângulo ψ em torno do eixo z

$$R_z(\psi) = \begin{vmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

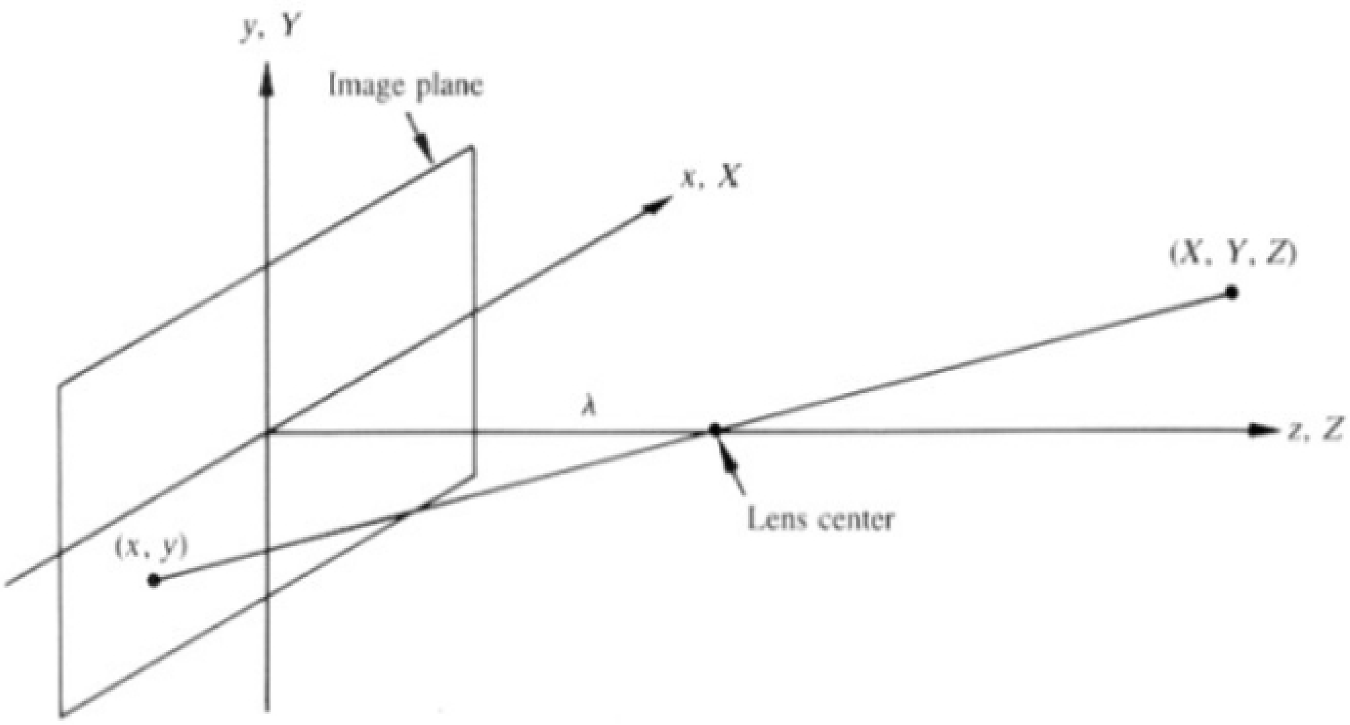
7. Transformação de Reflexão: Produz um novo objeto "espelhado"



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Transformação de Perspectiva: resultado da projeção pontual da cena sobre um plano – trata-se de uma transformação não-linear, diferente das anteriores.

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



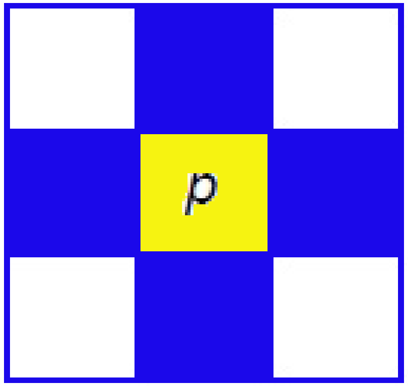
2. Propriedades de um Imagem Digital (pixels)

a) Imagem digital: é uma imagem f(x,y) discretizada tanto espacialmente quanto em amplitude. Portanto, uma imagem digital pode ser vista como uma matriz cujas linhas e colunas identificam um ponto na imagem, cujo valor corresponde ao nível de cinza da imagem naquele ponto.

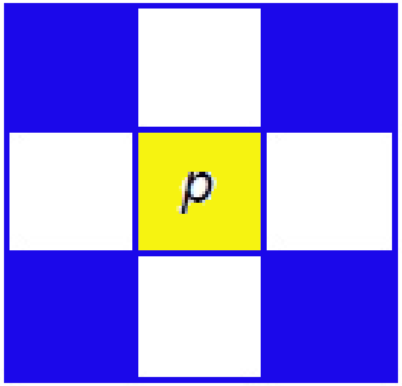
Para um pixel em particular, utilizaremos letras minúsculas, tais como p e q.

Um subconjunto de pixels de f(x,y) será indicado por S.

b) Vizinhança: em uma imagem, um pixel p, de coordenadas (x,y), tem 4 vizinhos horizontais e verticais, cujas coordenadas são (x+1, y), (x-1, y), (x, y+1) e (x, y-1). Estes pixels formam a chamada "4-vizinhança" de p, que será designada $N_4(p)$.

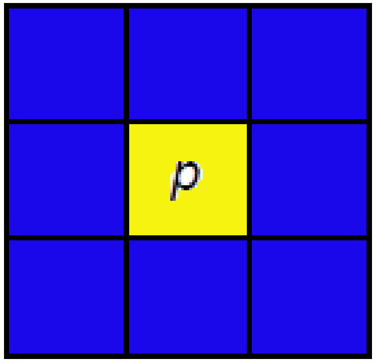


Os quatro vizinhos diagonais de p são os pixels de coordenadas: (x-1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y-1) e (x+1, y+1), que constituem o conjunto $N_d(p)$.

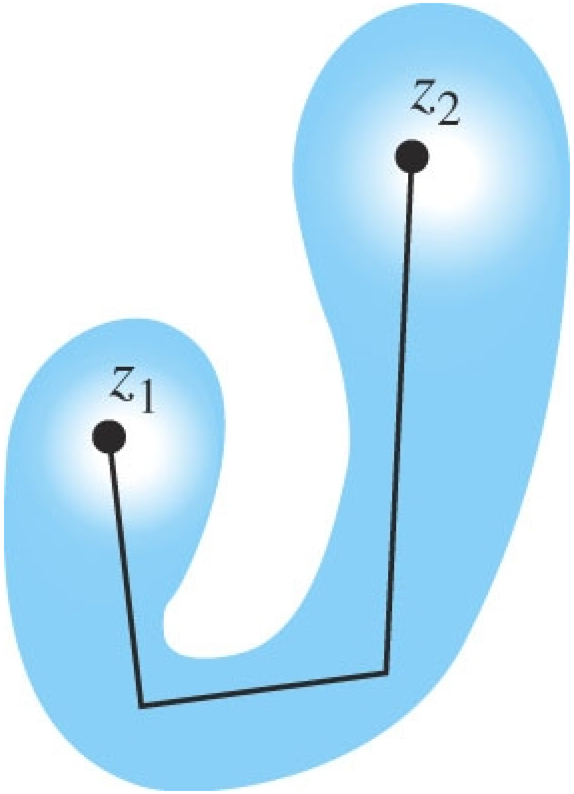


A "8-vizinhança" de p é definida como:

$N_8(p) = N_4(p)) * N_d(p)$



c) Conectividade entre Pixels: importante conceito usado para estabelecer limites de objetos e componentes de regiões em uma imagem.



Para se estabelecer se dois pixels estão conectados, é necessário determinar se eles são adjacentes segundo algum critério e se seus níveis de cinza satisfazem a um determinado critério de similaridade.

Ex.: em uma imagem binária, onde os pixels podem assumir os valores 0 e 1, dois pixels podem ser 4-vizinhos, mas somente serão considerados 4-conectados se possuírem o mesmo valor.

d) Adjacência

Um pixel "p" é adjacente a um pixel "q" se eles forem conectados.

Há tantos critérios de adjacência quantos são os critérios de conectividade.

Dois subconjuntos de imagens, S1 e S2, são adjacentes se algum pixel em S1 é adjacente a algum pixel em S2.

e) Caminho

Um caminho ("path") de um pixel "p" de coordenadas (x,y) a um pixel "q" de coordenadas (s,t) é uma seqüência de pixels distintos de coordenadas: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots , (x_n, y_n)$,

onde:

$(x_0, y_0) = (x,y)$

$(x_n, y_n) = (s,t)$

(x_i, y_i) é adjacente a $(x_i\text{-}1, y_i\text{-}1)$

$1 < i < n$, onde n é denominado o comprimento do caminho.

f) Medidas de Distância

Dados os pixels “p”, “q” e “z”, de coordenadas (x,y), (s,t) e (u,v), respectivamente.

Define-se a função distância D, cujas propriedades são:

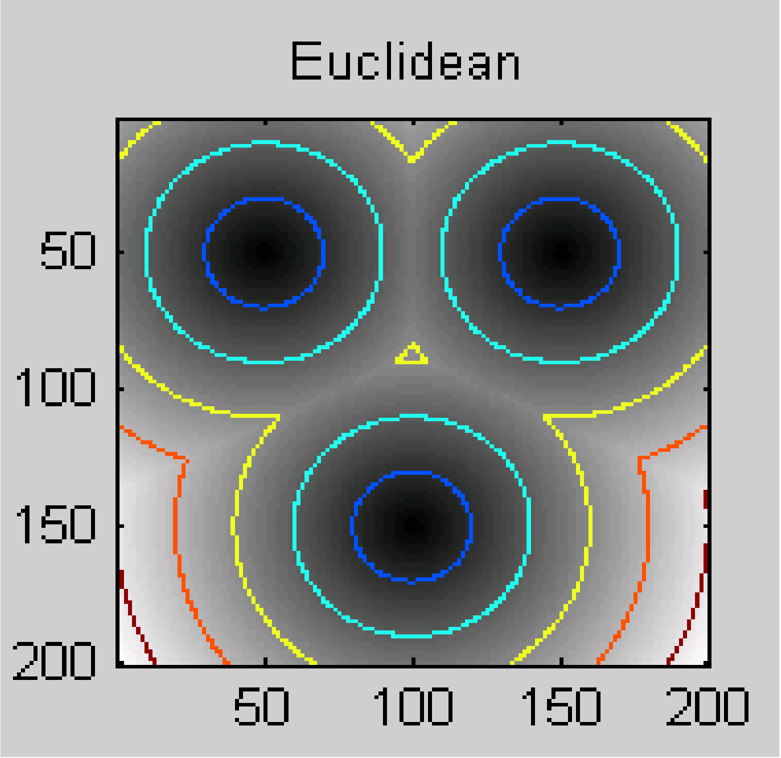
(i) $D(p,q) \geq 0$ ($D(p,q) = 0$ se e somente se $p = q$)

(ii) $D(p,q) = D(q,p)$

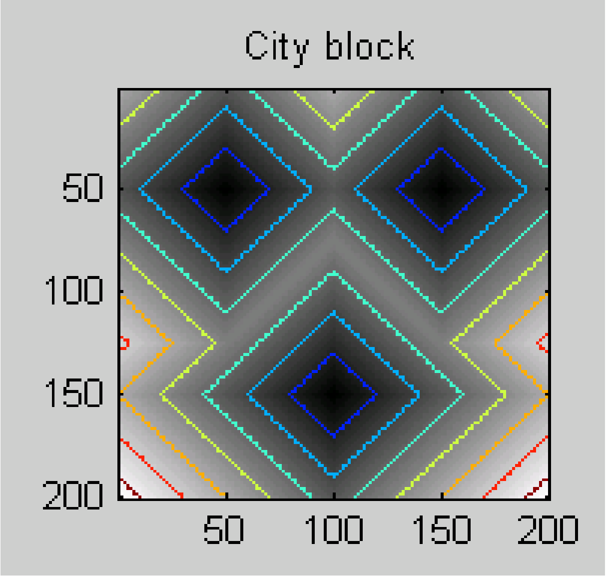
(iii) $D(p,z) \leq D(p,q) + D(q,z)$

g) Distância Euclidiana: $D(p, q) = (x - s)^2 + (y - t)^2$

Para esta medida de distância, os pixels com distância euclidiana em relação a (x,y) menor ou igual a algum valor “r”, são os pontos contidos em um círculo de raio “r” centrado em (x,y).



h) Distância D_4 (city-block): **$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$**

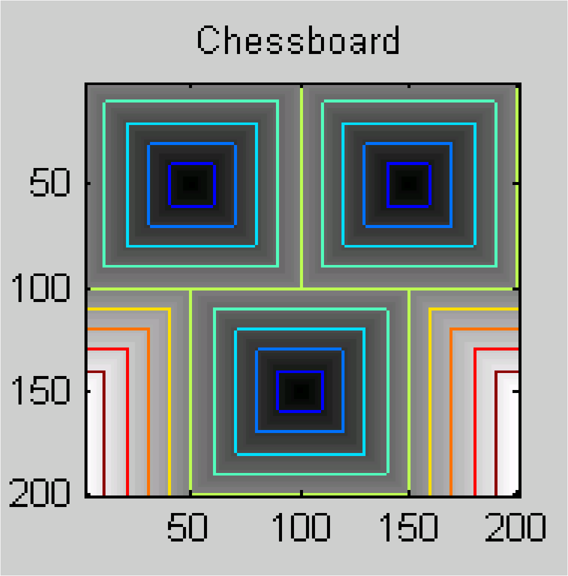


onde | . | denota módulo (ou valor absoluto).

Neste caso, os pixels tendo uma distância D_4 em relação a (x,y) menor ou igual a algum valor “r” formam um losango centrado em (x,y). Os pixels com $D_4 = 1$ são os 4-vizinhos de (x,y).

i) Distância D8 (tabuleiro de xadrez):

$D_8(p, q) = \max(|x - s|, |y - t|)$



onde “max” é um operador que devolve o maior valor dentre um conjunto de valores entre parênteses.

Neste caso os pixels com distância D_8 em relação a (x,y) menor ou igual a algum valor “r”, formam um quadrado centrado em (x,y).

Os pixels com $D_8 = 1$ são os 8-vizinhos de (x,y).