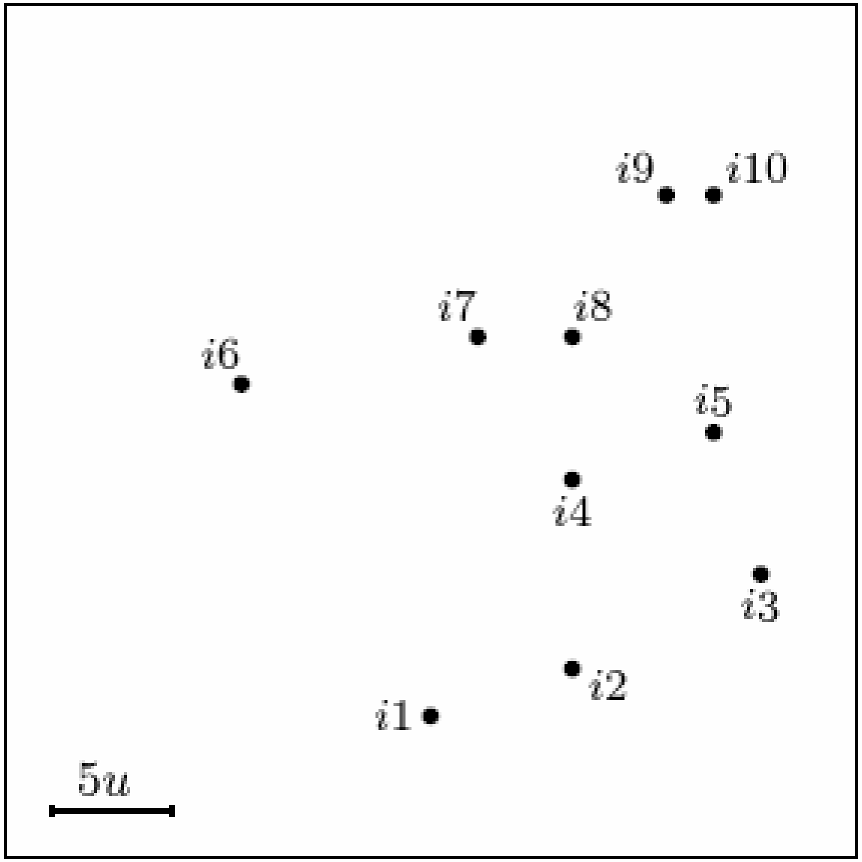
Quelques rappels de géométrie dans un espace bi-dimensionnel

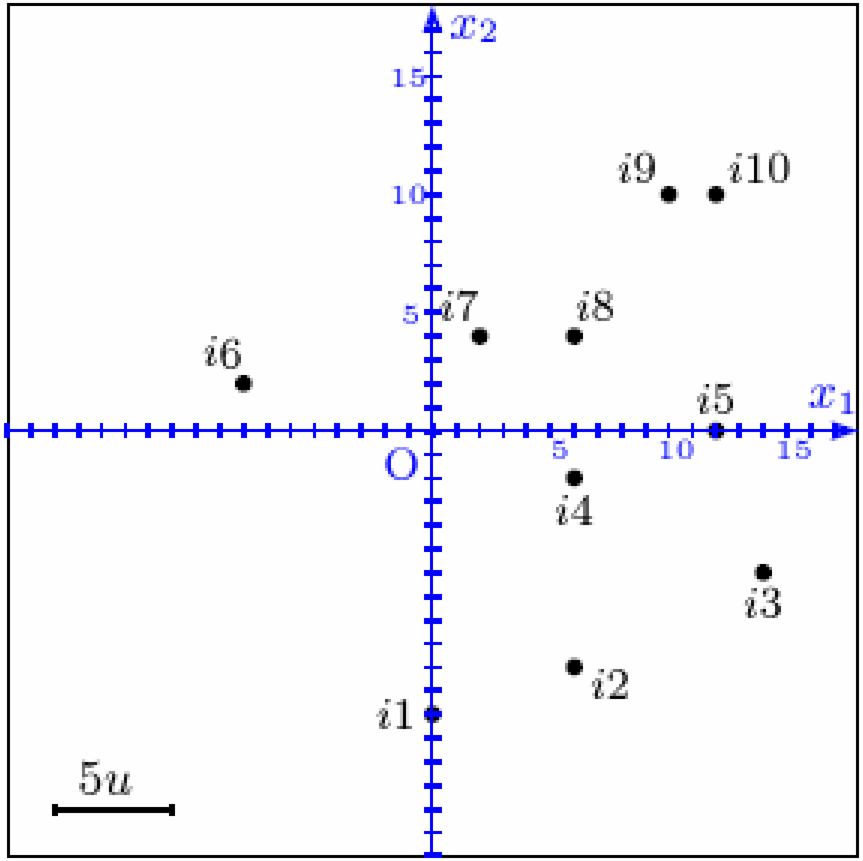
Source : Rouanet, Le Roux, 1993, *Analyse des données multidimensionnelles*, Dunod, Chapitre 5

http://www.skeptron.uu.se/broady/sec/p-gda-0609-II.pdf

Nuage de points (exemple cible)



Exemple Cible



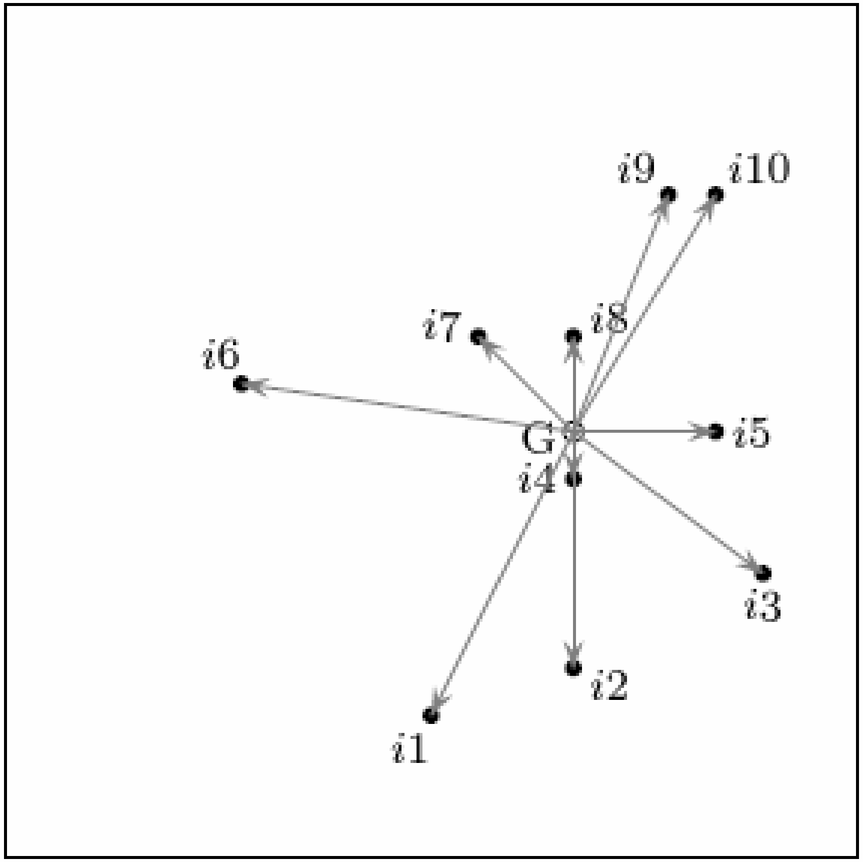
	x_1	x_2
$i1$	0	-12
$i2$	6	-10
$i3$	14	-6
$i4$	6	-2
$i5$	12	0
$i6$	-8	2
$i7$	2	4
$i8$	6	4
$i9$	10	10
$i10$	12	10

Choix d'un repère

O : centre de la cible (permet de déterminer des coordonnées) – 1 axe horizontal, 1 axe vertical – graduation (unité)

Ces coordonnées sont obtenues par **projection orthogonale** sur chacun des 2 axes (eux-même orthogonaux entre eux)

On peut calculer un **point moyen** (ou barycentre, noté G) à ce nuage de points



Propriété de G :

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}^{i1} + \overrightarrow{\mathrm{GM}}^{i2} + \cdots \overrightarrow{\mathrm{GM}}^{i10} = \overrightarrow{0}$$

Le point moyen du nuage est par définition le poit G tel que la somme géométrique des écarts des points du nuage à ce point est nulle

Coordonnées de G :

Abscisse = moyenne des abscisses

Ordonnée = moyenne des ordonnées

On peut calculer une **variance** à ce nuage de points

La variance d'un nuage euclidien est égale à la moyenne des carrés des distances des points au point moyen du nuage

$$= \frac{1}{n}\left[\left(GM^{i1}\right)^2 + \left(GM^{i2}\right)^2 + \ldots + \left(GM^{i10}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[180 + 100 + \ldots\right] = 92$$

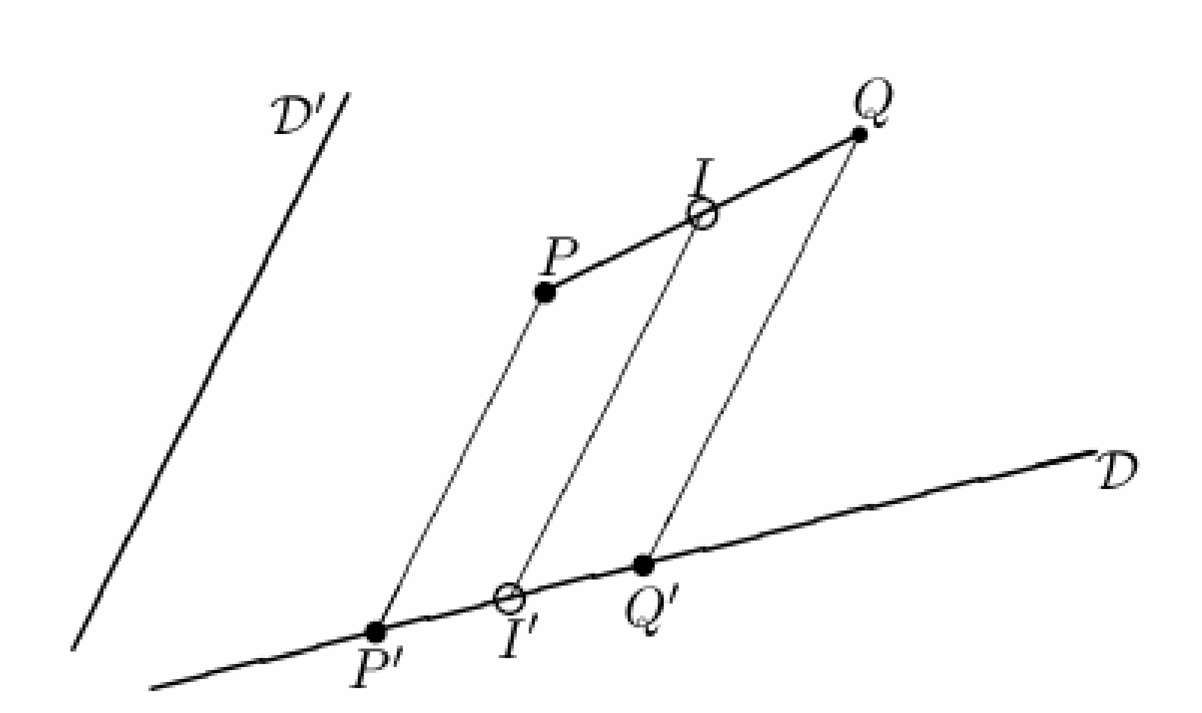
Propriété: décomposition additive orthogonale

→ La variance du nuage est la somme des variances des nuages projetés selon des directions perpendiculaires

Les propriétés de la projection

Le milieu se conserve par projection

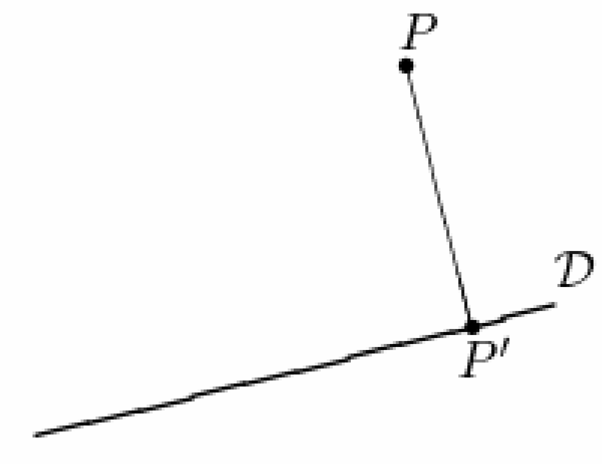
→ La projection du point moyen G d'un nuage N est le point moyen G' du nuage projeté N'

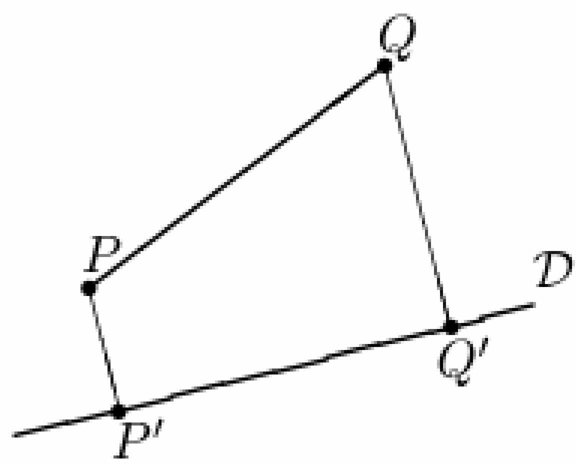


Le cas particulier de la projection orthogonale

La projection du point P sur la droite D est le point P' tel que PP' est perpendiculaire à D

→ P' est le point de D à **distance minimum** du point P

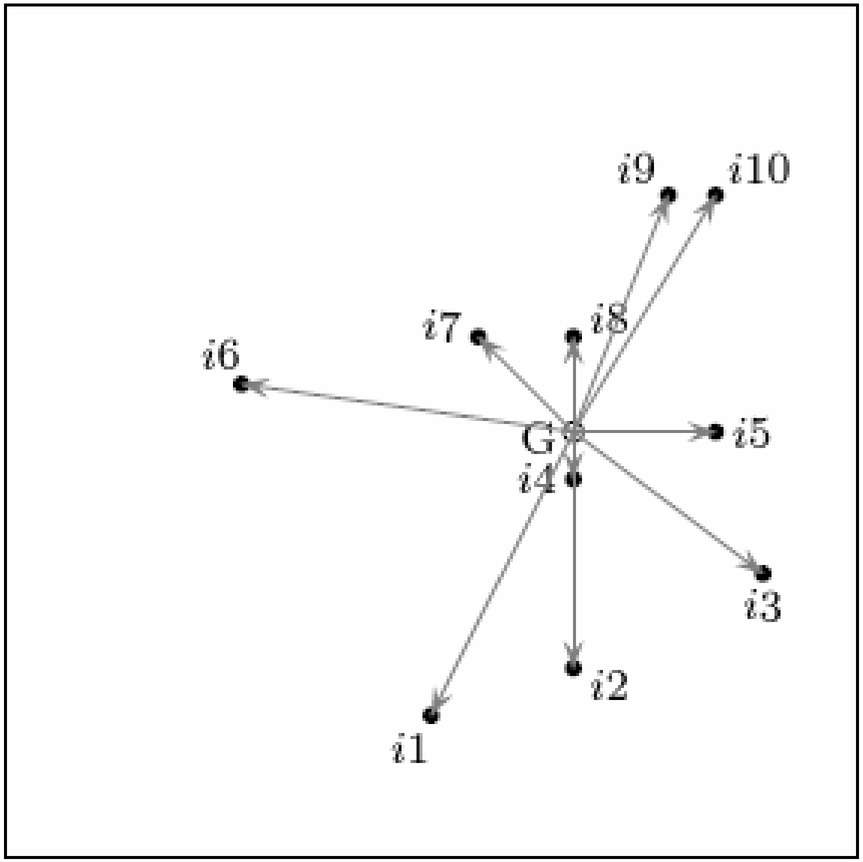




La projection orthogonale contracte les distances ($P'Q' \leq PQ$) et est celle qui déforme le moins le nuage de point initial

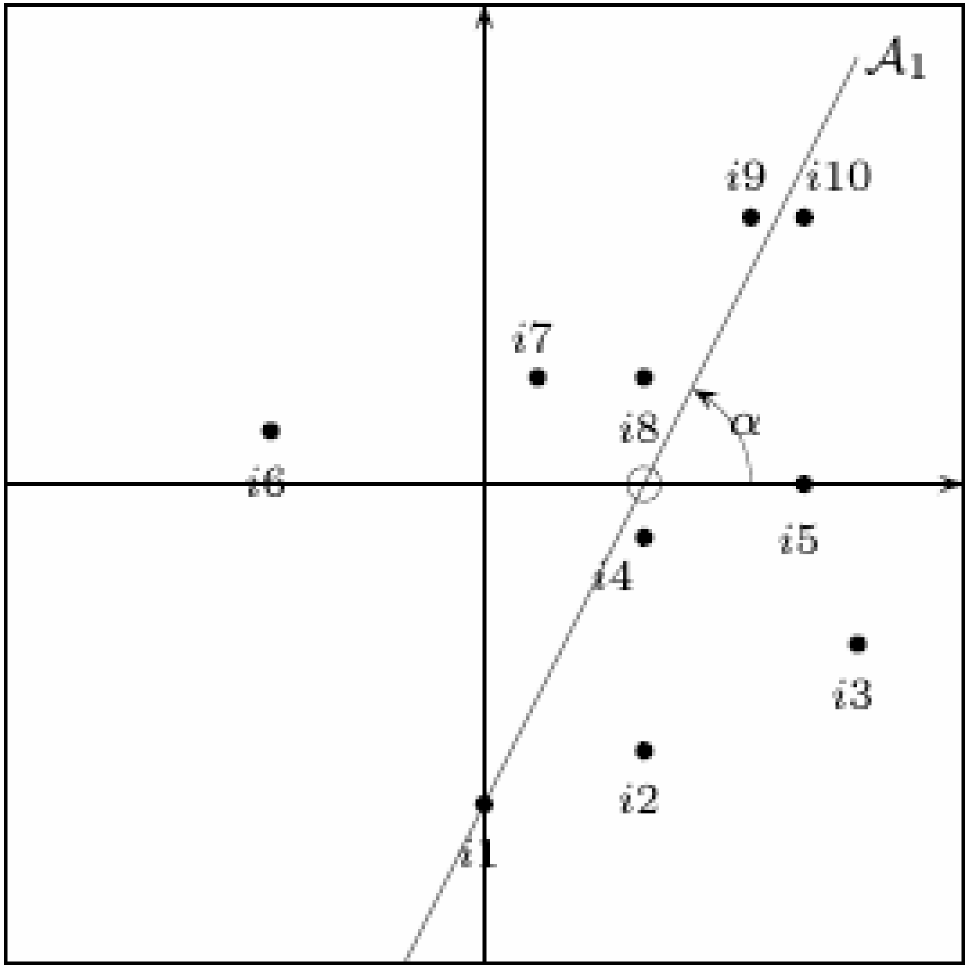
➔ La variance du nuage projeté est au plus égale à la variance du nuage initial (perte de variance)

La passage aux axes principaux



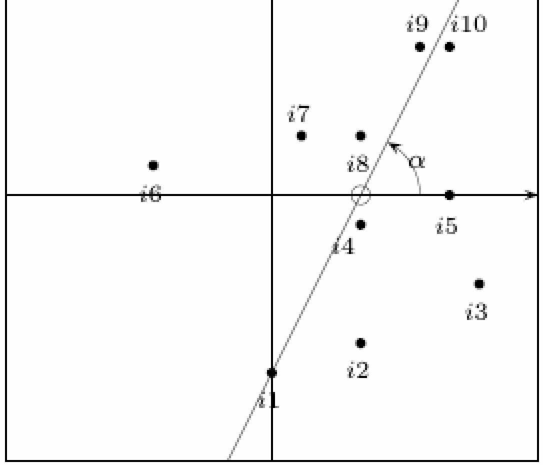
Pour un nuage de points, il existe une droite $\mathbb{A}_1$ qui, par projection orthogonale, minimise la perte d'information (la perte de variance).

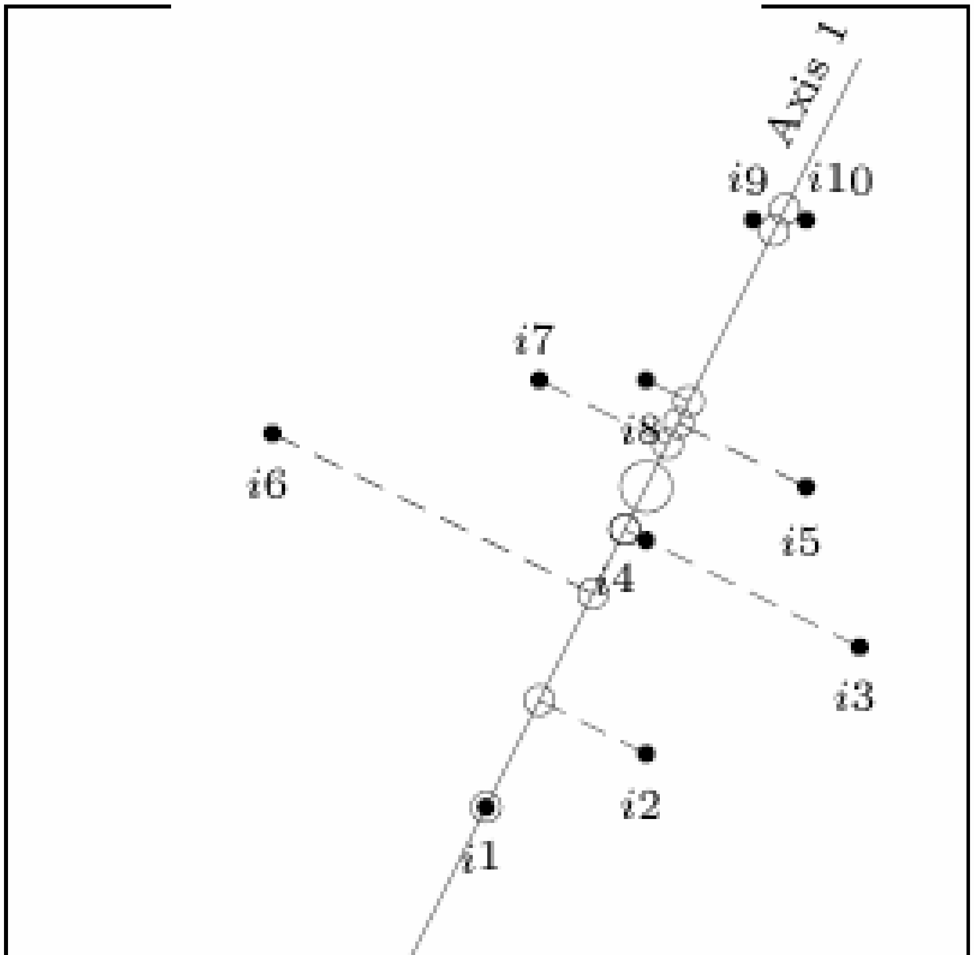
Cette droite, fournit alors le meilleur résumé possible du nuage de points.

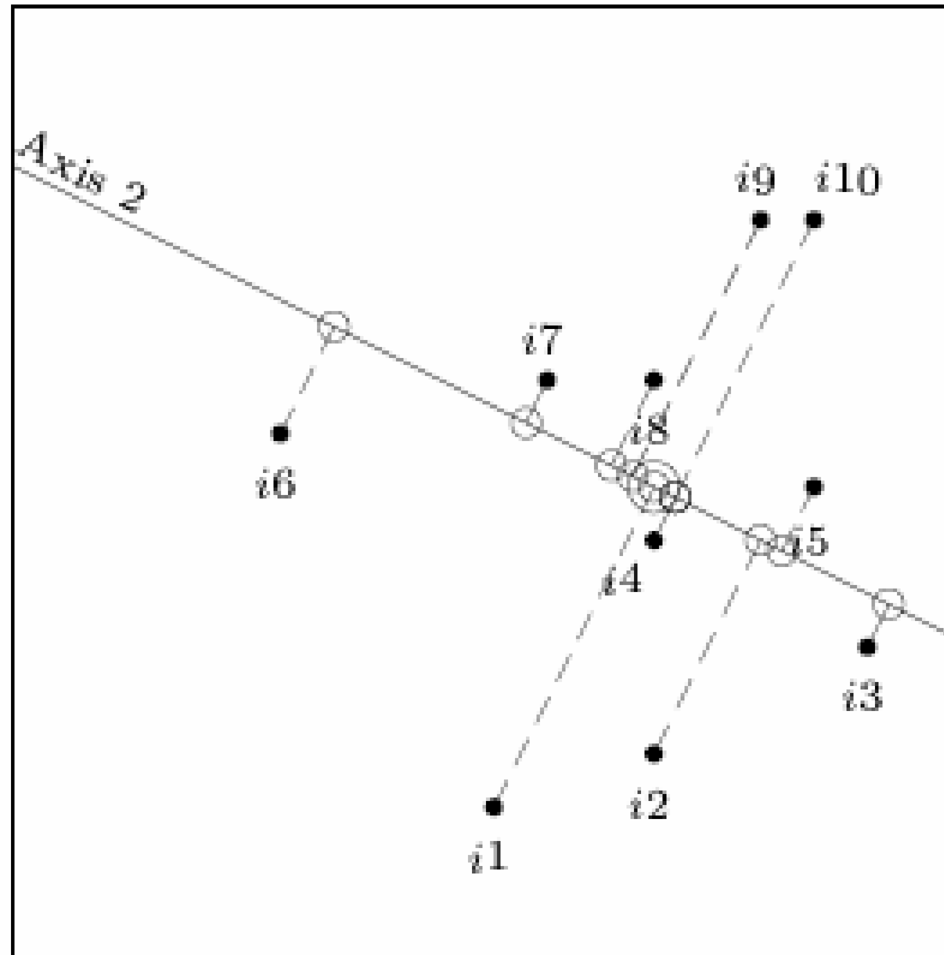


A_1 est une combinaison linéaire de x_1 et x_2

Variance de la projection sur A1 = 56


i9
i10
i7
i8
α
i6
i5
i4
i3
i2
i1


Axis 1
i9
i10
i7
i8
i6
i5
i4
i3
i2
i1


Axis 2
i9
i10
i7
i8
i6
i5
i4
i3
i2
i1

➔Changement de repère :

Les deux droites obtenues (Axe 1 et Axe 2), orthogonales entre elles, peuvent devenir un nouveau repère.

Ces droites sont appelées ***droites principales***.

Propriétés de ce nouveau repère dans n dimensions :

Dans n dimensions : il s'agit du nuage le moins déformant, le plus fidèle au nuage initial.

Dans n dimensions : la meilleure synthèse, puisqu'elle limite la perte d'information

Résumer l'information le mieux possible

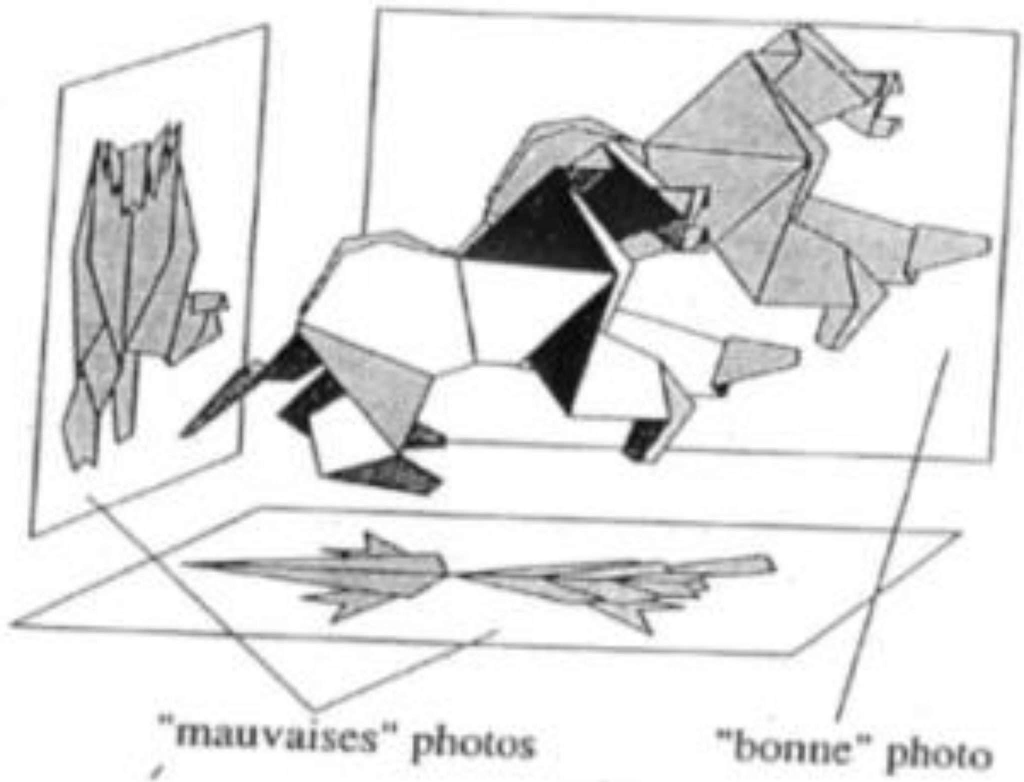
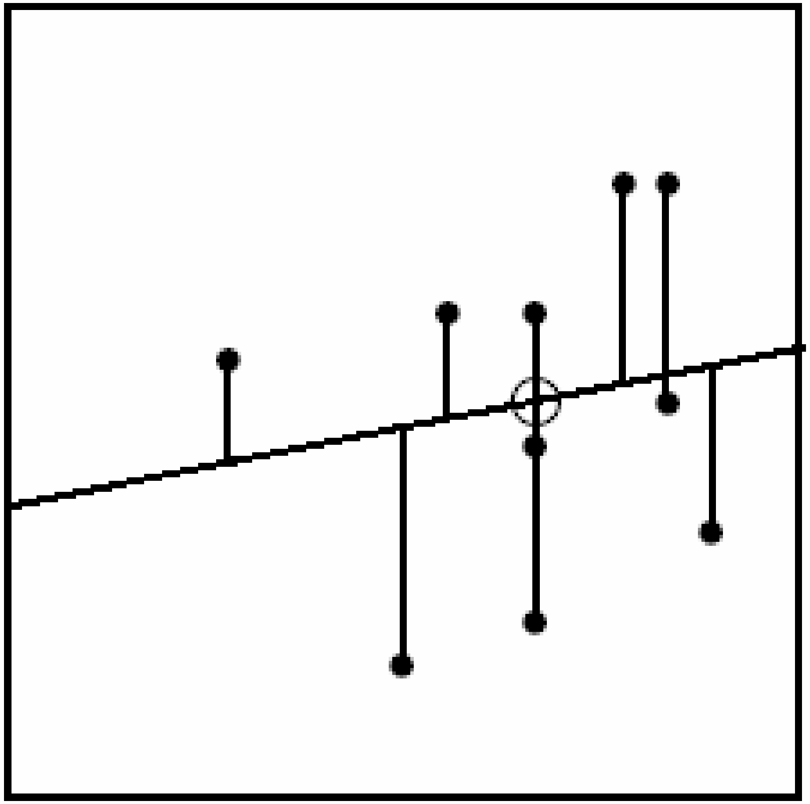


FIGURE 1 – La forme cheval

Source : Anton Perdoncin
https://quantigre.hypotheses.org/388

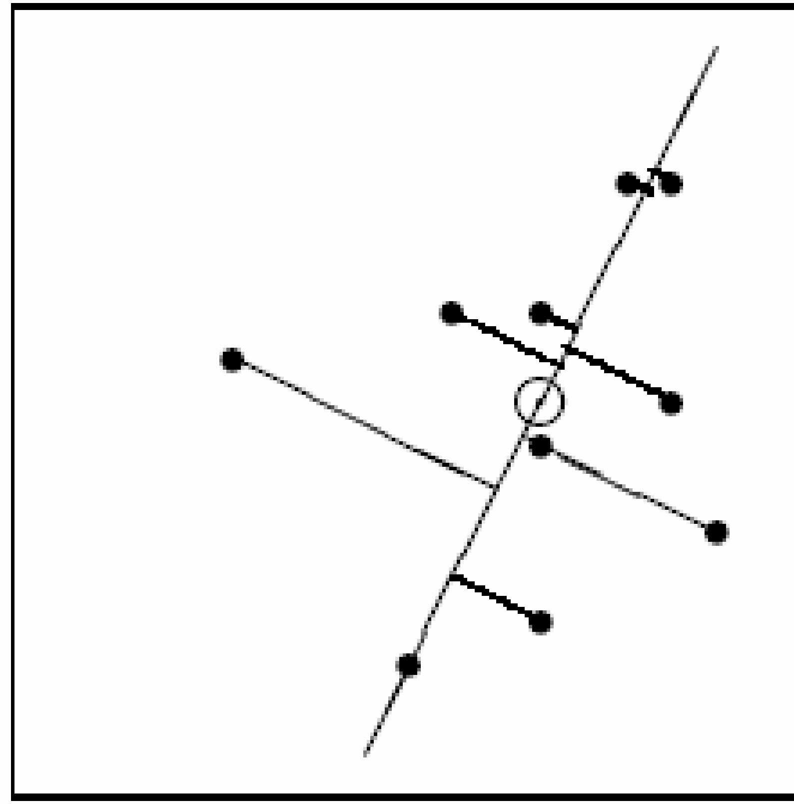


Droite de régression

passe pas le point moyen G

Moindres carrés ordinaires

(on conserve le repère orthonormé de départ)



Droite principale

passe pas le point moyen G

Moindres carrés orthogonaux

(on change de repère mais on ajuste au plus près le nuage initial)