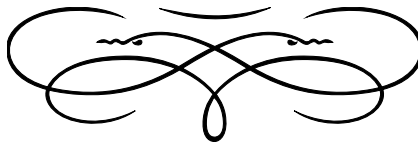


Intégration - entraînement

Amphi B

TD 5

**Exercice 1:** Contre-exemples.

1. Donnez un contre-exemple au théorème de convergence dominée, lorsque l'on enlève l'hypothèse de domination.
2. Donnez un contre-exemple au théorème de convergence monotone, lorsque l'on enlève l'hypothèse de monotonie.
3. Donnez un contre-exemple au lemme de Fatou, lorsque l'on enlève l'hypothèse de positivité.

**Exercice 2**

On se donne un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) , f et $(f_n)_{n \geq 0}$ des fonctions intégrables de E dans \mathbb{R} . On suppose que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\Delta)$$

1. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. En déduire qu'il existe une extraction ϕ (i.e. $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\left\{|f_{\phi(k)} - f| > \frac{1}{2^k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

3. On pose alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{|f_{\phi(k)} - f| > \frac{1}{2^k}\}$. On définit $A = \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$. Montrez que $\mu(A) = 0$.

4. En déduire que $(f_{\phi(k)})_{k \geq 0}$ converge vers f μ -presque partout.

5. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer (grâce à (Δ)) que $\int_E |f_{\phi(k)} - f| d\mu \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose alors

$$h = \sum_{k=0}^{+\infty} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|.$$

Montrez que $\int_E h d\mu < +\infty$.

6. En déduire qu'il existe une fonction g intégrable qui domine la suite $(f_{\phi(k)})_{k \geq 0}$, au sens où

$$\sup_{k \geq 0} |f_{\phi(k)}| \leq g.$$

.

