2M261 2016-2017

Devoir à la maison 2

Amphi A TD 2

Exercice 1

On considère la série entrière $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminez le rayon de convergence de S.

2. Justifiez brièvement que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

3. Montrez que S est continue en -1.

4. Montrez que $S(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 1]{} +\infty$.

Exercice 2

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction f 2π-périodique telle que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(t) = \cosh(\lambda t)$$

1. Représentez graphiquement f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2. Calculez les coefficients de Fourier (exponentiels et trigonométriques) de f.

3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sinh(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\sinh(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx)$$

4. Calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\lambda^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+\lambda^2)^2}$.

Exercice 3

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrez que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

3. Montrez que $F(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 4

Pour $x > 1$ on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(t)}{t} e^{-xt} dt$$

1. Montrez que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

2. Montrez que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculez F'.

3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 5

On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Donnez le domaine de définition de F.

2. Montrez que F est continue sur son domaine de défnition.

3. Calculez $F(x+1) + F(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire un équivalent de F en 0.

4. Déterminez la limite de F en $+\infty$.

Exercice 6

On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin(t)) dt$.

1. Montrez que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Montrez que F est solution de l'équation différentielle

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

3. Montrez que F est developpable en série entière avec un rayon de convergence infini.