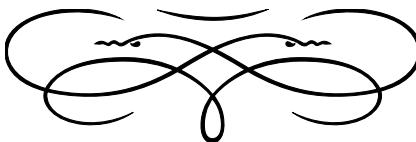


# Produit de convolution

Amphi B

TD 5



## Exercice 1: Produit de convolution.

Soient deux fonctions boréliennes  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le but de cet exercice est d'étudier l'existence du produit de convolution

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$

- (a) Montrez que si  $f$  est bornée et  $g$  est intégrable, alors  $f \star g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrez que si  $f$  et  $g$  sont de carré intégrable, (c'est à dire si  $f^2$  et  $g^2$  sont intégrables), alors  $f \star g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) On suppose maintenant que  $f$  et  $g$  sont intégrables. Montrez que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|dt < +\infty.$$

En déduire que  $f \star g(x)$  est bien défini pour presque tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f \star g(x)$  n'est pas bien défini, on conviendra désormais que  $f \star g(x) = 0$ .  $f \star g$  est alors bien définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Montrez que la fonction ainsi obtenue est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .



## Exercice 2: Transformée de Fourier.

Le but de cet exercice est d'étudier le lien entre produit de convolution et transformée de Fourier. Pour toute fonction intégrable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit  $\hat{f}$ , sa transformée de Fourier, par

$$\hat{f} : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iux}dx.$$

- (a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. Montrez que  $\hat{f}$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ .
- (b) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables. On considère le produit de convolution  $f \star g$  défini à la question (c) de l'exercice précédent, qui est donc intégrable. Montrez que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\widehat{f \star g}(u) = \hat{f}(u)\hat{g}(u).$$

