Deuxième contrôle continu - 12 décembre 2017

Durée : 1h

Exercice 1.

(a) Énoncez le thèorème de Fubini-Tonelli.

(b) Énoncez le théorème de convergence dominée.

(c) Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Exercice 2. Calculez la limite des suite suivantes :

(a) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^n}{1+x^2} dx.$

(b) $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx.$

(c) $K_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(1+\frac{1}{n})2^{k+\frac{1}{n}}}$. On ne cherchera pas à calculer la valeur de la somme limite.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $E \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose (uniquement pour cette question) que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge μ-presque partout vers une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ et que la suite $\left(\int_E |f_n| d\mu\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrez que f est intégrable.

(b) On suppose maintenant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty \,.$$

Montrez que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, μ-presque partout.

Exercice 4. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(a) Déterminez la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$u_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}}dx\,.$$

(b) Soient $a, b > 0$. Montrez que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}\,.$$

(c) Soient $0 < a < b$. Justifiez l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt\,.$$

Représentez ensuite cette intégrale comme une intégrale double et déterminez sa valeur en fonction de a et b.