2M261 2016-2017

Devoir surveillé 1

Mercredi 22 février 2017

Amphi A TD 2

Durée: 1h45. Énoncé recto-verso. Le barème est indicatif.
Un soin tout particulier sera apporté à la précision et la clareté de la rédaction

Exercice 1: Échauffement. *(2 points)*

Calculez le rayon de convergence des séries entières suivantes:

1. $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$

2. $\sum_{n\geq 0} P(n)z^n$, où P est un polynôme à coefficients complexes, non nul.

Exercice 2: Une série de fonctions. *(5 points)*

On définit pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n(t)=2te^{-n^4t^2}$.

1. Montrez que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on note F.

2. Justifiez que F est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrez que

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A F(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

Exercice 3: Séries entières et équations différentielles. *(5 points)*

On considère l'équation différentielle (Δ) d'inconnue $y:]-1,1[\to\mathbb{R}$:

$$xy'(x)-y(x)+\ln(1-x)+x=0 \qquad (\Delta)$$

1. Montrez que (Δ) admet une solution $\phi:]-1,1[\to\mathbb{R}$ qui est développable en série entière en 0, de rayon de convergence égal à 1, vérifiant $\phi(0)=0$ et $\phi'(0)=-1$.

2. Exprimer ϕ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4: Le bord du disque de convergence. *(8 points)*

On considère une série entière à coefficients complexes $S(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho(S) = 1$.

On note $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ et $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

1. Montrez que si S converge normalement sur $C(0,1)$ alors elle converge normalement sur $\overline{D(0,1)}$.

On suppose maintenant que S converge uniformément sur $C(0,1)$. Le but de l'exercice est de montrer que S converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$. Pour $0 \leq p \leq q$ et $z \in \mathbb{C}$, on note

$$S_{p,q}(z) = \sum_{n=p}^{q} a_n z^n \ .$$

2. Soit $\epsilon > 0$. Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq p \geq n_0$ on a

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \ \left| S_{p,q}(e^{i\theta}) \right| \leq \epsilon$$

3. Soit $z \in \overline{D(0,1)}$. On note $r \geq 0$ son module et $\theta \in [0, 2\pi[$ son argument: $z = re^{i\theta}$. Montrez que pour tout entiers $1 \leq p \leq q$, on a

$$\sum_{n=p}^{q} a_n z^n = \sum_{n=p}^{q} S_{p,n}(e^{i\theta})(r^n - r^{n+1}) + S_{p,q}(e^{i\theta}) r^{q+1}$$

4. En déduire que S converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$.

Bonus (si vous avez déjà tout fini): Théorème de Borel.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On cherche à montrer l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

1. Déterminez f lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

2. Construire une fonction "plateau" $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| \leq 1 \implies \varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad |x| \geq 2 \implies \varphi(x) = 0$$

3. Construire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nulle en dehors de $[-2, 2]$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^{(k)}(0) = \delta_{n,k}$.

4. Prouver l'existence de suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n \varphi_n(\mu_n x)$ converge sur $\mathbb{R}$ et que sa somme f soit $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

5. Application: théorème du raccord $\mathcal{C}^\infty$. Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, a], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty([b, +\infty[, \mathbb{R})$. Montrez qu'il existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont les restrictions à $]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont respectivement f et g.