Corrigé du contrôle continu n°2

Exercice 1

Voir cours.

Exercice 2

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. Dans ce cas $|\sin(x)| < 1$ donc

$$\frac{\sin(x)^n}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

La suite de fonctions boréliennes (car continues) $\left(f_n : x \mapsto \frac{\sin(x)^n}{1+x^2}\right)_n$ converge vers la fonction nulle Lebesgue-presque partout sur $\mathbb{R}_+$ (car $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ est dénombrable et a donc une mesure de Lebesgue nulle).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on a $\left|\frac{\sin(x)^n}{1+x^2}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{intégrable sur } \mathbb{R}_+}$. Par convergence dominée, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(b) La suite de fonctions boréliennes (car continues) et positives $\left(f_n : x \mapsto (1+x/n)^n e^{-x}\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction constante égale à 1. Par le lemme de Fatou

$$+\infty = \int_{\mathbb{R}_+} 1dx = \int_{\mathbb{R}_+} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} J_n.$$

D'où $\liminf_{n\to\infty} J_n = +\infty$ et donc $J_n \to +\infty$.

(c) La suite de fonctions mesurables et positives $\left(f_n : k \in \mathbb{N} \mapsto \frac{k}{(1+1/n)2^{k+1/n}}\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{N}$ vers $f : k \mapsto \frac{k}{2^k}$. On remarque que (f_n) est une suite croissante. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone:

$$K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} k2^{-k}\,.$$

Remarque: Calculer la valeur de la somme limite est tout à fait faisable. On doit calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$$

pour $x = \frac{1}{2}$. On reconnaît "à peu de chose près" la série dérivée de $\frac{1}{1-x}$. Pour $x \in]-1,1[$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Exercice 3

(a) On applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions $(|f_n|)_{n\geq 0}$ mesurables positives:

$$\int_E |f|d\mu = \int_E \liminf_{n\to\infty} |f_n|d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|d\mu < +\infty \quad \text{(par hypothèse)}.$$

f est donc intégrable.

(b) Les $|f_n|$ sont mesurables positives on peut donc intervertir somme et intégrale pour obtenir:

$$\int_E \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| d\mu < +\infty\,.$$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ est donc μ-intégrable, donc pour μ-presque tout $x \in E$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ ce qui implique que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 4

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Par ailleurs, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{1+x^2} + \mathbf{1}_{[0,1]}(x)}_{\text{intégrable sur } \mathbb{R}_+}\,.$$

Donc, par convergence dominée (les fonctions considérées sont bien mesurables car continues):

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}} dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi}\big[-\cos(\pi x)\big]_0^1 = \frac{2}{\pi}\,.$$

(b) Soit $x > 0$. $|e^{-bx}| < 1$ donc

$$\frac{1}{1-e^{-bx}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbx}\,.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(a+nb)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x} dx$$

où l'échange série-intégrale est justifié car il s'agit de fonctions mesurables (car continues) positives. Pour $\alpha > 0$, $x \mapsto -\frac{x}{\alpha}e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x}$ est une primitive de $x \mapsto xe^{-\alpha x}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{x}{a+nb} e^{-(a+nb)x} - \frac{1}{(a+nb)^2} e^{-(a+nb)x} \right]_0^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}\,.$$

(c) La fonction $f : t > 0 \mapsto \frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})$ est continue (donc borélienne) et positive (car $b > a$). Sont intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ a donc bien un sens. Par ailleurs, pour $t > 0$,

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \int_a^b e^{-xt} dx\,.$$

D'où,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-xt} dx dt = \int_a^b \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt dx = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)\,,$$

l'échange des deux intégrales est justifié par le théorème de Fubini-Tonelli, appliqué à la fonction $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [a,b] \mapsto e^{-xt}$ qui est mesurable (car continue) et positive.