Mémo séries de fonctions et intégrales à paramètre

1 Convergence des séries et intégrales

On considère une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et une fonction f, continue par morceaux sur $[a,b[$ (b peut valoir $+\infty$).

Série

- *Converge* si
$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_N \text{ converge lorsque } N \to \infty$$
- *Converge absolument* si
$$\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|\right)_N \text{ converge lorsque } N \to \infty$$

Intégrale

- *Converge* si
$$\int_a^\beta f(t)dt \text{ converge lorsque } \beta \to b$$
- *Converge absolument* si
$$\int_a^\beta |f(t)|dt \text{ converge lorsque } \beta \to b$$

Dans les deux cas, la convergence absolue implique la convergence.

2 Convergence des séries de fonctions et intégrales à paramètre

On considère une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur un intervalle I et une fonction $f : [a,b[\times I$ (b peut valoir $+\infty$). On suppose que pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux.

Série

- *Convergence simple* si pour tout $x \in I$
$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ converge vers une limite } F(x)$$
- *Convergence uniforme* si la suite de fonctions
$$\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)_N \text{ converge uniformément vers } F$$
c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$ et tout $x \in I$
$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - F(x)\right| \leq \epsilon$$
- *Convergence normale* si il existe une suite (M_n) telle que
  1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq M_n$
  2. $\sum_{n\geq 0} M_n$ converge

Intégrale

- *Convergence "simple"* si pour tout $x \in I$
$$\int_a^b f(t,x)dt \text{ converge vers une limite } F(x)$$
- *Convergence uniforme* si
$$\left(\int_a^\beta f(t,x)dt\right)_\beta \text{ converge uniformément vers } F \text{ lorsque } \beta \to b$$
c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\beta \in [b-\eta, b[$ et tout $x \in I$
$$\left|\int_a^\beta f(t,x)dt - F(x)\right| \leq \epsilon$$
- *Convergence "normale"* si il existe une fonction M telle que
  1. $\forall t \in [a,b[$, $\forall x \in I$, $|f(t,x)| \leq M(t)$
  2. $\int_a^b M(t)dt$ converge

Dans les deux cas, la convergence normale implique la convergence uniforme.

3 Conséquences de la convergence uniforme

On considère une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur un intervalle I et une fonction $f : [a,b[\times I$ (b peut valoir $+\infty$).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I vers F

- f est continue sur $[a,b[\times I$
- $\int_a^b f(t,x)dt$ converge uniformément sur I vers F

On a alors les résultats suivants:

Série

- *Continuité de la somme*: F est continue sur I.
- *Interversion somme-intégrale*: si la suite de fonctions

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx$$

Intégrale

- *Continuité sous l'intégrale*: F est continue sur I.
- *Interversion intégrale-intégrale (Fubini)*: pour $\alpha < \beta$ dans I

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(t,x)dtdx = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(t,x)dxdt$$

4 Dérivation sous la somme/intégrale

On considère une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur un intervalle I et une fonction $f : [a,b[\times I$ (b peut valoir $+\infty$).

Série

On suppose

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers F
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur I
- $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I vers G

Alors F est dérivable sur I de dérivée G.

Intégrale

On suppose

- $\int_a^b f(t,x)dt$ converge simplement sur I vers F
- f est admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $[a,b[\times I$.
- $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ converge uniformément sur I vers G

Alors F est dérivable sur I de dérivée G.