

Taller de Geometría
Discreta y Computacional
Encuentro Nacional de
Computación 2021

Representación entera de teselaciones periódicas con polígonos regulares

José Ezequiel Soto Sánchez^{1*}

¹PhD en matemáticas por el IMPA, posdoc en UFMA/PUC-Rio

PLÁTICA

Abstract

En la plática, describiré una representación simple y entera para las teselaciones periódicas con polígonos regulares usando números complejos, actual estado del arte de estos objetos. Discutiré algunas propiedades de la representación, y mostraré algoritmos elegantes y eficientes para su adquisición, reconstrucción, representación gráfica y clasificación cristalográfica por detección automática de simetrías.

Palabras clave: teselaciones, representación, simetría

1 Introducción

Una teselación es una subdivisión del plano en caras cerradas y acotadas, cada una de ellas topológicamente equivalente al disco unitario. Nos enfocaremos en las teselaciones periódicas – esto es, invariantes a la acción de dos traslaciones linealmente independientes – cuyas caras son polígonos regulares. Estas restricciones imponen bastante rigidez al problema al mismo tiempo que posibilitan una gran variedad de teselaciones. Teselar el plano de forma periódica con polígonos regulares es un tema fascinante [1, 2]. El primer abordaje formal fue propuesto hace poco más de 400 años por Kepler en su "Harmonices Mundi" (1619), sin embargo, hasta ahora no disponemos de una clasificación exhaustiva de este tipo de teselaciones.

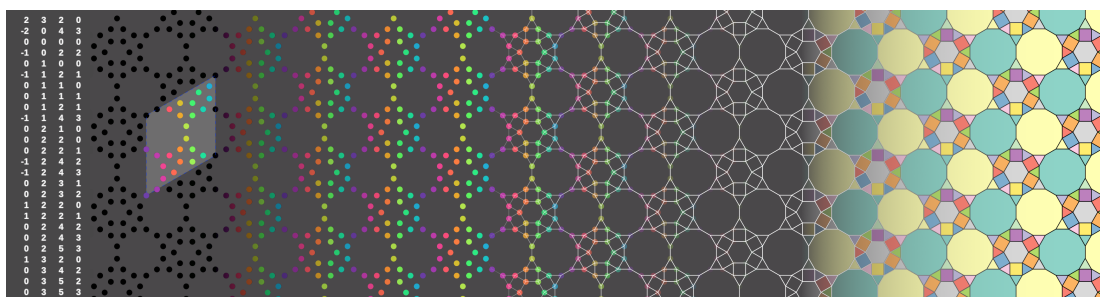


Figure 1. Representación de una teselación y su reconstrucción computacional.

En la plática presentaré una representación simple y entera de las teselaciones periódicas con polígonos regulares usando números complejos. Cada teselación es representada por una matriz entera de $(2 + n) \times 4$, como ilustra la Figura 1. Esta representación permite la adquisición, reconstrucción, representación gráfica y clasificación cristalográfica por detección automática de simetrías de las teselaciones periódicas con polígonos regulares. Los resultados presentados forman parte de mi tesis doctoral [6] y fueron publicados a inicios de este año [7]. Los resultados fueron presentados el pasado 3 de marzo como apertura del *Toronto Geometry Colloquium*¹ número 16. Resultados preliminares del proyecto fueron presentados en *Computer Graphics International 2019* [5] y en *SIBGRAP 2018* [4]. Más información sobre el proyecto de investigación puede ser consultada en: chequesoto.info/tilings.html.

ACCESO
ABIERTO

*Contacto
cheque.soto@gmail.com

¹<https://toronto-geometry-colloquium.github.io/>

2 Definiciones

Una teselación poligonal arista con arista es una teselación cuyas caras son polígonos y en la cual la intersección entre dos caras es exclusivamente vacía, una arista o un vértice. Un vértice Arquimediano es un vértice de una teselación arista con arista con polígonos regulares. Existen 15 vértices Arquimedianos que teselan el plano (figura 2). Una teselación con polígonos regulares es clasificada como n -uniforme k -Arquimediana cuando sus vértices pertenecen a n clases de equivalencia por el grupo de simetría y a k distintas clases de vértices Arquimedianos [3, 7].

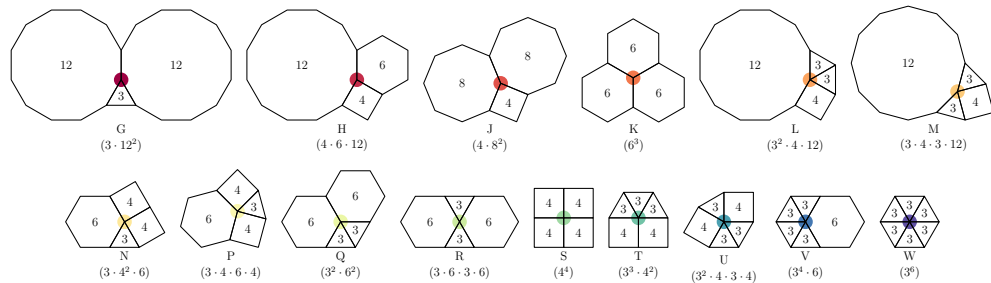


Figure 2. Vértices Arquimedianos.

3 Problemas

Nos interesa una representación simple y computacionalmente eficiente de las teselaciones periódicas con polígonos regulares. ¿La representación es robusta, consistente, permite identificar teselaciones iguales? También abordaré el problema de adquisición, es decir, crear una representación a partir de una imagen. Además de la clasificación automática por grupo de simetría de una teselación y su clasificación como n -uniforme k -Arquimediana.

4 Resultados

Presentaré los detalles de una representación entera de teselaciones periódicas con polígonos regulares, sus propiedades, así como algoritmos basados en esta representación que permiten la síntesis, la comparación, la exploración y el análisis de dichas teselaciones, incluyendo su clasificación automática por grupo de simetría y clase n -uniforme k -Arquimediana. Esta representación y sus propiedades son un aspecto crucial para el estudio y las aplicaciones de las teselaciones.

References

- [1] Branko Grünbaum and Geoffrey C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman & Co Ltd, 1986.
- [2] Craig S. Kaplan. *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*. Morgan & Claypool Publishers, 2009.
- [3] Nils Lenngren. k -uniform tilings by regular polygons. Technical report, 2009.
- [4] Asla Medeiros e Sá, Luiz Henrique de Figueiredo, and José Ezequiel Soto Sánchez. Synthesizing periodic tilings of regular polygons. In *SIBGRAPI 2018*, pages 17–24. IEEE, Computer Press, 2018.
- [5] José Ezequiel Soto Sánchez, Asla Medeiros. e Sá, and Luiz Henrique de Figueiredo. Acquiring periodic tilings of regular polygons from images. *Visual Computer*, 35(6):899–907, 2019.
- [6] José Ezequiel Soto Sánchez. *On Periodic Tilings with Regular Polygons*. PhD thesis, Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), 08 2020.
- [7] José Ezequiel Soto Sánchez, Tim Weyrich, Asla Medeiros e Sá, and Luiz Henrique de Figueiredo. An integer representation for periodic tilings of the plane by regular polygons. *Computers & Graphics*, 95:69–80, 2021.