1 Limites

1 DEFINIÇÃO Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L",

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Exemplo 1.1. *Estime o valor de* $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ não está definida quando $x = 1$. Mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não iguais a a.

As tabelas dão os valores de $f(x)$ (corretos até a sexta casa decimal) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5$$

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0.999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

PROPRIEDADES DOS LIMITES Seja c uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

PROPRIEDADE DE SUBSTITUIÇÃO DIRETA Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

1.1 Exercício

1) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\mapsto 1} \dfrac{x^3-1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\mapsto 3} \dfrac{5x-11}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\mapsto 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\mapsto 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

f) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^4-x}{x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^2-3x}{x-5}$

h) $\lim\limits_{x\mapsto 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\mapsto 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

j) $\lim\limits_{x\mapsto 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

k) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x\mapsto 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

m) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

n) $\lim\limits_{x\mapsto -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$

o) $\lim\limits_{x\mapsto 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

p) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Respostas:

a) 1

b) 0

c) 2

d) 2

e) $\dfrac{1}{6}$

f) -1

g) 0

h) 4

i) 2

j) $\dfrac{1}{3}$

k) 3

l) $\dfrac{4}{5}$

m) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

n) $-\dfrac{9}{4}$

o) $\dfrac{2}{3}$

p) 1

2 Limites Laterais

2 DEFINIÇÃO Escrevemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Observe que a Definição 2 difere da Definição 1 pelo fato de exigirmos que x seja menor que a. Analogamente, se for exigido que x seja maior que a, obteremos "o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a** é igual a L", e escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

3 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

Exemplo 2.1. *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3; & se\ x \leq -1; \\ -5x; & se\ -1 < x \leq 1; \\ 2x+1; & se\ x > 1. \end{cases}$$

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x)$, *c)* $\lim\limits_{x \mapsto -1} f(x)$, *e)* $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x)$,

b) $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x)$, *d)* $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x)$, *f)* $\lim\limits_{x \mapsto 1} f(x)$.

Resposta:

a) 5, c) 5, e) -5,

b) 5, d) 3, f) não existe.

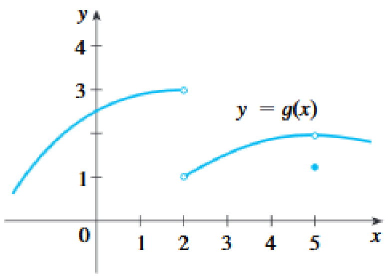

FIGURA 10

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g está na Figura 10. Use-o para dizer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas se aproximam de 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de (3) que o $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de (3) segue que

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$. □

3 Limites infinitos

Exemplo 3.1. *Encontre, se existir, o* $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1}{x^2}$.

Solução: Observe que quanto mais x *se aproxima de* 0, *a função* $\frac{1}{x^2}$ *fica cada vez maior. Assim, os valores de* $f(x)$ *não tendem a um número, e para indicar o comportamento da função* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *próximo do* 0 *usamos a notação* $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10 000
$\pm 0{,}001$	1 000 000

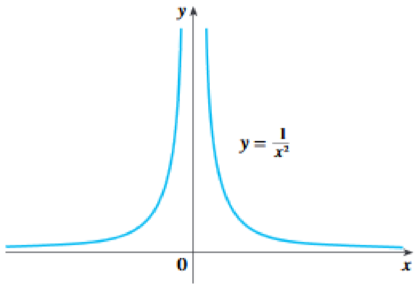

FIGURA 11

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou "a crescer ilimitadamente"), à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.

4 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

4 Exercícios

1) Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{2x}{x-3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^+} \frac{2x}{x-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x$

d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$

g) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$

h) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^-} \frac{2x-4}{(x-2)^5}$

i) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1} -\frac{2^x}{(x^2-1)}$

Respostas:

a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) $-\infty$
d) $-\infty$
e) $+\infty$
f) $-\infty$
g) $+\infty$
h) $+\infty$
i) $-\infty$

5 Limites no infinito

Quando escrevemos $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = L$ queremos dizer que $f(x)$ se aproxima de L à medida que x torna-se arbitrariamente grande.

15) Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2^x$

b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 2^x$

d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^2+1$

g) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^2+1$

h) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x^2+1}$

i) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x$

j) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \ln x^2$

k) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} e^x$

l) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} e^x$

m) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$

n) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

o) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

p) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3x^2+5x+1}{x^2-3x+2}$

q) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2x^4+2x+1}{4-x^2}$

Respostas:

a) $+\infty$
b) 0
c) 0
d) $+\infty$
e) 0
f) $+\infty$
g) $+\infty$
h) 0
i) $+\infty$
j) $+\infty$
k) 0
l) $+\infty$
m) 0
n) $\sqrt{2}$
o) $-\sqrt{2}$
p) 3
q) -2