

# 1 Derivadas

**4 DEFINIÇÃO** A derivada de uma função  $f$  em um número  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Se escrevermos  $x = a + h$ , então  $h = x - a$  e  $h$  tende a 0 se e somente se  $x$  tende a  $a$ . Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

**5**

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Regras de Derivação

- 1) (Derivada de uma função constante) Se  $f(x) = c$  então  $f'(x) = 0$ ;
- 2) (Regra da Potência) Se  $n$  for um número real qualquer e  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = nx^{n-1}$ ;
- 3) (Regra da multiplicação por constante) Se  $c$  for uma constante e  $f$  uma função derivável, então

$$[cf(x)]' = cf'(x);$$

- 4) (Regra da soma/diferença) Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

- 5) (Regra do Produto) Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

- 6) (Regra do quociente) Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2};$$

- 7) (Derivada da função exponencial) Se  $f(x) = a^x$  então  $f'(x) = a^x \ln a$ ;

- 8) (Derivada da função logaritmo)  $f(x) = \log_a x$  então  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ ;

- 9) (Derivada das funções seno e cosseno) Se  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$  então  $f'(x) = \cos x$  e  $g'(x) = -\sin x$ ;

- 10) (Regra da cadeia)  $[g \circ f(x)]' = g' \circ f(x) \cdot f'(x)$ .

## 2 Exercícios

**3–32** Derive a função.

3.  $f(x) = 186,5$

5.  $f(x) = 5x - 1$

7.  $f(x) = x^3 - 4x + 6$

9.  $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

11.  $y = x^{-2/5}$

13.  $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

15.  $Y(t) = 6t^{-9}$

17.  $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

19.  $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

21.  $y = ax^2 + bx + c$

23.  $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

25.  $y = 4\pi^2$

27.  $H(x) = (x + x^{-1})^3$

29.  $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

31.  $z = \frac{A}{y^{10}} + Be^y$

### Respostas

3.  $f'(x) = 0$       5.  $f'(x) = 5$       7.  $f'(x) = 3x^2 - 4$

9.  $f'(t) = t^3$       11.  $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$       13.  $V'(r) = 4\pi r^2$

15.  $Y'(t) = -54t^{-10}$       17.  $G'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 2e^x$

19.  $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$       21.  $y' = 2ax + b$

23.  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

25.  $y' = 0$       27.  $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$

29.  $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$       31.  $z' = -10A/y^{11} + Be^y$

**3–26** Derive.

3.  $f(x) = x^2 e^x$

5.  $y = \frac{e^x}{x^2}$

7.  $g(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

9.  $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10.  $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11.  $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12.  $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13.  $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

15.  $y = \frac{t^2}{3t^2 - 2t + 1}$

17.  $y = (r^2 - 2r)e^r$

19.  $y = \frac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

21.  $f(t) = \frac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

23.  $f(x) = \frac{A}{B + Ce^x}$

25.  $f(x) = \frac{x}{x + \frac{c}{x}}$

### Respostas

3.  $f'(x) = x(x + 2)e^x$

5.  $y' = (x - 2)e^x/x^3$       7.  $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$

9.  $V'(x) = 14x^6 - 4x^3 - 6$

11.  $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$

13.  $y' = \frac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$       15.  $y' = 2t(1 - t)/(3t^2 - 2t + 1)^2$

17.  $y' = (r^2 - 2)e^r$       19.  $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$

21.  $f'(t) = \frac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$       23.  $f'(x) = -ACe^x/(B + Ce^x)^2$

25.  $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$

**1-16** Derive.

1.  $f(x) = x - 3 \sin x$

3.  $y = \sin x + 10 \operatorname{tg} x$

5.  $g(t) = t^3 \cos t$

7.  $h(\theta) = \operatorname{cosec} \theta + e^\theta \cotg \theta$

9.  $y = \frac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$

11.  $f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$

13.  $y = \frac{\sin x}{x^2}$

15.  $f(x) = xe^x \operatorname{cosec} x$

## Respostas

1.  $f'(x) = 1 - 3 \cos x$       3.  $y' = \cos x + 10 \sec^2 x$

5.  $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \sin t$

7.  $h'(\theta) = -\operatorname{cosec} \theta \cotg \theta + e^\theta (\cotg \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta)$

9.  $y' = \frac{2 - \operatorname{tg} x + x \sec^2 x}{(2 - \operatorname{tg} x)^2}$       11.  $f'(\theta) = \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta}{(1 + \sec \theta)^2}$

13.  $y' = (x \cos x - 2 \sin x)/x^3$

15.  $f'(x) = e^x \operatorname{cosec} x (-x \cotg x + x + 1)$

**7-46** Encontre a derivada da função.

7.  $F(x) = (x^3 + 4x)^7$

9.  $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

11.  $g(t) = \frac{1}{(t^4 + 1)^3}$

13.  $y = \cos(a^3 + x^3)$

15.  $y = xe^{-kx}$

17.  $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18.  $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19.  $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

21.  $y = \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^3$

23.  $y = e^{x \cos x}$

25.  $F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

27.  $y = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

29.  $y = \operatorname{tg}(\cos x)$

31.  $y = 2^{\sin \pi x}$

33.  $y = \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x$

35.  $y = \cos \left( \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right)$

## Respostas

$$7. F'(x) = 7(x^3 + 4x)^6(3x^2 + 4) \text{ [ou } 7x^6(x^2 + 4)^6(3x^2 + 4)]$$

$$9. F'(x) = \frac{2 + 3x^2}{4(1 + 2x + x^3)^{3/4}} \quad 11. g'(t) = -\frac{12t^3}{(t^4 + 1)^4}$$

$$13. y' = -3x^2 \operatorname{sen}(a^3 + x^3) \quad 15. y' = e^{-kx}(-kx + 1)$$

$$17. g'(x) = 4(1 + 4x)^4(3 + x - x^2)^7(17 + 9x - 21x^2)$$

$$19. y' = 8(2x - 5)^3(8x^2 - 5)^{-4}(-4x^2 + 30x - 5)$$

$$21. y' = \frac{-12x(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^4} \quad 23. y' = (\cos x - x \operatorname{sen} x)e^{x \cos x}$$

$$25. F'(z) = 1/[(z - 1)^{1/2}(z + 1)^{3/2}]$$

$$27. y' = (r^2 + 1)^{-3/2} \quad 29. y' = -\operatorname{sen} x \sec^2(\cos x)$$

$$31. y' = 2^{\operatorname{sen} \pi x} (\pi \ln 2) \cos \pi x \quad 33. y' = 4 \sec^2 x \operatorname{tg} x$$

$$35. y' = \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \operatorname{sen} \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

**2-22** Derive a função.

$$2. f(x) = \ln(x^2 + 10)$$

$$3. f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$$

$$5. f(x) = \log_2(1 - 3x)$$

$$7. f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$$

$$9. f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

$$11. F(t) = \ln \frac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$$

$$13. g(x) = \ln(x \sqrt{x^2 - 1})$$

$$15. y = \frac{\ln x}{1 + x}$$

$$17. y = \ln |2 - x - 5x^2|$$

$$19. y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

## Respostas

$$3. f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$5. f'(x) = \frac{3}{(3x - 1) \ln 2}$$

$$7. f'(x) = \frac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$$

$$9. f'(x) = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$$

$$11. F'(t) = \frac{6}{2t + 1} - \frac{12}{3t - 1}$$

$$13. g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$$

$$15. y' = (1 + x - x \ln x)/(x(1 + x)^2) \quad 17. y' = \frac{10x + 1}{5x^2 + x - 2}$$

$$19. y' = \frac{-x}{1 + x} \frac{1}{\ln 10} \log_{10} x$$