

1 Funções trigonométricas

Faremos agora uma breve revisão de alguns conceitos importantes;

- **Ângulos:** Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360° , que é o mesmo que 2π rad. Portanto, temos a relação

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas em graus e em radianos de alguns ângulos.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°	720°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π

- **A posição padrão de um ângulo:** Um ângulo positivo é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final, como na figura 3. Da mesma forma, ângulos negativos são obtidos girando-se no sentido horário, como na figura 4.

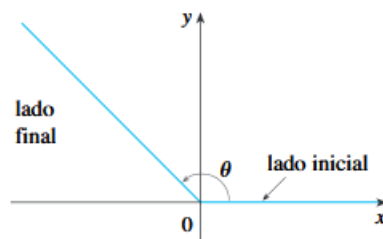


FIGURA 3 $\theta \geq 0$

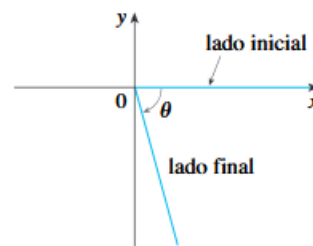


FIGURA 4 $\theta < 0$

- Abaixo temos uma figura com alguns exemplos:

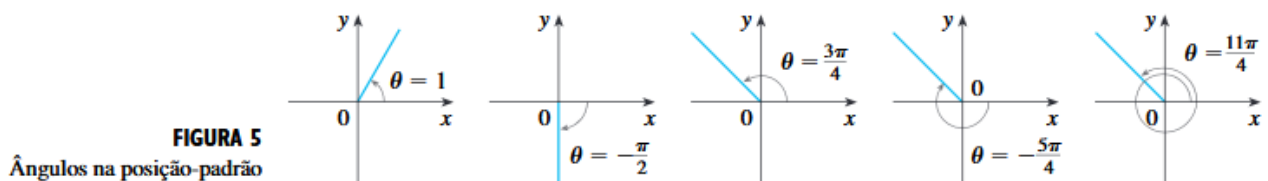


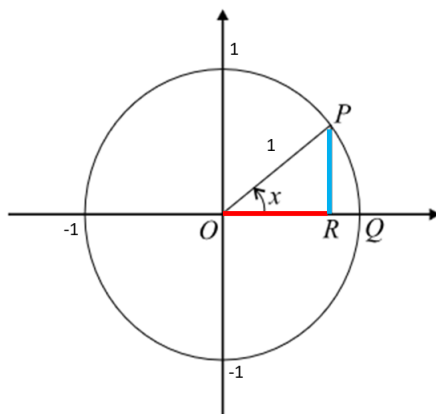
FIGURA 5
Ângulos na posição-padrão

- **Construção das funções trigonométricas:** As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas como razões entre as projeções do comprimento dos lados de um triângulo retângulo. Para tanto, considere uma circunferência centrada na origem com raio igual a 1.

$$\sin(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \overline{PR}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \overline{OR}$$

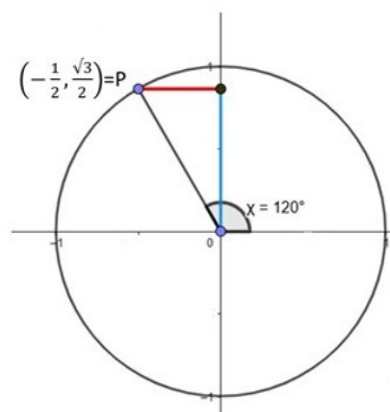
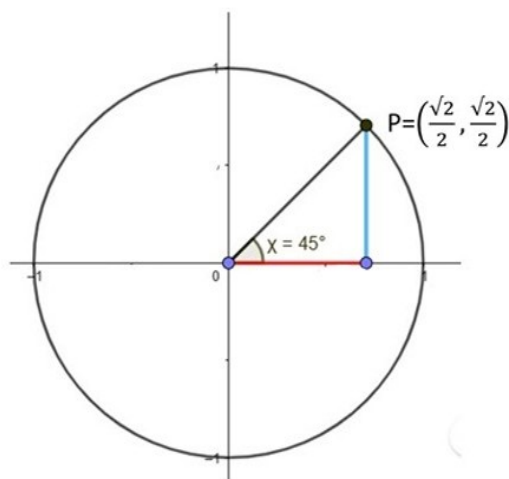
$$\tan(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{OR}}$$



De modo geral, temos que para um ângulo qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos $\cos x$ como sendo o valor da primeira coordenada do ponto P e definimos $\operatorname{sen} x$ como sendo o valor da segunda coordenada do ponto P , ou seja:

Para um ângulo qualquer, $x \in \mathbb{R}$, temos que $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$.

Exemplos:

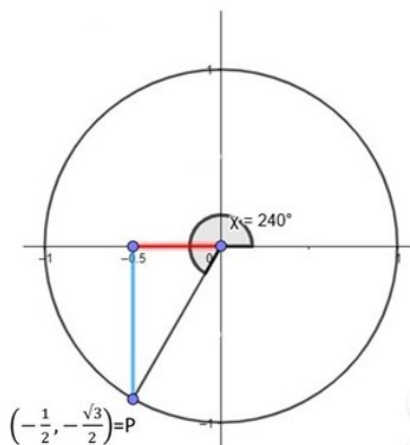


$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Exemplo: Abaixo fornecemos alguns valores respectivamente de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

- **Identidades Trigonométricas:** Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são dadas a seguir.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

- Abaixo apresentamos mais algumas identidades trigonométricas:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{vii)} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \text{ii)} \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x & \text{viii)} \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \text{iii)} 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x & \text{ix)} \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \text{iv)} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x & \text{x)} \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ \text{v)} \cos(-x) = \cos x & \\ \text{vi)} \cos(x+2\pi) = \cos x \text{ e } \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x & \end{array}$$

2 Exercícios

1) Converta de graus para radianos os seguintes ângulos.

$$\text{a)} 315^\circ \quad \text{b)} -150^\circ \quad \text{c)} 900^\circ \quad \text{d)} 36^\circ$$

2) Determine em qual quadrante se encontra o seguinte ângulo.

$$\text{a)} 315^\circ \quad \text{b)} -150^\circ \quad \text{c)} }-\frac{3\pi}{4} \text{ rad} \quad \text{d)} -3 \text{ rad} \quad \text{e)} 2 \text{ rad}$$

3) Encontre o valor de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2 \cos x - 1 = 0 & \text{d)} \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \\ \text{b)} 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 & \text{e)} |\operatorname{tg} x| = 1 \\ \text{c)} \operatorname{sen} 2x = \cos x & \text{f)} 2 \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0 \end{array}$$

4) Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade:

$$\text{a) } \sin x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 2 \cos x + 1 \geq 0$$

$$\text{c) } \sin x > \cos x$$

5) Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

$$\text{a) } f(x) = \sin(2x)$$

$$\text{d) } f(x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\text{b) } f(x) = \cos(x) + 1$$

$$\text{e) } f(x) = \cos(x + 2\pi)$$

$$\text{c) } f(x) = |\sin(x)|$$

$$\text{f) } f(x) = 3 \sin(x)$$

3 Respostas

$$1) \quad \text{a) } \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{b) } -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{c) } 5\pi$$

$$\text{d) } \frac{\pi}{5}$$

$$2) \quad \text{a) } 4^\circ$$

$$\text{b) } 3^\circ$$

$$\text{c) } 3^\circ$$

$$\text{d) } 3^\circ$$

$$\text{e) } 2^\circ$$

$$3) \quad \text{a) } S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\text{d) } S = \{0, \pi, 2\pi\}$$

$$\text{b) } S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\text{e) } S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

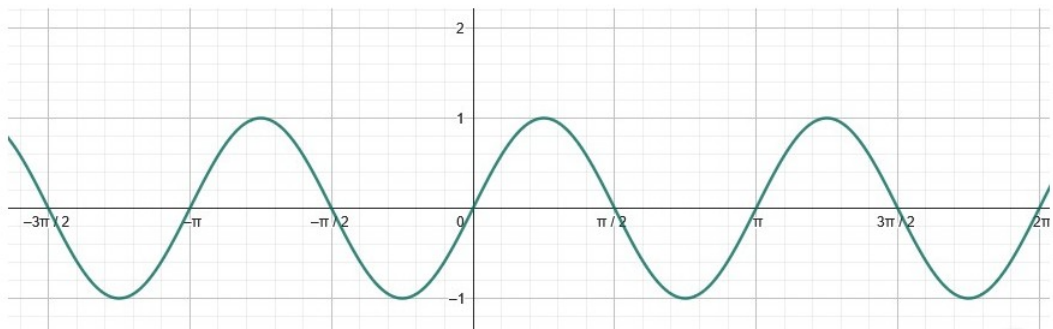
$$\text{c) } S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$\text{f) } S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

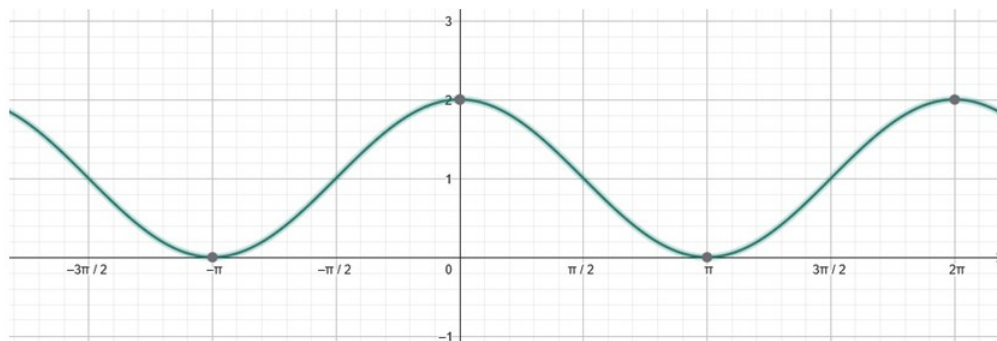
$$4) \quad \text{a) } S = \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$$

$$\text{b) } S = \left[0, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi \right]$$

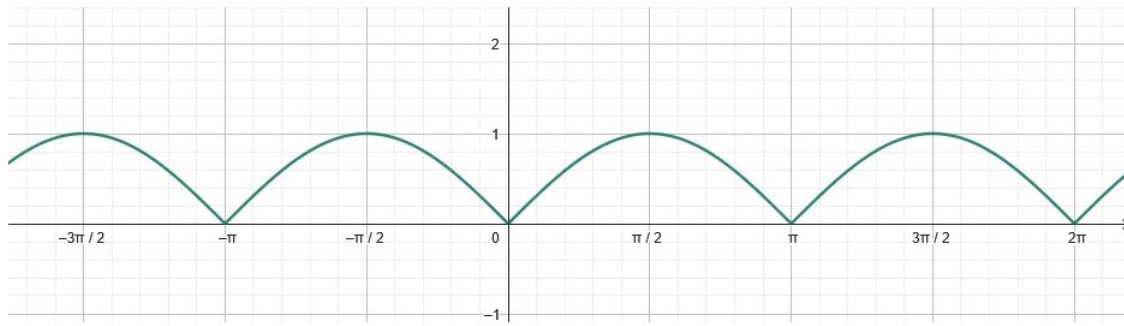
$$\text{c) } S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right)$$



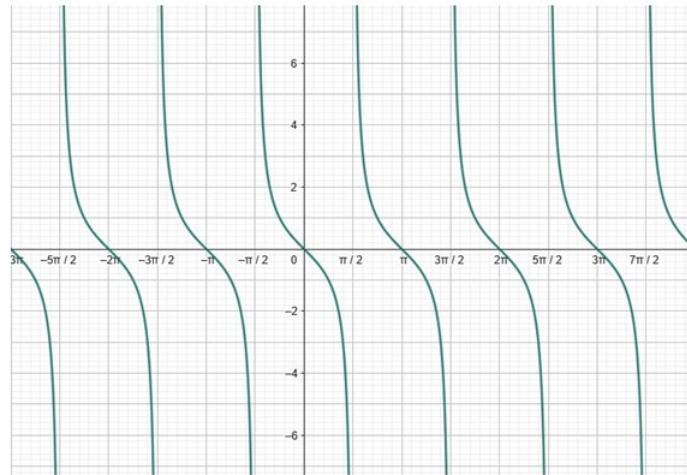
5-A)



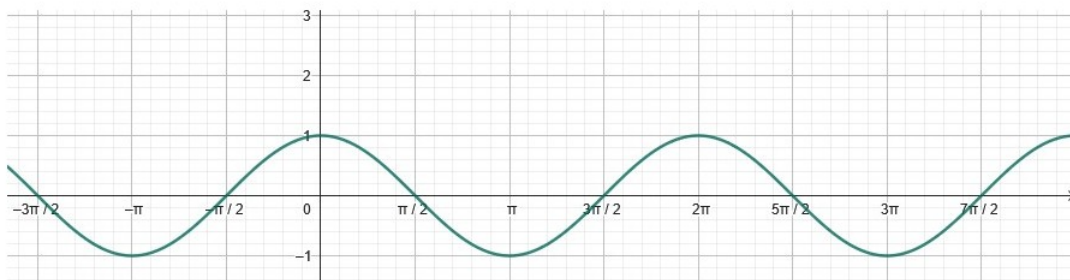
5-B)



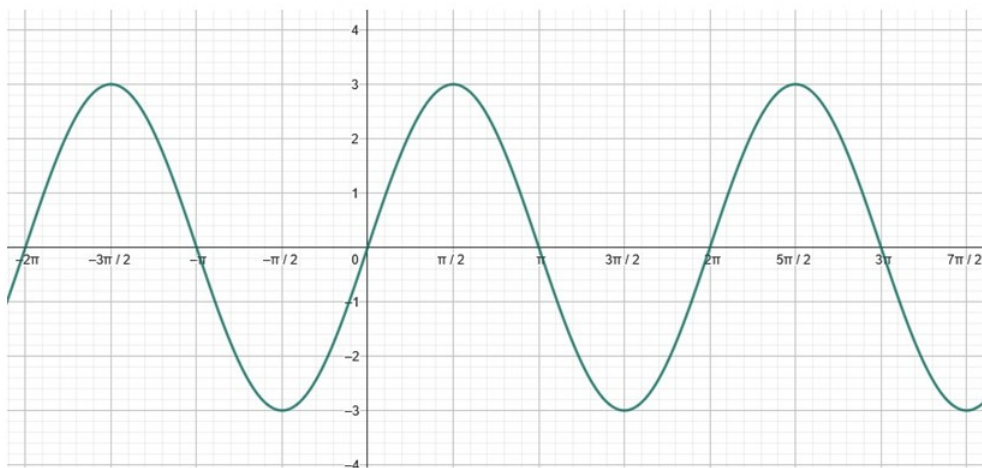
5-C)



5-D)



5-E)



5-F)