1 Crescimento e decrescimento de funções

Definição 1.1. *Dizemos que uma função f, definida em um intervalo I, é crescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ então temos que $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definição 1.2. *Dizemos que uma função f, definida em um intervalo I, é decrescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ então temos que $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definição 1.3. *Seja f uma função. O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe é chamado de ponto crítico.*

Proposição 1.4. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).*

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$;

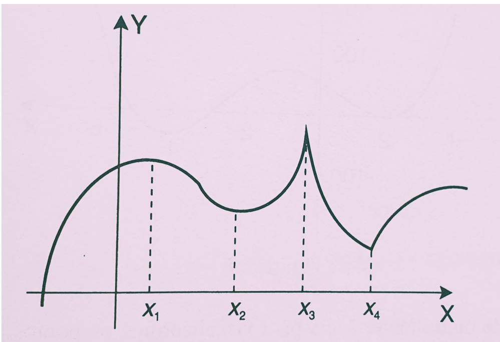
ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$;

Exemplo 1.5. *Consiedere a função $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$. Determine os pontos críticos de f e os intervalos onde f é crescente e decrescente.*

2 Máximos e mínimos (relativos) de funções

Definição 2.1. *Uma função f tem um máximo relativo em um ponto $c \in D(f)$, se existir um intervalo aberto I dentro do domínio de f, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.*

Definição 2.2. *Uma função f tem um mínimo relativo em um ponto $c \in D(f)$, se existir um intervalo aberto I dentro do domínio de f, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.*



Observe que no gráfico acima, a função tem um máximo relativo nos pontos x_1 e x_3 e mínimo relativo em x_2 e x_4.

Proposição 2.3. *Os candidatos a máximo e mínimo relativos de uma função f são os pontos críticos.*

Proposição 2.4 (Critério da primeira derivada para determinar extremos de uma função)**.** *Seja f uma função derivável em um intervalo $[a, b]$ e $c \in [a, b]$ um ponto crítico de f. Então:*

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$. Então f tem um máximo relativo em c.

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$. Então f tem um mínimo relativo em c.

Exemplo 2.5. *Consiedere a função $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$. Determine os pontos de máximo e mínimo relativos de f (caso existam).*

3 Máximos e mínimos (absolutos) de funções

Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e $c \in [a, b]$.

Definição 3.1. *Dizemos que a função f tem um ponto de máximo absoluto em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Definição 3.2. *Dizemos que a função f tem um ponto de mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Proposição 3.3. *Toda função contínua f definida em um intervalo fechado $[a,b]$ possui, pelo menos um, ponto de máximo absoluto e, pelo menos um, ponto de mínimo absoluto em $[a,b]$.*

Observação 3.4. *Os candidatos a máximo e mínimo absoluto de f no intervalo $[a,b]$ são: i) Os pontos críticos de f que estão em $[a,b]$; e ii) Os extremos do intervalo.*

Exemplo 3.5. *Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de f nos respectivos intervalos.*
a) $f(x) = 3x^2 - 3x + 4;\ [0,3]$ *b)* $f(x) = \cos(3x);\ [0, 2\pi]$ *c)* $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + 1;\ [0, \frac{\pi}{2}]$

4 Concavidade de funções

Proposição 4.1. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e possui derivada de segunda ordem no intervalo (a,b). Então:*

i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é côncava para cima em (a,b);

ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é côncava para baixo em (a,b);

5 Regra de L'Hospital

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.
a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Observação 5.1. *A Regra de L'Hospital também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.*

Exemplo 5.2. *Calcule os seguintes limites:*
a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$ *b)* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$ *d)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 12}{e^x}$ *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$

6 Assíntotas de funções

Definição 6.1. ***(Assíntota vertical)*** *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de uma função $f(x)$ se, pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.*

Definição 6.2. ***(Assíntota horizontal)*** *A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função $f(x)$ se, pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$.*

Exemplo 6.3. *Determine as assíntotas verticais e horizontais (caso existam) de cada uma das funções:*
a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ *c)* $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

7 Exercícios

1) Para cada uma das funções $h(x)$ abaixo. a) Encontre o domínio de h; b) Encontre os pontos críticos de h; c) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de h; d) Encontrar os máximos e mínimos relativos de h; e) Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de h; f) Encontrar as assíntotas horizontais e verticais (se existirem); g) Faça um esboço do gráfico de h.
a) $h(x) = \frac{x^2}{x-3}$ *b)* $h(x) = x^4 - 32x + 48$ *c)* $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$
d) $h(x) = e^{x - x^2}$ *e)* $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ *f)* $h(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ *h)* $h(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$