Derivadas: Regras e Aplicações

Calculo 1 - P2

2025/1

---

1. O que é uma Derivada?

A derivada de uma função mede **quão rápido** ela muda em um ponto específico. Geometricamente, é a **inclinação da reta tangente** ao gráfico da função naquele ponto.

Definição Matemática:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretação:

- Se $f'(x) > 0$, a função está **crescendo**.
- Se $f'(x) < 0$, a função está **decrescendo**.
- Se $f'(x) = 0$, pode ser um **ponto crítico** (máximo, mínimo ou inflexão).

---

2. Regras de Derivação

Regras Básicas:

Função	Derivada
c (constante)	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Regras Avançadas:

1. **Soma/Diferença:**
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
2. **Produto:**
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
3. **Quociente:**
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$
4. **Cadeia (Função Composta):**
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

---

3. Aplicações das Derivadas

a) Reta Tangente

A equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemplo: Para $f(x) = x^2$ em $x = 1$:

- $f(1) = 1$
- $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$
- Reta tangente: $y - 1 = 2(x - 1)$

---

b) Máximos e Mínimos

1. **Pontos Críticos:** Onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe.
2. **Teste da Primeira Derivada:**
   - Se f' muda de **+ para -** $\rightarrow$ **Máximo local**.
   - Se f' muda de **- para +** $\rightarrow$ **Mínimo local**.
3. **Teste da Segunda Derivada:**
   - Se $f''(x) > 0 \rightarrow$ **Mínimo local**.
   - Se $f''(x) < 0 \rightarrow$ **Máximo local**.

Exemplo: Para $f(x) = x^3 - 3x^2$:

- $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Pontos críticos: $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 2$.
- $f''(x) = 6x - 6$
  - $f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0 \rightarrow$ **Máximo em** $x = 0$.
  - $f''(2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6 > 0 \rightarrow$ **Mínimo em** $x = 2$.

---

c) Concavidade e Pontos de Inflexão

- **Côncava para cima ($\cup$):** $f''(x) > 0$.
- **Côncava para baixo ($\cap$):** $f''(x) < 0$.
- **Ponto de inflexão:** Onde a concavidade muda ($f''(x) = 0$).

Exemplo: Para $f(x) = x^3$:

- $f'(x) = 3x^2$
- $f''(x) = 6x$
- Em $x = 0$, $f''(0) = 6(0) = 0$ e há mudança de concavidade $\rightarrow$ **Ponto de inflexão**.

---

d) Taxas de Variação

- **Velocidade:** Derivada da posição $s(t)$.

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

- **Aceleração:** Derivada da velocidade $v(t)$.

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Exemplo: Se $s(t) = t^2 - 4t$:

- $v(t) = s'(t) = 2t - 4$
- $a(t) = v'(t) = 2$

---

5. Como Plotar Gráficos de Funções

Passos para Esboçar o Gráfico:

1. **Domínio:** Onde a função está definida.
2. **Pontos Críticos:** $f'(x) = 0$.
3. **Crescimento/Decrescimento:** Analisar o sinal de $f'(x)$.
4. **Concavidade:** Analisar o sinal de $f''(x)$.
5. **Pontos de Inflexão:** Onde $f''(x) = 0$ e há mudança de sinal.
6. **Assíntotas:**
   - **Verticais:** Onde $f(x) \to \pm\infty$.
   - **Horizontais:** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ (constante).

Exemplo: Para $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$:

1. **Domínio:** $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$. Domínio é $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
2. **Assíntotas:**
   - Verticais: $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2}{x^2-1} = \pm\infty$ e $\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2}{x^2-1} = \pm\infty$. Logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais.
   - Horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$. Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.
3. **Derivadas:**
   - $f'(x) = \frac{(2x)(x^2-1)-x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Ponto crítico em $-2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
   - $f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.
4. **Análise de $f'(x)$:**
   - Para $x > 0$ (e $x \neq 1$), $f'(x) < 0$ (decrescente).
   - Para $x < 0$ (e $x \neq -1$), $f'(x) > 0$ (crescente).
   - Em $x = 0$, há um máximo local: $f(0) = \frac{0^2}{0^2-1} = 0$. Ponto $(0, 0)$.
5. **Análise de $f''(x)$:** O numerador $6x^2 + 2$ é sempre positivo. O sinal de $f''(x)$ depende do denominador $(x^2 - 1)^3$.
   - Para $|x| > 1$, $(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^3 > 0$ (côncava para cima).
   - Para $|x| < 1$, $(x^2 - 1) < 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^3 < 0$ (côncava para baixo).

   Não há pontos de inflexão, pois $f''(x) = 0$ não tem solução real.

---

6. Problemas de Otimização

São problemas onde queremos **maximizar** ou **minimizar** uma quantidade (área, custo, volume, etc.).

Passos para Resolver:

1. **Defina a função objetivo** (o que quer maximizar/minimizar).
2. **Escreva as restrições** (equações adicionais).
3. **Expresse em uma variável** usando as restrições.
4. **Derive e encontre pontos críticos**.
5. **Verifique se é máximo ou mínimo**.

Exemplo: *"Queremos cercar um campo retangular com 100m de cerca. Qual a maior área possível?"*

- **Função objetivo:** $A = x \cdot y$
- **Restrição:** $2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x$
- Substituindo: $A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$
- Derivando: $A'(x) = 50 - 2x$
- Ponto crítico: $50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$. Se $x = 25$, então $y = 50 - 25 = 25$.
- Verificando a segunda derivada: $A''(x) = -2 < 0$, logo, é um máximo.
- Área máxima: $25 \times 25 = 625\, m^2$.

---

7. Resumo Final

- **Derivada = Taxa de variação instantânea**
- **Regras de derivação** (soma, produto, quociente, cadeia)
- **Aplicações:** Reta tangente, máximos/mínimos, concavidade
- **Otimização:** Maximizar ou minimizar funções
- **Gráficos:** Analisar domínio, pontos críticos, concavidade e assíntotas

Praticando esses conceitos, você dominará o Cálculo Diferencial!
