

# Introdução à Lógica: Formas Normais, Tableaux, NAND, De Morgan e Equivalências

Lógica - P2

2025

## 1 Formas Normais

### 1.1 Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Expressão como conjunção ( $\wedge$ ) de disjunções ( $\vee$ ) de literais:

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (Q \vee R) \quad (1)$$

### 1.2 Forma Normal Disjuntiva (FND)

Expressão como disjunção ( $\vee$ ) de conjunções ( $\wedge$ ) de literais:

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \quad (2)$$

### 1.3 Conversão para Formas Normais

1. Eliminar implicações e bicondicionais
2. Aplicar Leis de De Morgan
3. Usar distributividade:
  - FNC:  $\vee$  sobre  $\wedge$
  - FND:  $\wedge$  sobre  $\vee$

## 2 Leis de De Morgan

### 2.1 Definição

$$\begin{aligned}\neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B\end{aligned}$$

### 2.2 Aplicação Prática

Exemplo 1:

$$\neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee Q$$

Exemplo 2:

$$\neg(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B$$

## 3 Tableaux Semânticos

### 3.1 Método Gráfico

- Cada ramo = cenário possível
- $\times$  = ramo fechado (contradição)
- Todos fechados = tautologia

### 3.2 Exemplo Prático

Verifique  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ :

1. Negar:  $\neg[P \rightarrow (Q \rightarrow P)]$
2. Simplificar:  $P \wedge \neg(\neg Q \vee P)$
3. Aplicar De Morgan:  $P \wedge Q \wedge \neg P$
4. Tableau:

$$\begin{array}{c} P \wedge Q \wedge \neg P \\ \hline P \\ Q \\ \neg P \\ \times \end{array}$$

5. Conclusão: Tautologia

## 4 Conectivo NAND

### 4.1 Definição

$$A \text{ NAND } B \equiv \neg(A \wedge B)$$

### 4.2 Expressando Operadores

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv A \text{ NAND } A \\ A \wedge B &\equiv (A \text{ NAND } B) \text{ NAND } (A \text{ NAND } B) \\ A \vee B &\equiv (A \text{ NAND } A) \text{ NAND } (B \text{ NAND } B) \end{aligned}$$

## 5 Resolução

### 5.1 Método de Prova

- Cláusulas = disjunções de literais
- Resolvente = nova cláusula de pares complementares
- Cláusula vazia ( $\square$ ) = contradição

## 5.2 Exemplo

$\neg P \vee Q$
$P$
$\neg Q$
Resoluções : $Q$ (de 1 e 2)
$\square$ (de 3 e 4)

## Regras dos Tableaux

Fórmula	Decomposição
$A \wedge B$	$A$ e $B$
$A \vee B$	Ramo $A$ e ramo $B$
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$

## 6 Equivalência de Fórmulas Lógicas

### 6.1 Definição

Duas fórmulas são **equivalentes** ( $\equiv$ ) quando possuem a mesma tabela verdade para todas as combinações de valores das variáveis.

### 6.2 Principais Equivalências

Nome	Equivalência
Comutatividade	$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$
Associatividade	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
Distributividade	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Leis de De Morgan	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
Implicação	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

### 6.3 Métodos de Verificação

- **Tabela Verdade:** Compare as colunas finais das tabelas
- **Transformação Algébrica:** Use equivalências conhecidas para transformar uma fórmula na outra

## 6.4 Exemplo Prático

Verifique se  $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ :

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\neg(P \rightarrow Q) &\equiv \neg(\neg P \vee Q) \quad (\text{Equivalência da implicação}) \\ &\equiv P \wedge \neg Q \quad (\text{Lei de De Morgan})\end{aligned}$$

□

## 6.5 Aplicações

- Simplificação de circuitos lógicos
- Otimização de expressões em programação
- Prova de teoremas em matemática