1 Reta tangente

A reta tangente a função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a. Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

1.1 Exercícios

3. Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.

23. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

33. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tenha uma reta tangente horizontal?

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

59. Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

Respostas:

3) 2

5. $y = -x + 5$

7. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3$, $y = -8x + 19$

23. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$

63. É dada uma tabela de valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

Continuação das Respostas:

33. $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n um inteiro

51. $y = -\frac{3}{16}x + \frac{11}{4}$ **53.** $y = -x + \pi$

59. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n um inteiro

61. 24 **63.** (a) 30 (b) 36

2 Taxa de variação

Suponha que y seja uma função de variável x (isto é, $y = f(x)$). Se x variar de x_1 para x_2, então a variação de x é

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente de y é

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

A **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ é definida pelo quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A derivada $f'(a)$ é a **taxa instantânea de variação** de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

Em particular, se $y = f(t)$ for a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então, $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo, em outras palavras $f'(a)$ é a velocidade instantânea da partícula no instante $t = a$.

Exercício: O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:

(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4{,}5]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.

Exercícios

13. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

37 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, em que s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

43. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5\,000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando

(i) de $x = 100$ a $x = 105$ (ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

Respostas:

13) -9,6 m/s

15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

37. 1 m/s; 1 m/s

43. (a) (i) \$20,25/unidade (ii) \$20,05/unidade (b) \$20/unidade

3 Derivação implícita

Considere y uma função de variável x, isto é, $y = f(x)$. As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra, por exemplo, $y = \sqrt{x^2+1}$ ou $y = x\,\text{sen}x$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tal como:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ ou } x^3 + y^3 = 6xy.$$

Em agluns casos é possível resolver tais equações isolando y como uma fução explícita de x, em muitos outros casos não é possível. Felismente não precissamos resolver uma equação e escrever y em termos de x para encontrar a derivada de y.

3.1 Exercícios

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

Respostas:

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. (a) $y' = -y^2/x^2$ (b) $y = x/(x - 1)$, $y' = -1/(x - 1)^2$

5–20 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

5. $x^2 + y^3 = 1$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

15. $e^{x/y} = x - y$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

19. $xy = \operatorname{cotg}(xy)$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, ache $f'(1)$.

Respostas:

5. $y' = -x^2/y^2$

7. $y' = -x(3x + 2y)/(x^2 + 8y)$ **9.** $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$

11. $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x \cos y}$ **13.** $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

15. $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$ **17.** $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$

19. $y' = -y/x$ **21.** $-\frac{16}{13}$