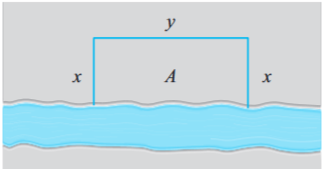
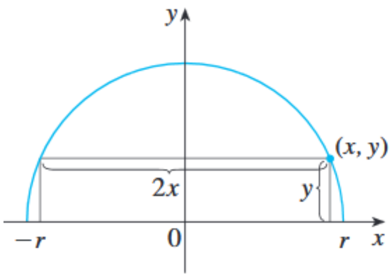
1 Exercícios de Otimização

1) Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?
Resposta: 300 m por 600 m



2) Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.
Resposta: $P = (2, 2)$

3) Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio $r = \sqrt{2}$.
Resposta: Área máxima é 2.



4) Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimento 3 m e 4 m se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

resposta: $A = 3m^2$

5) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja $2500m^3$. O material da base vai custar $R\$1200,00$ por m^2 e o material dos lados $R\$980,00$ por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Resposta: $x = 5\sqrt[3]{\dfrac{98}{3}} \approx 15,983m$ e $y \approx 9,785m$

6) Um fio de comprimento 2 metros é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado. $a)$ Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima? $b)$ Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

Resposta: $a)$ Primeiro pedaço igual a $\dfrac{2\pi}{4+\pi}m$; Segundo pedaço igual a $\dfrac{8}{4+\pi}m$; $b)$ O fio deve formar somente um círculo de raio $\dfrac{1}{\pi}m$.

7) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado produto. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$, e o valor obtido na venda é dado por $V = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = V - C$.

Resposta: $x = 1000$ unidades do produto.

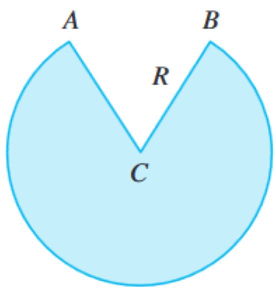
8) Se $1.200 cm^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

Resposta: $4.000 cm^3$

9) Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

Resposta: $P = (-\frac{28}{17}, \frac{7}{17})$

10) Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



Dica: Volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi(raio)^2(altura)$. Resposta: $V_{maximo} = \dfrac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

11) Encontre as dimensões de um retângulo de maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

Resposta: O retângulo tem dimensões $\dfrac{L}{2}$ por $\dfrac{\sqrt{3}}{4}L$

12) Um fabricante tem vendido 1.000 fritadeiras elétricas por semana, a $R\$450,00$ cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada $R\$10,00$ de desconto oferecido ao comprador, o número de fritadeiras vendidas aumenta 100 por semana.

$a)$ Encontre a função demanda (ou função preço).
$b)$ Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?

Resposta: $a) P(x) = 550 - \dfrac{x}{10}$ e $b)$ Desconto de $R\$175,00$.

13) Uma lata cilíndrica é feita para receber um volume $V = 27\pi cm^3$ de líquido. Encontre as dimensões da lata (raio da circunferência da base e sua altura) que minimizarão o custo do metal utilizado para fabricar a lata.

Resposta: raio e altura igual a $3cm$.

14) Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é $P = \dfrac{E^2 R}{(R+r)^2}$. Se E e r forem fixados, mas R variar, qual o valor mínimo da potência?

Resposta: $\dfrac{E^2}{4r}$