Hamiltonsche Quaternionen

Proseminar Mathematik

Leon Richardt

7. Juli 2020

Universität Osnabrück

Überblick

Reelle Algebren

Anmerkung

In dieser Präsentation stehen kleine griechische Buchstaben stets für reelle Zahlen; lateinische Buchstaben stehen für Elemente der momentan betrachteten Algebra.

Definition

Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit einer Produktabbildung

$$V \times V \to V, (x, y) \mapsto xy$$

heißt **Algebra** über $\mathbb{R}$ (oder reelle Algebra), wenn die beiden Distributivgesetze

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$$
$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ erfüllt sind.

Definition

Ein Element x einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Nullteiler*, falls es ein Element $0 \neq y \in \mathcal{A}$ mit $xy = 0$ oder $yx = 0$ gibt.

Konsequenterweise heißt eine Algebra *nullteilerfrei*, falls sie keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt.

Definition

Eine Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ heißt …

- … *assoziativ*, wenn $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in V$ gilt.
- … *kommutativ*, wenn $xy = xy$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- … *mit Einselement*, wenn es ein Element $e \in V$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in V$ gibt.
- … *Divisionsalgebra*, falls $\mathcal{A} \neq 0$ und die Gleichungen

  $$ax = b \text{ und } ya = b$$

  für alle $a, b \in V$, $a \neq 0$, eindeutig lösbar sind.

Lemma

Folgende Aussagen über eine endlichdimensionale Algebra $\mathcal{A}$ sind äquivalent:

i) $\mathcal{A}$ *ist Divisionsalgebra.*

ii) $\mathcal{A}$ *ist nullteilerfrei.*

Beweis.

i) $\implies$ ii) ist klar.

ii) $\implies$ i):

Sei $a \in \mathcal{A}\ \{0\}$. Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto ax$ ist ein VR-Endomorphismus. Wegen der Nullteilerfreiheit ist $\operatorname{kern}(\varphi) = \{0\}$, was aufgrund des Kernkriteriums die Injektivität bedeutet. Da weiterhin $\dim(\mathcal{A}) < \infty$, folgt aus der Dimensionsformel die Bijektivität. Damit ist jede Gleichung der Form $ax = b$ eindeutig lösbar.

Die eindeutige Lösbarkeit von $ya = b$ ergibt sich durch analoge Betrachtung der Abbildung $y \mapsto ya$. $\square$

Liegt ein VR V mit einer Basis $e_1, \dots, e_n$ vor, so lässt sich durch die Festlegung der n^2 Basisprodukte

$$e_u e_v,\ 1 \leq u, v \leq n,$$

eine Algebra eindeutig bestimmen. Denn sind $x = \sum_{u=1}^{n} \alpha_u e_u$ und $y = \sum_{v=1}^{n} \beta_v e_v$ beliebige Elemente in V, so gilt wegen der Distributivgesetze

$$xy = \sum_{u,v=1}^{n} (\alpha_u \beta_v) e_u e_v.$$

Assoziativität und Kommutativität lassen sich dann einfach anhand der Basisprodukte überprüfen.

Historisches

Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$

Der Imaginärraum von $\mathbb{H}$

Der Imaginärraum von $\mathbb{H}$

Bezug zu klassischen Vektorprodukten

Zentrum von $\mathbb{H}$

Endomorphismen von $\mathbb{H}$

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen