Hamiltonsche Quaternionen

Proseminar Mathematik

Leon Richardt

7. Juli 2020

Universität Osnabrück

Überblick

Reelle Algebren

Anmerkung

In dieser Präsentation stehen kleine griechische Buchstaben stets für reelle Zahlen; lateinische Buchstaben stehen für Elemente der momentan betrachteten Algebra.

Definition

Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit einer Produktabbildung

$$V \times V \to V, (x, y) \mapsto xy$$

heißt **Algebra** über $\mathbb{R}$ (oder reelle Algebra), wenn die beiden Distributivgesetze

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$$
$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ erfüllt sind.

Definition

Ein Element x einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Nullteiler*, falls es ein Element $0 \neq y \in \mathcal{A}$ mit $xy = 0$ oder $yx = 0$ gibt.

Konsequenterweise heißt eine Algebra *nullteilerfrei*, falls sie keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt.

Definition

Eine Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ heißt …

- … *assoziativ*, wenn $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in V$ gilt.
- … *kommutativ*, wenn $xy = xy$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- … *mit Einselement*, wenn es ein Element $e \in V$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in V$ gibt.
- … *Divisionsalgebra*, falls $\mathcal{A} \neq 0$ und die Gleichungen

$$ax = b \text{ und } ya = b$$

  für alle $a, b \in V$, $a \neq 0$, eindeutig lösbar sind.

Lemma

Folgende Aussagen über eine endlichdimensionale Algebra $\mathcal{A}$ sind äquivalent:

i) $\mathcal{A}$ *ist Divisionsalgebra.*

ii) $\mathcal{A}$ *ist nullteilerfrei.*

Beweis.

i) $\implies$ ii) ist klar.

ii) $\implies$ i):
Sei $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto ax$ ist ein VR-Endomorphismus. Wegen der Nullteilerfreiheit ist $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0\}$, was aufgrund des Kernkriteriums die Injektivität bedeutet. Da weiterhin $\dim(\mathcal{A}) < \infty$, folgt aus der Dimensionsformel die Bijektivität. Damit ist jede Gleichung der Form $ax = b$ eindeutig lösbar.

Die eindeutige Lösbarkeit von $ya = b$ ergibt sich durch analoge Betrachtung der Abbildung $y \mapsto ya$. $\square$

Liegt ein VR V mit einer Basis $e_1, \dots, e_n$ vor, so lässt sich durch die Festlegung der n^2 Basisprodukte

$$e_u e_v,\ 1 \leq u, v \leq n,$$

eine Algebra eindeutig bestimmen. Denn sind $x = \sum_{u=1}^{n} \alpha_u e_u$ und $y = \sum_{v=1}^{n} \beta_v e_v$ beliebige Elemente in V, so gilt wegen der Distributivgesetze

$$xy = \sum_{u,v=1}^{n} (\alpha_u \beta_v) e_u e_v.$$

Assoziativität und Kommutativität lassen sich dann einfach anhand der Basisprodukte überprüfen.

Historisches

1805 Geboren in Dublin

1827 Berufung zum Professor der Astronomie

1835 Ritterschlag

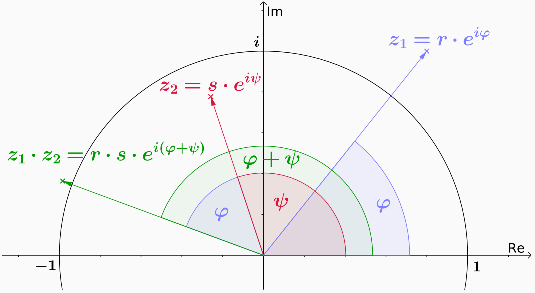
1837–1845 Präsident der Royal Irish Academy

1843 Erfindung der Quaternionen

1865 Gestorben in Dunsink

Sir William Rowan HAMILTON [4]

- Hamilton beschäftigt sich 1835 mit der geometrischen Bedeutung der *komplexen Zahlen* im $\mathbb{R}^2$
- Er fragt sich: „Gibt es eine ähnliche Interpretation im $\mathbb{R}^3$?"



Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation [3]

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.

> „Well, Papa, can you multiply triplets?“
> „No, I can only add and subtract them.“
>
> — Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.

> „Well, Papa, can you multiply triplets?“
> „No, I can only add and subtract them.“
>
> — Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies: $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

> „Well, Papa, can you multiply triplets?“
> „No, I can only add and subtract them.“
>
> — Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies: $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

> „Well, Papa, can you multiply triplets?“
> „No, I can only add and subtract them.“
>
> — Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was $ji = -ij \neq 0$ erlaubt.

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies: $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

> „Well, Papa, can you multiply triplets?“
> „No, I can only add and subtract them.“
>
> — Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was $ji = -ij \neq 0$ erlaubt.
- Die entscheidende Idee kommt ihm 1843:
  Er setzt $ij := k, ji = -k$ und nimmt k als linear unabhängig von i und j an.

Gedenktafel an der *Broome Bridge* in Dublin [2]

Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$

Hamilton definiert die *Quaternionen-Algebra* $\mathbb{H}$ durch die Festlegung der Produkte der Basiselemente

$$e_1 := (1,0,0,0),\ e_2 := (0,1,0,0),\ e_3 := (0,0,1,0),\ e_4 := (0,0,0,1):$$

	e_2	e_3	e_4
e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

(Es sei e_1 das Einselement.)

Man sieht direkt, dass $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist. Die Assoziativität lässt sich wie im Einführungsabschnitt besprochen überprüfen.

Neben dieser klassischen Konstruktion von $\mathbb{H}$ gibt es noch einen eleganteren Weg, der uns viele Eigenschaften der Quaternionen-Algebra direkter liefert:

Theorem

Die Menge $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-Unteralgebra von* $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ *mit Einselement* E_2*.* $\mathcal{H}$ *ist eine vierdimensionale, assoziative Divisionsalgebra.*

Beweis.

Man verifiziert durch Nachrechnen, dass $\mathcal{H}$ ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-UVR von $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ ist. Auch die Abgeschlossenheit bezüglich der Matrizenmultiplikation überprüft man auf diese Weise.

Die Assoziativität ist klar, da $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ assoziativ ist.

Beweis.

Um einzusehen, dass $\mathcal{H}$ auch eine Divisionsalgebra ist, benutzen wir das eingangs bewiesene Nullteilerkriterium:
Seien also $A, B \in \mathcal{H}$ mit $AB = 0$. Wegen des Determinantenmultiplikationsatzes gilt $\det(A) \cdot \det(B) = 0$, also $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$. Aus

$$\det \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = |w|^2 + |z|^2 = 0 \iff w = z = 0$$

folgt

$$AB = 0 \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass $\mathcal{H}$ keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt. Damit ist $\mathcal{H}$ eine Divisionsalgebra. $\square$

Lemma

Die Abbildung

$$F\colon \mathbb{H} \to \mathcal{H}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix},$$

ist ein $\mathbb{R}$*-Algebra-Isomorphismus und es gilt:*

$$F(e_1) = E_2 =: E, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I,$$

$$F(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, \quad F(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K.$$

Korollar

Die Hamiltonsche Algebra $\mathbb{H}$ ist eine assoziative Divisionsalgebra.

Korollar

Die Hamiltonsche Algebra $\mathbb{H}$ ist eine assoziative Divisionsalgebra.

Beweis.

Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra ist.

Durch den oben beschriebenen Isomorphismus F ist also auch $\mathbb{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra. $\square$

Man muss also „nur" mit komplexen Matrizen rechnen können, um den Umgang mit der Quaternionen-Algebra zu beherrschen.

Der Imaginärraum von $\mathbb{H}$

Definition

Der Untervektorraum

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) = \left\{x \in \mathbb{H} \colon x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\right\}.$$

Definition

Der Untervektorraum

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) = \left\{x \in \mathbb{H} \colon x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\right\}.$$

Wegen $x^2 \in \mathbb{R}e \not\subseteq \mathfrak{I}(\mathbb{H})$ ist $\mathfrak{I}(\mathbb{H})$ keine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathbb{H}$.

Aus dieser Darstellung folgert man, dass es zu jedem $u \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})$, $u \neq 0$, einen Skalar ϱ mit $(\varrho u)^2 = -e$ gibt. (Man kann also normieren.)

Seien $u = \beta i + \gamma j + \delta k$, $v = \varrho i + \sigma j + \tau k$. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$uv = -(\beta\varrho + \gamma\sigma + \delta\tau)e + (\gamma\tau - \delta\sigma)i + (\delta\varrho - \beta\tau)j + (\beta\sigma - \gamma\varrho)k.$$

Dies kann man auch schreiben als

$$uv = -\langle u, v\rangle e + u \times v,$$

und gewinnt so auf natürliche Weise Skalar- und Kreuzprodukt aus der Quaternionenmultiplikation.

Für $u, v, w \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})$ bestätigt man durch einfaches Nachrechnen:

- $u \times v = \frac{1}{2}(uv - vu)$
- $\langle v, u \rangle e = -\frac{1}{2}(uv + vu)$
- $u \times (v \times w) = \frac{1}{2}(uvw - vwu)$
- $\langle u, v \rangle^2 + |u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2$
- $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$ (Vertauschungsregel)
- $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$ (Grassmann-Identität)
- $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ (Jacobi-Identität)

Zentrum von $\mathbb{H}$

Theorem

Für die Algebra $\mathbb{H}$ gilt:

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e = \{x \in \mathbb{H} \colon xu = ux \text{ für alle } u \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})\}.$$

Beweis.

Es ist klar, dass $\mathbb{R}e \subseteq Z(\mathbb{H})$; denn e ist neutrales Element, also per Definition mit allen Elementen aus $\mathbb{H}$ kommutativ. Die Skalare sind natürlich ebenfalls kommutativ zueinander.

Beweis.

Zur Umkehrung.

Sei $x = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in Z(\mathbb{H})$, das heißt, x kommutiert mit allen Elementen aus $\mathbb{H}$. Insbesondere kommutiert x mit den Basiselementen $i, j \in \mathbb{H}$, es muss also $ix = xi$ und $jx = xj$ gelten.

Wir wollen zeigen, dass dann bereits $x \in \mathbb{R}e$ ist.

Beweis.

Ausmultiplizieren der ersten Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} && xi &= ix \\ \Longleftrightarrow && \alpha i - \beta + \gamma k - \delta j &= \alpha i - \beta - \gamma k + \delta j \\ \Longleftrightarrow && \gamma k - \delta j &= -\gamma k + \delta j \\ \Longleftrightarrow && \gamma k - \delta j &= -(\gamma k - \delta j) \\ \Longleftrightarrow && 2\gamma k - 2\delta j &= 0 \\ \Longleftrightarrow && \gamma = \delta &= 0. \end{aligned}$$

Beweis.

Analog ergibt sich aus der zweiten Gleichung $\beta = \delta = 0$. Damit ist $\beta = \gamma = \delta = 0$. x ist demnach von der Form $x = \alpha e$, also $x \in \mathbb{R}e$. Das bedeutet $Z(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}e$, und damit folgt aus dem ersten Teil wie gewünscht

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e.$$

$\square$

Endomorphismen von $\mathbb{H}$

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen

Literatur

H.D. Ebbinghaus u. a. *Zahlen*. Grundwissen Mathematik. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 978-3-540-55654-1. URL: https://books.google.de/books?id=c1jOfh4CxhoC.

JP. *William Rowan Hamilton Plaque Plaque on Broome Bridge on the Royal Canal commemorating William Rowan Hamilton's discovery. The plaque reads:* 25. Feb. 2007. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg (besucht am 03. 07. 2020).

Kmhkmh. *Multiplication of complex numbers*. 29. Dez. 2016. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Komplexe_multiplikation.svg (besucht am 03. 07. 2020).

Unknown Artist. *Painting of Sir William Rowan Hamilton*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_painting.jpg (besucht am 03. 07. 2020).