

# HAMILTONsche Quaternionen

Proseminar Mathematik

---

Leon Richardt

7. Juli 2020

Universität Osnabrück

Reelle Algebren

Historisches

Die Quaternionenalgebra  $\mathbb{H}$

Der Imaginärraum von  $\mathbb{H}$

Zentrum von  $\mathbb{H}$

Endomorphismen von  $\mathbb{H}$

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen

# Reelle Algebren

### Anmerkung

In dieser Präsentation stehen kleine griechische Buchstaben stets für reelle Zahlen; lateinische Buchstaben stehen für Elemente der momentan betrachteten Algebra.

## Definition

Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  mit einer Produktabbildung

$$V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto xy$$

heißt **Algebra** über  $\mathbb{R}$  (oder reelle Algebra), wenn die beiden Distributivgesetze

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $x, y, z \in V$  erfüllt sind.

## Definition

Ein Element  $x$  einer Algebra  $\mathcal{A}$  heißt *Nullteiler*, falls es ein Element  $0 \neq y \in \mathcal{A}$  mit  $xy = 0$  oder  $yx = 0$  gibt.

Konsequenterweise heißt eine Algebra *nullteilerfrei*, falls sie keine Nullteiler  $\neq 0$  besitzt.

## Definition

Eine Algebra  $\mathcal{A} = (V, \cdot)$  heißt ...

- ... *assoziativ*, wenn  $x(yz) = (xy)z$  für alle  $x, y, z \in V$  gilt.
- ... *kommutativ*, wenn  $xy = yx$  für alle  $x, y \in V$  gilt.
- ... *mit Einselement*, wenn es ein Element  $e \in V$  mit  $ex = xe = x$  für alle  $x \in V$  gibt.
- ... *Divisionsalgebra*, falls  $\mathcal{A} \neq 0$  und die Gleichungen

$$ax = b \text{ und } ya = b$$

für alle  $a, b \in V, a \neq 0$ , eindeutig lösbar sind.

## Lemma

*Folgende Aussagen über eine endlichdimensionale Algebra  $A$  sind äquivalent:*

- i)  *$A$  ist Divisionsalgebra.*
- ii)  *$A$  ist nullteilerfrei.*



## Beweis.

i)  $\Rightarrow$  ii) ist klar.

ii)  $\Rightarrow$  i):

Sei  $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ . Die Abbildung  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, x \mapsto ax$  ist ein VR-Endomorphismus. Wegen der Nullteilerfreiheit ist  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , was aufgrund des Kernkriteriums die Injektivität bedeutet. Da weiterhin  $\dim(\mathcal{A}) < \infty$ , folgt aus der Dimensionsformel die Bijektivität. Damit ist jede Gleichung der Form  $ax = b$  eindeutig lösbar.

Die eindeutige Lösbarkeit von  $ya = b$  ergibt sich durch analoge Betrachtung der Abbildung  $y \mapsto ya$ . □

Liegt ein VR  $V$  mit einer Basis  $e_1, \dots, e_n$  vor, so lässt sich durch die Festlegung der  $n^2$  Basisprodukte

$$e_u e_v, \quad 1 \leq u, v \leq n,$$

eine Algebra eindeutig bestimmen. Denn sind  $x = \sum_{u=1}^n \alpha_u e_u$  und  $y = \sum_{v=1}^n \beta_v e_v$  beliebige Elemente in  $V$ , so gilt wegen der Distributivgesetze

$$xy = \sum_{u,v=1}^n (\alpha_u \beta_v) e_u e_v.$$

Assoziativität und Kommutativität lassen sich dann einfach anhand der Basisprodukte überprüfen.

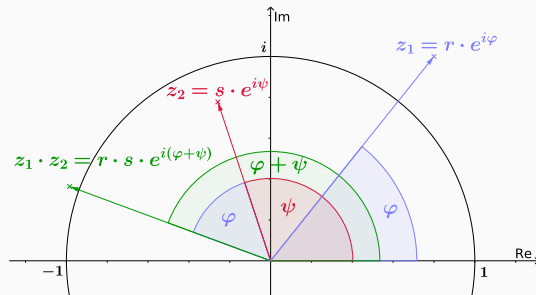
Historisches

- 1805 Geboren in Dublin
- 1827 Berufung zum Professor der  
Astronomie
- 1835 Ritterschlag
- 1837–1845 Präsident der Royal Irish  
Academy
- 1843 Erfindung der Quaternionen
- 1865 Gestorben in Dunsink



Sir William Rowan HAMILTON [4]

- Hamilton beschäftigt sich 1835 mit der geometrischen Bedeutung der *komplexen Zahlen* im  $\mathbb{R}^2$
- Er fragt sich: „Gibt es eine ähnliche Interpretation im  $\mathbb{R}^3$ ?“



Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation [3]

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“  
„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz:  $x = \alpha + \beta i + \gamma j$  mit  $i^2 = j^2 = -1$ .

„Well, Papa, can you multiply triplets?“

„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz:  $x = \alpha + \beta i + \gamma j$  mit  $i^2 = j^2 = -1$ .
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel  $ij + ji = 0$  gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:  
 $2ij = 0 \implies ij = 0$ , was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“  
„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn



- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz:  $x = \alpha + \beta i + \gamma j$  mit  $i^2 = j^2 = -1$ .
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel  $ij + ji = 0$  gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:  
 $2ij = 0 \implies ij = 0$ , was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“  
 „No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

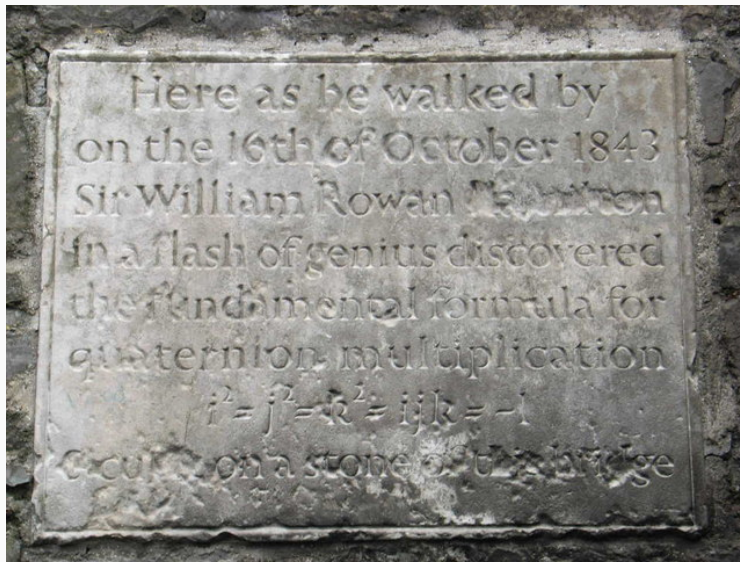
- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was  $ji = -ij \neq 0$  erlaubt.

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz:  $x = \alpha + \beta i + \gamma j$  mit  $i^2 = j^2 = -1$ .
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel  $ij + ji = 0$  gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:  
 $2ij = 0 \implies ij = 0$ , was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“  
 „No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was  $ji = -ij \neq 0$  erlaubt.
- Die entscheidende Idee kommt ihm 1843:  
 Er setzt  $ij := k, ji = -k$  und nimmt  $k$  als linear unabhängig von  $i$  und  $j$  an.



Gedenktafel an der *Broome Bridge* in Dublin [2]

# Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$

Hamilton definiert die *Quaternionen-Algebra*  $\mathbb{H}$  durch die Festlegung der Produkte der Basiselemente

$$e_1 := (1, 0, 0, 0), e_2 := (0, 1, 0, 0), e_3 := (0, 0, 1, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1) :$$

	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$
$e_4$	$e_3$	$-e_2$	$-e_1$

(Es sei  $e_1$  das Einselement.)

Man sieht direkt, dass  $\mathbb{H}$  nicht kommutativ ist. Die Assoziativität lässt sich wie im Einführungsabschnitt besprochen überprüfen.

Neben dieser klassischen Konstruktion von  $\mathbb{H}$  gibt es noch einen eleganteren Weg, der uns viele Eigenschaften der Quaternionen-Algebra direkter liefert:

### Theorem

Die Menge  $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von  $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$  mit Einselement  $E_2$ .  $\mathcal{H}$  ist eine vierdimensionale, assoziative Divisionsalgebra.

### **Beweis.**

Man verifiziert durch Nachrechnen, dass  $\mathcal{H}$  ein vierdimensionaler  $\mathbb{R}$ -UVR von  $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$  ist. Auch die Abgeschlossenheit bezüglich der Matrizenmultiplikation überprüft man auf diese Weise.

Die Assoziativität ist klar, da  $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$  assoziativ ist.

## Beweis.

Um einzusehen, dass  $\mathcal{H}$  auch eine Divisionsalgebra ist, benutzen wir das eingangs bewiesene Nullteilerkriterium:

Seien also  $A, B \in \mathcal{H}$  mit  $AB = 0$ . Wegen des Determinantenmultiplikationsatzes gilt  $\det(A) \cdot \det(B) = 0$ , also  $\det(A) = 0$  oder  $\det(B) = 0$ . Aus

$$\det \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = |w|^2 + |z|^2 = 0 \iff w = z = 0$$

folgt

$$AB = 0 \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass  $\mathcal{H}$  keine Nullteiler  $\neq 0$  besitzt. Damit ist  $\mathcal{H}$  eine Divisionsalgebra. □



## Lemma

*Die Abbildung*

$$F: \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix},$$

*ist ein  $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus und es gilt:*

$$\begin{aligned} F(e_1) &= E_2 =: E, & F(e_2) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \\ F(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, & F(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K. \end{aligned}$$

## Korollar

*Die Hamiltonsche Algebra  $\mathbb{H}$  ist eine assoziative Divisionsalgebra.*

## Korollar

*Die Hamiltonsche Algebra  $\mathbb{H}$  ist eine assoziative Divisionsalgebra.*

## Beweis.

Wir haben gezeigt, dass  $\mathcal{H}$  eine assoziative Divisionsalgebra ist.

Durch den oben beschriebenen Isomorphismus  $F$  ist also auch  $\mathbb{H}$  eine assoziative Divisionsalgebra. □

Man muss also „nur“ mit komplexen Matrizen rechnen können, um den Umgang mit der Quaternionen-Algebra zu beherrschen.

Der Imaginärraum von  $\mathbb{H}$

## Definition

Der Untervektorraum

$$\Im(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\Im(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}.$$

## Definition

Der Untervektorraum

$$\Im(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\Im(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}.$$

Wegen  $x^2 \in \mathbb{R}e \not\subseteq \Im(\mathbb{H})$  ist  $\Im(\mathbb{H})$  keine  $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von  $\mathbb{H}$ .

Aus dieser Darstellung folgert man, dass es zu jedem  $u \in \Im(\mathbb{H})$ ,  $u \neq 0$ , einen Skalar  $\varrho$  mit  $(\varrho u)^2 = -e$  gibt. (Man kann also normieren.)

Seien  $u = \beta i + \gamma j + \delta k$ ,  $v = \varrho i + \sigma j + \tau k$ . Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$uv = -(\beta\varrho + \gamma\sigma + \delta\tau)e + (\gamma\tau - \delta\sigma)i + (\delta\varrho - \beta\tau)j + (\beta\sigma - \gamma\varrho)k.$$

Dies kann man auch schreiben als

$$uv = -\langle u, v \rangle e + u \times v,$$

und gewinnt so auf natürliche Weise Skalar- und Kreuzprodukt aus der Quaternionenmultiplikation.

Für  $u, v, w \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})$  bestätigt man durch einfaches Nachrechnen:

$$\cdot u \times v = \frac{1}{2}(uv - vu)$$

$$\cdot \langle v, u \rangle e = -\frac{1}{2}(uv + vu)$$

$$\cdot u \times (v \times w) = \frac{1}{2}(uvw - vwu)$$

$$\cdot \langle u, v \rangle^2 + |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2$$

$$\cdot \langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$$

(Vertauschungsregel)

$$\cdot u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$

(GRASSMANN-Identität)

$$\cdot u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

(JACOBI-Identität)



Zentrum von  $\mathbb{H}$

## Definition

Für eine Algebra  $\mathcal{A}$  heißt

$$Z(\mathcal{A}) := \{z \in \mathcal{A} : zx = xz \text{ für alle } x \in \mathcal{A}\}$$

*Zentrum* von  $\mathcal{A}$ . Es handelt sich also um diejenigen Elemente in  $\mathcal{A}$ , die mit allen Elementen kommutieren.

Ist  $\mathcal{A}$  assoziativ, so ist  $Z(\mathcal{A})$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{A}$ . Falls  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, so ist  $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . Ist  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit Einselement, so ist trivialerweise  $\mathbb{R}e \subseteq Z(\mathcal{A})$ .

## Theorem

*Für die Algebra  $\mathbb{H}$  gilt:*

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e = \{x \in \mathbb{H} : xu = ux \text{ für alle } u \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})\}.$$

### Beweis.

Es ist klar, dass  $\mathbb{R}e \subseteq Z(\mathbb{H})$ ; denn  $e$  ist neutrales Element, also per Definition mit allen Elementen aus  $\mathbb{H}$  kommutativ. Die Skalare sind natürlich ebenfalls kommutativ zueinander.

### Beweis.

Zur Umkehrung.

Sei  $x = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in Z(\mathbb{H})$ , das heißt,  $x$  kommutiert mit allen Elementen aus  $\mathbb{H}$ . Insbesondere kommutiert  $x$  mit den Basiselementen  $i, j \in \mathbb{H}$ , es muss also  $ix = xi$  und  $jx = xj$  gelten.

Wir wollen zeigen, dass dann bereits  $x \in \mathbb{R}e$  ist.

## Beweis.

Ausmultiplizieren der ersten Gleichung ergibt

$$xi = ix$$

$$\Leftrightarrow \alpha i - \beta + \gamma k - \delta j = \alpha i - \beta - \gamma k + \delta j$$

$$\Leftrightarrow \gamma k - \delta j = -\gamma k + \delta j$$

$$\Leftrightarrow \gamma k - \delta j = -(\gamma k - \delta j)$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma k - 2\delta j = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \delta = 0.$$

### Beweis.

Analog ergibt sich aus der zweiten Gleichung  $\beta = \delta = 0$ . Damit ist  $\beta = \gamma = \delta = 0$ .  $x$  ist demnach von der Form  $x = \alpha e$ , also  $x \in \mathbb{R}e$ . Das bedeutet  $Z(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}e$ , und damit folgt aus dem ersten Teil wie gewünscht

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e.$$



Endomorphismen von  $\mathbb{H}$



Es sei  $\text{End}(\mathbb{H})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Endomorphismen von  $\mathbb{H}$ .

### Theorem

Ist  $a_1, \dots, a_4$  eine Basis von  $\mathbb{H}$ , so ist die Abbildung

$$F: \mathbb{H}^4 \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \mapsto f \in \text{End}(\mathbb{H}) \text{ mit } f(x) := \sum_{i=1}^4 a_i x b_i$$

$\mathbb{R}$ -linear und bijektiv.

Es lässt sich (bei fixierter Basis) also jeder Endomorphismus von  $\mathbb{H}$  eindeutig durch ein Tupel  $(b_1, \dots, b_4)$  identifizieren.

## Beweis.

Die  $\mathbb{R}$ -Linearität sieht man schnell ein.

Da  $\dim(\mathbb{H}^4) = \dim(\text{End}(\mathbb{H})) = 16 < \infty$ , braucht man nur die Injektivität zeigen. Dann folgt aus der Dimensionsformel die Surjektivität und damit auch die Bijektivität. Für den Beweis der Injektivität benutzen wir das Kernkriterium.

Dazu zeigen wir die Hilfsaussage:

$$\text{Sei } n = 1, 2, 3, 4, \text{ sei } f_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{H}.$$
$$\text{Dann gilt } b_1 = \dots = b_n = 0.$$

## Beweis.

Wir gehen induktiv vor, der Fall  $n = 1$  ist klar. Sei also  $n > 1$ . In der Absicht, einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir  $b_1 \neq 0$  an:

$$a_1x + \sum_{i=2}^n a_i x q_i = 0 \quad \text{mit } q_i := b_i b_1^{-1}.$$

Da  $f_n(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{H}$ , gilt:

$$\begin{aligned} & f(x)y = 0 = f(xy) \\ \Leftrightarrow & a_1xy + \sum_{i=2}^n a_i x q_i y = a_1xy + \sum_{i=2}^n a_i xy q_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=2}^n a_i x (q_i y) - \sum_{i=2}^n a_i x (y q_i) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=2}^n a_i x (q_i y - y q_i) = 0 \end{aligned}$$

### Beweis.

Da die  $a_i$  Basiselemente sind, ist  $a_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, 4$ . Deswegen muss

$$q_i y - y q_i = 0 \iff q_i y = y q_i$$

für alle  $y \in \mathbb{H}$  gelten.

Damit ist  $q_i \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e$  nach dem vorherigen Abschnitt, also

$$q_i = \alpha_i e \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

## Beweis.

Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} a_1x + \sum_{i=2}^n a_i x q_i &= 0 \\ \Leftrightarrow a_1x + \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i x &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( a_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i \right) x &= 0 \\ \Leftrightarrow a_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i &= 0. \end{aligned}$$

### Beweis.

Dann wären die  $a_1, \dots, a_4$  linear abhängig, was aber aufgrund der Basiseigenschaft ein Widerspruch ist.

Also muss doch  $b_1 = 0$ . Analog erhält man  $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ .

Damit ist der Kern von  $F$  trivial; also ist  $F$  injektiv und nach der Dimensionsformel auch bijektiv. □

# Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen

# Literatur




H.D. Ebbinghaus u. a. *Zahlen*. Grundwissen Mathematik. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 978-3-540-55654-1. URL: <https://books.google.de/books?id=c1j0fh4CxhoC>.



JP. *William Rowan Hamilton Plaque Plaque on Broome Bridge on the Royal Canal commemorating William Rowan Hamilton's discovery. The plaque reads:* 25. Feb. 2007. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William\\_Rowan\\_Hamilton\\_Plaque\\_-\\_geograph.org.uk\\_-\\_347941.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg) (besucht am 03.07.2020).



 Kmhkmh. *Multiplication of complex numbers*. 29. Dez. 2016. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Komplexe\\_multiplikation.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Komplexe_multiplikation.svg) (besucht am 03.07.2020).

 Unknown Artist. *Painting of Sir William Rowan Hamilton*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William\\_Rowan\\_Hamilton\\_painting.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_painting.jpg) (besucht am 03.07.2020).