

HAMILTONsche Quaternionen

Proseminar Mathematik

Leon Richardt

7. Juli 2020

Universität Osnabrück

Überblick

Reelle Algebren

Historisches

Die Quaternionenalgebra \mathbb{H}

Der Imaginärraum von \mathbb{H}

Zentrum von \mathbb{H}

Endomorphismen von \mathbb{H}

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen

Reelle Algebren

Anmerkung

In dieser Präsentation stehen kleine griechische Buchstaben stets für reelle Zahlen; lateinische Buchstaben stehen für Elemente der momentan betrachteten Algebra.

Definition

Ein Vektorraum V über \mathbb{R} mit einer Produktabbildung

$$V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto xy$$

heißt **Algebra** über \mathbb{R} (oder reelle Algebra), wenn die beiden Distributivgesetze

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ erfüllt sind.

Definition

Ein Element x einer Algebra \mathcal{A} heißt *Nullteiler*, falls es ein Element $0 \neq y \in \mathcal{A}$ mit $xy = 0$ oder $yx = 0$ gibt.

Konsequenterweise heißt eine Algebra *nullteilerfrei*, falls sie keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt.

Definition

Eine Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ heißt ...

- ... *assoziativ*, wenn $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in V$ gilt.
- ... *kommutativ*, wenn $xy = yx$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- ... *mit Einselement*, wenn es ein Element $e \in V$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in V$ gibt.
- ... *Divisionsalgebra*, falls $\mathcal{A} \neq 0$ und die Gleichungen

$$ax = b \text{ und } ya = b$$

für alle $a, b \in V, a \neq 0$, eindeutig lösbar sind.

Lemma

Folgende Aussagen über eine endlichdimensionale Algebra A sind äquivalent:

- i) *A ist Divisionsalgebra.*
- ii) *A ist nullteilerfrei.*

Beweis.

i) \Rightarrow ii) ist klar.

ii) \Rightarrow i):

Sei $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Die Abbildung $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, x \mapsto ax$ ist ein VR-Endomorphismus. Wegen der Nullteilerfreiheit ist $\ker(\varphi) = \{0\}$, was aufgrund des Kernkriteriums die Injektivität bedeutet. Da weiterhin $\dim(\mathcal{A}) < \infty$, folgt aus der Dimensionsformel die Bijektivität. Damit ist jede Gleichung der Form $ax = b$ eindeutig lösbar.

Die eindeutige Lösbarkeit von $ya = b$ ergibt sich durch analoge Betrachtung der Abbildung $y \mapsto ya$. □

Liegt ein VR V mit einer Basis e_1, \dots, e_n vor, so lässt sich durch die Festlegung der n^2 Basisprodukte

$$e_u e_v, \quad 1 \leq u, v \leq n,$$

eine Algebra eindeutig bestimmen. Denn sind $x = \sum_{u=1}^n \alpha_u e_u$ und $y = \sum_{v=1}^n \beta_v e_v$ beliebige Elemente in V , so gilt wegen der Distributivgesetze

$$xy = \sum_{u,v=1}^n (\alpha_u \beta_v) e_u e_v.$$

Assoziativität und Kommutativität lassen sich dann einfach anhand der Basisprodukte überprüfen.

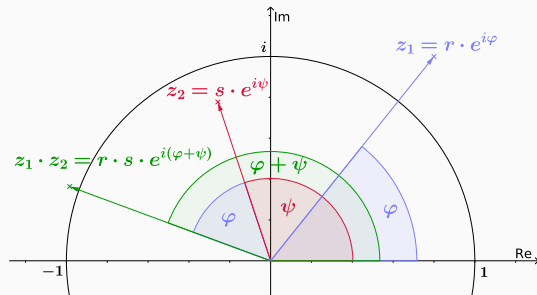
Historisches

- 1805 Geboren in Dublin
- 1827 Berufung zum Professor der
Astronomie
- 1835 Ritterschlag
- 1837–1845 Präsident der Royal Irish
Academy
- 1843 Erfindung der Quaternionen
- 1865 Gestorben in Dunsink



Sir William Rowan HAMILTON [4]

- Hamilton beschäftigt sich 1835 mit der geometrischen Bedeutung der *komplexen Zahlen* im \mathbb{R}^2
- Er fragt sich: „Gibt es eine ähnliche Interpretation im \mathbb{R}^3 ?“



Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation [3]

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“
„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“

„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:
 $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“
„No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:
 $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“
 „No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

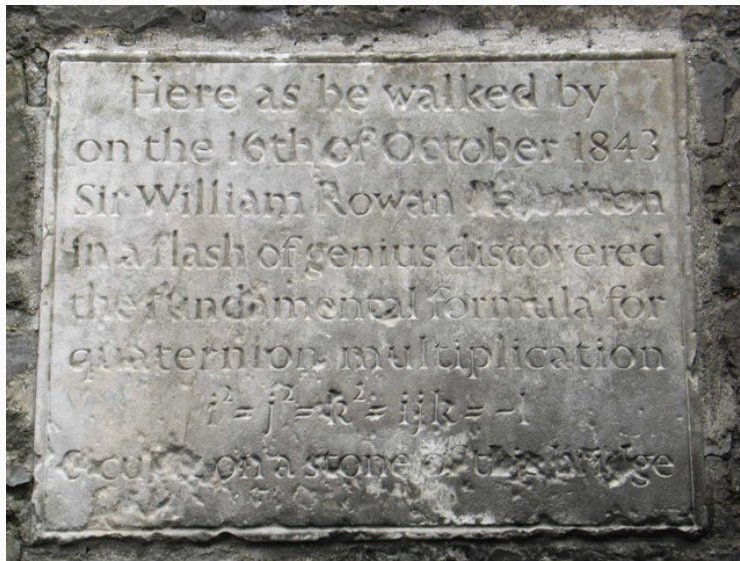
- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was $ji = -ij \neq 0$ erlaubt.

- Hamilton sucht eine Multiplikation, die die bisherigen Regeln und Beziehungen weiterhin erfüllt.
- Erster Ansatz: $x = \alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$.
- Er stellt fest, dass für die Gültigkeit der Produktregel $ij + ji = 0$ gelten muss. Unter Erhaltung der Kommutativität hieße dies:
 $2ij = 0 \implies ij = 0$, was ihm aber nicht gefällt.

„Well, Papa, can you multiply triplets?“
 „No, I can only add and subtract them.“

— Gespräch zwischen Hamilton und seinem Sohn

- Stattdessen gibt Hamilton lieber die Kommutativität auf, was $ji = -ij \neq 0$ erlaubt.
- Die entscheidende Idee kommt ihm 1843:
 Er setzt $ij := k, ji = -k$ und nimmt k als linear unabhängig von i und j an.



Gedenktafel an der *Broome Bridge* in Dublin [2]

Die Quaternionenalgebra \mathbb{H}

Hamilton definiert die *Quaternionen-Algebra* \mathbb{H} durch die Festlegung der Produkte der Basiselemente

$$e_1 := (1, 0, 0, 0), e_2 := (0, 1, 0, 0), e_3 := (0, 0, 1, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1) :$$

	e_2	e_3	e_4
e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

(Es sei e_1 das Einselement.)

Man sieht direkt, dass \mathbb{H} nicht kommutativ ist. Die Assoziativität lässt sich wie im Einführungsabschnitt besprochen überprüfen.

Neben dieser klassischen Konstruktion von \mathbb{H} gibt es noch einen eleganteren Weg, der uns viele Eigenschaften der Quaternionen-Algebra direkter liefert:

Theorem

Die Menge $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine \mathbb{R} -Unteralgebra von $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ mit Einselement E_2 . \mathcal{H} ist eine vierdimensionale, assoziative Divisionsalgebra.

Beweis.

Man verifiziert durch Nachrechnen, dass \mathcal{H} ein vierdimensionaler \mathbb{R} -UVR von $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ ist. Auch die Abgeschlossenheit bezüglich der Matrizenmultiplikation überprüft man auf diese Weise.

Die Assoziativität ist klar, da $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ assoziativ ist.

Beweis.

Um einzusehen, dass \mathcal{H} auch eine Divisionsalgebra ist, benutzen wir das eingangs bewiesene Nullteilerkriterium:

Seien also $A, B \in \mathcal{H}$ mit $AB = 0$. Wegen des Determinantenmultiplikationsatzes gilt $\det(A) \cdot \det(B) = 0$, also $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$. Aus

$$\det \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = |w|^2 + |z|^2 = 0 \iff w = z = 0$$

folgt

$$AB = 0 \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass \mathcal{H} keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt. Damit ist \mathcal{H} eine Divisionsalgebra. □

Lemma

Die Abbildung

$$F: \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix},$$

ist ein \mathbb{R} -Algebra-Isomorphismus und es gilt:

$$\begin{aligned} F(e_1) &= E_2 =: E, & F(e_2) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =: I, \\ F(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J, & F(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} =: K. \end{aligned}$$

Korollar

Die Hamiltonsche Algebra \mathbb{H} ist eine assoziative Divisionsalgebra.

Korollar

Die Hamiltonsche Algebra \mathbb{H} ist eine assoziative Divisionsalgebra.

Beweis.

Wir haben gezeigt, dass \mathcal{H} eine assoziative Divisionsalgebra ist.

Durch den oben beschriebenen Isomorphismus F ist also auch \mathbb{H} eine assoziative Divisionsalgebra. □

Man muss also „nur“ mit komplexen Matrizen rechnen können, um den Umgang mit der Quaternionen-Algebra zu beherrschen.

Der Imaginärraum von \mathbb{H}

Definition

Der Untervektorraum

$$\Im(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\Im(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}.$$

Definition

Der Untervektorraum

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

heißt *Imaginärraum*. Seine Elemente werden auch als vektorielle Quaternionen bezeichnet.

Äquivalent zu dieser (basisabhängigen) Darstellung ist die Form

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}.$$

Wegen $x^2 \in \mathbb{R}e \not\subseteq \mathfrak{I}(\mathbb{H})$ ist $\mathfrak{I}(\mathbb{H})$ keine \mathbb{R} -Unteralgebra von \mathbb{H} .

Aus dieser Darstellung folgert man, dass es zu jedem $u \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})$, $u \neq 0$, einen Skalar ϱ mit $(\varrho u)^2 = -e$ gibt. (Man kann also normieren.)

Seien $u = \beta i + \gamma j + \delta k$, $v = \varrho i + \sigma j + \tau k$. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$uv = -(\beta\varrho + \gamma\sigma + \delta\tau)e + (\gamma\tau - \delta\sigma)i + (\delta\varrho - \beta\tau)j + (\beta\sigma - \gamma\varrho)k.$$

Dies kann man auch schreiben als

$$uv = -\langle u, v \rangle e + u \times v,$$

und gewinnt so auf natürliche Weise Skalar- und Kreuzprodukt aus der Quaternionenmultiplikation.

Zentrum von \mathbb{H}

Theorem

Für die Algebra \mathbb{H} gilt:

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e = \{x \in \mathbb{H} : xu = ux \text{ für alle } u \in \mathfrak{I}(\mathbb{H})\}.$$

Beweis.

Es ist klar, dass $\mathbb{R}e \subseteq Z(\mathbb{H})$; denn e ist neutrales Element, also per Definition mit allen Elementen aus \mathbb{H} kommutativ. Die Skalare sind natürlich ebenfalls kommutativ zueinander.

Beweis.

Zur Umkehrung.

Sei $x = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in Z(\mathbb{H})$, das heißt, x kommutiert mit allen Elementen aus \mathbb{H} . Insbesondere kommutiert x mit den Basiselementen $i, j \in \mathbb{H}$, es muss also $ix = xi$ und $jx = xj$ gelten.

Wir wollen zeigen, dass dann bereits $x \in \mathbb{R}e$ ist.

Beweis.

Ausmultiplizieren der ersten Gleichung ergibt

$$xi = ix$$

$$\Leftrightarrow \alpha i - \beta + \gamma k - \delta j = \alpha i - \beta - \gamma k + \delta j$$

$$\Leftrightarrow \gamma k - \delta j = -\gamma k + \delta j$$

$$\Leftrightarrow \gamma k - \delta j = -(\gamma k - \delta j)$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma k - 2\delta j = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \delta = 0.$$

Beweis.

Analog ergibt sich aus der zweiten Gleichung $\beta = \delta = 0$. Damit ist $\beta = \gamma = \delta = 0$. x ist demnach von der Form $x = \alpha e$, also $x \in \mathbb{R}e$. Das bedeutet $Z(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}e$, und damit folgt aus dem ersten Teil wie gewünscht





$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}e.$$



Endomorphismen von \mathbb{H}

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen

Literatur

-  H.D. Ebbinghaus u. a. *Zahlen*. Grundwissen Mathematik. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 978-3-540-55654-1. URL: <https://books.google.de/books?id=c1j0fh4CxhoC>.
-  JP. *William Rowan Hamilton Plaque Plaque on Broome Bridge on the Royal Canal commemorating William Rowan Hamilton's discovery. The plaque reads:* 25. Feb. 2007. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg (besucht am 03.07.2020).
-  Kmhkmh. *Multiplication of complex numbers*. 29. Dez. 2016. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Komplexe_multiplikation.svg (besucht am 03.07.2020).
-  Unknown Artist. *Painting of Sir William Rowan Hamilton*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_painting.jpg (besucht am 03.07.2020).