Hamiltonsche Quaternionen

Proseminar Mathematik

Leon Richardt

7. Juli 2020

Universität Osnabrück

Überblick

Reelle Algebren

Anmerkung

In dieser Präsentation stehen kleine griechische Buchstaben stets für reelle Zahlen; lateinische Buchstaben stehen für Elemente der momentan betrachteten Algebra.

Definition

Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit einer Produktabbildung

$$V \times V \to V, (x, y) \mapsto xy$$

heißt **Algebra** über $\mathbb{R}$ (oder reelle Algebra), wenn die beiden Distributivgesetze

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz,$$
$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ erfüllt sind.

Definition

Eine Algebra heißt …

- … *assoziativ*, wenn $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in V$ gilt.
- … *kommutativ*, wenn $xy = xy$ für alle $x, y \in V$ gilt.
- … *mit Einselement*, wenn es ein Element $e \in V$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in V$ gibt.

Definition

Ein Element x einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Nullteiler*, falls es ein Element $0 \neq y \in \mathcal{A}$ mit $xy = 0$ oder $yx = 0$ gibt.

Konsequenterweise heißt eine Algebra *nullteilerfrei*, falls sie keine Nullteiler $\neq 0$ besitzt.

Historisches

Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$

Der Imaginärraum von $\mathbb{H}$

Der Imaginärraum von $\mathbb{H}$

Bezug zu klassischen Vektorprodukten

Zentrum von $\mathbb{H}$

Endomorphismen von $\mathbb{H}$

Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen