Abitur 2009 (Hochwasser - Lösungsvorschlag)

Einheiten

$$\begin{aligned} F(x) &\to 3600\mathrm{m}^3 \\ f(x) &\to \frac{m^3}{s} = \frac{3600\mathrm{m}^3}{3600\mathrm{s}} = 3600\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}} \qquad x \to \mathrm{h} \\ f'(x) &\to 3600\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}^2} \\ f''(x) &\to 3600\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}^3} \end{aligned}$$

Funktion 3. Grades

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ f'(x) &= 3ax^2+2bx+c \\ f''(x) &= 6ax+2b \end{aligned}$$

Infos

a)

- $\text{“}\underbrace{\text{Zu Beginn}}_{x=0}\,[\ldots]\;6600\;\underbrace{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}_{f()=6600}\text{“} \implies \text{I } f(0)=6600$
- $\text{“}\underbrace{\text{Eine Stunde nach Beginn}}_{x=1}\,[\ldots]\;\underbrace{\text{Fließgeschwindigkeit}}_{f()}\;\underbrace{\text{am größten}}_{\text{Ableitung}=0}\text{“} \implies \text{II } f'(1)=0$
- $\text{“}\underbrace{\text{Eine Stunde nach Beginn}}_{x=1}\,[\ldots]\;9000\;\underbrace{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}_{f(1)=9000}\text{“} \implies \text{III } f(1)=9000$
- $\text{“}\underbrace{\text{Drei Stunden nach Beginn}}_{x=3}\,[\ldots]\;\underbrace{\text{Fließgeschwindigkeit}}_{f()}\;\underbrace{\text{wie anfangs}}_{6600\,\underbrace{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}_{f()=6600}}\text{“} \implies \text{IV } f(3)=6600$

Einsetzen/Gleichsetzen

$$\begin{array}{rlcll} \text{I} & f(0)=6600 & \Leftrightarrow & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & =6600 \\ \text{II} & f'(1)=0 & \Leftrightarrow & 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c & =0 \\ \text{III} & f(1)=9000 & \Leftrightarrow & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & =9000 \\ \text{IV} & f(3)=6600 & \Leftrightarrow & a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d & =6600 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll l} \text{I} & \boxed{d=6600} & \\ \text{II} & 3a+2b+c & =0 \\ \text{III} & a+b+c+d & =9000 \\ \text{IV} & 27a+9b+3c+d & =6600 \end{array}$$

d=6600 einsetzen

$$\begin{array}{lll}
\text{II} & 3a+2b+c & =0 \\
\text{III} & a+b+c+6600 & =9000 \quad |-6600 \\
\text{IV} & 27a+9b+3c+6600 & =6600 \quad |-6600 \\
\hline
\text{II} & 3a+2b+c & =0 \\
\text{III} & a+b+c & =2400 \\
\text{IV} & 27a+9b+3c & =0
\end{array}$$

TR, mode-5-2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2400 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{“}=\text{“} \left.\begin{array}{c} \boxed{a=600} \\ \boxed{b=-3600} \\ \boxed{c=5400} \end{array}\right\} \boxed{f(x)=600x^3-3600x^2+5400x+6600}$$

Für die weiteren Aufgabenteile die Funktion

$$g(x)=600x^3-3500x^2+5400x+6600, \qquad 0 \le x \le 3$$

benutzen!
Die Einheiten vom Anfang gelten genauso für g(x)!

b) “ Berechne $\underbrace{\text{Fließgeschwindigkeit}}_{g()}$ [...] $\underbrace{\text{drei Stunden nach Beginn der Messung}}_{x=3}$ “

$$\begin{aligned} g(3) &= 600*3^3-3500*3^2+5400*3+6600 \\ &= 7500\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Die Fließgeschwindigkeit, drei Stunden nach Beginn der Messung, beträgt $7500\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$.
Für weit über 4 Stunden hinausgehende Zeitabschnitte sind die Werte von g(x) unrealistisch, siehe z.B.:

$$\begin{aligned} g(10) &= 600*10^3-3500*10^2+5400*10+6600 \\ &= 310600\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Dieser Wert ist im Vergleich zu denen, die in der Aufgabe zu sehen sind (maximal $9000\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$) viel zu groß.
In der Realität macht es Sinn, dass sich die Weser jeden Tag gleich (Werte wiederholend) verhält und die Fließgeschwindigkeiten sich nicht so drastisch verändern.

c) Zeige, dass $x_W = \frac{35}{18}$ die Eigenschaften eines Wendepunktes erfüllt.

Bedingungen

$$g''(x_w) = 0 \qquad \& \qquad g'''(x_w) \neq 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow > 0 \text{ TP} \\ \rightarrow < 0 \text{ HP} \end{matrix}$$

"**Zeigen** heißt, dass die Bedingungen stimmen und nachgewiesen werden müssen!"

Ableitungen bilden

$$\begin{aligned} g(x) &= 600x^3 - 3500x^2 + 5400x + 6600 \\ g'(x) &= 1800x^2 - 7000x + 5400 \\ g''(x) &= 3600x - 7000 \\ g'''(x) &= 3600 \end{aligned}$$

$g''(\frac{35}{18}) = 3600 * \frac{35}{18} - 7000 = 0$ ✓
$g'''(\frac{35}{18}) = 3600 \neq 0$ ✓ (genauer: $g'''(\frac{35}{18}) > 0$, TP der Steigung: "kleinste Steigung")

Berechne die $\underbrace{\text{Fließgeschwindigkeit}}_{g()}$ bei $x = \frac{35}{18}$:

$$\begin{aligned} g(\frac{35}{18}) &= 600 * (\frac{35}{18})^3 - 3500 * (\frac{35}{18})^2 + 5400 * \frac{35}{18} + 6600 \\ &= 8277,98 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

Erläuterung
Beim Wendepunkt ist die Steigung/Änderung von $g(x)$ Extrem. Da $g'''(x_w) = 3600 > 0$ handelt es sich hier um ein Minimum. Aus diesem Grund ist bei der Wendestelle $x_w = \frac{35}{18}$ die Änderung der Fließgeschwindigkeit minimal.

d) Berechne A:

$$\begin{aligned} A &= 3600 \int_1^3 g(x)dx = 3600 \int_1^3 600x^3 - 3500x^2 + 5400x + 6600 \, dx \\ &= 3600 \cdot \left[\underbrace{\frac{600}{4}x^4 - \frac{3500}{3}x^3 + \frac{5400}{2}x^2 + 6600x}_{G(x)} \right]_1^3 \\ &= 3600 \cdot \left[\overbrace{150x^4 - \frac{3500}{3}x^3 + 2700x^2 + 6600x} \right]_1^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3600 \cdot (G(3) - G(1)) \\
&= 3600 \cdot \Bigg(\left(150 * 3^4 - \frac{3500}{3} * 3^3 + 2700 * 3^2 + 6600 * 3\right) \\
&\qquad - \left(150 * 1^4 - \frac{3500}{3} * 1^3 + 2700 * 1^2 + 6600 * 1\right) \Bigg) \\
&= 3600 \cdot (24750 - \frac{24850}{3}) \\
&= 59.280.000 \text{ m}^3
\end{aligned}
$$

<u>Bedeutung im Sachzusammenhang</u>

$$A = \underbrace{\int_1^3 \underbrace{g(x)}_{\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 3600 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}} \, dx}_{\substack{\text{Hier ist g(x) noch in } \frac{m^3}{s}. \\ \text{Das verträgt sich nicht} \\ \text{mit der Einheit von } x \\ \text{beim integrieren...}}} = \int_1^3 3600 \cdot g(x) \, dx = 3600 \cdot \underbrace{\int_1^3 \underbrace{g(x)}_{\text{Hier ist g(x) nun in } \frac{m^3}{h}.} \, dx}_{\text{m}^3}$$

Der Faktor 3600 vor dem Integral ist damit die Anpassung der Einheit $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ von $g(x)$ zur Einheit $\frac{\text{m}^3}{h}$, damit aus dem Integral m^3 rauskommen können!

Demnach ist $A = 59.280.000 \text{ m}^3$ die Wassermenge, die von dem Zeitpunkt $x = 1$ (von einer Stunde nach Beginn der Messung), bis zum Zeitpunkt $x = 3$ (bis drei Stunden nach Beginn der Messung) gemessen wurde.

Lösungsvorschlag zum Abitur 2008: (Medikament)

$F(t)$	$\Rightarrow$	ml·min			
$f(t)$	$\rightarrow$	ml	t	$\rightarrow$	min
$f'(t)$	$\rightarrow$	$\frac{\text{ml}}{\text{min}}$			
$f''(t)$	$\rightarrow$	$\frac{\text{ml}}{\text{min}^2}$			

Zum Verständnis:
Dem Körper wird das Medikament zugeführt (Infusion).
$f(t)$ sagt zur Minute t an, wie viel ml davon im Körper sind.
$f'(t)$ gibt die Geschwindigkeit (Dosierung) an, mit der die Infusion zur Zeit t läuft.
Weiterhin wird sogar gesagt, dass im Anhang Abbildung 1 $f(t)$ und Abbildung 2 $f'(t)$ darstellt.

a) Nun müssen wir begründen warum:

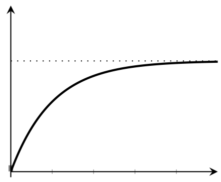
eine Möglichkeit (Logik)

1) Das Medikament wird dem Patienten zugeführt und zwar solange bis die Konzentration erreicht wird, die der Arzt im Körper haben möchte. Daher wird das Medikament im Körper mehr, es muss sich um ein Wachstum handeln und Abbildung 1 ist $f(t)$.

2) Die Geschwindigkeit mit der das Medikament zugeführt wird ist anfangs sehr hoch (vergleichbar mit einer Narkose: Der Patient soll schnell einschlafen) und die Konzentration nähert sich am Ende dem vom Arzt gewünschten Wert langsam an. Demnach hat die Geschwindigkeit im zeitlichen Verlauf immer kleiner werdende Werte, was Abbildung 2 ebenfalls wiedergibt und es sich um $f'(t)$ handeln muss.

eine weitere Möglichkeit (mathematisch)

1) Erinnere (Begrenztes Wachstum):



$f(t) = S - (S-a) \cdot e^{-kt}$

Im direkten Vergleich

$$f(t) = \underset{\downarrow}{S} - \underbrace{(S-a)}_{\downarrow} \cdot e^{-kt}$$
$$f(t) = 20 - 20 \cdot e^{-kt}$$

Abbildung 1 entspricht dem, also auch $f(t)$.

2) Da die Steigung von $f(t)$ immer kleiner wird, ist $f'(t)$ eine abnehmende/sinkende Funktion und damit Abbildung 2.

b)

$$f(t) = 20 - 20 \cdot e^{-kt}$$

Berechne k so, dass nach $\underbrace{\text{60min}}_{t=60}$ $\underbrace{\text{19ml}}_{f(60)=19}$ im Körper sind:

$$\begin{aligned} f(60) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad 19 &= 20 - 20 \cdot e^{-k \cdot 60} && | - 20 \\ -1 &= -20 \cdot e^{-60k} && | : (-20) \\ \frac{1}{20} &= e^{-60k} && | ln() \\ ln(\frac{1}{20}) &= ln(e^{-60k}) && |\text{Regel: } ln(y^x) = x \cdot ln(y) \\ ln(\frac{1}{20}) &= -60k \cdot \underbrace{ln(e)}_{=1} && | : (-60) \\ \frac{ln(\frac{1}{20})}{-60} &= k = 0.05 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \qquad f(t) = 20 - 20 \cdot e^{-0.05t}$

$f(t)$ ableiten:

$$\begin{aligned} f(t) &= 20 - 20 \cdot e^{-0.05t} \\ f'(t) &= 0 \quad \underbrace{-0.05}_{\text{Ableitung Exponent}} \quad \cdot \underbrace{(-20) \cdot e^{-0.05t}}_{\text{Rest wie vorher}} \\ &= 1 \cdot e^{-0.05t} \end{aligned}$$

Damit ist $f'(t)$ gezeigt!

Berechne $f'(0)$:

$$f'(0) = e^{-0.05 \cdot 0} = 1 \ \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

Am Anfang (bei $t = 0$) wird das Medikament mit einer Geschwindigkeit von 1 $\frac{\text{ml}}{\text{min}}$ zugeführt.

Nutze für die Markierungsstriche bekannte Werte! (Z.B.: $f(60) = 19$ und den Anfangswert der Ableitung)

Berechne $f(90)$:

$$f(90) = 20 - 20 \cdot e^{-0,05 \cdot 90} = 19,78 \text{ ml}$$

Nach 90 Minuten befinden sich 19,78 ml des Medikaments im Körper.

Nach $\underbrace{\text{welcher Zeit}}_{t=?}$ befinden sich $\underbrace{\text{10 ml}}_{f()=10}$ im Körper:

$$\begin{aligned}
f(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 10 &= 20 - 20 \cdot e^{-0{,}05\ t} && | - 20 \\
-10 &= -20 \cdot e^{-0{,}05\ t} && | : (-20) \\
\frac{1}{2} &= e^{-0{,}05\ t} && | ln() \\
ln(\frac{1}{2}) &= ln(e^{-0{,}05\ t}) && | \text{ Regel: } ln(y^x) = x \cdot ln(y) \\
ln(\frac{1}{2}) &= -0{,}05\ t \cdot \underbrace{ln(e)}_{=1} && | : (-0{,}05) \\
\frac{ln(\frac{1}{2})}{-0{,}05} &= t = 13{,}86 \text{ min}
\end{aligned}$$

Gegen Ende der 14. Minute/Nach ungefähr 14 Minuten befinden sich 10 ml des Medikaments im Körper.

c) Berechne:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_0^{30} \underbrace{\underbrace{e^{-0{,}05\ t}}_{f'(t)}}_{\frac{\text{ml}}{\text{min}}} dt}_{\text{ml}} &= \left[\frac{1}{-0{,}05} \cdot e^{-0{,}05\ t}\right]_0^{30} \\
&= (-20 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 30}) - (-20 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 0}) \\
&= -4{,}46 - (-20) \\
&= 15{,}54 \text{ ml}
\end{aligned}$$

Das ist die Menge des Medikaments, die innerhalb von 30 min in den Körper fließt.

d) Die Flache zwischen dem Graphen von $f\,'(t)$ und der t-Achse (für $t \geq 0$) lässt sich durch ein Integral bestimmen, welches bei 0 beginnt.

Doch wo hört es auf?

Im zeitlichen Verlauf nähert sich die Kurve der t-Achse an, berührt sie jedoch nie. (Schrei nach $\lim\limits_{t\to\infty}$!!!)

Zusammenfassend soll man demnach folgendes bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\lim_{x\to\infty}\int_0^x \underbrace{f\,'(t)}_{\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{min}}}\,dt}_{\mathrm{ml}} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-0,05\,t}dt \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{-0,05}\cdot e^{-0,05\,t}\right]_0^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left((-20\cdot e^{-0,05\,x})-(-20)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} -20\cdot \underbrace{e^{-0,05\,x}}_{\to \underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}} +20 \qquad (*) \\
&= 20 \text{ ml}
\end{aligned}
$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass bei $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ das gleiche Ergebnis entsteht:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{x\to\infty} 20-20\cdot \underbrace{e^{-0,05\,x}}_{\to \underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}} \\
&= 20 \text{ ml}
\end{aligned}
$$

Wenn man aufgepasst hat, hätte man sich die vorherige Rechnung sparen können, da bei (*) in der Integralrechnung das $f(t)$ bereits steht. :-)

Im Sachkontext würde man beide Varianten folgendermaßen erläutern:

(1) "Die Menge, die sich von Anfang der Verabreichung des Medikaments ($t = 0$) bis zu einem, in der Zukunft liegenden, Zeitpunkt ($t \geq 0$ oder $t \to \infty$) im Körper befinden wird, beträgt 20 ml."

(2) "Das Medikament wird im zeitlichen Verlauf niemals mit mehr als 20 ml im Körper vertreten sein."

e) Bestimme:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t 1,5\cdot e^{-0,05\,x}dx \\ &= \left[\frac{1,5}{-0,05}\cdot e^{-0,05\,x}\right]_0^t \\ &= (-30\cdot e^{-0,05\,t})-(-30) \\ &= -30\cdot e^{-0,05\,t}+30 \\ &= 30-30\cdot e^{-0,05\,t} \end{aligned}$$

g(t) hat die gleiche Bedeutung wie das f(t) zuvor! (Einheiten-Box gilt weiterhin)

---

25 ml wird nie überschritten?

Man kann auf verschiedene Weisen zeigen, dass das nicht stimmt:

(1) Man sieht, dass auch $g(t)$ “**begrenztes Wachstum**“ ist mit oberer Schranke $S = 30ml$.

(2) Man berechne

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} 30-30\cdot\underbrace{e^{-0,05\,t}}_{\to\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}} = 30 \text{ ml}$$

und begründe damit, dass sich $g(t)$ 30 ml als grenze annähert.

(3) Wenn einem die oberen Wege nicht einfallen, kann man auch versuchen einen Widerspruch zu erzeugen, bzw. einen Wert finden, sodass bei $g(t)$ mehr als 25 ml raus kommen. Z.B.:

$$g(90) = 30-30\cdot e^{-0,05\cdot 30} = 29,67 \text{ ml} > 25 \text{ ml}$$

Mit den 3 Wegen (und es gibt noch mehr!) wird die Behauptung widerlegt! (Aussage falsch!)

Wie muss $g(t)$ demnach geändert werden (zu einem $h(t)$), damit es die obere Grenze von 25 ml nicht überschreitet? Erinnere an begrenztes Wachstum.

$$h(t) = S-(S-a)\cdot e^{k\cdot t} \qquad \Leftarrow \qquad S-\text{Schranke},\ a-\text{Anfangswert}$$

Was sich bei $g(t)$ ändert ist nur die Schranke/Grenze, die 25 ml betragen soll. Also:

$$\boxed{h(t) = 25-25\cdot e^{-0,05\,t}}$$

Nun soll man $h(t)$ noch in der Integralschreibweise schreiben. Wenn man die Ableitung von $h(t)$ ($h'(t)$) integriert, kommt h(t) raus, richtig?

Daher muss im Integral schon mal $h'(t)$ stehen und wenn man zum Anfang der Aufgabe e) springt, weiß man auch wie die Grenzen auszusehen haben. Demnach:

$h(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}05\ t}$
$h'(t) = 0 - 0,05 \cdot (-25) \cdot e^{-0{,}05\ t} = 1,25 \cdot e^{-0{,}05\ t}$

$$\boxed{h(t) = \int_0^t \underbrace{1,25 \cdot e^{-0.05\ x}}_{h'(x)} dx}$$

Abitur 2007 (Funktionsuntersuchung - Lösungsvorschlag)

Gegeben sind die Funktion und ihre erste Ableitung:

$$f(x) = (x+1)\cdot e^{-x} \quad \& \quad f'(x) = -x\cdot e^{-x}$$

Wir können vorweg schon mal die zweite und dritte Ableitung bestimmen:

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{v} \qquad |PR:\ f''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$f''(x) = \underbrace{-1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{-x}_{u}\cdot\underbrace{(-1)\cdot e^{-x}}_{v'} \qquad |e^{-x}\text{ ausklammern}$$

$$= e^{-x}\cdot(-1-x\cdot(-1)) \qquad |\text{zusammenfassen}$$

$$= \underline{\underline{e^{-x}\cdot(-1+x)}}$$

$$f''(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u}\cdot\underbrace{(-1+x)}_{v} \qquad |\text{nochmal PR: } f''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$f'''(x) = \underbrace{-1\cdot e^{-x}}_{u'}\cdot\underbrace{(-1+x)}_{v} + \underbrace{e^{-x}}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'} \qquad |e^{-x}\text{ ausklammern}$$

$$= e^{-x}\cdot(-1\cdot(-1+x)+1) \qquad |\text{zusammenfassen}$$

$$= \underline{\underline{e^{-x}\cdot(2-x)}}$$

a) **Nullstellen** **f(x)=0**

$$0 = \underbrace{(x+1)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} \qquad |\text{“einfache“ e-Fkt.'n werden nie 0}$$

$$0 = x+1 \qquad |-1$$

$$-1 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{N(-1/0)}$$

Extremstellen **f'(x)=0 & f''(x)$\neq$ 0** $\begin{cases} > 0 & \textbf{TP,Linkskurve} \\ < 0 & \textbf{HP,Rechtskurve} \end{cases}$

f'(x)=0

$$0 = \underbrace{-x}_{=0} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} \qquad |\text{“einfache“ e-Fkt.'n werden nie 0}$$

$$0 = -x \qquad | \cdot (-1)$$

$$0 = x$$

$f''(x_E) \neq 0?$

$$f''(0) = e^0 \cdot (-1+0) = -1 \quad < 0 \quad \rightarrow \quad \text{HP,Rechtskurve}$$

y-Wert berechnen

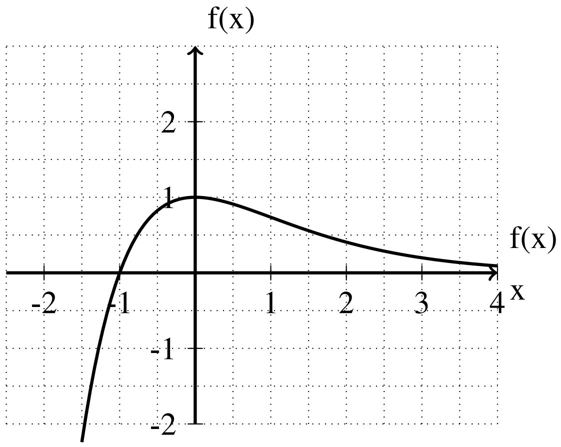
$$f(0) = (0+1) \cdot e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{HP(0/1)}$

b) Die Funktion f(x) besitzt genau einen Wendepunkt, da in allen Ableitungsfunktionen zu erkennen ist, dass der ganzrationale Teil, welcher mit dem e-Term multipliziert wird, nur 1. Grades ist und somit jede Nullstelle, jeder Ableitung, nur eine Lösung besitzt. Insbesondere bei der Bedingung für Wendestellen f''(x)=0.

c) Zeichnen kann man den Graphen von f(x) mithilfe einer Wertetabelle (TR: mode-3). Tut man dies, so ergibt sich folgender Graph:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(x)	-7,4	-2,2	0	0,82	1	0,91	0,74	0,56	0,41	0,29	0,2	0,14	0,09



d) Man kann zeigen, dass F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist, indem man F(x) ableitet und prüft, ob sich f(x) ergibt:

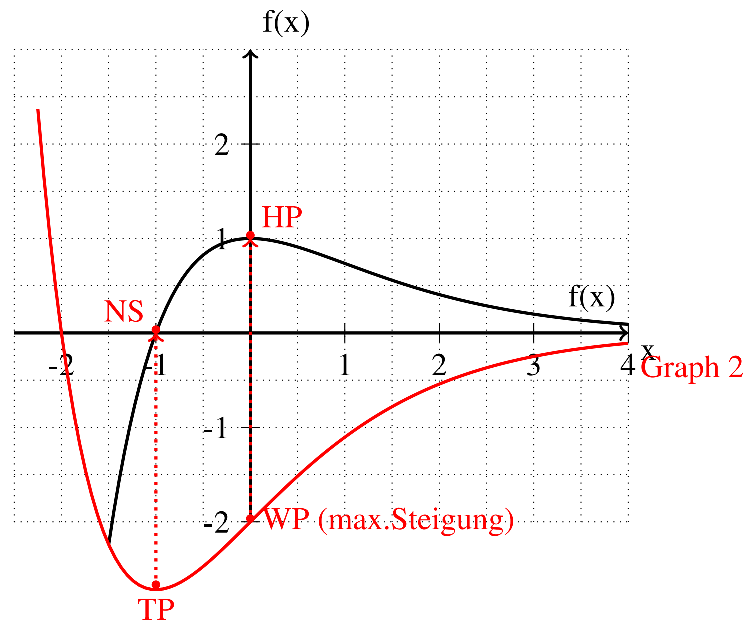
$$F(x) = \underbrace{(-x-2)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v} \qquad |PR: \; F'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \underbrace{-1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{(-x-2)}_{u} \cdot \underbrace{(-1) \cdot e^{-x}}_{v'} && |e^{-x} \text{ ausklammern} \\ &= e^{-x} \cdot (-1 + (-x-2) \cdot (-1)) && | \text{ zusammenfassen} \\ &= e^{-x} \cdot (x+1) \\ &= f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Graphisches ableiten der Graphen 1 bis 3 verrät uns, welcher der der drei Graphen zu F(x) gehört, da sich der Graph aus Aufgabe c) ergeben muss. Dabei gilt der Merksatz, dass beim Ableiten Extrempunkte zu Nullstellen werden und Wendestellen zu Extremstellen, sprich:

Extremstellen von F(x) $\xrightarrow{ableiten}$ Nullstellen von f(x)
Wendestellen von F(x) $\xrightarrow{ableiten}$ Extremstellen von f(x)

Aus diesem Grund, kann nur der Graph 2 für die Funktion F(x) infrage kommen, siehe:

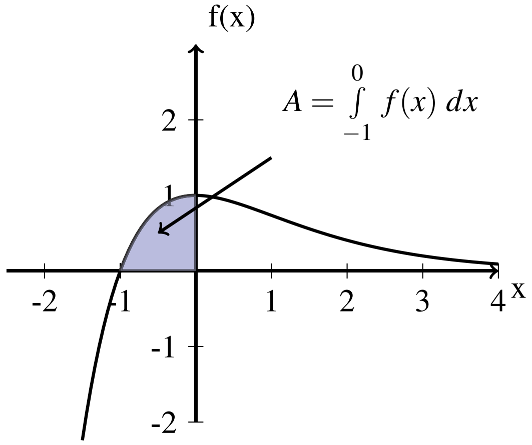


Graph 2 erfüllt die oben eingerahmten Bedingungen, da …

… der Wendepunkt von Graph 2, bei dem eine **maximale** Steigung gegeben ist, für f(x) einen **Hoch**punkt darstellt.

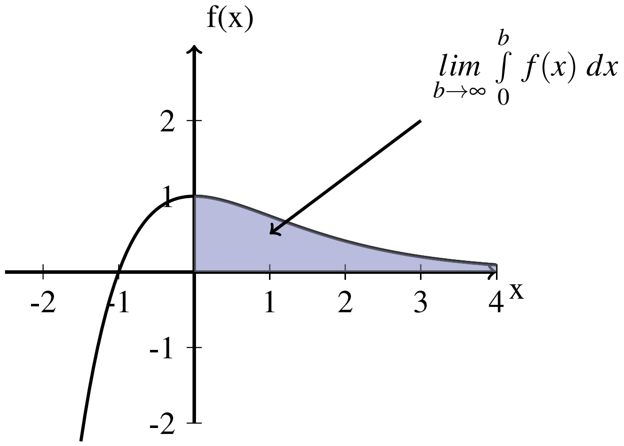
… der Tiefpunkt von Graph 2 in eine Nullstelle von f(x) übergeht.

e) Zwischen der Nullstelle x=-1 und dem Ursprung x=0 schließt der Graph mit der y-Achse und der x-Achse eine Fläche ein, die wir per Integralrechnung bestimmen können:



$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= [\,\underbrace{(-x-2)\cdot e^{-x}}_{F(x)}\,]_{-1}^{0} \\
&= F(0)-F(-1) \\
&= \underbrace{\left((0-2)\cdot e^{0}\right)}_{} - \underbrace{\left((-(-1)-2)\cdot e^{-(-1)}\right)}_{} \\
&= \quad -2 \quad + \quad e \\
&\approx \underline{\underline{0,72 \quad \text{Flächeneinheiten}}}
\end{aligned}$$

f) Der Graph von f(x), welchen wir in Aufgabe c) gezeichnet haben, schließt mit der x-Achse für $x \to \infty$ eine Fläche ein:



Wir kennen die rechte Grenze des Integrals nicht, da die Fläche im Unendlichen eingeschlossen wird. Daher berechnen wir erst einmal

$$\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

und anschließend den Grenzwert des Ergebnisses, via

$$\lim_{b\to\infty}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty} [\,F(x)\,]_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} F(b)-F(0) \qquad \boxed{\text{erinnere: } F(x) = (-x-2)\cdot e^{-x}} \\
&= \lim_{b\to\infty} ((-b-2)\cdot e^{-b}) - ((0-2)\cdot e^{0}) \\
&= \lim_{b\to\infty} (-b-2)\cdot \underbrace{e^{-b}}_{\to \underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}} +2 \qquad \boxed{\text{Grenzwert bilden}} \\
&= \underline{\underline{2 \quad \text{Flächeneinheiten}}}
\end{aligned}$$