

Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	27

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido como plataforma de ensayo para diferentes estrategias de control.

Jose Mena Palomeque

Juan Esteban Zabala Daza

Ingeniería Mecatrónica

Director del trabajo de grado

Elkin Edilberto Henao Bravo

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO Marzo 2017



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

RESUMEN

Un péndulo invertido es un sistema en el cual hay una barra perpendicular hacia arriba conectada por un pivote a un carro, este pivote le permite oscilar sobre el carro. Este tipo de sistemas son usados comúnmente para evaluar las trayectorias que generan los movimientos parabólicos y por ende emular el funcionamiento de proyectiles, barcos y satélites. Este trabajo se enfoca en la implementación de un péndulo invertido simple, su interfaz gráfica y electrónica. Se hace uso de un software CAD para hacer el diseño mecánico y simular el comportamiento del sistema. Se usan diferentes sensores y actuadores para la implementación, así como un sistema de desarrollo (ARDUINO) que sirve como tarjeta de adquisición de datos. Para verificar el funcionamiento se implementan dos tipos de controladores en Simulink y se prueban en el sistema real y en simulación. Se comparan los tiempos de estabilización del sistema tanto en simulación como en la planta para los diferentes controladores. A partir de los resultados se observó que el sistema real y simulado alcanza la estabilidad en aproximadamente 2 segundos.

Se implementó un péndulo invertido como estrategia de enseñanza para diferentes técnicas de control, realizando un diseño CAD para obtener un diagrama de la planta y con base en este se construyó el modelo físico además se diseñó una interfaz gráfica en la que se visualizan en tiempo real cada una de las variables relevantes del sistema con el fin de que dicha planta pueda ser usada para prueba de estrategias de control.

Palabras clave-Control, modelo CAD, péndulo invertido, plataforma de ensayos, Ackermann LQR, sintonía de controladores.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos el apoyo de cada uno de los docentes que estuvieron incondicionalmente con nosotros, brindándonos su conocimiento y su amistad, regalándonos la capacidad de enfrentar cada uno de los problemas que nos ha puesto la academia hasta el día de hoy. Agradecemos a nuestras madres por su dedicación y entrega a nuestra causa, ellas siempre nos brindaron buenos concejos y nos inculcaron el amor por la academia durante toda la vida, a nuestros compañeros que desde siempre estuvieron a nuestro lado para apoyarnos y darnos ánimo en este camino que no termina aún. Especialmente a nuestros amigos y a la providencia por permitir que encontráramos un camino que nos permitió engrandecer nuestros cuerpos y nuestros espíritus, paso a paso, pacientemente hasta el día de hoy donde logramos uno de nuestros más grandes objetivos.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

ACRÓNIMOS

Estos son los acrónimos encontrados a lo largo de este trabajo.

PID: Controlador proporcional – integral - derivativo

LQR: Regulador lineal cuadrático

CAD: Diseño asistido por computadora

N: Fuerza de reacción que surge en la unión ente el péndulo y el carro en la horizontal.

P: Fuerza de reacción que surge en la unión ente el péndulo y el carro en la vertical.

K: Matriz de coeficientes de realimentación de estados.

J: es la función que señala el valor energético del sistema.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

TABLA DE CONTENIDO

1. IN	TRODUCCIÓN	7
1.1.	Generalidades	7
1.2.	Objetivo general	7
1.2	2.1 Objetivos específicos	7
1.3.	Organización del trabajo	8
2. M.	ARCO TEÓRICO	9
2.1.	Péndulo invertido	9
2.2.	Motor lineal	15
2.3.	Controlador de matriz de estados K, utilizando un LQR	15
2.4.	Controlador de la matriz de estados K implementando la ecuaci	ión de
Acke	ermann	17
2.5.	Arduino	17
2.6.	Módulo 1298N	18
2.7.	Encoder incremental	19
3. M	ETODOLOGÍA	20
3.1.	Construcción del modelo mecánico del sistema	20
3.1.1	Sensores y actuadores del sistema	22
3.2.	Adaptación del modelo matemático al sistema implementado	23



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

3.3. Estrategias de control implementadas24
3.4. Diseño de la interfaz gráfica y electrónica
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN
4.1. Simulación Controlador LQR vs Controlador Ackermann
4.2. Implementación física controlador LQR vs controlador Ackermann30
CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO34
Recomendaciones y Trabajos Futuros
REFERENCIAS
APÉNDICE
Apéndice A. Cálculos realizados para obtener los coeficientes de cada controlador.
Apéndice B. Diagrama de conexión electrónica
Apéndice C. Programación Péndulo invertido
Apéndice D – Preparación de la planta para su funcionamiento4



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Generalidades

En este proyecto se diseñó un péndulo invertido, este es un mecanismo que consta de un riel sobre el que se desliza un carro y en él está montado un péndulo que puede girar libremente este tiene un grado de libertad en el eje z que le permite dicha rotación. Se presenta el modelo matemático del sistema, se evalúa su funcionamiento estático y dinámico, finalmente se implementa un controlador capaz de llevar la planta a su punto de estabilidad.

Con la ayuda del software Matlab se desarrolla el diseño del controlador, se realiza una simulación del péndulo donde se puede obtener aproximaciones reales del funcionamiento de la planta que se construyó.

Este trabajo permitirá hacer diferentes pruebas para el modelo matemático que se desarrolló y luego mostrar su funcionamiento de manera física. Es necesario interpretar los datos arrojados por el sistema, para esto se implementó una interfaz gráfica con el objetivo de mostrar los resultados obtenidos.

1.2. Objetivo general

Implementar un péndulo invertido que sirva como plataforma de ensayo de diferentes estrategias de control.

1.2.1 Objetivos específicos

- Construir el sistema mecánico usando como ayuda software CAD.
- Adaptar el modelo matemático existente al sistema que se desea construir.
- Implementar dos estrategias de control para el sistema.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

• Diseñar una interfaz gráfica y electrónica que permita el control de la planta.

1.2. Organización del trabajo

El siguiente trabajo está dividido en 5 secciones que describen el proceso de la implementación de un péndulo invertido con su respectiva interfaz electrónica y gráfica, en el que se pueden implementar diferentes estrategias de control. En la primera parte se muestra la introducción que da pie a la necesidad de implementar este sistema, se muestran datos relevantes y ejemplos de sistemas similares.

Continuando en la sección 2, se encuentra el marco teórico que habla de los conceptos básicos que se deben tener en cuenta a la hora de leer este documento, para la posible implementación de la información que se encuentra en éste. Vale la pena aclarar que allí se describen datos técnicos, por lo que este texto está dirigido a un público con conocimientos básicos de los temas tratados en él.

La sección 3 muestra la metodología implementada en la construcción de un péndulo invertido, es decir, cada uno de los pasos necesarios para fabricar correctamente este dispositivo, desde su fase de diseño, desarrollo y puesta en marcha.

En la sección 4 se muestran los resultados obtenidos en la etapa de desarrollo y las recomendaciones necesarias para reproducir este proyecto y para el funcionamiento apropiado de la planta.

En la sección 5 se presentan las conclusiones de la implementación de este trabajo, además se proponen las recomendaciones para optimizar el funcionamiento del péndulo invertido y los trabajos futuros para el sistema diseñado.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Péndulo invertido

Un péndulo invertido es un sistema compuesto por un carro, que se mueve libremente a lo largo de un eje, y una barra con un pivote libre, el movimiento de ésta barra depende del movimiento del carro. El sistema es de carácter inestable y puede emular el funcionamiento de un cohete o un misil.

El propósito es que automáticamente el péndulo permanezca perpendicular a su punto de referencia. La fuerza necesaria para esto es entregada por el par que un motor le transmite a un riel. El motor es manejado por un dispositivo que controla el voltaje o la corriente de armadura basado en las lecturas de ángulo de inclinación que entrega el sensor (Ichihara y Kawata,2011).

Existen diversos tipos de péndulos, se explicarán algunos a continuación:

El péndulo invertido de Furuta es uno de los péndulos comúnmente utilizados para realizar pruebas de diferentes sistemas de control, éste fue creado por el Dr. K. Furuta del instituto de Tecnología de Tokio, Japón. El dispositivo es un sistema sub actuado de dos grados de libertad rotacionales llamados péndulo y brazo. El movimiento de éste sistema está dado en la horizontal girando alrededor de un eje perpendicular al plano, el péndulo está posicionado en un extremo del brazo, el giro es colineal al eje axial del brazo y su movimiento se realiza en un plano perpendicular a éste (Flores,2013).



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

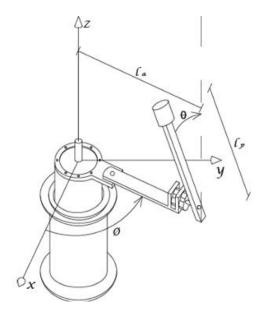


Figura 1 - Péndulo invertido de Furuta

El péndulo invertido doble es un sistema que consiste en dos péndulos, uno acoplado al extremo del otro, donde ambos pueden girar libremente, sin embargo, uno de ellos está conectado por uno de sus extremos a un motor DC que funciona como actuador. Este sistema posee dos grados de libertad (Moghaddas,RezaDastranj,Changizi y Narge, 2012).

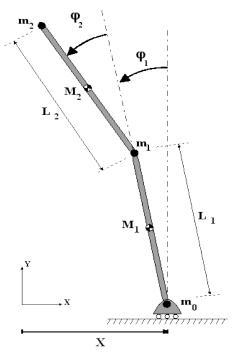


Figura 2 - Péndulo invertido doble.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Entre los péndulos conocidos se eligió el péndulo invertido simple dado que este cumple con la versatilidad necesaria para poder implementar diversos tipos de estrategias de control (Stimac, 1999).

A continuación, se describen las ecuaciones de movimiento necesarias para modelar el sistema de péndulo invertido sobre un carro de desplazamiento lateral. La representación matemática viene de las ecuaciones de Euler-LaGrange. En la figura 3 se muestra el sistema a modelar y la tabla 1 muestra las variables del sistema (Messner, Tilbury, Hill y Taylor, 2016).

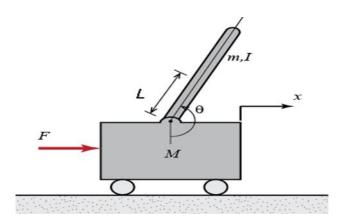


Figura 3 - Péndulo invertido - Tomado de http://goo.gl/EAEk*Gx*

Tabla 1. Variables del sistema

Símbolo	Descripción
M	Masa del carro.
m	Masa del péndulo.
В	Coeficiente de fricción para
	el carrito.
L	Longitud al centro de masa
	del péndulo.
I	Momento de inercia del
	péndulo



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

X	La posición del carro en el sistema coordenado.
F	La fuerza aplicada a al carro.
θ	Ángulo del péndulo con la vertical.
ė	Velocidad angular del péndulo.
̈θ	Aceleración angular del péndulo.
х	Velocidad lineal del carro.
χ̈́	Aceleración lineal del carro.

A. Diagrama de cuerpo libre para el sistema.

En la figura 4 se muestra el diagrama de cuerpo libre del péndulo y allí se indican las fuerzas que actúan sobre el sistema. A partir de la segunda ley de newton se obtienen las ecuaciones 1 y 2.

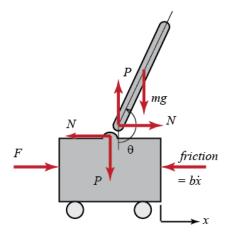


Figura 4- diagrama de cuerpo libre en el péndulo invertido – Tomado de http://goo.gl/EAEkGx



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Ecuaciones del sistema:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{M} \sum_{\text{cart}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{M} (\mathbf{F} - \mathbf{N} - \mathbf{b}\dot{\mathbf{x}}) \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I} \sum_{\text{pend}} \tau = \frac{1}{I} (-\text{NLcos}\theta - \text{PLsin}\theta)$$
 (2)

Donde N y P son las reacciones que surgen en la unión entre el péndulo y el carro por ser una unión de tipo articulación.

Para modelar correctamente el sistema se debe considerar la interacción N y P entre el carro y el péndulo, lo que permite incluir el comportamiento dinámico de la planta. Para simplificación se usan normas algebraicas. Las interacciones N y P se representan matemáticamente describiendo el comportamiento de las coordenadas x e y según se observa en las ecuaciones (3) a (6).

$$m\ddot{x}_{p} = \sum_{\text{pend}} F_{z} = N \tag{3}$$

$$N = m\ddot{x}_{p} \tag{4}$$

$$m\ddot{y}_{p} = \sum_{\text{pend}} F_{y} = P - mg \tag{5}$$

$$P = m(\ddot{y}_p + g) \tag{6}$$

Sin embargo, las coordenadas de posición de x_p y y_p son funciones exactas de θ .

Ecuaciones en el eje x:

$$x_{p} = x + L\sin\theta \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{p}} = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\theta}}\cos\boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\dot{\theta}^{2}\sin\theta + \mathbf{L}\ddot{\theta}\cos\theta \tag{9}$$

Ecuaciones en el eje y:

$$y_{p} = -L\cos\theta \tag{10}$$



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

$$\dot{y}_{p} = L\dot{\theta}\sin\theta \tag{11}$$

$$\ddot{y}_{p} = L\dot{\theta}^{2}\cos\theta + L\ddot{\theta}\sin\theta \tag{12}$$

Sustituyendo para N y P:

$$N = m(\ddot{x} - L\dot{\theta}^2 \sin\theta + lL\cos\theta)$$
 (13)

$$P = m(L\dot{\theta}^2\cos\theta + L\ddot{\theta}\sin\theta) + g \tag{14}$$

Utilizando las ecuaciones (13) y (14) se lleva el sistema a una representación en espacio de estados (ecuaciones (15) y (16)).

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{16}$$



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

2.2. Motor lineal

Los motores eléctricos que se encuentran comúnmente en el mercado son rotacionales debido a que estos están compuestos por un rotor y un estator posicionados de tal manera que producen torque. Ya que nuestra planta requiere un movimiento lineal, se necesita un acople mecánico que permita transformar el movimiento rotatorio del motor al movimiento en línea recta que requiere el sistema a implementar. Para hacer esto, es muy común usar transmisiones de engranajes y correas, aunque esto genera perdida de potencia al sistema (Pérez, 2000).

Ventajas y limitaciones del uso de motores lineales:

Ventajas:

- Velocidad alta y precisión, aunque están condicionadas por el tipo de control que requiere el motor y el cableado del mismo.
- Si no tiene transmisiones la velocidad de respuesta es más alta.
- Alta fiabilidad
- Vida útil alta

Limitantes:

- Consumo de corriente alto en el arranque.
- La temperatura del mismo puede afectar su funcionamiento.

2.3. Controlador de matriz de estados K, utilizando un LQR

El método LQR (Siglas de Linear Quadratic Regulator) es una técnica para el diseño de controladores de sistemas complejos que tengan estrictos requerimientos de funcionamiento,



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

éste trata de generar unos coeficientes de controlador que minimizan los errores del sistema encontrando la función de mínimo costo energético para el sistema.

K es la matriz de coeficientes que multiplica el sistema para generar la acción de control, es decir: u(k) = -Kx(k). El paso siguiente es generar el vector que determina la ley de realimentación de estados. Esto puede realizarse de diversas maneras, la primera es asignar los polos al sistema de forma arbitraria para asegurar que el sistema se comporte como deseamos. Y la otra solución es hacer uso de un control óptimo variable en el tiempo. Se trata de simplificar la función:

$$J = \sum_{K=0}^{N} [X_n^T(k)QX_n(k) + u^T(k)Ru(k)]$$
 (17)

J es la función que señala el valor energético del sistema. Se trata de un control óptimo en el sentido que busca minimizar el costo energético. La expresión $X_n^T(k)QX_n(k)$ denota la energía que aporta cada estado del sistema, Q es la matriz de pesos en la que se le asignan la importancia a cada uno de los estados del modelo. u (k) es la acción de control para este sistema, este contiene un elemento porque solo se realiza una acción de control, $R \ge 0$ es el elemento que muestra el peso que se le quiere dar a la energía asociada a la señal de control para el sistema.

Con base en esto se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$X_n(k+1) = A_d X_n(k) + B_d u(k)$$
 (18)

$$u(k) = -K(k)X_n(k) \tag{19}$$

$$k(k) = K (20)$$

El valor exacto de J es irrelevante, solo se pretende encontrar la K que asegure que el costo energético sea mínimo. Lo importante es el valor que tienen los elementos de Q y R entre si. Dichos parámetros serán los encargados de balancear la importancia relativa de la entrada y los estados en la función de costo que se está tratando de optimizar. El caso más simple es considerar R=1 y proponer Q a partir de ahí, con esta matriz Q se asigna los pesos óptimos del sistema (Beltrán, 2010).



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

2.4. Controlador de la matriz de estados K implementando la ecuación de Ackermann

Ackermann es un tipo de ecuación que consta de una función que toma dos números naturales y devuelve uno solo con base en iteraciones intuitivas donde *u* representa la acción de control de la planta.

Para determinar el valor del controlador de realimentación de estados se utiliza una ecuación matricial llamada ecuación de Ackermann que se expresa de la siguiente manera:

$$u = -Kx \qquad (21)$$

Se busca obligar el sistema a estar en lazo cerrado, la ecuación característica de éste sistema queda de la siguiente manera:

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} * \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$
(22)

La matriz de ganancias para dicho controlador (K) se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \dots 1]C_c^{-1} q(A)$$
 (23)

Donde C es la matriz de controlabilidad del sistema, y:

$$q(A) = A^n + a_{n-1} * A^{n-1} + \dots + a_o I \quad (24)$$

Con las ecuaciones (21), (22), (23) y (24) se encontrarán las ganancias para cada estado del sistema (Dulhoste, 2016).

2.5. Arduino

Este dispositivo es una placa de circuitos impresos que incluye generalmente un microcontrolador Atmel, el cual contiene entradas y salidas digitales y entradas análogas con salidas de PWM. Este sistema puede ser usado como tarjeta de adquisición de datos. Existen en el mercado diferentes tipos de placas Arduino que se usan dependiendo de la complejidad



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

del proceso que se va a utilizar y de la capacidad de procesamiento del mismo. Para esta aplicación es factible utilizar un Arduino MEGA 2560 (Ver figura 5).

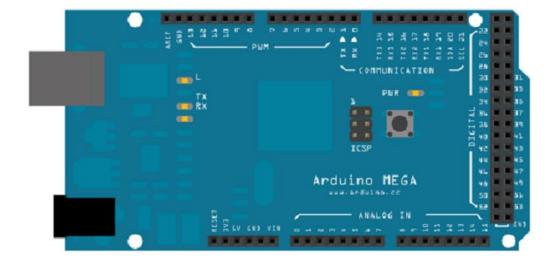


Figura 5 - Arduino Mega - Tomado de www.arduino.cc

2.6. Módulo L298N

El módulo L298N está basado en el chip L298, el cual permite controlar dos motores DC, tanto velocidad como dirección de giro, admite tensiones de entrada de hasta 30V. Éste módulo posee grandes ventajas ya que trae diodos de protección y un regulador de voltaje el cual permite obtener una salida de 5V. En la figura (6) se observa el módulo 1298N.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

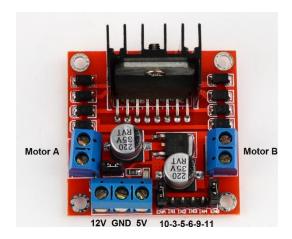


Figura 6 - Módulo L298N - tomado de https://goo.gl/RhHnTs

2.7. Encoder incremental

Un encoder incremental es un elemento que genera un número definido de pulsos por vuelta, usado generalmente para medir la posición angular en diversos sistemas, para realizar este proyecto se usara un encoder de 2000 pulsos por vuelta(ver figura 10).



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

3. METODOLOGÍA

Para construir el sistema mecánico se obtuvo el modelo tridimensional de la planta con la ayuda de software CAD. Basado en lo anterior se construyó el sistema y así se dio por culminado el objetivo específico número uno, el cual es la parte inicial del proyecto y con este se empiezo a dar forma al modelo de la planta.

3.1. Construcción del modelo mecánico del sistema

Para permitir la implementación de diferentes estrategias de control se llevó a cabo la construcción de la plataforma de ensayo con la ayuda de software CAD (ver Figura 7). Además, se realizó una plataforma real basada en el diseño CAD (ver Figura 8), las características principales de la plataforma se muestran en la Tabla 2.

En el Apéndice E se muestran los planos del sistema obtenidos desde el modelo CAD.

Tabla 2. Parámetros básicos de la planta.

	Longitud	Peso
Péndulo	0.185 m	90.635 g
Carro	N/A	349.6 g
Riel	0.80 m	N/A



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

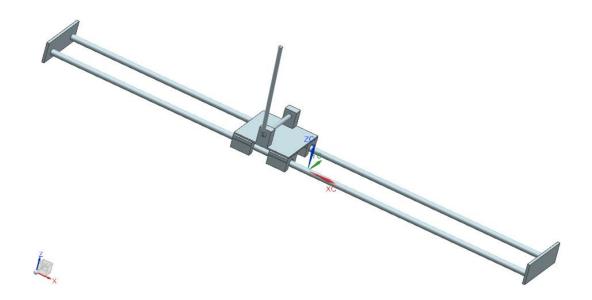


Figura 7 - Modelo CAD péndulo invertido – Elaboración propia

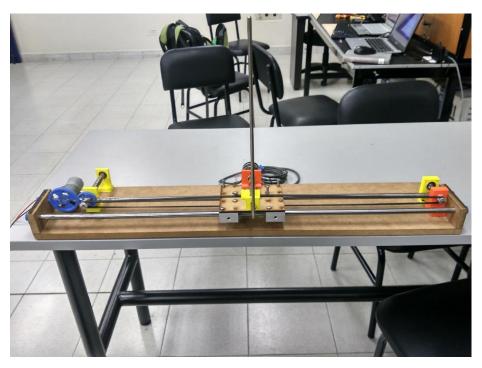


Figura 8 – Construcción de planta para péndulo invertido – Elaboración propia.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

3.1.1 Sensores y actuadores del sistema

Para que el sistema tuviera una respuesta adecuada se utilizaron los sensores y actuadores que se muestra en las figuras (9) y (10) respectivamente. En la tabla 3 se observan las características principales de estos.



Figura 9 - Motorreductor polulu tomado de https://goo.gl/uym2Be



Figura 10 – Encoder incremental Omron - tomado de https://goo.gl/7Cn4A4



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Tabla 3. Características de los sensores y actuadores.

Elemento	Descripción
Motorreductor pololu 19:1, 500 RPM	Motorreductor DC 19:1 con caja reductora
	adicional de relación 1:2
Sensor Encoder incremental Omron	Encoder incremental con 2000 pulsos por
E6B2-CWZ3E	revolución

Se seleccionaron estos sensores y actuadores porque su costo es bajo en comparación con otros elementos en el mercado, además, su respuesta es adecuada para la aplicación que se desea realizar. Las ventajas y desventajas de estos se muestran a continuación:

Motorreductor Pololu:

Ventajas

- Bajo costo
- Bajo consumo de corriente, alrededor de 1,5A en su máximo torque.
- Su reducido tamaño lo hace especialmente útil para la aplicación en este trabajo.

Desventajas

 Si se quisiera realzar una aplicación con respuesta más rápida, no serviría usar este motor puesto que aunque posee 500 rpm y alto torque, no podría vencer la inercia de un sistema más veloz.

Encoder Omron:

Ventajas

- Bajo costo
- Muy buena precisión, aproximadamente 0.18 grados por cada pulso
- Soporta acople a motores de hasta 2000 rpm



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Desventajas

- Su tamaño no permite que pueda ser utilizado en aplicaciones más pequeñas.

3.2. Adaptación del modelo matemático al sistema implementado

Para adaptar el modelo matemático se realizó el análisis del sistema en estudio, se examinaron diferentes modelos que permiten representar la planta con una ecuación diferencial o con un conjunto de estas, así se pudo determinar el comportamiento estático y dinámico del proceso a controlar. Basados en la descripción del modelo y en la sección 2 (Messner, Tilbury, Hill y Taylor, 2016) en la que se muestra como los autores realizaron el análisis matemático del péndulo y una manera de obtener las ecuaciones dinámicas del sistema y una forma de adaptar estas a la planta física que se desea implementar, ecuaciones ((25) y (26)).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2443 & 0.7395 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4500 & 19.4156 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2.4429 \\ 0 \\ 4.5 \end{bmatrix} u \quad (25)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (26)$$

El modelo matemático obtenido se usó para diseñar el método de control que se le aplicó al sistema.

3.3. Estrategias de control implementadas

Para comprobar el funcionamiento del sistema se desarrollaron dos estrategias de control descritas previamente en el marco teórico (LQR y Ackermann). Se escogieron dichas estrategias debido a su facilidad de implementación y porque se consideran cada uno de los estados del sistema, con base en las ecuaciones mencionadas en los numerales 2.3 y 2.4 y



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

utilizando los algoritmos que se observan en el apéndice A se obtuvieron los valores de los controladores que se observa en la tabla 4.

Tabla 4 - Ganancias para cada controlador.

	x	х	θ	ė
Ackermann	-3.6732	-3.1384	17.1964	4.0936
LQR	-19.0819	-20.0661	106.4970	17.3991

Para el controlador LQR se le asignaron a la matriz Q los siguientes valores:

3.4. Diseño de la interfaz gráfica y electrónica

Para diseñar la interfaz gráfica se usó una herramienta gráfica de programación (Simulink), que permite tener pre-diseñados diferentes bloques que harán que el usuario pueda identificar fácilmente las diferentes variables del sistema, visualizar la respuesta del mismo, los diferentes resultados y las diferentes variaciones de la planta.

El diseño de la interfaz electrónica tiene la entrada (acción de control) y salidas de la planta (velocidad, aceleración y posición tanto angular del péndulo como lineal del carro) disponibles para que sea modular y permita que la misma sea controlada, no solo por la técnica de control propuesta, sino por otras técnicas de control desarrolladas por estudiantes y docentes.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Interfaz Gráfica para el usuario

Se desarrolló una interfaz gráfica en Simulink para el usuario, la cual es completamente modificable y brinda un mayor control de las variables del sistema (ver figura 11).

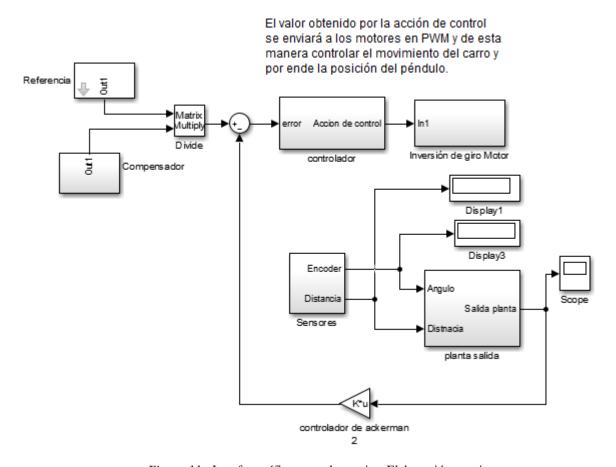


Figura 11 - Interfaz gráfica para el usuario - Elaboración propia

Interfaz Electrónica

Para realizar la interfaz electrónica se dejaron a disposición del usuario todas las variables medibles del sistema y además estas están comunicadas con una tarjeta de Arduino MEGA 2560 la cual se encarga de procesar todas las variables medidas, realizar la acción de control y a su vez comunicarse con la interfaz gráfica para ir desplegando los resultados que se van obteniendo. También se utiliza el módulo L298N el cual se encargará de gobernar las



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

variables del motor como son la velocidad y la dirección de giro. En la figura 12 se observa los componentes electrónicos utilizados.

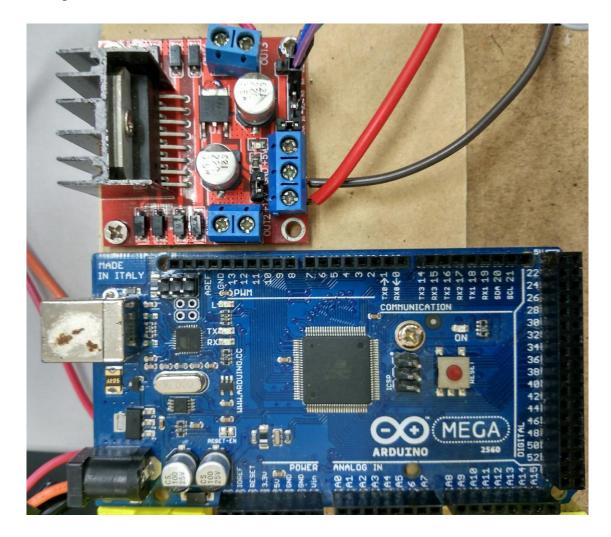


Figura 12 - Tarjeta Arduino MEGA 2560 y L298N respectivamente. Elaboración propia.

Para que el Arduino pueda comunicarse con simulink de manera satisfactoria, se debe instalar previamente el paquete de soporte de simulink para Arduino, se podrá ver el proceso de instalación en la documentación oficial de la empresa Mathworks https://goo.gl/XS9FTI.

Para realizar una conexión exitosa de todos los componentes, se deben realizar las indicaciones que se muestran en el Apéndice B.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan los resultados obtenidos luego de haber diseñado el modelo físico de la planta, haber implementado las diferentes estrategias de control y comparar los resultados obtenidos tanto de simulación como de pruebas físicas.

4.1. Simulación Controlador LQR vs Controlador Ackermann.

Utilizando las ecuaciones mencionadas en las secciones 2.3. y 2.4, se generaron los coeficientes de los controladores que se muestran en la tabla 4 con base en el procedimiento que se muestra en el apéndice A.

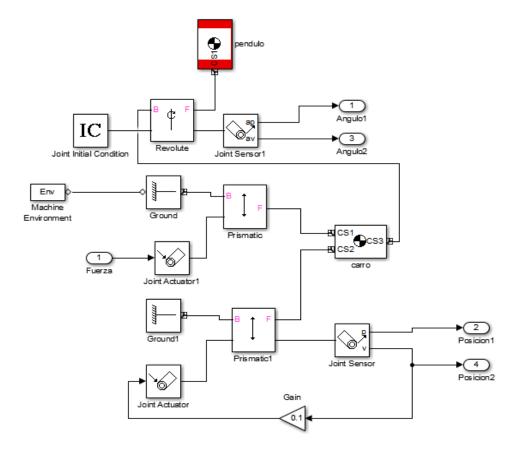


Figura 13-Planta de péndulo invertido usando simscape.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Usando Matlab como software de simulación, específicamente su librería Simscape en la que se generaron las juntas y los mecanismos necesarios para emular el sistema de péndulo invertido (ver figura 13), se comprobó el funcionamiento del sistema con cada uno de los controladores obtenidos. Los resultados se muestran en las figuras 14 y 15. La prueba realizada consiste en permitir que el sistema se estabilice y luego se le aplica una perturbación para verificar el comportamiento. Con esta prueba se comparan los tiempos de estabilización del sistema en el arranque y ante perturbaciones.

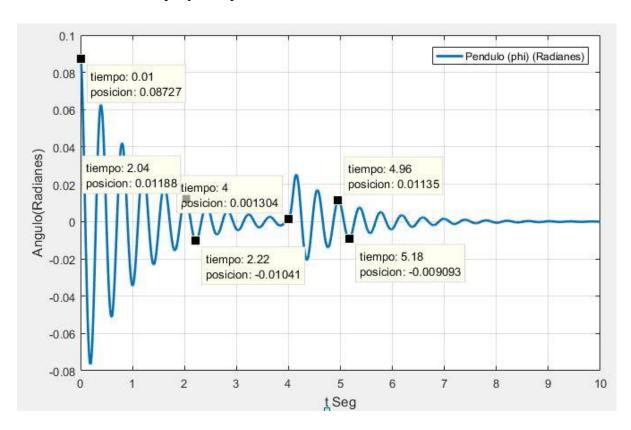


Figura 14 - Grafica de la estabilización del sistema usando Ackermann.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

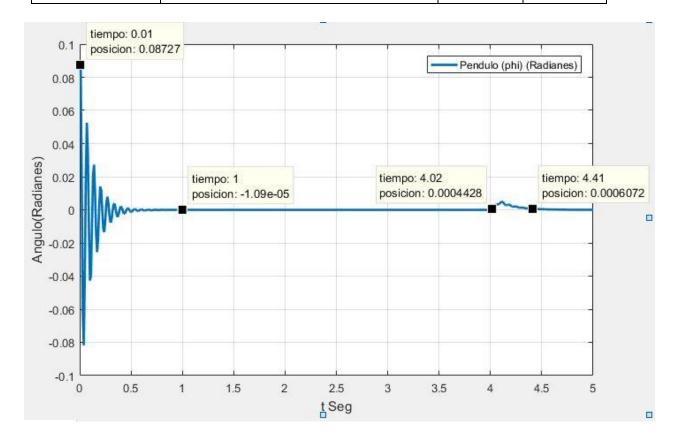


Figura 15 - Grafica de la estabilización de sistema usando LQR.

Al realizar estas simulaciones, de las figuras (14) y (15) se puede observar que los tiempos de estabilización generados por los dos controladores son de 2.04 s y 1s respectivamente. Generando un tiempo de estabilización máximo de 2.04 s y una diferencia de 1.04 s entre los dos controladores. Además, se puede observar que en la segunda perturbación los tiempos de estabilización se reducen a 0.96 s y 0.39 s respectivamente obteniendo una diferencia de 0.57 s entre los dos controladores.

4.2. Implementación física controlador LQR vs controlador Ackermann

Al igual que en simulación, se comprobó el funcionamiento del sistema con cada uno de los controladores.

En las figuras 16 y 17 se observa el comportamiento y los puntos de estabilización de la implementación física.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

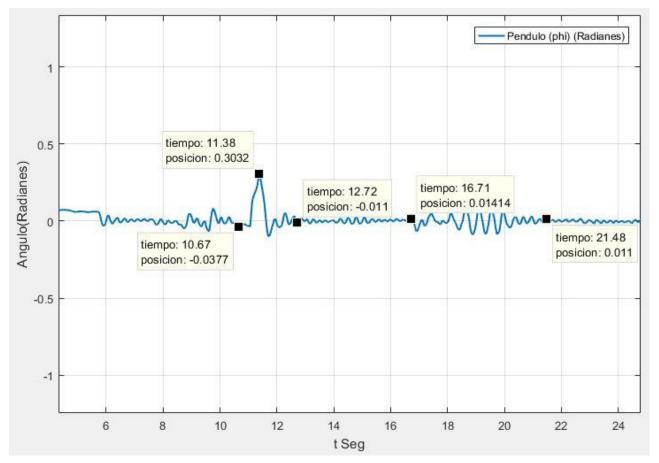


Figura 16 - Implementación física de controlador Ackermann – Elaboración propia.

Es importante resaltar la matriz con los pesos que se le asignaron a cada uno de los estados en la matriz Q.

Se observa que el tiempo de establecimiento de la planta con el controlador Ackermann es 2.04 s, sin tener en cuenta la perturbación inicial que se usa como punto de partida para el experimento.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22



Figura 17- Implementación física de controlador LQR – Elaboración propia.

En la Figura 17 se puede observar a los 2.5s un cambio de ángulo de $-\pi$ hasta π radianes, esto se debe a la ubicación manual del péndulo en la posición vertical hacia arriba que es el punto de operación del sistema. Luego de esta ubicación inicial, el sistema se estabiliza a los 2.05s y permanece con oscilaciones del orden de 10^{-2} radianes. Con el ánimo de corroborar la eficacia del controlador LQR, se realizó una perturbación al péndulo a los 6.31s, estabilizándose de nuevo en 1.54s.

Al comparar los resultados de la implementación se observa que los tiempos de estabilización del sistema tienen una diferencia de 0.5 s entre los dos tipos de controladores, además, se pudo observar que el controlador LQR es capaz de atenuar, en un tiempo corto, las oscilaciones en el punto de operación debidas a las perturbaciones externas, esto demuestra la robustez de este tipo de controlador. El controlador Ackermann trata de llegar más rápido



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

al punto de referencia, pero se generan oscilaciones y esto aumenta el tiempo de estabilización.

En la literatura se encuentran referencias como Garcia, Martinez, Llosa y Sanchis(2007) y Romero y Orce (2004), que recomiendan tiempos de estabilización cercanos a los 2 segundos, ya que un tiempo mayor causaría mayores oscilaciones y podría el péndulo alejarse de la zona de estabilidad. Tiempos más cortos de estabilización serían posibles con actuadores más potentes, pero esto elevaría el costo energético y de implementación. El sistema desarrollado en este trabajo fue implementado con elementos de bajo costo y con una respuesta dinámica que permite alcanzar un tiempo de estabilización de aproximadamente 2.04s en el caso más lento. Por lo tanto, basados en la literatura revisada se puede concluir que el desarrollo presentado puede servir de plataforma de prueba para diferentes estrategias de control sin necesidad de hacer cambios estructurales en la planta.

En la tabla 5 se observan los coeficientes utilizados en cada estrategia de control, los cálculos realizados para obtener los valores de cada controlador se pueden ver en el apéndice A.

Tabla 5. Parámetros utilizados para cada controlador

	x	х	θ	$\dot{m{ heta}}$
LQR	-45.3877	-33.0471	129.8029	24.7088
Ackermann	-10.2765e3	0.0094	1.4762e2	0.99967



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO

- Se implementa un péndulo invertido que sirve como plataforma de ensayo de diferentes estrategias de control.
- Se realiza el diseño de la planta haciendo uso de software CAD, para verificar las dimensiones de los objetos que se implementan en el modelo.
- Se implementa la planta física con las características planteadas en el software CAD, verificando que las dimensiones obtenidas del software CAD sean congruentes con las usadas en el modelo físico probando que los materiales usados sean adecuados para realizar dicha actividad.
- Se diseña el controlador de Ackermann y se generaron los coeficientes para configurar las ganancias de dicho controlador.
- Se diseña el controlador LQR y se generaron los coeficientes para configurar las ganancias de dicho controlador.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

- Se simula cada una de las estrategias de control planteadas (ver figuras 14 y 15) dando como resultado los tiempos de estabilización y las gráficas que muestran la posición angular con respecto al tiempo.
- Se prueban los controladores en la planta (ver figuras 16 y 17) y se generan los tiempos de estabilización de cada uno de los controladores generando con esto cada una de las gráficas.
- Se desarrolla la interfaz gráfica, donde se observan todos los componentes necesarios para su implementación, además, permite al usuario añadir nuevos componentes al sistema y cambiar los valores que se tienen por defecto.
- Se concluye que el controlador de Ackermann tiene una respuesta más agresiva, lo que genera oscilación y además, hace que sea más rápido, pero el controlador LQR tiene mayor robustez en el momento de realizar la acción de control lo que lo hace más preciso (ver figuras (14) y (15)).
- Se concluye que los coeficientes de los controladores para la simulación deben ser sintonizados para que tengan un correcto funcionamiento en la planta física, dado que al ser un sistema de control en caja gris, no se tuvieron en cuenta distintas variaciones de la planta tales como las vibraciones, la resolución del encoder, la velocidad de respuesta del actuador y las diferentes perdidas por fricción en los eslabones de los mecanismos.

Recomendaciones y Trabajos Futuros

Se recomienda adquirir un sensor de distancian de alta precisión con características similares a las que ofrece el sensor O5P700 que se muestra en la figura 19.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22



Figura 19 - Sensor de distancia tomado de http://www.ifm.com/obj/O5H700_08_9_ES.pdf

Generar un controlador más robusto que los propuestos en este trabajo para realizar una acción de control que permita que el carro se mantenga en el centro del riel, con base en el sensor de distancia de la planta. Se recomienda generar un nuevo sistema de transmisión para la planta que permita elevar aún más la velocidad del sistema que reduzca las vibraciones y generar una base para el sistema que permita que tenga una visibilidad estética mayor y durabilidad.

Como trabajos a futuro, se proponen:

- El cambio de la transmisión mecánica del actuador del sistema.
- Adquisición de un sensor de distancia de alta precisión y de punto de censado mayor o igual a 10 mm.
- Implementar una estrategia de control con un sensor de distancia y garantizar que el carro este en la mitad del riel.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

REFERENCIAS

- [1] Ichihara, H., & Kawata, M. (2011). Gain Scheduling Control of an Arm-Driven Inverted Pendulum Based on Sum of Squares: Comparison with a SDRE Method. IFAC Proceedings Volumes, 44(1), 9613–9617. https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00885.
- [2] Flores, A. (2013). Control inteligente de un péndulo invertido y su implementación sobre FPGA, 97. Tomado de http://www.saber.cic.ipn.mx/cake/SABERsvn/trunk/Repositorios/webVerArchivo/6835/2
- [3] MahbubehMoghaddas, M. R., & Nemat Changizi, N. K. (2012). Design Of Optimal Pid Controller for Inverted Pendulum Using Genetic Algorithm. International Journal of Innovation, Management and Technology, 3(4), 440–442. Tomado de http://www.ijimt.org/papers/271-D0373.pdf
- [4] Stimac, A. K. (1999). Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum, 1–62. Tomado de http://web.mit.edu/2.737/www/extra_files/andrew.pdf
- [5] Messner, B., Tilbury, D., Hill, R., & Taylo, J. (2016). Inverted Pendulum: System Modeling. Control Tutorials for Matlab & Simulink. Tomado de http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=SystemModelin g
- [6] Pérez, M. D. (2000). Máquinas eléctricas modernas. Disponible online en: http://www.scribd.com/doc/188073791/Marcos-Perez-Maquinas-Electricas-Modernas.
- [7] Beltr, J. L. (2010). Simulacion de un pendulo invertido Proyecto fin de carrera. Retrieved from http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/10296/Memoria.pdf
- [8] Beltran Alfonso, J. L. (2010). Simulacion de un pendulo invertido Proyecto fin de carrera, 32–33. Tomado de http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/10296/Memoria.pdf
- [9] Dulhoste, J. (2016). Teoria de control. Tomado de http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index_archivos/Documentos/TC11_Retorno_Estado.pdf
- [10] Castaños, F. (2004). Levantamiento y Control de un Péndulo Invertido con un Esquema de Control Reconfigurable. Instituto de Ingeniería Tomado de http://facultad.bayamon.inter.edu/arincon/penduloinvertido1.pdf.
- [11] robótica: manipuladores y robots móviles. (2001) (1st ed., pp. 1-13). Barcelona. Tomado de https://www.dropbox.com/s/b8qxy7bl9tl9u4z/Robot%20moviles%20Anibal%20Ollero.pdf .



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

- [12] Garcia, S., Martinez, M., Llosa, A., & Sanchis, J. (2007). Estrategias de Enseñanza a Distancia sobre Control No-Lineal Aplicada al Péndulo Invertido (1st ed., p. 13). Valencia. Tomado de http://www.scielo.cl/pdf/infotec/v18n5/art11.pdf
- [13] G. Romero, P. Sánchez, F. Reyes, A. Michua, B. Calderón, J. Cid, J. Carlos y T. Gabriela, "Modelado , Control y Simulación de un Sistema Péndulo Invertido Sobre Base Móvil," pp. 195–200, 2009.
- [14] Calderón, G. (2009). CONTROL DEL PÉNDULO INVERTIDO USANDO DOS CELDAS NEURONALES ANALÓGICAS. Retrieved from http://www.cenidet.edu.mx/subaca/webelec/tesis_mc/225MC_gcz.pdf



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

APÉNDICE

Apéndice A. Cálculos realizados para obtener los coeficientes de cada controlador.

Los cálculos realizados se llevaron a cabo con la ayuda del software Matlab, en el cual se ingresaron las variables de la planta y las ecuaciones que rigen el sistema.

Código Matlab para realizar cálculos del controlador LQR

```
M = (87.4*4)/1000; % masa del carro
m = 90.635/1000; % masa del péndulo
b = 0.1; % fricción
I = 0.006; % inercia
g = 9.8; % gravedad
1 = 0.185; % longitud del péndulo
%espacio de estado que rige el sistema
p = I*(M+m)+M*m*1^2; %denominator for the A and B matrices
A = [0]
           1
                          0
                                      0;
    0 - (I+m*1^2)*b/p (m^2*g*1^2)/p 0;
        0
                         0
    0 - (m*1*b)/p
                      m*g*l*(M+m)/p 0
B = [
       0;
     (I+m*1^2)/p;
          0;
       m*1/p]
C = [1 \ 0 \ 0 \ 0;
    0 0 1 0];
D = [0;0];
Ts=1/100; % tiempo de muestreo
%Se convierte el sistema de espacio continuo a discreto
[F,G,H,J]=c2dm (A,B,C,D,Ts,'zoh');
% controlabilidad y observabilidad
co = ctrb (F,G);
ob = obsv (F,H);
Controllability = rank (co)
Observability = rank (ob)
```



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

```
% control LQR
x=2000; %factor de peso para el carro
y=9000; %factor de peso para angulo del pendulo
0 = [x \ 0 \ 0 \ 0;
   0 1 0 0;
   0 0 y 0;
   0 0 0 1];
R = 1;
% lqr digital
K = dlqr(F,G,Q,R)
% compensador
Nbar=-61.55;
%graficar
[Y,X]=dlsim(F-G*K,G*Nbar,H,J,U);
stairs(T,Y)
%legend('Cart (x)','Pendulum (phi)')
```

Código Matlab para realizar los cálculos de la matríz K de Ackermann

```
M = (87.4*4)/1000; % masa del carro
m = 90.635/1000; % masa del péndulo
b = 0.1; % fricción
I = 0.006; % inercia
g = 9.8; % gravedad
1 = 0.185; % longitud del péndulo
p = I*(M+m)+M*m*1^2; %denominator for the A and B matrices
A = [0]
       1
                           0
                                       0;
     0 - (I+m*1^2)*b/p
                       (m^2*g*1^2)/p
                                       0;
     0 0
     0 - (m*1*b)/p
                        m*g*l*(M+m)/p 0
B = [
        0;
     (I+m*1^2)/p;
          0;
       m*1/p]
C = [1 \ 0 \ 1 \ 0];
D = [0];
Ahat = [A zeros(4,1); -C 0];
Bhat = [B; 0];
J = [-1+j*sqrt(3) -1-j*sqrt(3) -3 -3 -3];
% se utiliza la funcion acker para calcular la matriz de ganacias K
```



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

K = acker(Ahat, Bhat, J)

Apéndice B. Diagrama de conexión electrónica

En la figura 20 se muestra la forma correcta de conectar todos los componentes electrónicos.

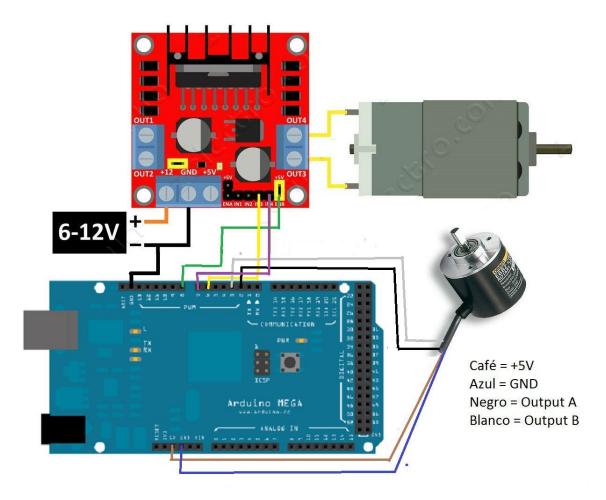


Figura 20 - Conexión electrónica - elaboración propia



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Apéndice C. Programación Péndulo invertido

La programación del péndulo invertido se realizó utilizando varios bloques de Simulink interconectados, los cuales pueden ser intervenidos por el usuario.

Bloque controlador

En la figura 21 se muestra el bloque controlador, el cual es el encargado de ejecutar la acción de control.

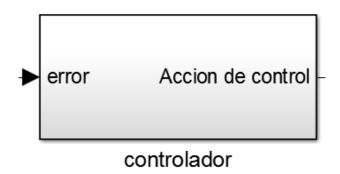


Figura 21 - Bloque Controlador - Elaboración propia

En la figura 22 se muestra el funcionamiento del bloque controlador.

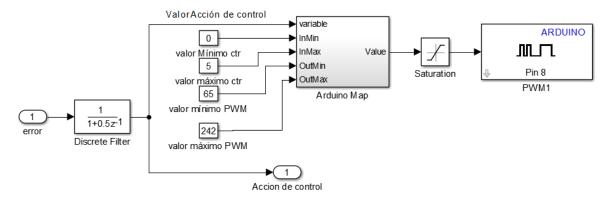


Figura 22- Elementos que componen el bloque controlador

Este bloque consta de un filtro discreto para controlar los cambios bruscos de la señal y una función MAP regida por los valores mínimos y máximos que arroja el control. Dicha señal



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

la convierte a una salida de PWM para hacer que el motor se mueva corrigiendo dicho error. Estas salidas se restringen en los valores 65 y 242 dado que el valor de 65 es el mínimo para que el motor pueda encender y el 242 es el 95% del PWM máximo que puede recibir el motor y es el rango de trabajo óptimo para este con base en la experimentación.

Bloque inversión de giro.

En la figura 23 se muestra el bloque que genera la inversión de giro del motor del sistema.



Figura 23 - Bloque inversión de giro

Este bloque está configurado para generar el cambio de dirección del motor que ejecuta la acción de control, consta de una configuración de comparación con base en el valor obtenido en el controlador como se observa en la figura 24. Si el valor es negativo el motor gira a la izquierda y si el valor es positivo el motor gira a la derecha. Para que funcione de esta manera se debe realizar la conexión como se muestra en el apéndice B.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

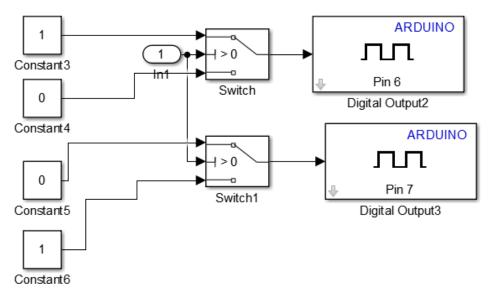


Figura 24 - configuración interna del bloque inversión de giro

Bloque Sensores

En la figura 25 se muestra el bloque sensores, el cual es el encargado de adquirir la información del Sensor Encoder además, tiene la posibilidad de adquirir la señal de un sensor de distancia que el usuario desee añadir para utilizarlo en otras técnicas de control. Este bloque se realizó utilizando el bloque S - function builder de Simulink, el cual permite crear librerías a partir de código C. Para construir dichas librerías se debe referir al sitio web del fabricante Mathworks en la dirección https://goo.gl/VKvePe.

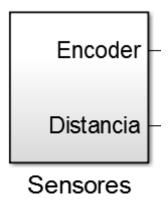


Figura 25 - Bloque Sensores - Elaboración propia



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Bloque Salida de la planta

En la figura 26 se muestra el bloque salida de la planta, el cual es encargado de recibir las señales del bloque Sensores y determinar el estado actual del sistema.

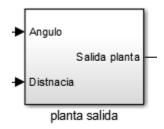


Figura 26 - Bloque "salida de la planta" - Elaboración propia

En la figura 27 se observa el algoritmo utilizado por el bloque salida de la plata, el cual partiendo del ángulo del péndulo y la distancia del carro, determina la velocidad angular del péndulo y la velocidad lineal del carro, realizando las respectivas derivadas discretas de cada estado de la planta.

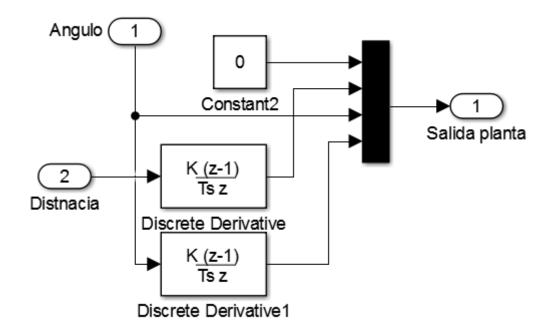


Figura 27 - Algoritmo utilizado por el bloque "salida de la planta"



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Bloque matriz de estados K

En la figura 28 se muestra el bloque "Matriz de estados K" el cual es el encargado de multiplicar matricialmente el valor obtenido por el bloque "Salida de la planta" con los valores obtenidos para la matriz K, habiendo realizado previamente los cálculos matemáticos como se observan en el apéndice A.



Figura 28 - Bloque Matriz de estados K - Elaboración propia

En la figura 29 se muestra la interfaz que genera el bloque "Matriz de estados K", la cual permite ingresar los valores calculados en el Apéndice A.

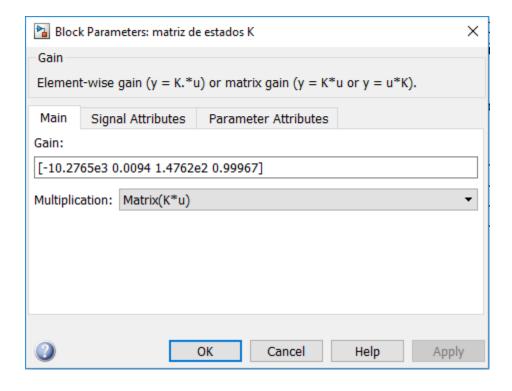


Figura 29 - Interfaz donde se deben ingresar los valores que se obtuvieron para la matriz de estados K – Elaboración propia



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

Apéndice D – Preparación de la planta para su funcionamiento

Para que la planta funcione correctamente se debe iniciar el péndulo en posición vertical hacia abajo mientras se carga el código al Arduino, como se muestra en la figura 30. Luego se debe colocar el péndulo en posición vertical hacia arriba al mismo tiempo que el Arduino está en funcionamiento y por último se enciende la alimentación del módulo L298N. Es recomendable tener alimentación independiente para sistema de control como para el actuador. También se recomienda que la alimentación del Arduino sea por medio del conector serial que tiene este por defecto y de esta manera se le proporciona energía y al mismo tiempo se comunica con la interfaz gráfica.



Figura 30 - Posición inicial del péndulo - Elaboración propia

Apéndice E - Planimetría de la planta

En esta sección se añaden los planos necesarios para la construcción de la planta, donde se muestra detalladamente cada pieza con sus respectivas dimensiones.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

En las figuras (31) y (32) se muestran las dimensiones respectivas del riel por donde se desplaza el carro del péndulo.

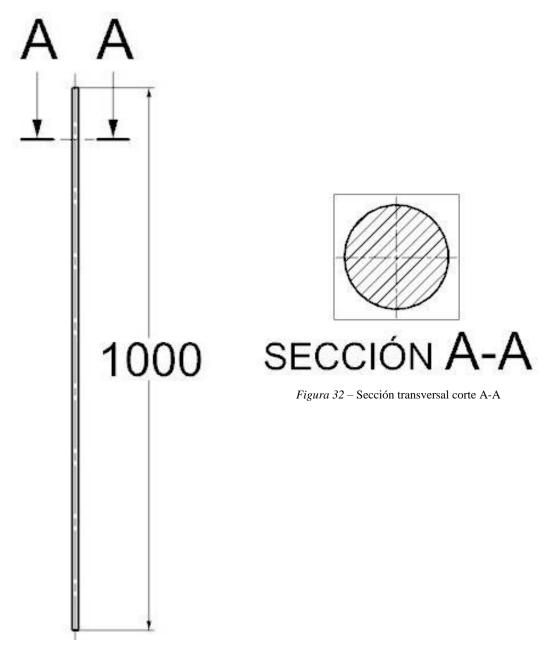


Figura 31 – Vista frontal riel



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

En las figuras (33) y (34) se muestran las medidas respectivas del péndulo.

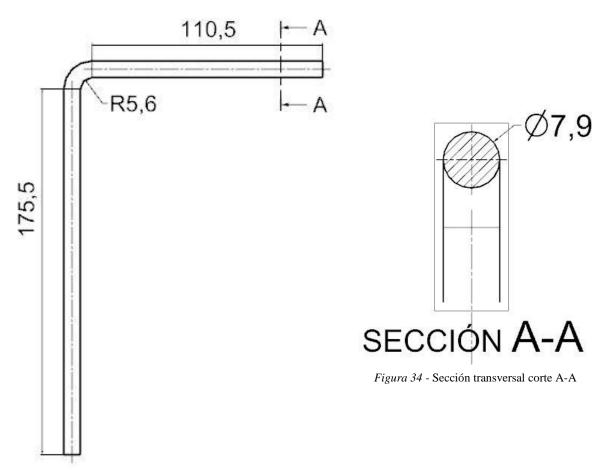


Figura 33 - Vista frontal péndulo



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

En las figuras (35) y (36) se muestran las medidas obtenidas de los rodamientos lineales utilizados para el desplazamiento del carro.

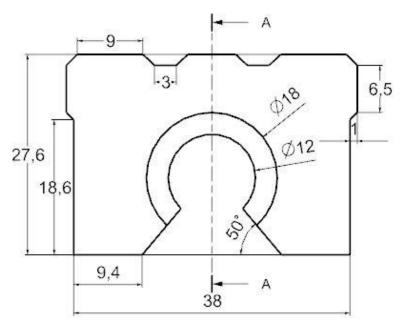


Figura 35 - Vista frontal Rodamiento

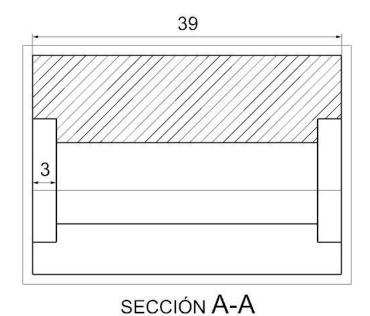


Figura 36 - Sección transversal corte A-A



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

El carro del péndulo se compone de 4 rodamientos lineales (ver figuras (35) y (36)) y de un acople que une los 4 rodamientos, (ver figura (37)).

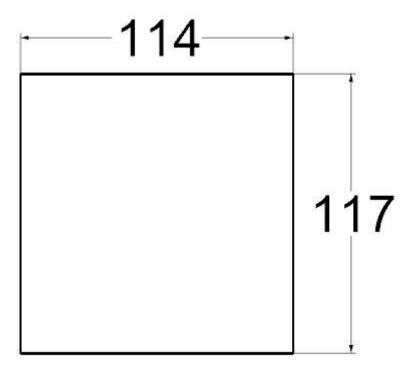


Figura 37 - Vista frontal acople

NOTA: Todas las medidas están en milímetros.



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

FIRMA ESTUDIANTES	Juan Esteban Zabala Daza Jose Mena P.
FIRMA ASESOR	Elen E. Herco B. Revisiones Informe final. 9:284m
	FECHA ENTREGA: <u>6 de Marzo 2017</u>
FIRMA COMITÉ TRABAJO DE C	GRADO DE LA FACULTAD
RECHAZADO	ACEPTADO ACEPTADO CON MODIFICACIONES
	ACTA NOFECHA ENTREGA:
L	
FIRMA CONSEJO DE FACU	TLTAD



Código	FDE 089
Versión	03
Fecha	2015-01-
	22

ACTA NO	
FECHA ENTREGA:	