Método de identificación de modelos de orden reducido de tres puntos *123c*

Víctor M. Alfaro, M.Sc.
Departamento de Automática
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Costa Rica

valfaro@eie.ucr.ac.cr

Rev: 25 de enero de 2007

1. Introducción

Para poder sintonizar el controlador PID de un lazo de control realimentado, es indispensable contar con información del comportamiento dinámico del proceso controlado. Este normalmente estará representado por un modelo de primer o segundo orden más tiempo muerto. Los parámetros de estos modelos se pueden identificar a partir de la *curva de reacción del proceso* (respuesta a una entrada escalón), conocidos los tiempos requeridos para alcanzar dos o tres puntos sobre la misma.

Se presentan adelante en forma resumida, las ecuaciones del método de identificación de tres puntos *123c* [Alfaro (2006)], para identificar los parámetros de modelos de primer y segundo orden más tiempo muerto. Este procedimiento es una extensión del método de identificación de dos puntos *1/4-3/4* [Alfaro (1999)].

A partir de la curva de reacción del proceso a una entrada escalón de magnitud Δu, se deben determinar los instantes t_{25}, t_{50} y t_{75}, que corresponden a los tiempos requeridos para que la respuesta del proceso alcance el 25, el 50 y el 75 % de su valor final, así como el cambio total en la respuesta Δy, tal como se muestra en la figura 1.

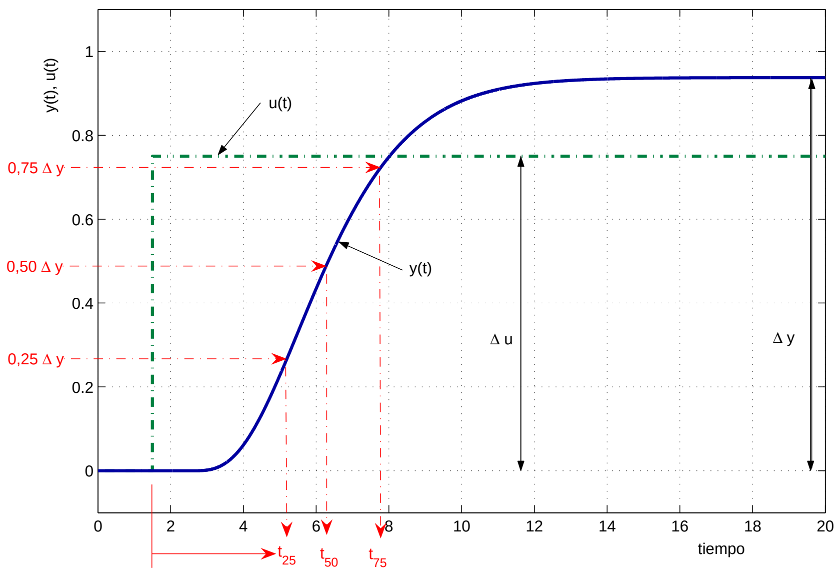

Figura 1: Curva de reacción del proceso

2. Identificación de los modelos

Para la identificación de los modelos de primer orden y de polo doble más tiempo muerto, se requieren solamente dos puntos sobre la curva de reacción, por lo que se utilizarán para esto los tiempos t_{25} y t_{75} (método *1/4-3/4*).

Para la identificación de los modelos de segundo orden sobreamortiguados más tiempo muerto, se requieren tres puntos sobre la curva de reacción, por lo que a los tiempos anteriores se agregará el tiempo t_{50} (método *123c*).

2.1. Modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM)

Los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto dado por la función de transferencia

$$G_{p1}(s) = \frac{k_p \, \mathrm{e}^{-t_m s}}{\tau \, s + 1} \tag{1}$$

que permita representar al proceso controlado en los estudios de control, se identifican con las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau &= 0,9102\,(t_{75} - t_{25}) \\ t_m &= 1,2620\,t_{25} - 0,2620\,t_{75} \end{aligned} \tag{2}$$

2.2. Modelo de polo doble más tiempo muerto (PDMTM)

En el caso del modelo de polo doble más tiempo muerto cuya función de transferencia es

$$G_{p2}(s) = \frac{k_p\,\mathrm{e}^{-t'_m s}}{(\tau'\,s+1)^2} \tag{3}$$

sus parámetros se identifican utilizando las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau' &= 0,5776\,(t_{75} - t_{25}) \\ t'_m &= 1,5552\,t_{25} - 0,5552\,t_{75} \end{aligned} \tag{4}$$

2.3. Modelo de segundo orden más tiempo muerto (SOMTM)

Como ya se indicó, en el caso de los dos modelos anteriores, por tener estos dos parámetros de tiempo (τ y t_m o τ' y t'_m), solo se requieren dos puntos sobre la curva de reacción. Sin embargo, para identificar el modelo de segundo orden sobreamortiguado cuya función de transferencia es

$$G_{p3}(s) = \frac{k_p\,\mathrm{e}^{-t''_m s}}{(\tau_1\,s+1)(\tau_2\,s+1)} = \frac{k_p\,\mathrm{e}^{-t''_m s}}{(\tau''\,s+1)(a\tau''\,s+1)} \tag{5}$$

por tener este tres parámetros de tiempo (τ_1 y τ_2 o τ'' y $a = \tau_2/\tau_1$, y t''_m) se requieren tres puntos.

Para la identificación de los parámetros de este modelo se dispone de dos procedimientos diferentes.

2.3.1. Método simplificado (SOMTMs)

Si se ha identificado ya un modelo de polo doble como se describió en la Sección 2.2, sus parámetros k_p, τ' y t'_m son conocidos. Entonces, suponiendo que el tiempo muerto del modelo de segundo orden es igual al del modelo de polo doble ($t''_m = t'_m$), e igualando sus *tiempos de residencia* (suma de todas las constantes de tiempo y el tiempo muerto), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para la identificación de sus parámetros

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ t''_m &= t'_m \\ \tau'' &= \frac{2\tau'}{1+a} \\ \tau_1 &= \tau'' \\ \tau_2 &= a\tau'' \\ a &= \frac{t_{50} - t'_m - 1,4362\tau'}{1,9844\tau' - t_{50} + t'_m} \end{aligned} \tag{6}$$

2.3.2. Método general (SOMTMg)

A partir de los tres tiempos determinados sobre la curva de reacción (t_{25}, t_{50} y t_{75}), los parámetros del modelo de segundo orden sobreamortiguado más tiempo muerto, se pueden identificar con el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau'' &= \frac{t_{75} - t_{25}}{0,9866 + 0,7036a} \\ \tau_1 &= \tau'' \\ \tau_2 &= a\tau'' \\ t''_m &= t_{75} - (1,3421 + 1,3455a)\tau'' \\ a &= \frac{-0,6240t_{25} + 0,9866t_{50} - 0,3626t_{75}}{0,3533t_{25} - 0,7036t_{50} + 0,3503t_{75}} \end{aligned} \tag{7}$$

Conociendo entonces los tiempo requeridos para alcanzar el 25, el 50 y el 75 % del cambio total en la respuesta de la planta, medidos a partir del instante en que se aplicó el escalón de entrada, se pueden identificar cuatro modelos diferentes: uno de primer orden más tiempo muerto, uno de segundo orden críticamente amortiguado (polo doble) más tiempo muerto y dos de segundo orden sobreamortiguados más tiempo muerto.

Por utilizar los puntos correspondientes a *uno*, *dos* y *tres cuartos* del cambio total en la respuesta, este método se denomina *método de identificación de tres puntos 123c*.

3. Ejemplo

A partir de la curva de reacción de la planta de cuarto orden cuya función de transferencia es

$$G_{po}(s) = \frac{1,25\mathrm{e}^{-0,25s}}{(16s+1)(4s+1)(2+1)(s+1)}$$

se puede obtener la siguiente información:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1,0 \\ \Delta y &= 1,25 \\ t_{25} &= 11,56 \\ t_{50} &= 18,84 \\ t_{75} &= 30,17 \end{aligned}$$

y utilizarla para identificar los modelos para representarla, los que en este caso están dados por las siguientes funciones de transferencia:

- Modelo de primer orden más tiempo muerto ($S_{2_1} = 0,1394$)

$$G_{m1}(s) = \frac{1,25\mathrm{e}^{-6,69s}}{16,94s+1}$$

- Modelo de polo doble más tiempo muerto ($S_{2_2} = 0,0668$)

$$G_{m2}(s) = \frac{1,25\mathrm{e}^{-1,23s}}{(10,75s+1)^2}$$

- Modelo de segundo orden más tiempo muerto (método simplificado) ($S_{2_{3s}} = 0,0419$)

$$G_{m3s}(s) = \frac{1,25\mathrm{e}^{-1,23s}}{(13,55s+1)(7,94s+1)}$$

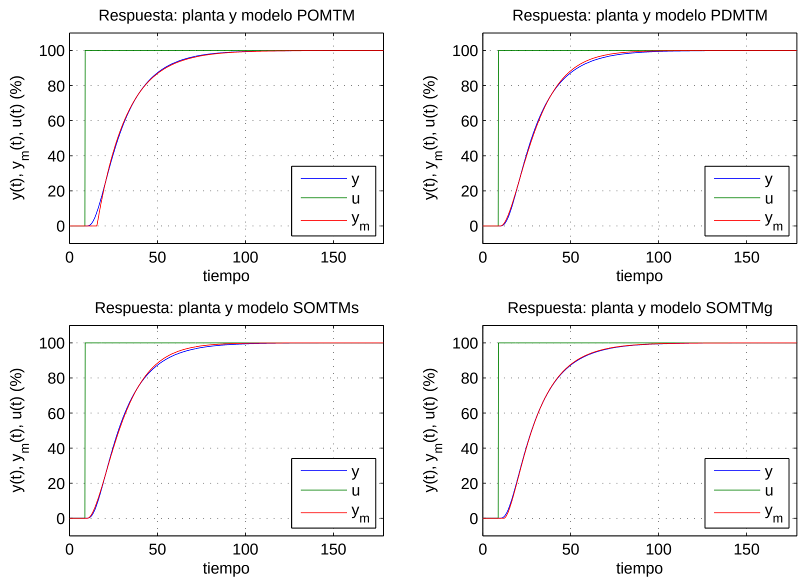

Figura 2: Respuesta de la planta y de los modelos identificados

- Modelo de segundo orden más tiempo muerto (método general) ($S_{23_g} = 0,0155$)

$$G_{m3g}(s) = \frac{1,25\mathrm{e}^{-2,98s}}{(15,42s+1)(4,83s+1)}$$

y cuyas respuestas se muestran en la figura 2.

Los índices de error de predicción cuadrático $S_{2i} = \sum_{k=1}^{n} [y_0(k) - y_i(k)]^2$ se calcularon en el ámbito $t = [0; 180]$ con un paso $\Delta t = 0,18$.

Si bien como muestran los índices de error de predicción cuadrático, el modelo de segundo orden sobreamortiguado identificado con el método general es aproximadamente diez veces más preciso que el modelo de primer orden más tiempo muerto, la diferencia entre las respuestas de estos dos modelos solo se aprecia en su parte inicial.

De las curvas de respuesta se puede apreciar también, la exactitud con la que los modelos de segundo orden permiten reproducir la curva de reacción del proceso, que en este ejemplo es de cuarto orden.

Referencias

Alfaro, V. M. (1999), *Identificación Experimental (IE-432 Laboratorio de control automático)*, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica.

Alfaro, V. M. (2006), 'Identificación de modelos de orden reducido a partir de la curva de reacción del proceso', *Ciencia y Tecnología (Costa Rica)* **24**, (2).