Weyl spinor 計算ノート

れおなち

平成 30 年 6 月 24 日

1. Lorentz 群の既約分解

Lorentz 計量は $\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ とする。 Lorentz 変換

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

を考える。これは Lorentz 計量 $\eta_{\mu\nu}$ を保つ。すなわち、

$$\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu \eta_{\rho\lambda} = \eta_{\mu\nu}$$

が成り立つ。微小 Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu \sim \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ を考えれば、直ちに $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ がわかる。

一般に、異なる慣性系でみた同一時空点は、Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ で関係づけることができ、このとき異なる慣性系で見た同一の場も慣性系の Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ に応じて何らかの線形変換を受けると考えるべきである:

$$\varphi'(x') = D(\Lambda)\varphi(x)$$

3 つの慣性系をつなぐ Lorentz 変換として、Λ_1 と Λ_2、そして $\Lambda_2\Lambda_1$ を考えると、任意の場 $\varphi(x)$ について

$$D(\Lambda_2\Lambda_1)\varphi(x) = D(\Lambda_2)D(\Lambda_1)\varphi(x)$$

が成り立つべきなので、慣性系の Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を、それに対応した場の変換 $D(\Lambda)$ に対応させる写像 D は Lorentz 変換のもつ群構造を保つ群準同型写像 (表現) になることが結論できる。したがって、一般の場が受ける Lorentz 変換は、慣性系における Lorentz 変換と、抽象的な群構造の意味で同じものにならなければならない。

さて、抽象 Lorentz 群の元 Λ はパラメータ $\omega_{\mu\nu}$ および抽象 Lorentz 代数の生成子 $M^{\mu\nu}$ を用いて、

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$$

として表すことができる。生成子 $M^{\mu\nu}$ もやはり Lorentz 変換の下で共変なテンソル量であって、次のように変換する:

$$\Lambda^{-1}M^{\mu\nu}\Lambda = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda M^{\rho\lambda}$$

ここでも再び微小 Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu \sim \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ および $\Lambda \sim 1 - \dfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ を考えれば、Lorentz 代数の生成子 $M^{\mu\nu}$ に関する重要な交換関係が得られる:

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}\right] = i\left(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} + \eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho}\right)$$

問題にしている場の変換性は、この Lorentz 代数の交換関係に基づく Lorentz 群の構造に由来する。 ここで $M^{ij} = \epsilon_{ijk}J_k$ および $M^{i0} = K_i$ なる $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ を定義し、さらにこれを用いて

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \equiv \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{K}) \\ \boldsymbol{B} \equiv \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{K}) \end{cases}$$

を定義すれば、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 各々が $\mathfrak{su}(2)$ 代数の交換関係を満たすことが確かめられる:

$$\begin{cases} [A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \\ [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \\ [A_i, B_j] = 0 \end{cases}$$

一般論から、$\mathfrak{su}(2)$ 代数は整数または半整数値の量子数 j によって特徴づけられる $2j+1$ 次元の既約表現に直和分解できる。 したがって、Lorentz 群の有限次元既約表現は 2 つの整数または半整数の組 (A, B) で特徴づけることができ、この表現の下で変換する場の量は

$$\varphi_{ab}(x) \quad \begin{pmatrix} a = -A, -A+1, \cdots, A-1, A \\ b = -B, -B+1, \cdots, B-1, B \end{pmatrix}$$

のような $(2A+1)(2B+1)$ 成分の量として表すことができる。

もし、Lorentz 群の表現 $D(\Lambda)$ としてユニタリ表現を考えるとすると、Lorentz 代数の表現 $D(M^{\mu\nu})$ には Hermiticity が要請される。このとき、$D(J_i), D(K_i)$ は Hermite になるが、これらを組み合わせた $D(A_i), D(B_i)$ は Hermite にならないことに注意しなければならない。すると、これらの既約表現を求める上で量子数として半整数が許されることを示すには、さらに表現が有限次元であることを仮定しなければならない。 一般的に、Lorentz 群のようなノンコンパクト Lie 群に関する有限次元表現はユニタリ表現になり得ない。したがって、ユニタリ表現を得るためには無限次元表現でなければならない。

抽象 Lorentz 群の元 Λ を $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を用いて書き換えてみよう。パラメータとして新たに $\theta_i \equiv \epsilon_{ijk}\omega_{jk}, \eta_i \equiv \omega_{i0}$ を定義すると、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{ij}M^{ij} - i\omega_{i0}M^{i0}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_k J_k - i\eta_k K_k\right) \\ &= \exp\left(-i\xi_k A_k - i\zeta_k B_k\right) \\ &= e^{-i\xi_k A_k} e^{-i\zeta_k B_k} \end{aligned}$$

となる。ここで、$\xi_k \equiv \frac{1}{2}\theta_k - i\eta_k, \zeta_k \equiv \frac{1}{2}\theta_k + i\eta_k,$ であり、すなわち $\xi_k^* = \zeta_k$ の関係がある。 一見、$e^{-i\xi_k A_k}$ や $e^{-i\zeta_k B_k}$ は $SU(2)$ の元のようであるが、実際にはパラメータ ξ_k や ζ_k は複素数であるため、ユニタリ性は失われており、それぞれの元は $SU(2)$ ではなく $SL(2, \mathbb{C})$ の上を動く。 ところがこれに加えて、パラメータには $\xi_k^* = \zeta_k$ の拘束があるため、単純に Lorentz 群が $SL(2, \mathbb{C}) \otimes SL(2, \mathbb{C})$ と同型であるというわけにはいかない。仮に $\xi_k^* = \zeta_k$ という拘束を忘れて ξ_k, ζ_k がフリーな複素パラメータだと仮定すれば、これは確かに $SL(2, \mathbb{C}) \otimes SL(2, \mathbb{C})$ と同型になる。言わば、Lorentz 群は $SL(2, \mathbb{C}) \otimes SL(2, \mathbb{C})$ の部分群である。 しかし、ここで任意の既約表現 (A, B) が 2 つの既約表現 $(A, 0)$ および $(0, B)$ の直積に書けることに注目しよう。片方が自明表現であるとすると今や $\xi_k^* = \zeta_k$ という拘束条件は常に満たされるので、$SL(2, \mathbb{C})$ は $(A, 0)$ 表現あるいは $(0, B)$ 表現の上の Lorentz 群に関する忠実な表現である。 したがって本質的に、Lorentz 群の表現論は $SL(2, \mathbb{C})$ の表現論を調べることに尽きるのである。

ここからは、各既約表現に対し、表現空間の変換性について詳しくみていく。

2. 1 表現

$(A,B)=(0,0)$ に対応する量は 1 成分のスカラー場であり、**1** 表現と呼ばれる。 実際、このような条件の下で実現されるのは恒等変換で表される自明な表現のみである。 これは、**1** 表現が座標変換の下で不変であることを意味し、すなわちスカラーであることを意味する。

3. 2 表現および $\mathbf{2}^*$ 表現

$(A,B)=(0,\frac{1}{2})$ および $(A,B)=(\frac{1}{2},0)$ はいずれも 2 成分場であり、それぞれ **2** 表現および $\mathbf{2}^*$ 表現あるいは **2** スピノールおよび $\mathbf{2}^*$ スピノールとよばれる。

2 表現の場合、片方が自明な表現になることで $\xi_k^*=\zeta_k$ は常に満たされるので、$SL(2,\mathbb{C})$ が **2** 表現の上の Lorentz 群に関する忠実な表現となる。したがって、**2** 表現の場を $\xi_\alpha(x)$ $(\alpha=1,2)$ と表せば、任意の Lorentz 変換の下で $a\in SL(2,\mathbb{C})$ が存在して

$$\xi'_\alpha = a_\alpha{}^\beta \xi_\beta$$

なる変換を受けることがわかる。 全く同様に、$\mathbf{2}^*$ 表現についても、$SL(2,\mathbb{C})$ が Lorentz 群に関する忠実な表現となる。 ところで、2 階の反対称テンソルを $\epsilon_{ab}=\epsilon^{ab}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、任意の 2 次の正方行列 M に対して、

$$\det(M)\epsilon_{ab}=\epsilon_{cd}M_a{}^c M_b{}^d$$

すなわち

$$\det(M)\epsilon = M^\top \epsilon M$$

が成立する。 ここから、$SL(2,\mathbb{C})$ の下では ϵ_{ab} は不変テンソルになることがわかる。同様に、ϵ^{ab} も $SL(2,\mathbb{C})$ の不変テンソルである。 そこで、ϵ を使って添字の上げ下げを定義することにしよう。すなわち、

$$\xi^\alpha \equiv \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta$$

と定義する。ただし、添字を下げるときは $-\epsilon=\epsilon^{-1}=\epsilon^\top$ の関係から、

$$\xi_\alpha = \xi^\beta \epsilon_{\beta\alpha} = -\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$$

となることに注意しなければならない。

$D(\Lambda)$ が $SL(2,\mathbb{C})$ の表現ならば、転置逆行列 $D(\Lambda)^\perp$ も同じ群の表現 (反傾表現) なので、

$$D(\Lambda)=\epsilon^{-1}D(\Lambda)^\perp\epsilon$$

の関係により ξ^α は ξ_α とは逆、つまり

$$\xi'^\alpha = (a^{-1})_\beta{}^\alpha \xi^\beta$$

なる変換を受けることがわかる。変換のパラメータ自体は同じなので、ξ^α も **2** 表現である。

さて、$\mathbf{2}^*$ 表現は先ほど見たように **2** 表現に対して共役なパラメータで変換する量である。$D(\Lambda)$ が $SL(2,\mathbb{C})$ の表現ならば、共役な行列 $D(\Lambda)^*$ もやはり同じ群の表現 (複素共役表現) であるが、

$$\left[e^{-i\xi_k D(A_k)}\right]^* = e^{i\xi_k^* D(A_k)^*} = e^{-i\zeta_k D(B_k)}$$

という関係から、$\mathbf{2}^*$ 表現はまさにこの複素共役表現の下で変換することがわかる。なお、Lie 代数の表現 $D(A_k)^*$ が $-D(B_k)$ と同じ交換関係を満たすことを用いた。

ここでは慣例に従い複素共役表現の下で変換する量の添字をドット付きで表し、記号の上にはバーを付けることにする。すると、$\mathbf{2}^*$ スピノール $\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}$ $(\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2})$ は

$$\overline{\eta}'_{\dot{\alpha}} = (a^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \overline{\eta}_{\dot{\beta}}$$

として変換することになる。 さらに、先ほど導入した $SL(2, \mathbb{C})$ 不変テンソル $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて、同じように

$$\overline{\eta}^{\dot{\alpha}} \equiv \overline{\eta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$
$$\overline{\eta}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{\eta}^{\dot{\beta}} = -\overline{\eta}^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$

と定義することで、$\overline{\eta}^{\dot{\alpha}}$ は $\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}$ とは逆、つまり

$$\overline{\eta}'^{\dot{\alpha}} = (a^{-1})^*{}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \overline{\eta}^{\dot{\beta}}$$

なる変換を受けることがわかる。

2 つの $\mathbf{2}$ 表現あるいは 2 つの $\mathbf{2}^*$ 表現を組み合わせることでスカラーが作れる。実際、

$$\xi'^{\alpha} \zeta'_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \xi'_{\beta} \zeta'_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha}{}^{\gamma} a_{\beta}{}^{\delta} \xi_{\delta} \zeta_{\gamma} = (\det a) \epsilon^{\gamma\delta} \xi_{\delta} \zeta_{\gamma} = \xi^{\gamma} \zeta_{\gamma}$$
$$\overline{\eta}'_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \overline{\eta}'_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}'_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \overline{\eta}_{\dot{\gamma}} \overline{\theta}_{\dot{\delta}} b_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\delta}} b_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = (\det b) \overline{\eta}_{\dot{\gamma}} \overline{\theta}_{\dot{\delta}} \epsilon^{\dot{\delta}\dot{\gamma}} = \overline{\eta}_{\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}}$$

である。ここでもやはり、contract する添字の位置には注意しなければならない:

$$\xi^{\alpha} \zeta_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_{\beta} \zeta_{\alpha} = -\epsilon^{\beta\alpha} \xi_{\beta} \zeta_{\alpha} = -\xi_{\beta} \zeta^{\beta}$$
$$\overline{\eta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \overline{\eta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = -\overline{\eta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\overline{\eta}^{\dot{\beta}} \overline{\theta}_{\dot{\beta}}$$

4. 標準位置

添字を毎回明示するのは面倒であり、記号が煩雑になってくると邪魔にもなるので、できる限り省略したい。しかし、上で見たように $SL(2,\mathbb{C})$ の不変テンソルが反対称であることが原因で、

$$\xi^\alpha \zeta_\alpha = -\xi_\alpha \zeta^\alpha$$

などのように、仮に文字の位置が同じであっても添字の位置によって結果が変わってしまうということが起こる。そこで、予め添字の標準位置というものを決めておくと便利である。これを決めておくと、仮に添字が省略されていたとしても、間違いが起こらない。

まず原則として、ドット無し添字は隣り合う左上と右下の 2 つを縮約するものとし、ドット付き添字は隣り合う左下と右上の 2 つを縮約するものと約束する:

$$\begin{aligned} \xi\zeta &\equiv \xi^\alpha \zeta_\alpha \\ \overline{\eta}\overline{\theta} &\equiv \overline{\eta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

縮約をとる添字の位置をドット無しとドット付きとであべこべに定めた理由は、次の内積が表記の上で consistent になるようにするためである:

$$(\xi\zeta)^\dagger = (\xi^\alpha \zeta_\alpha)^\dagger = \overline{\zeta}_{\dot{\alpha}} \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\zeta\xi}$$

各記号の標準位置は次のように約束する。

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &\equiv \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \\ \overline{\sigma}^\mu &\equiv \sigma^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \\ \sigma^{\mu\nu} &\equiv \sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta \\ \overline{\sigma}^{\mu\nu} &\equiv \overline{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

また、$SL(2,\mathbb{C})$ の不変テンソルとしての 2 階完全反対称テンソル ϵ は、次のように定義されている:

$$\epsilon^{12} = \epsilon_{12} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$$

これはすなわち、

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} &= -\delta^\alpha_\gamma \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} &= -\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

を意味している。 ϵ の添字構造は、縮約をとっている隣り合った量の添字の標準位置から一意に決めることができるので、特に標準位置は設けない。

5. スピノール代数

2 表現および $\mathbf{2}^*$ 表現がなす代数をスピノール代数とよぶ。これらは $SL(2,\mathbb{C})$ の下で変換し、不変テンソルとして 2 階の反対称テンソルをもつような代数である。スピノール代数ではあらゆる量が反交換すると定義する。すなわち、スピノール代数におけるスピノルは **Grassmann 数**である。このような定義の下では、不変テンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ を用いた 2 つの **2** 表現あるいは $\mathbf{2}^*$ 表現の「内積」が定義できる:

$$
\begin{aligned}
\xi\zeta = \xi^\alpha\zeta_\alpha = \xi^\alpha\epsilon_{\beta\alpha}\zeta^\beta = \zeta^\beta\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \zeta^\beta\xi_\beta = \zeta\xi \\
\eta\theta = \eta_{\dot\alpha}\theta^{\dot\alpha} = \eta_{\dot\alpha}\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\theta_{\dot\beta} = \theta_{\dot\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\alpha} = \theta_{\dot\beta}\eta^{\dot\beta} = \theta\eta
\end{aligned}
$$

スピノルが Grassmann 性をもつように定義することを正当化するいくつかの理由がある。 1 つは、スピノルが Grassmann 数でないとすると、これらの「ノルム」は明らかに 0 になってしまうということである。ノルムが 0 になってしまうということは、これは通常の意味でのベクトルのノルムが定義できないことを意味する。つまりこのような代数は幾何学的には不毛な対象である。 したがって代数として豊かな構造を手にするためには、スピノルに Grassmann 性を課してスピノルの「内積」が幾何学的な意味を持つようにしなければならない。 2 つは、スピン統計定理からの要請である。スピノルはその名前からも分かる通り、Lorentz 群のスピン表現に従う量である。このように量子数として半整数スピンをもつような対象については、スピン統計定理から、謂わば fermionic な、反交換する量として定式化されなければならない。 ここからは、スピノール代数におけるいくつかの重要な性質を示す。

---

2 表現 ξ^α に対しては $\xi^1 = \xi_2, \xi^2 = -\xi_1$、$\mathbf{2}^*$ 表現 $\overline{\eta}_{\dot\alpha}$ に対しては $\overline{\eta}_{\dot 1} = \overline{\eta}^{\dot 2}, \overline{\eta}_{\dot 2} = -\overline{\eta}^{\dot 1}$ が成り立つことに注意すると、次の式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
\xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(\xi\zeta) \\
\xi_{[\alpha}\zeta_{\beta]} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}(\xi\zeta) \\
\overline{\eta}^{[\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta]} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\eta\theta) \\
\overline{\eta}_{[\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta]} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\eta\theta)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

特に、

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha\xi^\beta &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(\xi\xi) \\
\xi_\alpha\xi_\beta &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}(\xi\xi) \\
\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\theta\theta) \\
\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\theta\theta)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

である。

これを用いると、スピノルに関して様々な関係式が得られる。例えば、

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\xi^\beta\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta} &= -\xi^\alpha\xi^\beta\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta} \\
&= -\frac{1}{4}(\xi\xi)(\overline{\theta\theta})\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta} \\
&= -\frac{1}{4}(\xi\xi)(\overline{\theta\theta})\mathrm{tr}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) \\
&= \frac{1}{2}(\xi\xi)(\overline{\theta\theta})\eta^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$(\xi\sigma^\mu\overline{\theta})(\xi\sigma^\nu\overline{\theta}) = \frac{1}{2}(\xi\xi)(\overline{\theta}\overline{\theta})\eta^{\mu\nu} \tag{5.3}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha\xi_\alpha\theta^\beta\zeta_\beta &= -\theta^\alpha\theta^\beta\xi_\alpha\zeta_\beta \\
&= \frac{1}{2}(\theta\theta)\epsilon^{\alpha\beta}\xi_\alpha\zeta_\beta \\
&= \frac{1}{2}(\theta\theta)\epsilon^{\alpha\beta}\xi_\alpha\zeta_\beta \\
&= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\xi\zeta)
\end{aligned}$$

となるので、

$$(\theta\xi)(\theta\zeta) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\xi\zeta) \tag{5.4}$$

が成り立つ。同様に

$$(\overline{\theta}\overline{\xi})(\overline{\theta}\overline{\zeta}) = -\frac{1}{2}(\overline{\theta}\overline{\theta})(\overline{\xi}\overline{\zeta}) \tag{5.5}$$

もわかる。

スピノル 2 つで構成したベクトル量の内部関係についてもみてみよう。例えば、

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} &= -\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\xi^\alpha \\
&= -\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta}\xi^\alpha \\
&= \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta}\xi_\beta
\end{aligned}$$

となるから

$$\xi\sigma^\mu\overline{\theta} = \overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi \tag{5.6}$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta}\zeta_\beta &= -\zeta_\beta\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}{\sigma^\nu}_{\gamma\dot{\gamma}}\xi^\alpha \\
&= \zeta^\gamma\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}{\sigma^\nu}_{\gamma\dot{\gamma}}\epsilon^{\alpha\delta}\epsilon_{\beta\delta}\xi^\beta \\
&= \zeta^\gamma\overline{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\delta}{\sigma^\nu}_{\gamma\dot{\gamma}}\xi_\delta \\
&= \zeta^\gamma{\sigma^\nu}_{\gamma\dot{\gamma}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\delta}\xi_\delta
\end{aligned}$$

となるから

$$\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\zeta = \zeta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi \tag{5.7}$$

が成り立つことがわかる。

スピノル量の Helmite 共役については、notation の規約と σ^μ の Hermiticity からほぼ自明である。

$$\begin{aligned}
(\xi\sigma^\mu\overline{\theta})^\dagger &= \theta(\sigma^\mu)^\dagger\overline{\xi} = \theta\sigma^\mu\overline{\xi} \\
(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\zeta)^\dagger &= \overline{\zeta}(\overline{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger\overline{\xi} = \overline{\zeta}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

最後に Fierz identity と呼ばれるスピノルに関する恒等式を示す。これは、後に示す $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu$ に関する性質を用いれば示すのは容易である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
(\xi^\alpha \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}})(\zeta^\beta \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}) &= (\overline{\theta}_{\dot{\alpha}} \overline{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} \xi_\alpha)(\zeta^\beta \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}) \\
&= -\zeta^\beta \xi_\alpha \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} (\overline{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}) \\
&= 2\zeta^\beta \xi_\alpha \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} \delta^\alpha_\beta \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \\
&= 2(\zeta\xi)\overline{\theta}_{\dot{\beta}}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
(\zeta\xi)\overline{\theta}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}(\xi\sigma_\mu\overline{\theta})(\zeta\sigma^\mu)_{\dot{\beta}} \tag{5.9}
$$

が成り立つ。

6.　4表現

$(A,B)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ に対応する量は4成分量であり、**4** 表現と呼ばれる。 **4** 表現は $\mathbf{2}\times\mathbf{2}^*$ 表現と同型であり、ベクトル場 $A_\mu(x)$ としても、あるいはドット無しスピノル添字とドット付きスピノル添字を1つずつ用いた混合スピノル場 $A_{\alpha\dot{\alpha}}(x)$ としても表すことができる。 そしてこれら2つの量をつなぐ線形変換 $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}$ が存在して、Lorentz 変換に対して当然次のような変換性をもたなければならない。

$$\Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}=a_\alpha{}^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}(a^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}$$

実際、$\sigma^\mu=(-1,\boldsymbol{\sigma})$ と選ぶことで、この関係が成り立つことが示される。

$$\begin{aligned}
\left(a\sigma^\mu a^\dagger\right)_{\alpha\dot{\alpha}} &= \left(e^{-i\xi_k\frac{\sigma_k}{2}}\sigma^\mu e^{i\xi_k^*\frac{\sigma_k}{2}}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&= \left(\left(1-i\xi_k\frac{\sigma_k}{2}\right)\sigma^\mu\left(1+i\xi_k^*\frac{\sigma_k}{2}\right)\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&= \left(\sigma^\mu-\frac{i}{2}\left(\xi_k\sigma_k\sigma^\mu-\xi_k^*\sigma^\mu\sigma_k\right)\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&= \left(\sigma^\mu-\frac{i}{2}\left(\frac{\theta_k}{2}\left[\sigma_k,\sigma^\mu\right]-i\eta_k\left\{\sigma_k,\sigma^\mu\right\}\right)\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&= \begin{cases}\left(\sigma^0+\eta_k\sigma_k\right)_{\alpha\dot{\alpha}} & (\mu=0)\\ \left(\sigma_i+\left(\epsilon_{ijk}\sigma_j\dfrac{\theta_k}{2}-\eta_i\right)\right)_{\alpha\dot{\alpha}} & (\mu=i)\end{cases}\\
&= \begin{cases}\left(\sigma^0+\omega^0{}_\nu\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} & (\mu=0)\\ \left(\sigma_i+\omega^i{}_\nu\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} & (\mu=i)\end{cases}\\
&= \left(\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu\right)\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

ここで、適当なベクトル量 V_μ の Lorentz 変換 $V'_\mu=\Lambda^\nu{}_\mu V_\nu$ が混合スピノルの Lorentz 変換 (すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ の元) とどのように対応付くかをみてみよう。

$$V'_\mu\sigma^\mu=\Lambda^\nu{}_\mu V_\nu\sigma^\mu=aV_\nu\sigma^\nu a^\dagger$$

これは、ベクトル V_μ が混合スピノルとして

$$V\equiv V_\mu\sigma^\mu=\begin{pmatrix}-V_0+V_3 & V_1-iV_2\\ V_1+iV_2 & -V_0-V_3\end{pmatrix}$$

のような表示をもち、この量が対応する $SL(2,\mathbb{C})$ の元 a によって $V'=aVa^\dagger$ なる変換を受けるということを意味している。この変換が結果的に混合スピノール表示での Loretnz 変換を与え、したがって Lorentz 群と $SL(2,\mathbb{C})$ との間には1対2対応 $\Lambda\leftrightarrow a,-a$ が存在する。

ベクトル V_μ のノルムは行列式をとることで計算できる:

$$\det V=\det\begin{pmatrix}-V_0+V_3 & V_1-iV_2\\ V_1+iV_2 & -V_0-V_3\end{pmatrix}=V_0^2-V_1^2-V_2^2-V_3^2=-V^\mu V_\mu$$

この結果から、

$$(\det V)\delta_\alpha{}^\beta=\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}V_\mu\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}V_\nu\sigma^\nu_{\gamma\dot{\beta}}=\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^\nu_{\gamma\dot{\beta}}V_\mu V_\nu=-\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\beta V_\mu V_\nu$$

がわかるが、ここで新たに $\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\equiv\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}$ を定義すると、この関係を次のように整理することができる:

$$
\begin{aligned}
(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta &= -2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\beta \\
(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$\overline{\sigma}^\mu$ のベクトルとしての成分を求めると、$\overline{\sigma}^\mu = (-1, -\boldsymbol{\sigma})$ になる。
そして、この関係式についてスピノル添字に関する trace をとるとスピノール添字の完全性関係として

$$
\mathrm{tr}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu} \tag{6.2}
$$

が得られる。

今度は Weyl スピノル $\xi, \overline{\eta}$ および $\zeta, \overline{\theta}$ を用い、ベクトル量として

$$
\begin{aligned}
u^\mu &= \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha} = \overline{\eta}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha}\xi_\alpha \\
v^\mu &= \zeta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta} = \overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\sigma}^{\mu\dot\beta\beta}\zeta_\beta
\end{aligned}
$$

を考えよう。これはそれぞれ 4 つの独立成分を持ち、4 次元ベクトル空間全体を張る。u^μ の成分を計算すると

$$
\begin{aligned}
u^0 &= -(\xi^1\overline{\eta}^{\dot 1} + \xi^2\overline{\eta}^{\dot 2}) \\
u^1 &= \xi^1\overline{\eta}^{\dot 2} + \xi^2\overline{\eta}^{\dot 1} \\
u^2 &= -i(\xi^1\overline{\eta}^{\dot 2} - \xi^2\overline{\eta}^{\dot 1}) \\
u^3 &= \xi^1\overline{\eta}^{\dot 1} - \xi^2\overline{\eta}^{\dot 2}
\end{aligned}
$$

となり、v^μ も同様なので、これらの内積は

$$
\begin{aligned}
u^\mu v_\mu &= (\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha})(\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\sigma}^{\dot\beta\beta}_\mu\zeta_\beta) = -(\xi^\alpha\zeta_\beta\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha})\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\dot\beta\beta}_\mu \\
&= -(\xi^1\overline{\eta}^{\dot 1} + \xi^2\overline{\eta}^{\dot 2})(\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 1} + \zeta^2\overline{\theta}^{\dot 2}) + (\xi^1\overline{\eta}^{\dot 2} + \xi^2\overline{\eta}^{\dot 1})(\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 2} + \zeta^2\overline{\theta}^{\dot 1}) - (\xi^1\overline{\eta}^{\dot 2} - \xi^2\overline{\eta}^{\dot 1})(\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 2} - \zeta^2\overline{\theta}^{\dot 1}) + (\xi^1\overline{\eta}^{\dot 1} - \xi^2\overline{\eta}^{\dot 2})(\zeta^1 \\
&= -2\xi^2\overline{\eta}^{\dot 2}\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 1} - 2\xi^1\overline{\eta}^{\dot 1}\zeta^2\overline{\theta}^{\dot 2} + 2\xi^2\overline{\eta}^{\dot 1}\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 2} + 2\xi^1\overline{\eta}^{\dot 2}\zeta^2\overline{\theta}^{\dot 1} \\
&= 2(-\xi^1\zeta^2\overline{\theta}^{\dot 2}\overline{\eta}^{\dot 1} + \xi^1\zeta^2\overline{\theta}^{\dot 1}\overline{\eta}^{\dot 2} - \xi^2\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 1}\overline{\eta}^{\dot 2} + \xi^2\zeta^1\overline{\theta}^{\dot 2}\overline{\eta}^{\dot 1}) \\
&= 2(\xi^1\zeta^2 - \xi^2\zeta^1)(-\overline{\theta}^{\dot 2}\overline{\eta}^{\dot 1} + \overline{\theta}^{\dot 1}\overline{\eta}^{\dot 2}) \\
&= 2(\xi^1\zeta_1 + \xi^2\zeta_2)(\overline{\theta}_{\dot 1}\overline{\eta}^{\dot 1} + \overline{\theta}_{\dot 2}\overline{\eta}^{\dot 2}) \\
&= 2\xi^\alpha\zeta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

となる。 これが任意のベクトルに対して成り立たなければいけないので、ベクトル添字の完全性関係として

$$
\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\dot\beta\beta}_\mu = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \tag{6.3}
$$

を得る。 この関係から、ベクトル V_μ に関して $V_{\alpha\dot\alpha} \equiv \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}V_\mu$ を定義したときに、逆変換が

$$
V_\mu = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}^{\dot\alpha\alpha}_\mu V_{\alpha\dot\alpha}
$$

で与えられることがわかる。

この結果を用いると spinor 表現に対する Lorentz 変換の生成子 $S^{\mu\nu}$ を求めることができる。Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ に対応する $SL(2,\mathbb{C})$ の元を $a_\alpha{}^\beta$ とすると、この元は $S^{\mu\nu}$ の指数写像として

$$a_\alpha{}^\beta = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta$$

と書ける。したがって、

$$\left(\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu\right)\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha} = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta \sigma^\mu_{\beta\dot\beta}\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^\dagger)^{\mu\nu}\right)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}$$

$$\eta^{\rho\mu}\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha} = \frac{i}{2}\left(\sigma^\rho_{\alpha\dot\beta}(S^\dagger)^{\mu\nu\dot\beta}{}_{\dot\alpha} - S^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta\sigma^\rho_{\beta\dot\alpha}\right)$$

が成り立つ。両辺に $\overline{\sigma}_\rho{}^{\dot\beta\beta}$ を掛ければ、完全性から直ちに

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^{\mu\dot\beta\beta}\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha} &= \frac{i}{2}\left(\sigma^\rho_{\alpha\dot\gamma}\overline{\sigma}_\rho{}^{\dot\beta\beta}(S^\dagger)^{\mu\nu\dot\gamma}{}_{\dot\alpha} - S^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\gamma\sigma^\rho_{\gamma\dot\alpha}\overline{\sigma}_\rho{}^{\dot\beta\beta}\right)\\ &= i\left(S^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} - \delta_\alpha{}^\beta(S^\dagger)^{\mu\nu\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\right)\end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{tr}(S^{\dagger\mu\nu}) = 0$ に注意して $\dot\alpha, \dot\beta$ で縮約をとると

$$S^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta = \frac{i}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta$$

がわかり、一方 $\mathrm{tr}(S^{\mu\nu}) = 0$ に注意して α, β で縮約をとると

$$(S^\dagger)^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \frac{i}{4}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$$

がわかる。今後これらをそれぞれ $\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta$ および $\overline{\sigma}^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ と書くことにする。

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta\\ \overline{\sigma}^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= \frac{i}{4}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{aligned} \tag{6.4}$$

$\mathrm{tr}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}$ が成り立つことから、確かに $\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta$ および $\overline{\sigma}^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ は

$$\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\alpha = \overline{\sigma}^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\alpha} = 0 \tag{6.5}$$

となって traceless であることがわかる。

一方、2 階の反対称テンソルで添字を下げた $(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}$ および $(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}$ はスピノル添え字について対称である。実際、$\epsilon_{\alpha\beta}$ の不変性から、

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\gamma \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\beta{}^\delta\epsilon_{\gamma\delta}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\gamma\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\beta{}^\delta\epsilon_{\gamma\delta}$$

$$0 = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\gamma\delta_\beta{}^\delta + \delta_\alpha{}^\gamma\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\delta\right)\epsilon_{\gamma\delta}$$

すなわち

$$(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta} = (\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\beta\alpha} \tag{6.6}$$

が成り立つ。同様の理由で、

$$(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \tag{6.7}$$

である。

7.　3 表現および 3* 表現

$(A,B)=(0,1)$ あるいは $(A,B)=(1,0)$ に対応する量は 3 成分量であり、それぞれ **3** 表現および **3*** 表現と呼ばれる。 これは例えば $\xi_\alpha\zeta_\beta=\xi_{(\alpha}\zeta_{\beta)}+\xi_{[\alpha}\zeta_{\beta]}$ における対称成分 $\xi_{(\alpha}\zeta_{\beta)}$ として、$\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ 表現や $\mathbf{2}^*\times\mathbf{2}^*$ 表現の既約分解から得ることができる。 一般には、**3** 表現は対称なスピノル添字 2 つをもった 3 成分量 $F_{\alpha\beta}$ であり、${\sigma^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}$ を通じ 2 階の反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ と同一視できる。対称な 3 成分量 $\overline{F}_{\dot\alpha\dot\beta}$ も同様に ${\overline{\sigma}^{\mu\nu}}_{\dot\alpha\dot\beta}$ を通じて 2 階の反対称テンソル $\overline{F}_{\mu\nu}$ と同一視できる。 ところで、$\sigma^{\mu\nu}$ や $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ のベクトル成分を具体的に表示すると次のようになる。

$$\sigma^{\mu\nu}=\overline{\sigma}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\sigma_j\\ -i\sigma_i & \epsilon_{ijk}\sigma_k\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\mu\nu}=\overline{\sigma}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_j\\ i\sigma_i & \epsilon_{ijk}\sigma_k\end{pmatrix}$$

したがって、4 階の完全反対称テンソルを $\epsilon^{0123}=-\epsilon_{0123}=1$ として定義すると、次が成り立つことが確かめられる。

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda}&=+\sigma^{\mu\nu}\\ \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\sigma}_{\rho\lambda}&=-\overline{\sigma}^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{7.1}$$

この結果から、$\frac{i}{2}{\epsilon_{\mu\nu}}^{\rho\lambda}$ は固有値 ±1 をもち、それぞれの固有ベクトルとして $\sigma^{\mu\nu}$ および $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ をもつことがわかる。$\epsilon_{abcd}\epsilon^{cdef}=-2({\delta_a}^e{\delta_b}^f-{\delta_a}^f{\delta_b}^e)$ なので、2 階反対称テンソルに $\frac{i}{2}{\epsilon_{\mu\nu}}^{\rho\lambda}$ を 2 度作用させると元に戻る。 したがって $\frac{i}{2}{\epsilon_{\mu\nu}}^{\rho\lambda}$ は $\wedge^2V$ の下で固有値 ±1 をもつ自己同型写像となり、その符号によって $\wedge^2V$ は ${\wedge^2}_+V\oplus{\wedge^2}_-V$ のように固有分解できる (このうち ${\wedge^2}_+V$ の元を自己双対的と呼び、${\wedge^2}_-V$ の元を反自己双対的と呼ぶ)。 この意味で、$\sigma^{\mu\nu}$ によって写された $F_{\mu\nu}$ は自己双対的な量であり、$\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ によって移された $\overline{F}_{\mu\nu}$ は反自己双対的な量であることがわかる。

8. $\sigma^\mu, \sigma^{\mu\nu}$ に関する諸性質

ほかにも $\sigma^\mu, \sigma^{\mu\nu}$ に関して、いくつかの関係式を導くことができる。反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ に対して、$A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ という量を考えよう。これは先ほど得た $\sigma^{\mu\nu}$ の行列表記から直ちに

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}A_{0j}(i\sigma_j) + \frac{1}{2}A_{j0}(-i\sigma_j) + \frac{1}{2}A_{ij}\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ &= \left(iA_{0k} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}A_{ij}\right)\sigma_k \\ &\equiv \tilde{A}_k\sigma_k \end{aligned}$$

がわかる。同様に反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ および $\tilde{B}_k$ を定義すると、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}B_{\rho\lambda}\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}) &= \tilde{A}_i\tilde{B}_j\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j) \\ &= 2\tilde{A}_i\tilde{B}_j\delta_{ij} \\ &= 2\left(iA_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}A_{jk}\right)\left(iB_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ilm}B_{lm}\right) \\ &= -2A_{0i}B_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}A_{jk}B_{lm} + i\epsilon_{ijk}(A_{0i}B_{jk} + A_{jk}B_{0i}) \\ &= A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}A_{\mu\nu}B_{\rho\lambda} \\ &= A_{\mu\nu}B_{\rho\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}\right) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\right] \end{aligned}$$

これが任意の $A_{\mu\nu}$ および $B_{\rho\lambda}$ に対して成り立つので

$$\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}\right) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{8.1}$$

となることがわかる。

$\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c + \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a$ という量を考える。これは初めに導いた σ^μ および $\overline{\sigma}^\nu$ の基本的な性質から

$$\begin{aligned} \sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c + \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a &= \sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c + \sigma^b\overline{\sigma}^a\sigma^c - \sigma^b\overline{\sigma}^a\sigma^c - \sigma^b\overline{\sigma}^c\sigma^a + \sigma^b\overline{\sigma}^c\sigma^a + \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a \\ &= (\sigma^a\overline{\sigma}^b + \sigma^b\overline{\sigma}^a)\sigma^c - \sigma^b(\overline{\sigma}^a\sigma^c + \overline{\sigma}^c\sigma^a) + (\sigma^b\overline{\sigma}^c + \sigma^c\overline{\sigma}^b)\sigma^a \\ &= -2(\eta^{ab}\sigma^c - \eta^{ca}\sigma^b + \eta^{bc}\sigma^a) \end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c + \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a = -2(\eta^{ab}\sigma^c - \eta^{ca}\sigma^b + \eta^{bc}\sigma^a) \tag{8.2}$$

全く同様に

$$\overline{\sigma}^a\sigma^b\overline{\sigma}^c + \overline{\sigma}^c\sigma^b\overline{\sigma}^a = -2(\eta^{ab}\overline{\sigma}^c - \eta^{ca}\overline{\sigma}^b + \eta^{bc}\overline{\sigma}^a) \tag{8.3}$$

が成り立つことがわかる。

形が似たものとして今度は $\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a$ という量を考えよう。これは既知の関係式を用いることで

$$\begin{aligned} \tfrac{i}{2}\left(\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a\right) &= \left(\sigma^{ab} - \frac{i}{2}\eta^{ab}\right)\sigma^c - \sigma^c\left(\overline{\sigma}^{ba} - \frac{i}{2}\eta^{ba}\right) \\ &= \sigma^{ab}\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^{ba} \\ &= \sigma^{ab}\sigma^c + \sigma^c\overline{\sigma}^{ab} \end{aligned}$$

と変形できる。$\sigma^c = (-1, \boldsymbol{\sigma})$ であったことを思い出すと、$c = 0$ のときは

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_j \\ -i\sigma_i & \epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_i & \epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix}$$

となり、$c = k$ のときは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_j\sigma_k \\ -i\sigma_i\sigma_k & \epsilon_{ijl}\sigma_l\sigma_k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k\sigma_j \\ i\sigma_k\sigma_i & \epsilon_{ijl}\sigma_k\sigma_l \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i(\sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j) \\ -i(\sigma_i\sigma_k - \sigma_k\sigma_i) & \epsilon_{ijl}(\sigma_l\sigma_k + \sigma_k\sigma_l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_{jkl}\sigma_l \\ \epsilon_{ikl}\sigma_l & \epsilon_{ijk} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。これをまとめると

$$\frac{i}{2}\left(\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a\right) = -\epsilon^{abcd}\sigma_d$$

すなわち

$$\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a = 2i\epsilon^{abcd}\sigma_d \tag{8.4}$$

である。全く同様にして

$$\overline{\sigma}^a\sigma^b\overline{\sigma}^c - \overline{\sigma}^c\sigma^b\overline{\sigma}^a = -2i\epsilon^{abcd}\overline{\sigma}_d \tag{8.5}$$

がわかる。これらは

$$\begin{cases} \sigma^{[a}\overline{\sigma}^b\sigma^{c]} = i\epsilon^{abcd}\sigma_d \\ \overline{\sigma}^{[a}\sigma^b\overline{\sigma}^{c]} = -i\epsilon^{abcd}\overline{\sigma}_d \end{cases} \tag{8.6}$$

と書くこともできる。

再びベクトル量として

$$u^\mu = \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}} v^\mu = \zeta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}$$

を考えよう。これらのベクトルから反対称テンソルを組む。すなわち

$$\begin{aligned}
u^{[\mu}v^{\nu]} &= \xi^\alpha\zeta^\beta\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}} \\
&= (\xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)} + \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]})(\overline{\theta}^{(\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha})} + \overline{\theta}^{[\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}]})\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}} \\
&= \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{(\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha})}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}} + \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{[\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}]}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}} + \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{(\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha})}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}} + \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{[\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}]}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot{\beta}}
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項は、μ, ν の反対称性から 0 になる。したがって

$$
\begin{aligned}
&= \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot\beta} + \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{[\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha]}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(\xi\zeta)\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\overline{\sigma}^{\dot\gamma\gamma[\mu}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot\beta} - \frac{1}{2}\xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}(\overline{\theta}\overline{\eta})\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\nu]\dot\gamma\gamma} \\
&= i\left[(\xi\zeta)\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\overline{\sigma}^{\mu\nu\dot\gamma}{}_{\dot\beta} - \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}(\overline{\theta}\overline{\eta})\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\gamma}\epsilon_{\gamma\beta}\right] \\
&= i\left[(\xi\zeta)\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta} - \xi^{\alpha}\zeta^{\beta}(\overline{\theta}\overline{\eta})(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\right] \\
&= i\left[\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}\epsilon_{\beta\alpha}(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta} - \xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\right] \\
&= -i\left[(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} + \epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}\right]\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

この結果から、

$$
\sigma^{[\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu]}_{\beta\dot\beta} = -i\left[(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} + \epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon\overline{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}\right] \tag{8.7}
$$

という関係式が得られる。

次はベクトルを対称に組んでみよう。

$$
u^{(\mu}v^{\nu)} = \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} + \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{[\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha]}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} + \xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} + \xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{[\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha]}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta}
$$

今度は μ,ν の対称性から第 3 項と第 4 項が 0 になる。第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} &= \frac{1}{4}(\xi^{\alpha}\zeta^{\beta} + \xi^{\beta}\zeta^{\alpha})(\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha} + \overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\beta})\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} \\
&= \frac{1}{4}(\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha} + \xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\beta} + \xi^{\beta}\zeta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha} + \xi^{\beta}\zeta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\beta})\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} \\
&= \frac{1}{2}(\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha} + \xi^{\beta}\zeta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha})\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} + \sigma^{(\mu}_{\beta\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\alpha\dot\beta})\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

であるが、

$$
\begin{aligned}
\eta_{\rho\lambda}\sigma^{\mu\rho}{}_{\alpha}{}^{\gamma}\overline{\sigma}^{\nu\lambda\dot\gamma}{}_{\dot\beta} &= -\frac{1}{16}\eta_{\rho\lambda}(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\delta}\overline{\sigma}^{\rho\dot\delta\gamma} - \sigma^{\rho}_{\alpha\dot\delta}\overline{\sigma}^{\mu\dot\delta\gamma})(\overline{\sigma}^{\nu\dot\gamma\delta}\sigma^{\lambda}_{\delta\dot\beta} - \overline{\sigma}^{\lambda\dot\gamma\delta}\sigma^{\nu}_{\delta\dot\beta}) \\
&= \frac{1}{8}(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\beta}\overline{\sigma}^{\nu\dot\gamma\gamma} - \epsilon_{\alpha\delta}\epsilon_{\dot\delta\dot\beta}\overline{\sigma}^{\mu\dot\delta\gamma}\overline{\sigma}^{\nu\dot\gamma\delta} - \epsilon^{\gamma\delta}\epsilon^{\dot\delta\dot\gamma}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\delta}\sigma^{\nu}_{\delta\dot\beta} + \overline{\sigma}^{\mu\dot\gamma\gamma}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot\beta})
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
\eta_{\rho\lambda}(\sigma^{\mu\rho}\epsilon)_{\alpha\beta}(\epsilon\overline{\sigma}^{\nu\lambda})_{\dot\alpha\dot\beta} &= -\frac{1}{8}(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\beta}\sigma^{\nu}_{\beta\dot\alpha} + \sigma^{\mu}_{\beta\dot\beta}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot\alpha} + \sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu}_{\beta\dot\beta} + \sigma^{\mu}_{\beta\dot\alpha}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot\beta}) \\
&= -\frac{1}{4}(\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} + \sigma^{(\mu}_{\beta\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\alpha\dot\beta})
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\xi^{(\alpha}\zeta^{\beta)}\overline{\theta}^{(\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha)}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot\beta} = -2\eta_{\rho\lambda}(\sigma^{\mu\rho}\epsilon)_{\alpha\beta}(\epsilon\overline{\sigma}^{\nu\lambda})_{\dot\alpha\dot\beta}\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\alpha}
$$

となることがわかる。一方、第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\xi^{[\alpha}\zeta^{\beta]}\overline{\theta}^{[\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}]}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot{\beta}} &= \frac{1}{4}(\xi\zeta)(\overline{\theta}\overline{\eta})\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot{\beta}} \\
&= -\frac{1}{4}(\xi\zeta)(\overline{\theta}\overline{\eta})\mathrm{tr}(\sigma^{(\mu}\overline{\sigma}^{\nu)}) \\
&= \frac{1}{2}(\xi\zeta)(\overline{\theta}\overline{\eta})\eta^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\eta}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned}
$$

となるから、これらをまとめると

$$
\sigma^{(\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^{\nu)}_{\beta\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2\eta_{\rho\lambda}(\sigma^{\mu\rho}\epsilon)_{\alpha\beta}(\epsilon\overline{\sigma}^{\nu\lambda})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{8.8}
$$

という関係式が得られる。