PRÉ-CÁLCULO

AULA 6

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

Nesta etapa, trabalharemos com os conceitos de matrizes e sistemas lineares, conteúdo base na formação da área exata e cujas aplicações vão desde o controle de dados por meio de planilhas a contextos complexos de múltiplas variáveis que auxiliam tanto na aplicação, como nas tomadas de decisões estratégicas nos diversos campos das engenharias e tecnológicas.

TEMA 1 – SISTEMAS LINEARES: DEFINIÇÃO

Usaremos um exemplo para definir um sistema linear e calcular sua solução por dois métodos.

Exemplo 1

Calcule os valores das incógnitas x e y.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 1 – 5min.

TEMA 2 – TIPOS DE SISTEMAS: SPD, SPI E SI

Dentro dos estudos de Sistemas Lineares temos três tipos, acompanhe nos próximos vídeos a definição e exemplificação geométrica de cada um.

É denominado um Sistema Possível e Determinado (SPD) um sistema linear que possui apenas uma solução para cada variável.

Exemplo 2

Classifique o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 2 – 4min.

É denominado um Sistema Possível e Indeterminado (SPI) um sistema linear que possui mais de uma solução para cada variável.

Exemplo 3

Classifique o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 3 – 4min.

É denominado um Sistema Impossível (SI) um sistema linear que não possui solução.

Exemplo 4

Classifique o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 4 – 4min.

TEMA 3 – RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

Exemplo 5

Calcule os valores das incógnitas x e y.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 5 – 5min.

Exemplo 6

Classifique o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 6 – 5min.

TEMA 4 – MATRIZES: DEFINIÇÃO

As matrizes são formas matemáticas usadas para organizar dados e deles retirar informações importantes.

Acompanhe no vídeo do exemplo 7 alguns tipos de matrizes e como são organizadas.

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 7 – 3min.

No próximo vídeo, veremos as operações de soma, subtração e multiplicação.

Exemplo 8

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a soma $A + B$, a subtração $A - B$ e a multiplicação $A \times B$.

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 8 – 6min.

TEMA 5 – DETERMINANTES

Determinantes são números ligados às matrizes que tem importância e uso em diversos mecanismos dentro dos cálculos na área exata.

Acompanhe a definição de determinante de 1ª ordem no vídeo do exemplo 9.

Exemplo 9

Calcule os determinantes das matrizes $A = [2]$ e $B = [-3]$

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 9 – 2min.

Acompanhe a definição de determinante de 2ª ordem no vídeo do exemplo 10.

Exemplo 10

Calcule os determinantes das matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 10 – 4min

Acompanhe a definição de determinante de 3ª ordem no vídeo do exemplo 11.

Exemplo 11

Calcule o determinante da matriz de terceira ordem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Vídeo: Aula 6 – Exemplo 11 – 4min

FINALIZANDO

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a soma $A + B$.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule subtração $A - B$.

3.Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule a multiplicação $A \times B$.

4. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.P.D.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$$

5. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.P.I.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ -4a - 6b = -10 \end{cases}$$

6. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.I.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 2a + 3b = 2 \end{cases}$$

7. Calcule o determinante da matriz de segunda ordem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

8. Calcule o determinante da matriz de terceira ordem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. (Prefeitura de Cuiabá – UFMT 2010) Em cada um dos quatro dias de desfile de carnaval, a temperatura foi medida em graus Celsius, no meio da multidão, em três momentos distintos. Cada elemento aij da matriz A abaixo corresponde à medida da temperatura no momento i do dia j.

$$A = \begin{bmatrix} 37{,}2 & 38{,}7 & 37{,}7 & 38{,}9 \\ 38{,}1 & 40{,}3 & 39{,}8 & 40{,}1 \\ 36{,}5 & 38{,}2 & 38{,}5 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Qual foi, respectivamente, o momento e o dia em que se registrou a maior temperatura durante os desfiles?

a. 2º e 4º

b. 2º e 2º

c. 3º e 2º

d. 3º e 4º

10. Um orçamento consta três produtos vendidos em forma combinada (combo).

	Quantidade do produto A	Quantidade do produto B	Quantidade do produto C	Valor final

Combo 1	2	3	2	R$ 1.050,00
Combo 2	3	1	1	R$ 650,00
Combo 3	0	2	3	R$ 900,00

Fonte: Rodrigues, 2023.

Calcule o valor unitário de cada produto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PASSO A PASSO:

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a soma $A + B$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule subtração $A - B$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule a multiplicação $A \times B$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-3)(-2) \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

4. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.P.D.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$$

Resolução:

Multiplicando a 2ª linha por (3),

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 9a - 3b = 6 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} 2a + \cancel{3b} = 5 \\ 9a - \cancel{3b} = 6 \end{cases} +$$

$$11a \quad = 11$$

Assim o valor de $a = 1$, na 1ª linha do sistema original,

$2(1) + 3b = 5$

$2 + 3b = 5$

$3b = 5 - 2$

$3b = 3$

$b = 1$

Resposta: S.P.D., onde $a = 1, b = 1$.

5. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.P.I.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ -4a - 6b = -10 \end{cases}$$

Resolução:

Multiplicando a 1ª linha por (2),

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ -4a - 6b = -10 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} \cancel{4a} + \cancel{6b} = 10 \\ \cancel{-4a} - \cancel{6b} = -10 \end{cases} \quad +$$

$$0 \quad = \quad 0$$

Resposta: S.P.I., pois chega-se a uma igualdade plena, não há estabelecimento dos valores das incógnitas.

6. Verifique se o sistema linear a seguir é um S.I.:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 2a + 3b = 2 \end{cases}$$

Resolução:

Multiplicando a 2ª linha por (-1),

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ -2a - 3b = -2 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} \cancel{2a} + \cancel{3b} = 5 \\ \cancel{-2a} - \cancel{3b} = -2 \end{cases} \quad +$$

$$0 \quad = \quad 3$$

Resposta: S.I., pois chega-se a uma impossibilidade 0 = 3.

7. Calcule o determinante da matriz de segunda ordem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

-6 4

8. Calcule o determinante da matriz de terceira ordem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$\begin{array}{ccccc} & \left|1\right. & 2 & \left.1\right| & \\ & \left|3\right. & -1 & \left.1\right| & \\ & \left|2\right. & 0 & \left.2\right| & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -12 & & & & 4 \end{array}$$

$$= -2 + 0 + 4 + 2 + 0 - 12 = -8$$

9. (Prefeitura de Cuiabá – UFMT 2010) Em cada um dos quatro dias de desfile de carnaval, a temperatura foi medida em graus Celsius, no meio da multidão, em três momentos distintos. Cada elemento aij da matriz A abaixo corresponde à medida da temperatura no momento i do dia j.

$$A = \begin{bmatrix} 37,2 & 38,7 & 37,7 & 38,9 \\ 38,1 & 40,3 & 39,8 & 40,1 \\ 36,5 & 38,2 & 38,5 & 39,2 \end{bmatrix}$$

Qual foi, respectivamente, o momento e o dia em que se registrou a maior temperatura durante os desfiles?

a. 2º e 4º

b. 2º e 2º

c. 3º e 2º

d. 3º e 4º

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 37,2 & 38,7 & 37,7 & 38,9 \\ 38,1 & 40,3 & 39,8 & 40,1 \\ 36,5 & 38,2 & 38,5 & 39,2 \end{bmatrix}$$

Alternativa correta b

10. Um orçamento consta três produtos vendidos em forma combinada (combo).

	Quantidade do produto A	Quantidade do produto B	Quantidade do produto C	Valor final
Combo 1	2	3	2	R$ 1.050,00
Combo 2	3	1	1	R$ 650,00
Combo 3	0	2	3	R$ 900,00

Fonte: Rodrigues, 2023.

Calcule o valor unitário de cada produto:

Resolução:

$$\begin{cases} 2A + 3B + 2C = 1050 \\ 3A + 1B + 1C = 650 \\ \quad\quad 2B + 3C = 900 \end{cases}$$

Olhando para a terceira linha e isolando o C:

$$2B + 3C = 900$$

$$3C = 900 - 2B$$

Passando o 3 que está multiplicando o C na forma de divisão para o lado direita da igualdade,

$$C = 300 - \frac{2}{3}B$$

Substituindo nas duas primeiras linhas do sistema,

$$\begin{cases} 2A + 3B + 2\left(300 - \frac{2}{3}B\right) = 1050 \\ 3A + 1B + 1\left(300 - \frac{2}{3}B\right) = 650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + 3B + 600 - \frac{4}{3}B = 1050 \\ 3A + B + 300 - \frac{2}{3}B = 650 \end{cases}$$

Somando os valores da incógnita B em cada uma das linhas usando o MMC,

$$\begin{cases} 2A + \mathbf{3B} + 600 - \mathbf{\frac{4}{3}B} = 1050 \\ 3A + \mathbf{B} + 300 - \mathbf{\frac{2}{3}B} = 650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + \mathbf{\frac{5}{3}B} = 450 \\ 3A + \mathbf{\frac{B}{3}} = 350 \quad\quad \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + \frac{5}{3}B = 450 \\ -15A - \frac{5B}{3} = -1750 \end{cases}$$

Somando as duas linhas,

$$-13A = -1300$$

$$A = 100$$

Substituindo A = 100 na primeira linha,

$$2 \cdot \mathbf{A} + \frac{5}{3}B = 450$$

$$2 \cdot \mathbf{100} + \frac{5}{3}B = 450$$

$$200 + \frac{5}{3}B = 450$$

$$\frac{5}{3}B = 250$$

$$5B = 3 \cdot 250$$

$$5B = 450$$

$$B = \frac{450}{5}$$

$$B = 150$$

Para calcular C, substituindo B=150 terceira linha do sistema inicial,

$$2\boldsymbol{B} + 3C = 900$$

$$2 \cdot \mathbf{150} + 3C = 900$$

$$300 + 3C = 900$$

$$3C = 900 - 300$$

$$3C = 600$$

$$C = \frac{600}{3}$$

$$C = 200$$

Resposta: os valores unitários são: A = R$ 100,00: B = R$ 150 e C = R$ 200.

REFERÊNCIAS

AXLER, S. **Pré-Cálculo**: uma preparação para o cálculo. 2. ed. São Paulo: LTC, 2016.

DEMANA, F. D. et al. **Pré-cálculo**. São Paulo: Pearson, 2009.