PRÉ-CÁLCULO

AULA 3

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

As funções exponenciais e logarítmicas têm diversas aplicações no campo das engenharias, tecnologias e outras tantas em diferentes áreas como na matemática financeira com os juros compostos, nas ciências humanas nos estudos demográficos, nas ciências biológicas nos estudos de epidemias, e assim poderíamos ficar citando aplicações.

Portanto, devido ao seu alto grau de influência em diversas ciências, torna-se fundamental o conhecimento, mesmo que inicial, de seus conceitos e cálculos.

TEMA 1 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo 1

Uma determinada substância tem uma concentração inicial de 1200mg. A cada hora a sua concentração é reduzida pela metade. Determine a concentração dessa substância após 6 horas.

Exemplo 2

Em um tipo de epidemia, cientistas afirmam que daqui a “t” dias a quantidade de bactérias (em milhões) no ar segue a seguinte função:

$$f(t) = 100 \cdot e^{0,02t}$$

Qual será o número de bactérias em 1 dia e em 10 dias?

TEMA 2 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Neste tópico, veremos o comportamento de dois tipos das funções exponenciais, o exemplo 3 trará o comportamento de uma função crescente e o exemplo 4 trará o comportamento de uma função decrescente.

Exemplo 3

Demonstre graficamente o comportamento da função exponencial $f(x) = 2^x$

Exemplo 4

Demonstre graficamente o comportamento da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

TEMA 3 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA

De forma direta e simplificada, podemos dizer que as funções logarítmicas são as funções inversas das funções exponenciais.

Logicamente, há um detalhamento diferenciado nesse tipo de função, porém muito do seu comportamento, como função numérica e graficamente, seguem os mesmos princípios das funções exponenciais.

Agora, para abordar esse conteúdo, vamos a um exemplo prático.

Exemplo 5

Escala de magnitude Richter Um terremoto com ondas sísmicas de tamanho S tem magnitude Richter $$\text{Magnitude} = \log\left(\frac{S}{S_0}\right)$$ em que S_0 é o tamanho das ondas sísmicas que correspondem ao que tem sido declarado como um terremoto com magnitude Richter 0.

Fonte: Axler, 2016. p. 243.

Quantas vezes um terremoto com magnitude Richter 7 é mais intenso que um terremoto com magnitude Richter 5?

TEMA 4 – FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E GRÁFICOS I

Exemplo 6

(ENEM – 2018) A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo do seu *pH*, dado pela expressão:

$$pH = \log_{10} \frac{1}{H},$$

em que *H* é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico. A classificação da água de acordo com seu *pH* é mostrada no quadro.

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7,5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7,5$	Neutra
$3,5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3,5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração *H*, uma distribuidora mede dois parâmetros *A* e *B*, em cada fonte, e adota *H* como sendo o quociente de *A* por *B*. Em análise realizada em uma fonte, obteve $A=10^{-7}$ e a água dessa fonte foi classificada como neutra.

O parâmetro *B*, então, encontra-se no intervalo

A) $\left(-10^{14,5},\ -10^{13}\right]$

B) $\left[10^{-\frac{6}{7}},\ 10^{-1}\right)$

C) $\left[10^{-1},\ 10^{\frac{1}{2}}\right)$

D) $\left[10^{13},\ 10^{14,5}\right)$

E) $\left[10^{6\times10^{7}},\ 10^{7,5\times10^{7}}\right)$

TEMA 5 – FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E GRÁFICOS II

Exemplo 7

Um estudo de uma colônia de bactérias com 1.000 células inicialmente. Revelou que há um crescimento exponencial que faz dobrar sua colônia a cada duas horas. Qual quantidade de células dessa colônia após 10 horas do início do estudo?

Exemplo 8

Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 1%a.m. em regime capitalização por juros compostos.

Supondo uma aplicação de um capital R$1.000,00, qual será o montante resgatado após 12 meses?

FINALIZANDO – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sendo a função exponencial $f(x) = 2^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(3) =$
b) $f(-4) =$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

2. Sendo a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(1) =$
b) $f(-3) =$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

3. Um dos usos mais significativos das funções exponenciais é a ideia de notação científica.

A notação científica permite que os números sejam escritos usando potências de 10. Assim evidenciando a ordem de grandeza dos numerais.

Veja os exemplos a seguir:

A velocidade da luz é de $300.000km/h$, em notação científica: $3 \cdot 10^5 km/h$.

A massa de um elétron é de, aproximadamente, $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911\text{g}$, em notação científica: $9{,}11 \cdot 10^{-28} g$

Escreva em notação científica as seguintes grandezas:

a. Raio da Terra: 6.371km

b. Massa de um átomo de oxigênio: $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 027 g$

4. Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 0,99%a.m. em regime capitalização por juros compostos.

Supondo uma aplicação de um capital R$2.000,00, qual será o montante resgatado após 24 meses?

5. Dada a fórmula de regime de capitalização composta (juros compostos)

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

onde:

M – Montante (valor futuro)

C – Capital (valor presente)

i – Taxa de juros (índice de %)

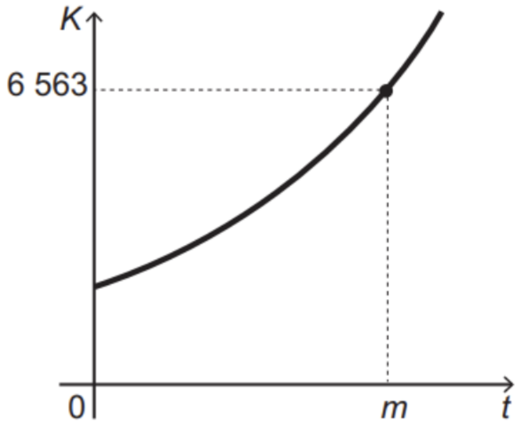
n- Prazo (tempo)

Calcule em quanto tempo um capital dobrará seu valor à taxa de 2%a.m.

6. Um problema ecológico que se tem apresentado em grandes escalas em lagos de parques urbanos é a proliferação de plantas aquáticas que cobrem a superfície dos lagos, baixando a oxigenação das águas.

Supondo que uma planta aquática tem potencial de dobrar sua cobertura (área) a cada dia, e que sua área de ocupação inicial é de 1 m², quanto tempo essa planta levará para cobrir um lago de 3.000 m²?

7. (ENEM – 2021) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $\mathrm{K(t)} = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}\mathrm{t}} + 2$, em que K(t) indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



Com base nos dados, o valor de *m* é

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{24}{5}$

d) 12

e) 81

8. (Mackenzie-SP) O pH do sangue humano é calculado por $pH = log\left(\frac{1}{x}\right)$, sendo x a molaridade dos íons H_3O^+. Se essa molaridade for dada por $4{,}0 \cdot 10^{-8}$ e, adotando-se $log2 = 0{,}30$, o valor desse pH será:

a) 7,20

b) 4,60

c) 6,80

d) 4,80

e) 7,40

9. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

Qual o total de bactérias após 10 horas e trinta minutos?

10. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

Em quanto tempo o número de bactérias atinge 76.800?

GABARITO DOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PASSO A PASSO:

1. Sendo a função exponencial $f(x) = 2^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(3) =$

b) $f(-4) =$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

Resolução:

a) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por 3, temos:

$f(3) = 2^{3+2}$

$f(3) = 2^5$

$f(3) = 32$

b) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por -4, temos:

$f(-4) = 2^{-4+2}$

$f(-4) = 2^{-2}$

$f(-4) = \frac{1}{2^2}$

$f(-4) = \frac{1}{4}$

$f(-4) = 0{,}25$

c) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por $\frac{1}{2}$, temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}+2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}+\frac{4}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{2^5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{32}$$

$$f(3) = 5{,}66$$

2. Sendo a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(1) =$

b) $f(-3) =$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

Resolução:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por 1, temos:

$$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2}$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$$

$$f(1) = \frac{1^3}{3^3}$$

$$f(1) = \frac{1}{27}$$

$$f(1) = 0{,}037$$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por -3, temos:

$$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3+2}$$

$$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$f(-3) = \left(\frac{3}{1}\right)^{1}$$

$$f(-3) = \frac{3^1}{1^1}$$

$$f(-3) = \frac{3}{1}$$

$$f(-3) = 3$$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por $\frac{1}{2}$, temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}+2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{4}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1^5}{3^5}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{243}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{0{,}004115}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}06415$$

3. Um dos usos mais significativos das funções exponenciais é a ideia de notação científica.

A notação científica permite que os números sejam escritos usando potências de 10. Assim evidenciando a ordem de grandeza dos numerais.

Veja os exemplos a seguir:

A velocidade da luz é de $300.000 km/h$, em notação científica: $3 \cdot 10^5 km/h$.

A massa de um elétron é de, aproximadamente, $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911\mathrm{g}$, em notação científica: $9{,}11 \cdot 10^{-28} g$

Escreva em notação científica as seguintes grandezas:

a) Raio da Terra: $6.371\mathrm{km}$

b) Massa de um átomo de oxigênio: $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 027 g$

Resolução:

a) $6{,}371 \cdot 10^3 km$

b) $2{,}7 \cdot 10^{23} g$

4. Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 0,99%a.m. em regime capitalização por juros compostos.

Supondo uma aplicação de um capital R$2.000,00, qual será o montante resgatado após 24 meses?

Resolução:

C = 2000

n = 24

i = 0,99% = 0,99/100 = 0,0099

$M = C \cdot (1 + i)^n$

$M = 2000 \cdot (1 + 0{,}0099)^{24}$

$M = 2000 \cdot (1{,}0099)^{24}$

$M = 2000 \cdot 1{,}26672089$

$M = 2533{,}44$

5. Dada a fórmula de regime de capitalização composta (juros compostos)

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Onde:

M – Montante (valor futuro)

C – Capital (valor presente)

i – Taxa de juros (índice de %)

n- Prazo (tempo)

Calcule em quanto tempo um capital dobrará seu valor à taxa de 2%a.m.

Resolução:

Como o montante é o dobro do capital, temos

M = 2C

i = 2% = 2/100 = 0,02

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$2C = C \cdot (1 + 0{,}02)^n$$

$$\frac{2C}{C} = (1{,}02)^n$$

$$2 = (1{,}02)^n$$

Aplicando logaritmo natural nos dois membros, temos:

$$\log 2 = \log(1{,}02)^n$$

$$\log 2 = n.\log(1{,}02)$$

$$\frac{\log 2}{\log(1{,}02)} = n$$

Usando a calculadora científica, temos os valores dos logaritmos

$$n = \frac{0{,}3010299957}{0{,}008600171762}$$

$n =$ 35,00278879, por questão de arredondamento, temos *n* = 35 meses

6. Um problema ecológico que se tem apresentado em grandes escalas em lagos de parques urbanos é a proliferação de plantas aquáticas que cobrem a superfície dos lagos, baixando a oxigenação das águas.

Supondo que uma planta aquática tem potencial de dobrar sua cobertura (área) a cada dia, e que sua área de ocupação inicial é de 1m², quanto tempo essa planta levará para cobrir um lago de 3.000 m²?

Resolução:

Como a população inicial é igual a 1 m^2 e dobra a cada 3 dias, temos

1° dia = 1 m² (0 período de tempo)

2° dia = 2 m² (1° período de tempo)

4° dia = 4 m² (2° período de tempo)

4° dia = 8 m² (3° período de tempo)

Desta foram

Área coberta = $(2)^{período\ de\ tempo}$

Formulando: $A = 2^x$, onde: A = área coberta e x = período de tempo

Área inicia =3000

$3000 = 2^x$

Aplicando logaritmo natural nos dois membros, temos:

$\log 3000 = \log(2)^x$

$\log 3000 = x.\log(2)$

$\frac{\log 3000}{\log(2)} = x$

$x = \frac{\log 3000}{\log(2)}$

$x = \frac{3{,}477121255}{0{,}3020299957}$

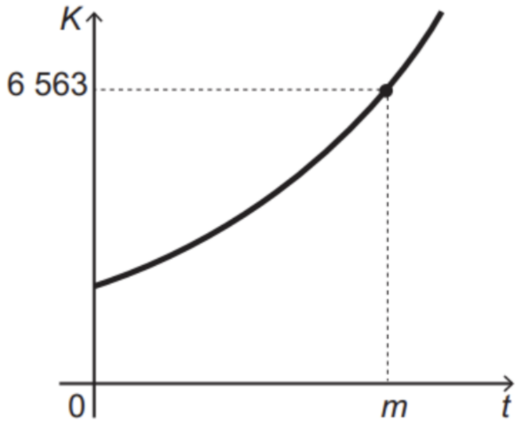
$x = 11{,}55074679$

Como a população dobra a cada 2 dias, n = 2x

Logo, n = $2 \cdot 11{,}55074679$

x = 23,10149357, por arredondamento, 23 dias.

7. (ENEM – 2021) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $\mathrm{K(t)} = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}\mathrm{t}} + 2$, em que K(t) indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



Com base nos dados, o valor de *m* é

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{24}{5}$

d) 12

e) 81

Resolução

$6563 = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t} + 2$

$6563 - 2 = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t}$

$6561 = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t}$

$\frac{6561}{81} = 3^{\frac{1}{3}t}$

$81 = 3^{\frac{1}{3}t}$

Fatorando $81 = 3^4$,

$3^4 = 3^{\frac{1}{3}t}$

Sendo assim,

$4 = \frac{1}{3}t$

$4 \cdot 3 = t$, logo

$t = 12. \quad (Alternativa\ D)$

8. (MACKENZIE-SP) O pH do sangue humano é calculado por $pH = log\left(\frac{1}{x}\right)$, sendo x a molaridade dos íons H_3O^+. Se essa molaridade for dada por $4{,}0 \cdot 10^{-8}$ e, adotando-se $log2 = 0{,}30$, o valor desse pH será:

a) 7,20

b) 4,60

c) 6,80

d) 4,80

e) 7,40

Resolução:

Sendo $x = 4.10^{-8}$, temos que

$PH = \log\left(\frac{1}{4.10^{-8}}\right)$

Usando uma calculadora científica,

$PH = 7{,}397940009$

Por questão de arredondamento, *PH*=7,4

9. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

Qual o total de bactérias após 10 horas e trinta minutos?

Resolução:

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot 10,5}$

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{4,2}$

$N(t) = 1.200 \cdot 18,37917368$

$N(t) = 22055$

10. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

Em quanto tempo o número de bactérias atinge 76.800?

Resolução:

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$

$76800 = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$

$\frac{76800}{1200} = 2^{0,4 \cdot t}$

$64 = 2^{0,4 \cdot t}$

Fatorando 64 = 2^6, então

$2^6 = 2^{0,4 \cdot t}$

$6 = 0,4. t$

$\frac{6}{0,4} = t$

$15 = t$

$t = 15$

REFERÊNCIAS

AXLER, S. **Pré-cálculo**: uma preparação para o cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

DEMANA, F. D. et al. **Pré-cálculo**. São Paulo: Pearson, 2009.