

曲豆豆的高等数学入门教程

卷一：基础架构

曲豆豆 主编
豆瓣研究生小组 荣誉出品

2018 年 12 月 12 日

第 02-5.1 稿

Abstract

本讲义作为面向非数学专业者的入门，介绍近代数学的四大基本结构：序结构、代数结构、拓扑结构、测度结构，以及近代数学的表达、思考方式。

Contents

1	简明数理逻辑	5
1.1	命题与连接词	5
1.2	命题逻辑等值演算	8
1.3	推理与证明（正在更新）	17
1.4	主体与谓词逻辑（待补）	25
1.5	量词与一阶逻辑（待补）	25
1.6	一阶逻辑等值演算与推理（待补）	25
1.7	数学归纳法（待补）	25
1.8	习题（待补）	25
2	朴素集合论	26
2.1	集合的概念与基本例子	26
2.2	集合的基本运算	28
2.3	集合列与集合族（待补）	31
2.4	映射与函数（待补）	32
2.5	集合的势（待补）	32
2.6	可数集（待补）	32
2.7	选择公理与集合论 ZFC 公理体系简介（待补）	32
2.8	习题 A：逻辑、集合运算	32

3 二元关系 (待补)	33
3.1 关系的运算与性质 (待补)	33
3.2 等价关系与等价类 (待补)	33
3.3 偏序关系 (待补)	33
3.4 Zorn 引理与良序原理 (待补)	33
4 代数结构基础 (待补)	34
5 实数的完备性 (待补)	34
6 连续函数 (待补)	34
7 一元微分学 (待补)	34
8 黎曼积分 (待补)	34
9 线性空间 (待补)	34
10 n 维欧氏空间的拓扑 (待补)	34
11 n 维欧氏空间的 Lebesgue 测度 (待补)	34
12 线性赋范空间基础 (待补)	34
13 附录: 一些重要的初等数学 (待补)	34
13.1 求和符号与求积符号 (待补)	34
13.2 整数与多项式基础 (待补)	34
13.3 常用不等式 (待补)	34
13.4 排列、组合与二项式定理 (待补)	34
13.5 基本初等函数 (待补)	34
13.6 极坐标与参数方程 (待补)	34
13.7 复数的代数运算 (待补)	34

前言

近代数学的一个特点是公理化、结构化。代表近代数学的布尔巴基 (Bourbaki) 学派认为“数学是研究抽象结构的学科”，这与恩格斯的观点“数学是关于现实世界数量关系和空间形式的科学”略有出入。本讲义力图介绍近代数学中的四大基本结构：序结构、代数结构、拓扑结构、测度结构，从而勾勒出近代数学基本框架，满足那些“想要多学一些数学”的爱好者们的基本需求，并为其进一步学习近代数学奠定基础。

虽说声称是“零基础入门高等数学”，本讲义其实并不是真正的“白手起家”，还是要假定读者对一些基本的数学对象有直观的了解，包括：实数的加减乘除运算、实数大小的比较，仅此而已。

事实上，近代数学基础完整的构建顺序大概是：命题逻辑 \rightarrow 一阶谓词逻辑 \rightarrow 公理集合论 \rightarrow 自然数公理系统 \rightarrow 实数理论。什么是自然数中的“0”，什么是“1”，“自然数”是在集合论的框架下定义出来的，并不是“本来就有的”；而自然数的加法运算也是定义出来的，不再是初等数学那样来源于日常生活经验，理所当然的。这也是为什么罗素用了 300 多页才得到了自然数“1”的定义，这才是真正的“白手起家”。有了自然数，之后再定义整数，通过对整数环分式化来构造有理数，再对有理数完备化来构造实数。

而本讲义跳过这个漫长的构建过程（但会在正文各处穿插地简要提一下），直接假定读者知道什么是实数，以及实数的加减乘除、大小比较。这样做的原因有两点，其一是避免讲义篇幅过长，过分纠结于数学基础是枯燥乏味的，毕竟这个讲义不是专门的“数学基础”教材。其二是为我们要介绍的抽象结构提供具体例子，比如讲到“偏序集”这个结构时，实数配以通常的比较大小的就是一个例子；讲到“群”结构时，实数配以加法运算就是一个最基本的例子。离开具体例子空谈抽象概念并不利于对数学概念的理解（当然格罗滕迪克 Grothendieck 是例外）。

由于这个讲义是笔者写着玩的，且笔者水平有限，胡说八道之处在所难免。希望读者批判性地看待本讲义中的某些论断。另外由于匆忙成稿，笔误、语法错误应该也挺多的，恳请批评指正。

最后，关于自然数的公理化构造，笔者恶搞《圣经：创世纪》中的一段，仅供娱乐，见下页。

致谢

感谢笔者母校中国科学技术大学数学系的培养

感谢豆瓣小组提供平台

感谢一起编纂此讲义的小伙伴们

贡献者（豆瓣昵称，按拼音字母顺序排序）

（待补）

《圣经：创世纪》节选

起初，神创造逻辑。逻辑是空虚的。
神的零运行在水面上，这是平凡的。
神说，要有集合。于是就有了集合。
神看集合是好的，就将其公理化。
有集合，有运算，就是一个代数结构。

神照自己的样子造人，于是就有了 0。
神在东方的伊甸建立了一个园子，称之为群。
神将 0 安置在那里，让它作么元。
起初，伊甸园是平凡的。
神说，园中所有果子你可以随便吃。
只有后继树上果子，你不能吃。
因为你吃的时候必死。

神说，那人独居不好。
于是要为其造一个配偶。
神让 0 沉睡，取其的后继数 1。
神把 1 带到伊甸园，让它和 0 配对，
二人从此一起生活。
神教给它们加法的运算，让它们可以互相交合。
0 依然是伊甸园的单位元。
0 的逆元是 0，1 的逆元是 1，
0 和 1 彼此交合则又得到 1。

神所造的，惟有皮亚诺比一切的活物更狡猾。
皮亚诺对 1 说，神岂是真说不许你们吃园中所有树上的果子么？
1 对皮亚诺说，园中树上的果子我们可以吃，
唯有后继树上的果子不可，免得我们死。
皮亚诺说，你们不会死。
神是怕你们吃了后继树上的果子，
能自己创造新的数。

皮亚诺告诉 1 它自己是怎么来的，
1 对单调的只有 0 和 1 的加法已经厌烦。
它看后继树上的果子可做食物，
而且悦人眼目，是可喜爱的，
就摘下果子来吃了。

于是 1 对自己取了后继数，是为 2。
1 又摘下果子给 2，2 也吃了。
于是 2 对自己取了后继数，是为 3。
很快，后继树下生成了所有正整数。。。

1 简明数理逻辑

数理逻辑是研究推理规则的数学分支。而本章仅仅介绍数理逻辑的一些主要概念、基本原理，不打算进一步深究。在本章，我们常用的自然语言（中文 or English）中的表达逻辑关系、推理证明的各个要素将会被逐步地符号化，即通过构造各种符号语言来代替自然语言，最终得到完全由符号构成的形式语言。

为达到这个邪恶的目的，在本章第 1-3 节我们首先将关联词语（两个命题之间的逻辑连接词）符号化，比如：不但而且、虽然但是、因为所以、如果那么、只要就、只有才……等等；而在第 4-6 节，我们将分析一个命题的内部构造，将主体词、谓词、量词等“句子成分”也符号化。最后在第 7 节，我们介绍在证明与整数有关的命题时常用的数学归纳法。

1.1 命题与连接词

命题是数理逻辑中的一个基本概念。能够判断真假，非真即假的陈述句称为命题。

例子 1.1.1. 下列语句之中，(1)-(3) 都是命题，而 (4)-(6) 不是命题：

- (1) 加拿大位于北美洲；
- (2) $1 + 1 = 3$ ；
- (3) 公元 2333 年元旦的北京是晴天；
- (4) 你脑子进屎了吗？
- (5) 让我们荡起双桨；
- (6) 这句话是假话。

Solution. (1) (2) (3) 都是可以判断真假的陈述句，从而是命题，虽然 (2) 陈述的事实是荒谬的。而对于 (3)，我们目前没有能力判断它到底是真还是假，但它的真假性是客观存在的，这样的语句也是命题。

(4) (5) 都不是陈述句，从而不是命题。而 (6) 虽然是陈述句，但它的真假不确定，假设它为真则推出它为假，由它为假又能推出它为真。这种既不能为真也不能为假的陈述句，称为**悖论**。悖论不是命题。□

关于命题 (3)，与它类似的我们目前还没有能力判断真假的命题有很多，比如著名的**哥德巴赫猜想**“任何大于 4 的偶数都可以表示为两个素数的和”，以及众多我们暂时没解决的数学猜想。

我们用小写拉丁字母，如 a, b, c, p, q, r 等，来表示命题。如果一个命题为真，则称它为**真命题**，也称它的**真值**为 1；若它为假，则称此命题为**假命题**，也称它的真值为 0。

对于已经给定的一些命题，我们可以对这些命题进行一些操作，来构造新的命题。接下来介绍常见的几种命题连接词。

定义 1.1.1 (否定连接词). 对于命题 p ，称命题 $\neg p$ 为 p 的**否定式**，符号“ \neg ”称为否定连接词，读作“非”。规定当 p 为真时， $\neg p$ 为假； p 为假时 $\neg p$ 为真。

在自然语言中，命题“ $\neg p$ ”可以表达为“ p 不成立”。例如命题 p 表示“加拿大位于北美洲”，则 $\neg p$ 表示“加拿大不位于北美洲”。

定义 1.1.2 (合取连接词). 对于两个命题 p, q , 称命题 “ $p \wedge q$ ” 为 p 与 q 的合取式, 符号 “ \wedge ” 称为合取连接词, 读作 “且”。规定当 p, q 全都是为真命题时, $p \wedge q$ 为真命题; 当 p, q 之中至少有一个是假命题时, $p \wedge q$ 为假命题。

对于两个命题 p, q , $p \wedge q$ 用自然语言可以描述为 “ p 与 q 同时成立”、“ p 与 q 全都正确”、“ p 并且 q ”、“虽然 p 但是 q ”、“不仅 p 而且 q ”、“both p and q are true” 等等。

特别注意自然语言中的 “但是” 和 “并且”, 其实表达的都是 \wedge 的意思, 指两者同时成立。

定义 1.1.3 (析取连接词). 对于两个命题 p, q , 称命题 “ $p \vee q$ ” 为 p 与 q 的析取式, 符号 “ \vee ” 称为析取连接词, 读作 “或”。规定当 p, q 全都是为假命题时, $p \vee q$ 为假命题; 当 p, q 之中至少有一个是真命题时, $p \vee q$ 为真命题。

对于两个命题 p, q , “ $p \vee q$ ” 在自然语言中常称为 “ p 或者 q ”。然而特别注意, “或者” 这个词在汉语中有歧义, 在有些语境下表示 “两者当中有且只有一个成立”, 例如 “你滚蛋, 或者我滚蛋”。但是在数理逻辑中, “或者” 指的是两者至少有一个成立就可以 (两者都成立那更好)。

定义 1.1.4 (蕴含连接词). 对于两个命题 p, q , 称命题 “ $p \rightarrow q$ ” 为 p 与 q 的蕴含式, 符号 “ \rightarrow ” 称为蕴含连接词, 读作 “蕴含”。规定当 p 为真命题并且 q 为假命题时, $p \rightarrow q$ 为假命题; 而其余 3 种情况时 $p \rightarrow q$ 为真命题。

对于两个命题 p, q , “ $p \rightarrow q$ ” 在自然语言和今后我们要学习的数学当中, 有 “如果 p 那么 q ”, “ p 仅当 q ”, “ p 推出 q ”, “因为 p 所以 q ”, “只要 p 就有 q ”, “只有 q 才会有 p ”, “除非 q 否则 p ”、“ p 是 q 的充分条件”, “ q 是 p 的必要条件” 等看似迥异的表述方式。

上述诸多表达方式在数理逻辑中其实表达的都是 “蕴含” 的含义, 这需要慢慢体会。

蕴含连接词也许是在本节所讲的所有连接词中最令初学者费解的一个。为帮助读者理解, 我们举一些例子来说明:

例子 1.1.2. 研究下列命题。虽然它们表达的含义荒诞至极, 但在数理逻辑的意义下它们都是真命题:

- (1) 因为所有人都吃过屎, 所以地球围绕太阳公转。
- (2) 如果 $1+1=3$, 那么猪会飞。
- (3) 只有沙漠能下暴雨, 大海才会亲吻鲨鱼。
- (4) 只要 2 是奇数, 公元 2333 年元旦的北京就是晴天。

Proof. 我们依次来分析这些命题:

(1) 我们用字母 p 来表示 “所有人都吃过屎”, 用 q 来表示 “地球围绕太阳公转”。则命题 (1) 用符号表达为 “ $p \rightarrow q$ ”。由于 p 是真命题, q 是真命题, 所以根据蕴含连接词 “ \rightarrow ” 的定义可知 $p \rightarrow q$ 为真命题。

(2) 该命题为 “ $(1+1=3) \rightarrow$ 猪会飞”。由于 “ $1+1=3$ ” 是假命题, “猪会飞” 也是假命题, 从而命题 (2) 是真命题。

(3) 该命题为 “大海亲吻鲨鱼 \rightarrow 沙漠下暴雨”, 蕴含连接词的前后两端都是假命题, 从而这个命题是真命题。

(4) 该命题为 “2 是奇数 \rightarrow 公元 2333 年元旦的北京是晴天”。我们知道 “2 是奇数” 是假命题。虽然我们并没有能力判断公元 2333 年那件事的真假, 但是从蕴含连接词的定义可以看

出, 对于一个由蕴含连接词连接的复合命题 $p \rightarrow q$, 只要 p 是假命题, 那么无论 q 是真还是假, $p \rightarrow q$ 一定是真命题。从而命题 (4) 是真命题。□

要特别注意, 在日常生活的自然语言中, “如果 p 那么 q ” 中的 p, q 之间通常有内在的联系, 因果联系、依赖关系等等。而数理逻辑研究的是抽象的推理, “命题” 本身是一个剥离于现实世界的抽象的概念, 我们谈论命题 “ $p \rightarrow q$ ” 时, p 与 q 之间可以毫无任何联系。命题 “ $p \rightarrow q$ ” 的真假性, 只与 p, q 两者的真假性有关, 而与它们所表达的实际意义之间有何内在联系无关。这对于其它几个逻辑连接词, 也都是如此。

我们再看一些关于蕴含连接词的例子:

例子 1.1.3. 甲、乙两个人比赛, 甲对此信心满满, 说: “如果我输了, 我给你 100 块钱。” 试将命题 “如果甲输, 那么甲给乙 100 块钱” 符号化, 并讨论该命题何时为假命题。

Solution. 此命题为 “甲输 \rightarrow 甲给乙 100 块钱”。只有当甲输了但是甲没给乙 100 块钱时, 甲所讲的这个命题才是假的。特别注意当甲赢了时候 (即 “甲输” 为假命题), 无论甲有没有给钱, 那句话都是真命题。□

这个实际例子也许能够帮助初学者理解为什么要规定当前提 p 为假命题时 $p \rightarrow q$ 一定是真命题。事实上, 再以后的学习中, 我们会接触到更多抽象的结构 (比如拓扑空间、概率空间等), 它们的严格定义会令初学者费解。之所以要如此定义, 是因为这样定义出来的东西具有我们所希望的性质——这正是近代数学的特色之一。我们在下一节会介绍 “所希望的性质” 具体是什么 (见下一节的定理 1.2.4)。

例子 1.1.4. 假设你是人 (这是确凿无疑的), 试判断下列命题的真假:

- (1) 如果你是人, 那么你不是人。
- (2) 如果你不是人, 那么你是人。
- (3) 你是人, 并且你不是人。
- (4) 除非你是人, 否则你不是人。

Solution. 我们用字母 p 表示命题 “你是人”, 则 p 为真命题 (希望读者承认这个事实)。则上述 4 个命题用符号来表达, 分别为

$$p \rightarrow (\neg p), (\neg p) \rightarrow p, p \wedge (\neg p), (\neg p) \rightarrow p$$

由相应连接词的运算规则, 不难得出 (1)(3) 为假命题, (2)(4) 为真命题。□

定义 1.1.5 (等价连接词). 对于两个命题 p, q , 称命题 “ $p \leftrightarrow q$ ” 为 p 与 q 的等值式, 符号 “ \leftrightarrow ” 称为等价连接词, 读作 “等价于”。规定当 p, q 真值相同时 $p \leftrightarrow q$ 为真命题; 真值相反时 $p \leftrightarrow q$ 为假命题。

在自然语言以及数学中, 常用 “ p 当且仅当 q ”、“ p 是 q 的充要条件”、“ p if and only if q ” 来表达命题 “ $p \leftrightarrow q$ ”。

以上是常见的五种逻辑连接词。我们将由连接词组成的复合命题的真假性总结为如下真值表:

$p \ q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

例如，从表中第一行可以看出，当 p, q 都是假命题（真值为 0）时， $\neg p$ 、 $p \wedge q$ 、 $p \vee q$ 、 $p \rightarrow q$ 、 $p \leftrightarrow q$ 的真值分别为 1、0、0、1、1。

由简单的命题，以及各种逻辑连接词，可以构造出复杂的命题。例如对于命题 p, q, r, s ，我们可以去谈论诸如

$$((\neg p) \vee r) \wedge (s \leftrightarrow q)$$

这样的复杂命题。这种命题的真假性完全由 p, q, r, s 之中每一个命题的真假性决定。

我们再简单提一下逻辑连接词运算的**优先级**。与实数加减乘除运算规则“先乘除后加减，有括号先算括号里面的”类似，我们也约定各种逻辑连接词的优先级。规定优先顺序为

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

例如，命题 $\neg p \vee q$ 确切地说应该是 $(\neg p) \vee q$ ，而不是 $\neg(p \vee q)$ 。再比如，命题 $p \vee q \leftrightarrow r \wedge s$ 所表达的含义是 $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ ，而不是 $((p \vee q) \leftrightarrow r) \wedge s$ 。

在以后，我们尽量避免依靠这个优先级约定规则，而是尽可能多加括号减少歧义。

本节最后，简单提一下命题变量。回顾在初等数学中我们用字母（比如 x ）表示实数。在一些语境下， x 是一个确定的数，而在有些语境下字母 x 代表的数不确定——这正是**常量**与**变量**的区别。比如“ $x^2 + 1$ ”，在某些语境下， x 是一个确定的数，那 $x^2 + 1$ 就是一个确定的数；而在另一些语境下， $x^2 + 1$ 是一个公式，我们给 x 赋以特定的值，就会得到 $x^2 + 1$ 的一个值。特别注意一个字母到底代表常量还是变量，需要依靠事先约定以及语境来判断。

而命题逻辑与之完全类似。我们用字母来表示一个命题。命题也有**命题常量**与**命题变量**之分。前者为某个确定的命题，而后者是一个抽象的符号，可以被赋以确定的命题。

1.2 命题逻辑等值演算

现在，我们已经用字母来表示命题（包括命题常量与命题变量），并且定义了几个常见的逻辑连接词。本节开始，我们研究命题逻辑的运算。

定义 1.2.1 (命题公式). 由命题常量、命题变量、逻辑连接词、括号 $()$ 按照某些逻辑关系所排列而成的符号串称为命题公式。具体地，“某些逻辑关系”指的是：

- (1) 对于单个命题常量或者命题变量 p ，由符号 p 自身构成的符号串是命题公式。
- (2) 如果符号串 A, B 都是命题公式，那么符号串

$$\neg A$$

$$A \vee B$$

$$A \wedge B$$

$$A \rightarrow B$$

$$A \leftrightarrow B$$

都是命题公式。

(3) 对于符号串 A 是命题公式, 那么符号串 “ (A) ” 也是命题公式。

注意“命题公式”这个概念是归纳定义 (或者叫递归定义) 的。通俗地说, 命题公式是由有限多个命题常量、有限多个命题变量, 经过命题连接词的有限多步连接, 所构成的符号串。

例如, 我们用字母 p 来表示命题“地球绕太阳公转”, 那么符号串

$$((\neg p) \vee q) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$$

是一个命题公式。其中 q, r 是命题变量, 而 p 是命题常量。这个命题公式含有 2 个命题变量。特别注意, 命题公式可以不含有命题变量。

再注意一点, 命题连接词除了我们提到的 5 种 (否定、合取、析取、蕴含、等价) 之外, 还有无数多种; 只不过这 5 种比较“常用”, 自然语言中存在表达其含义的词汇。而其它一些连接词, 它表达的逻辑关系是“无法言说的” (无法用正常的“人话”轻易讲清楚), 自然语言在其面前苍白无力。我们在本章习题中会提到一些其它的连接词。事实上, 在习题中我们还将证明 “ \neg, \vee ” 这两个连接词在某种意义下已经“足够用”了。

对于用这 5 种连接词之外的连接词来连接的字符串, 我们也认为是命题公式。这在本章习题中会略加讨论。

定义 1.2.2 (命题公式的赋值). 设字符串 $A = A(p_1, \dots, p_n)$ 是含有 n 个命题变量 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个命题公式。对每个 p_1, \dots, p_n 各指定一个真值, 称为命题公式 A 的一个赋值 (或者称为“诠释”)。

容易知道, 对于含有 n 个命题变量的命题公式 A , A 总共有 2^n 种不同的赋值。(这是因为对于每个命题变量, 要么赋以它真值 0, 要么赋以它真值 1, 一共 2 种选择; 而共有 n 个变量, 从而总共 $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 种赋值)

回顾上一节出现的**真值表**。对于命题公式, 我们可以穷尽它所有可能的赋值, 并把每一种赋值及其结果一一列出。

例子 1.2.1. 我们考虑关于命题变量 p, q, r 的下述三个命题公式

$$A := p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$B := (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$C := (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

试讨论它们所有可能的赋值, 并总结为真值表。

Solution. 逐一讨论所有可能的 $2^3 = 8$ 种赋值, 总结为下表:

$p \ q \ r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0 0 0	1	1	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	0	0	0
1 1 1	1	1	1

按照相应逻辑连接词的运算规则，读者可自行验证上述结果。□

注意观察上述真值表的（从双竖线右边起）第 1、2 列，发现它们完全相同。也就是说，对于公式 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$ ，无论对变量 p, q, r 赋予哪些真值，所得到的命题的真值都相同。

与初等数学类比一下，这就好比含有变量 x, y 的两个表达式

$$2(x + 2y) \quad , \quad 2x + 4y$$

无论对 x, y 赋予什么值，所得到的结果都相等。（但实数有无限多个，我们无法一一列出上述式子所有可能的赋值，总结成类似的真值表。所以在这种意义下，命题逻辑比初等代数简单得多。）

在初等数学中，我们并不是通过暴力验证对变量 x, y 的每一种可能的赋值，来证明 $2(x + 2y)$ 与 $2x + 4y$ 是“相等”的（事实上暴力穷举是不现实的，毕竟实数有无限多个），而是通过一些**运算律**；而命题逻辑的简单之处在于我们可以暴力地验证所有可能的赋值来说明两个命题公式其实是“相等”的。事实上暴力验证可以交给计算机来完成。

定义 1.2.3 (命题公式的分类). 对于含有 n 个 ($n \geq 0$) 命题变量的命题公式 $A = A(p_1, \dots, p_n)$,

- (1) 称 A 为**重言式**（或者**永真式**），如果在 A 的任何赋值下， A 的结果都为真；
- (2) 称 A 为**矛盾式**（或者**永假式**），如果在 A 的任何赋值下， A 的结果都为假；
- (2) 称 A 为**可满足式**，如果存在 A 的某个赋值，使得 A 的结果为真；

从定义容易看出，重言式一定是可满足式。

顺便提一下 $n = 0$ 这种**平凡** (trivial) 的情形，即 A 为含有 0 个命题变量的命题公式的情形。此时 A 无非就是一个命题常量。 A 为重言式当且仅当 A 为真命题当且仅当 A 为可满足式； A 为矛盾式当且仅当 A 为假命题。

判断一个命题公式是否为重言式、可满足式、矛盾式，我们可以用真值表的方法。即，穷尽所有可能的赋值。例如，在刚才的例子 1.2.1 之中出现的三个命题公式都是可满足式，都不是重言式——从它们的真值表中能轻易看出来。

定义 1.2.4 (命题公式的等值). 对于含有 n 个命题变量 p_1, \dots, p_n 的两个命题公式 A, B ，称 A 与 B **等值**，如果在所有可能的 2^n 个赋值之下，它们的真值都相同。此时记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

例如，例子 1.2.1 之中的两个命题公式 A, B 是等值的，这从真值表中可以看出来。用符号语言表示为

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

特别需要注意的是，符号“ \Leftrightarrow ”并不是逻辑连接词，不要与 \leftrightarrow 混淆。不过它们两者之间有如下联系：

定理 1.2.1. 对于含有 n 个命题变量 p_1, \dots, p_n 的命题公式 A, B ，则 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是重言式。

Proof. 这根据“等值 \Leftrightarrow ”、“重言式”、“命题连接词 \leftrightarrow ”的定义，直接得到。几乎是显然的。不过在此还是要详细写一下证明，给初学者。

一方面在 $A \Leftrightarrow B$ 的条件下，我们将证明 $A \leftrightarrow B$ 是重言式。根据重言式的定义，我们只需要证明，对于变量 p_1, \dots, p_n 的任何赋值，得到的命题 $A(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow B(p_1, \dots, p_n)$ 是真命题。而这是因为，由于 $A \Leftrightarrow B$ ，从而 $A(p_1, \dots, p_n)$ 与 $B(p_1, \dots, p_n)$ 的真值总是相同，因此由逻辑连接词 \leftrightarrow 的运算规则知 $A(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow B(p_1, \dots, p_n)$ 是真命题，这对任何赋值都成立。从而 $A \leftrightarrow B$ 是重言式。

另一方面，我们还要证明在 $A \leftrightarrow B$ 是重言式的条件下，有 $A \Leftrightarrow B$ 。方法完全类似（刚才的证明过程处处可逆），读者自行完成。□

注记 1.2.1 (关于命题公式的命题变量个数). 对于两个命题公式 P, Q （一般地，可以是任意有限多个命题公式），设它们总共具有 n 个命题变量 p_1, \dots, p_n 。

注意到，我们允许发生以下情况： A, B 之中的某一个命题公式（不妨为 A ）不全含 这些命题变量。例如， A 只含有命题变量 p_1, \dots, p_s ，其中 $1 \leq s < n$ ，而不含有 p_{s+1}, \dots, p_n 。此时，称命题变量 p_{s+1}, \dots, p_n 为命题公式 A 的哑元。

事实上，对于含有 n 个命题变量 p_1, \dots, p_n 的命题公式 P ，则对于除了 p_1, \dots, p_n 之外的任何一个命题变量 q ， q 都可以被视为命题公式 P 的哑元。

例子 1.2.2 (哑元的简单例子). 考虑两个命题公式

$$P := p \rightarrow q$$

$$Q := q \vee r$$

则 P 与 Q 总共含有 p, q, r 三个命题变量。容易知道，命题变量 r 是命题公式 P 的哑元；类似地， p 是 Q 的哑元。

此时，我们也认为 P, Q 都是关于 p, q, r 三个命题变量的命题公式（虽然实际上它们都只含有 2 个命题变量，不全含所有的命题变量）。

对含有哑元的命题公式的赋值，赋值后的真值与哑元的取值无关。具体在本例中，命题公式 P, Q （都视为含有 3 个命题变量的命题公式）的真值表如下：

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \vee r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

通过比较真值表可以看出，命题公式 P 与 Q 不等值。

也就是说，即使两个命题公式 P, Q 所含有的命题变量不相同，我们也可以去谈论它们是否等值——只需要把它们都视为含有两者全部的命题变量的命题公式，不妨含有哑元。

在以后，为方便起见，我们默认命题公式中可以含有哑元。

注记 1.2.2. 命题常量可以视为含有 0 个命题变量的命题公式。我们令“1”为某个给定的真命题，它也被视为一个取值恒为 1 的命题公式，也就是重言式；也习惯用“0”来表示某个给定的假命题，它也被视为一个取值恒为 0 的命题公式，也就是矛盾式。

这有一些记号混用，具体含义需要读者依靠语境判断。对于一个含有命题变量 p_1, \dots, p_n 的命题公式 P ，如果 P 是重言式，则我们记

$$P \Leftrightarrow 1$$

在上式中，“1”被视为含有 n 个命题变量 p_1, \dots, p_n 的重言式。 p_1, \dots, p_n 都是命题公式“1”的哑元。类似地，“ P 是矛盾式”也记作“ $P \Leftrightarrow 0$ ”，读者可以望文生义。

接下来将介绍一些常见的命题公式（可以含有哑元）的等值式。

定理 1.2.2 (基本的命题公式等值式 I). 设 A 为任意的命题公式，则下列成立：

(1) 零律：

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

(2) 同一律：

$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

(3) 幂等律：

$$A \Leftrightarrow A \vee A$$

$$A \Leftrightarrow A \wedge A$$

(4) 双重否定律：

$$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$$

(5) 排中律:

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

(6) 矛盾律:

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

Proof. 这些都是显然的, 直接用真值表验证即可 (考虑 A 的真值为 0,1 的两种情况即可)。

也请读者思考上述等值式中出现的“0”、“1”的具体含义。它们都被视为含有哑元的命题公式。 \square

特别注意, 上述等值式中的 A 可以被替换为任何命题公式。比如令 A 为含有 3 个命题变量的命题公式 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, 则幂等律 (3) 变为

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \vee [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \wedge [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

这仍然是命题等值式。上述 p, q, r 也可以继续被替换为更复杂的命题公式。

定理 1.2.3 (基本的命题公式等值式 II). 对于任何命题公式 A, B, C , 则下列等值式成立:

(7) 交换律:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

(8) 结合律:

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

(9) 分配律:

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

(10) 吸收律:

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

(11) 德摩根律:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

Proof. 对命题公式 A, B, C 被赋值之后所得到的命题的真假进行讨论, 用真值表暴力验证即可。

我们先来看交换律 (7). 列出真值表, 见下表:

$A \ B$	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$B \vee A$
0 0	0	0	0	0
0 1	0	0	1	1
1 0	0	0	1	1
1 1	1	1	1	1

观察此真值表各列，容易发现相应的等值关系。

接下来看 (8) 结合律，我们暴力列出如下真值表：

A	B	C	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

分配律、吸收律、德摩根律的证明完全类似，留给读者完成。 □

关于等价、蕴含连接词，还有如下等值式：

定理 1.2.4 (基本的命题公式等值式 III). 设 A, B 为任意的命题公式，则成立下列命题公式等值式：

(12) 蕴含律：

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

(13) 等价律：

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

(14) 假言易位：

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(15) 等价否定：

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

(16) 归谬论：

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

Proof. 用真值表的方法暴力验证蕴含律和等价律，读者自行完成，在此从略。假言易位、等价否定、归谬论也可以用真值表，但其实我们不必那么暴力，因为这三者可以由之前所证明过的等值式推出来。

对于任意两个命题公式 A, B ，有

$$\begin{aligned}
 & A \rightarrow B \\
 \Leftrightarrow & \neg A \vee B && (\text{蕴含律}) \\
 \Leftrightarrow & B \vee \neg A && (\text{交换律}) \\
 \Leftrightarrow & \neg(\neg B) \vee \neg A && (\text{双重否定律}) \\
 \Leftrightarrow & \neg B \rightarrow \neg A && (\text{蕴含律})
 \end{aligned}$$

从而假言易位 (14) 得证。

再注意到

$$\begin{aligned}
 & A \leftrightarrow B \\
 \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) && \text{(等价律)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) && \text{(假言易位)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) && \text{(交换律)} \\
 \Leftrightarrow & \neg A \leftrightarrow \neg B && \text{(等价律)}
 \end{aligned}$$

从而等价否定 (15) 得证。

最后注意到

$$\begin{aligned}
 & (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \\
 \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) && \text{(蕴含律)} \\
 \Leftrightarrow & [\neg A \wedge (\neg A \vee \neg B)] \vee [B \wedge (\neg A \vee \neg B)] && \text{(分配律)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg A) \vee [B \wedge (\neg A \vee \neg B)] && \text{(吸收律)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg A) \vee [(B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)] && \text{(交换律, 分配律)} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg A) \vee (B \wedge \neg A)] \vee 0 && \text{(结合律, 矛盾律)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg A) \vee (\neg A \wedge B) && \text{(同一律, 交换律)} \\
 \Leftrightarrow & \neg A && \text{(吸收律)}
 \end{aligned}$$

从而归谬论 (16) 得证。 □

像这样来通过已知的等值式 (运算律) 来得到新的等值式的方式被称为**等值演算**。

其实, 在上述等值演算的过程中, 我们“偷偷地”使用了以下重要规则:

定理 1.2.5 (等值演算的置换规则). 设 $\Phi(A)$ 是含有命题公式 A 的命题公式, B 是另一个命题公式。如果 $A \Leftrightarrow B$, 那么必有 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。

这个道理几乎是显然的, 由等值 “ \Leftrightarrow ” 的定义容易得到。我们在定理 1.2.4 的 (14) - (16) 的证明过程中已经使用了置换规则。此规则是等值演算的基础。另外一个显然的事实也十分重要:

定理 1.2.6 (等值关系是等价关系). 对于任意的命题公式 A, B, C , 下列成立

- (1) (自反性) $A \Leftrightarrow A$.
- (2) (对称性) 如果 $A \Leftrightarrow B$, 那么 $B \Leftrightarrow A$.
- (3) (传递性) 如果 $A \Leftrightarrow B$ 并且 $B \Leftrightarrow C$, 那么 $A \Leftrightarrow C$.

这个也容易证明, 几乎是显然的。要特别注意“传递性”, 它在我们在之前的等值演算过程中也被偷偷使用。

接下来我们举一些等值演算的例子, 来结束本节。

例子 1.2.3 (附加前提). 我们重新来看例子 1.2.1 之中出现的关于 3 个命题变量 p, q, r 的命题公式。我们已经用真值表的方法知道了

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$$

现在, 用等值演算的方法再次得到此等值式。

Solution. 运用我们所介绍的基本的运算律，容易知道

$$\begin{aligned}
 & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
 \Leftrightarrow & p \rightarrow (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴含律}) \\
 \Leftrightarrow & \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴含律}) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{结合律}) \\
 \Leftrightarrow & \neg(p \wedge q) \vee r \quad (\text{德摩根律}) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \rightarrow r \quad (\text{蕴含律})
 \end{aligned}$$

从而得证，比暴力计算真值表要方便。 □

这个重言式也被称作“附加前提”，它在逻辑推理中具有重要地位。

建议初学者学习等值演算时，像本节一样，每一步演算都标注上所使用的运算律。等到熟练时，就不必在每一步的右边添加括号备注了。

例子 1.2.4 (又一个常用的关于等价的等值关系). 对于命题变量 p, q ，证明等值式

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Proof. 除了使用真值表，还可以等值演算。只需注意到

$$\begin{aligned}
 & p \leftrightarrow q \\
 \Leftrightarrow & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && (\text{等价律}) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) && (\text{蕴含律}) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) && (\text{反复使用分配律}) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee 0 \vee 0 \vee (q \wedge p) && (\text{矛盾律}) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) && (\text{同一律}) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && (\text{交换律})
 \end{aligned}$$

从而证毕。 □

事实上，用自然语言去想，这个结果是显然的。 $p \leftrightarrow q$ 的意思是“ p 与 q 等价”；而 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 翻译成自然语言为“ p 与 q 同时成立或者同时不成立”。从而可知它们表达同一个含义。

例子 1.2.5. 考虑含有 p, q, r 三个命题变量的命题公式

$$(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

判断它是否为重言式。

Solution. 我们介绍三种方法。

方法一：鉴于一共只含 3 个命题变量，我们完全可以用真值表法来判断，讨论所有可能的 $2^3 = 8$ 种赋值即可。容易知道它是重言式。

方法二：等值演算法。其实这也是一种暴力的方法，用它总能做出来。演算的原则是先利用蕴含律、等价律，把 $\leftrightarrow, \rightarrow$ 完全用 \wedge, \vee, \neg 表示出来，得到只含有 \wedge, \vee, \neg 这三个连接词的命

题公式；再之后反复使用交换律、结合律、分配律、吸收律、摩根律（也就是定理 1.2.3 “第 II 组等值式”之中的）；最后用“第 I 组”等值式。本例的具体过程如下：

$$\begin{aligned}
 & (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q \vee r))] \rightarrow (\neg p \rightarrow q) && \text{(用例子 1.2.4 杀掉等价连接词)} \\
 \Leftrightarrow & \neg[(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q \vee r))] \vee (p \vee q) && \text{(用蕴含律杀掉蕴含连接词)} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge (p \vee \neg q \vee r)] \vee (p \vee q) && \text{(反复使用德摩根律、双重否定律)} \\
 \Leftrightarrow & [\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)] \wedge [p \vee (\neg q \vee r) \vee (p \vee q)] && \text{(分配律)} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee p) \vee (q \wedge \neg r) \vee q] \wedge [(\neg q \vee q) \vee p \vee r \vee p] && \text{(交换律、结合律)} \\
 \Leftrightarrow & [1 \vee (q \wedge \neg r) \vee q] \wedge [1 \vee p \vee r \vee p] && \text{(排中律)} \\
 \Leftrightarrow & 1 \wedge 1 && \text{(零律)} \\
 \Leftrightarrow & 1 && \text{(连接词 } \wedge \text{ 的定义)}
 \end{aligned}$$

从而原命题公式与真命题 1 是等值的，说明原命题公式是重言式

方法三：暴力地去“分析句子成分”，这比前两种方法“文明”一点。判断一个命题公式是否为重言式，根据重言式的定义，只需要知道是否存在它的某个赋值，使得赋值后的结果为假。

假设存在 p, q, r 的某个赋值，使得

$$[p \leftrightarrow (\neg q \vee r)] \rightarrow [\neg p \rightarrow q]$$

为假命题，那么注意连接两组中括号的 \rightarrow （将这个命题看成一个形如 $A \rightarrow B$ 的复合命题，其中 A, B 为中括号里面的东西），由连接词 \rightarrow 的定义，知 $\begin{cases} p \leftrightarrow (\neg q \vee r) & \text{是真命题} \\ \neg p \rightarrow q & \text{是假命题} \end{cases}$ 。从而由 $\neg p \rightarrow q$ 为假命题，得知 p, q 都为假命题。又因为 $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$ 是真命题，且 p 为假命题，从而 $\neg q \vee r$ 为假，从而 q 必为真。但是之前已经说明 q 为假命题了，从而得到矛盾。这个矛盾说明不存在 p, q, r 的赋值使得原命题公式为假，从而原命题公式为重言式。□

本例还会有方法四：下一节将介绍的命题逻辑的推理方法。

1.3 推理与证明（正在更新）

本节其实还是对命题公式进行等值演算。

定义 1.3.1 (逻辑蕴含). 对于总共含有 $n(\geq 0)$ 个命题变量 p_1, \dots, p_n 的命题公式 A, B ，如果对于 p_1, \dots, p_n 的任何赋值，以下两者至少有一个成立：

- (1) A 为假命题
 - (2) A 与 B 都为真命题
- ，则称 A 逻辑蕴含 B ，记作 $A \Rightarrow B$ 。

记号“ \Rightarrow ”与上一节出现的表示两个命题公式等值的“ \Leftrightarrow ”十分类似。由“逻辑蕴含”的定义，容易知道：

引理 1.3.1. 对于命题公式 A, B ，则以下成立：

- (1) 如果 $A \Leftrightarrow B$ ，那么 A 为重言式当且仅当 B 为重言式。
- (2) $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是重言式。

Proof. 由有关定义, 显然的。 □

引理 1.3.2. 对于命题公式 A, B , 如果成立 $A \Rightarrow B$ 并且 A 是重言式, 那么 B 也是重言式。

Proof. 给定 A, B 的任何一个赋值, 我们只需证明 B 为真。由于 A 是重言式, 所以该赋值下 A 为真。又因为 $A \Rightarrow B$, 从而由逻辑蕴含的定义可以看出, B 必为真。得证。 □

引理 1.3.3. 对于命题公式 A, B , 则 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 。

Proof. 只需注意到上一节定理 1.2.4 之中的等价律

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

现在, 如果 $A \Leftrightarrow B$, 那么 $A \Leftrightarrow B$ 是重言式, 所以由等价律知 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 也是重言式, 从而 $A \rightarrow B$ 与 $B \rightarrow A$ 都是重言式, 也就是说 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 。以上推理步步可逆, 从而反之亦然。 □

定理 1.3.1 (假言推理). 对于任意命题公式 A, B , 成立

$$[(A \rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$$

Proof. 也就是说, 我们要证明

$$[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$$

为重言式。

在此采用上节介绍的等值演算方法, 过程如下 (读者自行补全每一步所用的运算律):

$$\begin{aligned} & [(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B \\ \Leftrightarrow & \neg[(\neg A \vee B) \wedge A] \vee B \\ \Leftrightarrow & [(A \wedge \neg B) \vee \neg A] \vee B \\ \Leftrightarrow & [(A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)] \vee B \\ \Leftrightarrow & (\neg B \vee \neg A) \vee B \\ \Leftrightarrow & (\neg B \vee B) \vee \neg A \\ \Leftrightarrow & 1 \vee \neg A \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

从而证毕。 □

这个逻辑蕴含式, 用自然语言表述为, “如果 A 能推出 B , 并且 A 成立, 那么 B 成立”。这正是逻辑学中典型的“假言推理”, 早在亚里士多德时期就被提出。

定理 1.3.2 (假言三段论). 对于命题公式 P, Q, R , 则成立下述逻辑蕴含式:

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

Proof. 只需证明

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$$

是重言式。

我们用等值演算的方法。注意到

$$\begin{aligned} & [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R) \\ \Leftrightarrow & [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge P] \rightarrow R \quad (\text{附加前提, 见例子 1.2.3}) \\ \Leftrightarrow & [(P \wedge (P \rightarrow Q)) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R \end{aligned}$$

再注意一个命题公式等值式（与假言推理很像），读者自行用命题演算（或者真值表）证明：

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Leftrightarrow A \wedge B \quad (*)$$

此结果留做习题。从而，利用 (*) 的结论继续演算，

$$\begin{aligned} \text{原式} & \Leftrightarrow [P \wedge Q \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R \\ & \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \rightarrow R \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \vee R \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee R) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee 1 \\ & \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

从而证毕。 □

定理 1.3.3 (逻辑蕴含是偏序关系). 对于任意命题公式 A, B, C , 成立

- (1) (自反性) $A \Rightarrow A$.
- (2) (反对称性) 如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$, 那么 $A \Leftrightarrow B$.
- (3) (传递性) 如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow C$, 那么 $A \Rightarrow C$.

Proof. 无非是验证某些命题公式是重言式。

(1) 只需验证 $A \rightarrow A$ 是重言式。这是显然的。

(2) 由条件知道, $A \rightarrow B$ 与 $B \rightarrow A$ 都是重言式, 所以 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 也是重言式。再注意等价律

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$$

而上式左边是重言式, 从而右边 $A \leftrightarrow B$ 也为重言式。这就说明 $A \Leftrightarrow B$.

(3) 由条件知 $A \rightarrow B$ 与 $B \rightarrow C$ 都是重言式, 所以 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ 也是重言式。再注意假言三段论

$$[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

从而由引理 1.3.2 可知, $A \rightarrow C$ 也为重言式, 也就是说 $A \Rightarrow C$, 得证。 □

特别注意到传递性, 由此性质, 不难知道, 对于 $n(\geq 2)$ 个命题公式 P_1, \dots, P_n , 如果有 $P_1 \Rightarrow P_2, P_2 \Rightarrow P_3, \dots, P_{n-1} \Rightarrow P_n$, 那么一定有 $P_1 \Rightarrow P_n$. 这正是“一步一步地推理”。

类似于上一节关于“ \Leftrightarrow ”的等值演算, 我们也想对逻辑蕴含“ \Rightarrow ”发展一套演算的理论。其中, 逻辑蕴含的传递性是其重要保证; 而另一个必要的保证是:

定理 1.3.4 (逻辑蕴含的置换规则). 对于任意的命题公式 A, B, C , 如果成立 $A \Rightarrow B$, 那么有:

$$(1) A \vee C \Rightarrow B \vee C$$

$$(2) A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$$

Proof. 条件 $A \Rightarrow B$ 意味着 $A \rightarrow B$ 为永真式, 换句话说, $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow 1$.

我们先来证 (1). 只需证明 $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ 是永真式. 等值演算如下:

$$\begin{aligned} & (A \vee C) \rightarrow (B \vee C) \\ \Leftrightarrow & \neg(A \vee C) \vee (B \vee C) \\ \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \vee C) \\ \Leftrightarrow & (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee B \vee C) \\ \Leftrightarrow & [(\neg A \vee B) \vee C] \wedge [(\neg C \vee C) \vee B] \\ \Leftrightarrow & [(A \rightarrow B) \vee C] \wedge (1 \vee B) \\ \Leftrightarrow & (1 \vee C) \wedge (1 \vee B) \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

第 (2) 条类似用等值演算去证明. 留作习题. □

回忆上一节定理 1.2.5, 等值演算的置换规则, 那个几乎显然的定理表明, 把一个命题公式当中的任意给定的某一部分替换成与之等值的命题公式, 所得到的新的命题公式与原命题公式等值——这在等值演算的过程中被“偷偷地”反复使用。

而逻辑蕴含版本的置换原则, 结论没有那么好, 也就是说 (沿用定理 1.2.5 中的记号), 对于含有命题公式 A 的命题公式 $\Phi(A)$, $A \Rightarrow B$ 一般不能得到 $\Phi(A) \Rightarrow \Phi(B)$. 一个最典型的例子是, $A \Rightarrow B$ 并不意味着 $\neg A \Rightarrow \neg B$. 读者自行举反例来说明这一点 (留作习题)。也就是说, $\Phi(A) = \neg A$ 的情形就不对。

而本定理 1.3.4 表明, 当 $\Phi(A) = A \vee C$ 或者 $A \wedge C$ 的情形, 可以把 A “替换掉” (其中 C 是任意命题公式)。这个结论在今后的演算中足够用了, 我们在今后不加声明地“偷偷使用”。

与等值演算的基本等值式 (上一节那 16 组) 类似, 为了发展 “ \Rightarrow ” 的演算理论, 我们也需要一些基本的逻辑蕴含式, 称之为 “**推理定律**”。

首先注意到上一节 16 组常用的命题公式等值式. 对于每个命题公式等值式 $A \Leftrightarrow B$, 都有两条推理定律 $A \Rightarrow B$ 与 $B \Rightarrow A$. 除此之外, 我们再来介绍一些常用的推理定律:

定理 1.3.5 (常用的推理定律). 对于任意命题公式 A, B, C, D , 成立以下:

(1) (附加律)

$$A \Rightarrow A \vee B$$

(2) (化简律)

$$A \wedge B \Rightarrow A$$

(3) (假言推理)

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

(4) (拒取式)

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

(5) (析取三段论)

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

(6) (假言三段论)

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

(7) (等价三段论)

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

(8) (构造性二难)

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

(9) (破坏性二难)

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

Proof. 无非是把上述式子中的“ \Rightarrow ”全都改成“ \rightarrow ”，然后证明如此得到的命题公式是重言式。可以用真值表的方法去验证，也可以等值演算。注意假言推理(3)与假言三段论(6)已经被我们证明。

(1) 对于附加律，只需要证明 $A \rightarrow (A \vee B)$ 是重言式。等值演算如下：

$$\begin{aligned} & A \rightarrow (A \vee B) \\ \Leftrightarrow & \neg A \vee (A \vee B) \\ \Leftrightarrow & (\neg A \vee A) \vee B \\ \Leftrightarrow & 1 \vee B \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

其余留作习题，作为等值演算的练习。

□

事实上，除了真值表法与等值演算，更加方便的方式是利用定理 1.3.3 当中“ \Rightarrow ”的传递性、逻辑蕴含的置换规则（定理 1.3.4），以及已知的推理定律，来推演出新的推理定律，也就是与等值演算类似的**推理演算**方法。

现在假定我们已经掌握定理 1.3.5 的前 6 条（以及上一节中 16 组常用等值式，每个等值式都是两条推理定律），我们用推理演算来证明 (7) - (9)。

等价三段论 (7) 的推理演算证明如下：

$$\begin{aligned} & (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \\ \Rightarrow & [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] \wedge [(B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)] && \text{(等价律)} \\ \Rightarrow & [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \wedge [(C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] && \text{(交换律, 结合律)} \\ \Rightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A) && \text{(假言三段论)} \\ \Rightarrow & A \leftrightarrow C && \text{(等价律)} \end{aligned}$$

构造性二难（8）的推理演算证明如下：

$$\begin{aligned}
& (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \\
\Rightarrow & [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge A] \vee [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C] & (\text{分配律}) \\
\Rightarrow & [((A \rightarrow B) \wedge A) \wedge (C \rightarrow D)] \vee [(A \rightarrow B) \wedge ((C \rightarrow D) \wedge C)] & (\text{交换律, 结合律}) \\
\Rightarrow & [B \wedge (C \rightarrow D)] \vee [(A \rightarrow B) \wedge D] & (\text{假言推理}) \\
\Rightarrow & B \vee D & (\text{化简律})
\end{aligned}$$

破坏性二难（9）的推理演算证明如下：

$$\begin{aligned}
& (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \\
\Rightarrow & [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg B] \vee [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg D] & (\text{分配律}) \\
\Rightarrow & [((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \wedge (C \rightarrow D)] \vee [(A \rightarrow B) \wedge ((C \rightarrow D) \wedge \neg D)] & (\text{交换律, 结合律}) \\
\Rightarrow & [\neg A \wedge (C \rightarrow D)] \vee [(A \rightarrow B) \wedge \neg C] & (\text{拒取式}) \\
\Rightarrow & (\neg A) \vee (\neg C) & (\text{化简律})
\end{aligned}$$

从而证明完毕。

构造性二难推理与破坏性二难推理是常用的逻辑推理技巧，它有以下常用的推论：

定理 1.3.6 (二难推理的简单版本). 对于任意命题公式 A, B, C , 成立以下推理定律：

$$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$(C \rightarrow A) \wedge (\neg C \rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B) \quad (*)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Proof. 这是定理 1.3.5 当中构造性二难（8）与破坏性二难（9）的简单推论。例如，在构造性二难推理定律

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

当中，由 A, B, C, D 的任意性，我们取 $A = \neg C$ 代入上式，就能整理出 (*) 式。其余类似。细节留给读者。□

当然，我们可以直接用推理演算或者等值演算来证明。我们再来看一个推理演算的例子：

例子 1.3.1 (回顾上一节末尾的例子 1.2.5). 用推理演算的方法来证明

$$(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

是重言式。

Proof. 在上一节已经介绍了三种方法，在此我们采用推理演算的“方法四”：注意到有

$$\begin{aligned}
& p \leftrightarrow (\neg q \vee r) \\
\Rightarrow & [p \rightarrow (\neg q \vee r)] \wedge [(\neg q \vee r) \rightarrow p] && (\text{等价律}) \\
\Rightarrow & (\neg q \vee r) \rightarrow p && (\text{化简律}) \\
\Rightarrow & \neg(\neg q \vee r) \vee p && (\text{蕴含律}) \\
\Rightarrow & (q \wedge \neg r) \vee p && (\text{德摩根律, 双重否定律}) \\
\Rightarrow & (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) && (\text{分配律}) \\
\Rightarrow & q \vee p && (\text{化简律}) \\
\Rightarrow & \neg p \rightarrow q && (\text{双重否定律, 蕴含律})
\end{aligned}$$

从而得到

$$[p \leftrightarrow (\neg q \vee r)] \Rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

也就是说，

$$[p \leftrightarrow (\neg q \vee r)] \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

是重言式。证毕。 □

与上一节采用的等值演算方法相比，推理演算更加简便。但是推理演算在判定重言式时只适用于形如 $A \rightarrow B$ 的命题公式。另外，推理演算无法断定某个命题公式不是重言式，具体地说，即使有 $A \Rightarrow \neg B$ ，也并不意味着 $A \rightarrow B$ 不是重言式。这个留给读者思考（留作习题）。

定义 1.3.2 (推理形式). 对于有限个命题公式 $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 1)$ 以及 Q ，如果成立

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

则称由条件 P_1, P_2, \dots, P_n 推出结论 Q 的推理是有效的，此时也记作

$$\{P_1, \dots, P_n\} \models Q$$

了解集合 (set) 的读者容易看出 $\{P_1, \dots, P_n\}$ 可以被认为是由这 n 个命题公式构成的集合。由合取 \wedge 运算的交换律、结合律可以看出，这 n 个条件 P_1, \dots, P_n 推出结论 Q 的有效性，与它们的排列次序无关。

例如，假言推理也可以写成

$$\{A, A \rightarrow B\} \models B$$

假言三段论可以写成

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \models (A \rightarrow C)$$

其余的若干推理定律也可以类似被改写。

例子 1.3.2. 指出下列语句中哪些是条件，哪些是结论，并判断下列推理是否有效：

(1) 曲豆豆今天吃饭或者吃屎，曲豆豆今天没吃饭，所以曲豆豆今天吃屎。

(2) 如果曲豆豆没挂科，那么曲豆豆去看电影；如果曲豆豆去看电影，那么曲豆豆不去跑步；曲豆豆没去跑步。因此，曲豆豆没有挂科。

(3) 只要曲豆豆曾经到过受害者的房间并且 12 点之前没有离开，曲豆豆就是嫌疑犯；曲豆豆曾经到过受害者的房间；如果曲豆豆在 12 点以前离开，门口老大爷就会看见曲豆豆；门口老大爷没有看到曲豆豆。因此，曲豆豆是嫌疑犯。

Solution. 我们将上述语句符号化。

(1) 我们令 p : “曲豆豆今天吃饭”, q : “曲豆豆今天吃屎”. 则条件为 $\{p \vee q, \neg p\}$, 结论为 q .

推理 $\{p \vee q, \neg p\} \models q$ 是有效的, 这是因为由析取三段论, $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$.

(2) 我们令 p : “曲豆豆没有挂科”, q : “曲豆豆去看电影”, r : “曲豆豆没去跑步”. 则条件为 $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r\}$, 结论为 p .

这个推理是无效的, 因为

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge r] \rightarrow p$$

不是重言式, 当 p 为假、 q, r 为真的时候, 上式为假。

(3) 我们令 p : “曲豆豆曾经到过受害者的房间”, q : “曲豆豆 12 点之前没有离开”, r : “门口老大爷看到曲豆豆”, s : “曲豆豆是嫌疑犯”. 条件为 $\{(p \wedge q) \rightarrow s, p, \neg q \rightarrow r, \neg r\}$, 结论为 s .

这个推理是有效的, 我们构造证明如下:

$$\begin{aligned} & [(p \wedge q) \rightarrow s] \wedge p \wedge (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg r \\ \Rightarrow & [(p \wedge q) \rightarrow s] \wedge p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \wedge \neg r] \\ \Rightarrow & [(p \wedge q) \rightarrow s] \wedge p \wedge q && (\text{拒取式, 双重否定律}) \\ \Rightarrow & [p \wedge q] \wedge [(p \wedge q) \rightarrow s] && (\text{交换律, 结合律}) \\ \Rightarrow & s && (\text{假言推理}) \end{aligned}$$

从而,

$$[(p \wedge q) \rightarrow s] \wedge p \wedge (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg r \Rightarrow s$$

也就是说,

$$\{(p \wedge q) \rightarrow s, p, \neg q \rightarrow r, \neg r\} \models s$$

□

在本节最后, 我们再介绍推理证明当中常见的两种方法: 附加前提证明法与归谬法。

定理 1.3.7 (附加前提证明法). 对于命题公式 P_1, \dots, P_n 以及 Q, R , 则

$$\{P_1, \dots, P_n\} \models (Q \rightarrow R)$$

当且仅当

$$\{P_1, \dots, P_n, Q\} \models R$$

Proof. 我们其实已经证明过了, 只是把之前的结果换了一种说法。回顾例子 1.2.3, 从而我们有等值关系

$$\begin{aligned} & (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ \Leftrightarrow & (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge Q \rightarrow R \end{aligned}$$

因此上式左边为重言式, 当且仅当右边为重言式。从而得证。

□

定理 1.3.8 (归谬法). 对于命题公式 P_1, \dots, P_n 以及 Q , 则

$$\{P_1, \dots, P_n\} \models Q$$

当且仅当 $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 为矛盾式。

Proof. 这是因为,

$$\begin{aligned} & (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q \\ \Leftrightarrow & \neg(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \vee Q \\ \Leftrightarrow & \neg[(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q] \end{aligned}$$

从而由上述等值关系可见, $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ 为重言式, 当且仅当 $\neg[(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q]$ 为重言式, 也就是说 $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 为矛盾式。证毕。 \square

1.4 主体与谓词逻辑 (待补)

1.5 量词与一阶逻辑 (待补)

1.6 一阶逻辑等值演算与推理 (待补)

1.7 数学归纳法 (待补)

1.8 习题 (待补)

2 朴素集合论

2.1 集合的概念与基本例子

定义 2.1.1. 集合的概念不可言说，不言自明，无须定义。谓词 \in （读作“属于”）也不可言说。两个集合的相等，也无需定义。

粗俗地说，“几乎所有你能想到的”的事物、对象，都是集合。而两个集合相等，通俗地说就是它们是同一个事物。对于两个集合 A, B ，我们可以构造出命题 $A \in B$ 。当 $A \in B$ 为真命题时，我们称 A 是 B 的元素。

为避免集合论悖论，我们简单粗暴地避开谈论 $A \in A$ 这个命题。我们不认为一个集合是它自身的元素。例如，所有集合构成的全体，我们不认为是集合。事实上，并不是随便一些东西放在一起都构成一个集合。哪些东西放在一起构成集合，哪些不认为是集合，是被集合论公理体系规定的，本讲义不打算深究。本章最末会对集合论公理做简单介绍。

由所有满足性质 P 的对象 x 的全体构成的集合，记作

$$\{x|P(x)\}$$

当然，对于某些集合，我们也可以通过列举其中的元素来表示这个集合，例如由 1, 2, 3 这三个元素构成的集合可以记为 $\{1, 2, 3\}$ 。

关于集合相等，首先有一条基本的公理：

外延公理：对于两集合 A, B ， A 与 B 相等当且仅当它们拥有相同的元素。

用符号语言表达为：对于任何集合 A, B ,

$$(A = B) \Leftrightarrow [\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$$

例子 2.1.1 (常见的集合及其记号)。

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$$

$$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

分别是我们熟悉的整数集、正整数集、有理数集。

我们用 \mathbb{R} 来表示实数集，

$$\mathbb{C} := \{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \mathbb{R}\}$$

为复数集。

例子 2.1.2. 对于正整数 n ，我们也习惯记

$$n\mathbb{Z} := \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$$

即，由 n 的倍数构成的集合。

我们也习惯用

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z} := \{\frac{n}{2} | n \in \mathbb{Z}\}$$

来表示半整数集。读者可举一反三。

在此假定读者以上集合有基本了解。

定义 2.1.2 (空集). 定义集合 \emptyset 为

$$\emptyset := \{x | x \neq x\}$$

称此集合为空集。

由此可见，空集就是不含任何元素的集合。

例子 2.1.3. 考虑集合 $\{\emptyset\}$ ，注意这是由“空集”这个元素构成的集合，它并不是空集。并且有

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

事实上，对任何集合 A ，我们都可以考虑由 A 这一个元素构成的集合 $\{A\}$ ，成立 $A \in \{A\}$ 。

定义 2.1.3 (子集). 对于集合 A, B ，称 A 是 B 的子集，若

$$\forall x \in A, x \in B.$$

此时记作 $A \subseteq B$ ，读作“ A 包含于 B ”，或者“ B 包含 A ”。

也就是说，“ A 中的所有元素都在 B 中”。可见，对任何集合 A ，都成立 $A \subseteq A$ 。

回顾上一节讲到的逻辑连接词“蕴含”， $A \subseteq B$ 的定义也可以写作

$$\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

性质 2.1.1. 对于任何集合 A ，都有 $\emptyset \subseteq A$ 。也就是说，空集是任何集合的子集。

Proof. 对于任何集合 x ，按照子集的定义，我们需要证明

$$(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$$

而由空集的定义，对于任何的 $x, x \in \emptyset$ 总是假命题，从而 $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$ 一定是真命题。得证。 \square

这个例子可帮助初学者来理解逻辑连接词“ \Rightarrow ”的含义。

例子 2.1.4.

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

性质 2.1.2 (集合相等的一个充要条件). 对于集合 A, B ，则 $A = B$ 当且仅当

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Proof. 这是外延公理的一个近乎无聊的应用。读者自行补全细节。 \square

定义 2.1.4 (真子集). 对于集合 A, B , 称 A 是 B 的真子集, 如果

$$A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B$$

此时记作 $A \subsetneq B$, 也读作“ A 真包含于 B ”.

例子 2.1.5 (开区间与闭区间). 再回顾以下我们早已熟悉的实数集 \mathbb{R} 的子集: 对于实数 $a < b$, 有

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$$

定义 2.1.5 (有限集与无限集). 对于集合 A , 如果 A 中只有有限多个元素, 则称 A 为有限集。反之称为无限集。

这个概念是直接易懂的。常见的许多集合, 诸如 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 等等, 都是无限集。

比较显然的一点是, 对于集合 A , A 是无限集当且仅当对任何正整数 n , 存在 A 的一个含有 n 个元素的子集。

2.2 集合的基本运算

本节介绍集合的运算, 如何由我们已有的集合来构造新的集合。

定义 2.2.1 (集合的交、并). 对于集合 A, B , 我们定义

$$A \cap B := \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

分别成为集合 A, B 的交集与并集。

定义 2.2.2 (补集). 给定集合 X , 对于 X 的子集 A , 定义 A 在 X 中的补集 $A^c := \{x \in X | x \notin A\}$

在谈论补集时, 我们总是事先给定集合 X .

定义 2.2.3 (差集). 对于集合 A, B , 定义

$$A - B := \{x \in A | x \notin B\}$$

性质 2.2.1 (交、并的分配律). 对于任意集合 A, B , 成立

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Proof. 留作习题。 □

性质 2.2.2 (摩根律). 设集合 A, B 均为集合 X 的子集, 我们在 X 中谈论补集。则成立

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Proof. 留作习题。 □

定义 2.2.4 (幂集). 对于集合 A , 定义集合

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

称其为集合 A 的幂集。

也就是说, 2^A 被定义为由 A 的全体子集构成的集合。

例子 2.2.1. 对于集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \emptyset$, 则成立

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$2^B = \{\emptyset\}$$

$$2^{2^B} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

定义 2.2.5 (有序对). 对于集合 A, B , 定义集合 (A, B) 为

$$(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

可见无论 A, B 是什么样的集合, 当 $A \neq B$ 时, 集合 (A, B) 总是由两个元素构成:

$$\{A\} \in (A, B)$$

$$\{A, B\} \in (A, B)$$

再注意, $\{A, B\}$ 表示的是“以 A, B 这两个元素构成的集合”。

特别地, $(A, A) = \{\{A\}, \{A, A\}\} = \{\{A\}, \{A\}\} = \{\{A\}\}$.

细心的读者可能会发现符号歧义。对于实数 $a < b$, (a, b) 可以是开区间 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, 也可以是这里讲的有序对。读者遇到此情况, 不妨靠语境来判断它的含义。

定义 2.2.6 (笛卡尔积). 对于非空集合 A, B , 我们定义

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

这里的 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ 是有序对。

例子 2.2.2. 对于 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$, 则有

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

例子 2.2.3 (n 维空间). 回顾 \mathbb{R} 是实数集 (直线), 则有

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

一般地, 对于正整数 n , 定义

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

注意, 谈论到多个集合作笛卡尔积时, 比如对于 A, B, C 三个集合, 原则上应该有

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) | a \in A, b \in B, c \in C\}$$

讲道理 (严格按照有序对的定义), $((a, b), c)$ 与 $(a, (b, c))$ 通常是不相同的。本讲义中尽量避免如此繁琐的讨论, 暂且认为

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$$

读者可以尝试给“多元有序组”下定义, 或者暂且忍受, 直到学到集合的映射。

本节最后, 简单介绍一下本讲义开篇“圣经”中提到的“后继树 (数)”。

定义 2.2.7 (后继). 对于集合 A , 定义集合

$$A^+ := A \cup \{A\}$$

称为集合 A 的后继。

例如, 对于集合 $A = \{a, b\}$, 则有

$$A^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$$

正如“圣经”中所说, 通过不断取后继, 可以得到所有的正整数。具体地, 我们将“0”定义为空集 \emptyset , 即 $0 := \emptyset$. 之后我们令 $1 := 0^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$. 再之后, 我们将 2 定义为 1 的后继, 即

$$2 := 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

不断地做下去, 有

$$3 := 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$4 := 3^+ = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

.....

这正是皮亚诺的自然数公理化构造。在此观点下, 0 和正整数统称为自然数。

我们不再继续深究自然数公理。

2.3 集合列与集合族（待补）

本节我们继续介绍集合运算。

定义 2.3.1 (集合族). 对于集合 \mathcal{A} , 如果 \mathcal{A} 是由一些集合构成的集合, 则称 \mathcal{A} 是一个集合族。

由定义可知, 集合族首先是一个集合, 只不过这个集合是由一些集合构成的。例如, 集合 $\{\emptyset\}$ 就是一个集合族。对任何集合 A , A 的幂集 2^A 也是一个集合族。

其实, “集合族”是一个很无聊的概念, 因为任何集合事实上都是集合族, 集合与集合族是一回事。对于这个论断, 读者可以承认之, 也可以无视之。

定义 2.3.2 (任意交与任意并). 对于非空的集合族 \mathcal{A} , 我们定义新的集合

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x | \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x | \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

分别称为集合族 \mathcal{A} 的交、并。

例如, 对于 $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$, 则有

$$\bigcap \mathcal{A} = \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$$

$$\bigcup \mathcal{A} = \{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$$

我们更感兴趣的是当 \mathcal{A} 为无限集的时候, 此时就会出现无穷多个集合的交（并）。

对于集合族 \mathcal{A} , 我们将 \mathcal{A} 中的每个元素赋以不同的标记来区分:

$$\mathcal{A} = \{A_i | i \in \mathcal{I}\}$$

其中, \mathcal{I} 称为集合族 \mathcal{A} 的一个**指标集**, 它可以是有限集, 也可以是无限集。

此时, 我们习惯使用记号

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \quad \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

分别来表示集合族 \mathcal{A} 的交、并。

特别地, 当集合族 \mathcal{A} 的指标集 $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_+$ 为正整数集时, 即

$$\mathcal{A} = \{A_i | i \in \mathbb{Z}_+\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

我们更喜欢将集合族 \mathcal{A} 的交、并记作

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \bigcap \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \bigcup \mathcal{A}$$

例子 2.3.1. 对于每一个正整数 n , 令集合 $A_n := (-n, n) \subseteq \mathbb{R}$ 为开区间。则成立

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$$

Proof. (待补)

□

2.4 映射与函数 (待补)

2.5 集合的势 (待补)

2.6 可数集 (待补)

2.7 选择公理与集合论 ZFC 公理体系简介 (待补)

2.8 习题 A: 逻辑、集合运算

Problem 2.8.1. 验证性质 2.2.1 与性质 2.2.2.

Problem 2.8.2. 对于集合 A, B , 证明以下三个命题是互相等价的:

- (1) $A \subseteq B$
- (2) $A \cap B = A$
- (3) $A \cup B = B$.

Problem 2.8.3. 对于集合 A, B, C , 证明:

- (1) $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
- (2) $(C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B) \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B$

Problem 2.8.4 (元素的个数). 设集合 A 为有限集 (即, 只含有有限多个元素), 我们用 $|A|$ 来表示集合 A 中元素的个数。例如当 $A = \{2, 7, 8\}$ 时, 有 $|A| = 3$. 现在, 假设 A, B 都是有限集, 证明以下结论:

- (1) $|2^A| = 2^{|A|}$
- (2) $|A \times B| = |A| \times |B|$
- (3) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Problem 2.8.5. 对于实数 a, b , 证明以下命题:

- (1) $(a \geq b) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, a > b - \varepsilon)$
- (2) $(a = b) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon)$
- (3) $(a > b) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, a > b + \varepsilon)$

(Hint: 这里默认 ε 取值于实数 \mathbb{R} .)

Problem 2.8.6. 对于非空集合 X, Y, X', Y' , 证明:

- (1) $X \times Y \subseteq X' \times Y' \Leftrightarrow (X \subseteq X') \wedge (Y \subseteq Y')$
- (2) $(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y$
- (3) $X \times Y \cap X' \times Y' = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$

Problem 2.8.7. 对于集合 A, B ,

- (1) 证明: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (2^A \subseteq 2^B)$
- (2) 当 A, B 非空时, 是否一定成立 $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$?
- (2) 直接写出集合 $2^{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}$ 的所有元素。

Problem 2.8.8. 对于集合 A, B ,

(1) 何时成立 $\{A \cup B\} = \{A\} \cup \{B\}$?

(2) 何时成立 $(A, B) = (B, A)$?

Problem 2.8.9 (集合的对称差). 对于两个集合 A, B 定义一种新的集合运算 \triangle , 称为对称差, 如下:

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$$

证明对称差运算满足以下性质:

(1) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

(2) $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C$

(3) $A \triangle B = C \Leftrightarrow A = B \triangle C$

3 二元关系 (待补)

3.1 关系的运算与性质 (待补)

3.2 等价关系与等价类 (待补)

3.3 偏序关系 (待补)

3.4 Zorn 引理与良序原理 (待补)

- 4 代数结构基础（待补）
- 5 实数的完备性（待补）
- 6 连续函数（待补）
- 7 一元微分学（待补）
- 8 黎曼积分（待补）
- 9 线性空间（待补）
- 10 n 维欧氏空间的拓扑（待补）
- 11 n 维欧氏空间的 Lebesgue 测度（待补）
- 12 线性赋范空间基础（待补）
- 13 附录：一些重要的初等数学（待补）
 - 13.1 求和符号与求积符号（待补）
 - 13.2 整数与多项式基础（待补）
 - 13.3 常用不等式（待补）
 - 13.4 排列、组合与二项式定理（待补）
 - 13.5 基本初等函数（待补）
 - 13.6 极坐标与参数方程（待补）
 - 13.7 复数的代数运算（待补）

References

- [1] Chung Kai Lai. *A Course in Probability Theory (Second Edition)*.
- [2] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis*. Princeton University Press, 2005.
- [3] Folland G.B. *Real analysis: Modern techniques and their applications (Second edition)*. Wiley, 1999.
- [4] Elliott, Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic, Sixth Edition*. CRC Press, 2015.
- [5] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications: And Its Applications*. 2006.
- [6] Pual R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer New York, 1974.
- [7] 陈天权. 数学分析讲义 (第一册). 北京大学出版社, 2009.

- [8] 李文威. 代数学方法卷一: 基础架构 (网络版). 计划由高等教育出版社出版, 2018.
- [9] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论 -第 2 版. 高等教育出版社, 2000.
- [10] 屈婉玲, 耿素云, 张立昂. 离散数学 (第 2 版). 高等教育出版社, 2015.
- [11] 陶哲轩. 陶哲轩实分析. 人民邮电出版社, 2008.
- [12] 周民强. 实变函数论. 北京大学出版社, 2001.