ES601 - Análise Linear de Sistemas

Atividade Teórica

4 de setembro de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

1. Atividade Teórica 01

Apresentação Resolução das questões de Análise Linear de Sistemas por Guilherme Nunes Trofino, 217276.

Questão 1

Exercício. Modelar um sistema RC série com tensão aplicada no circuito como entrada e tensão no capacitor como saída. Implementar a equação diferencial como um diagrama de blocos e simular no Simulink para um entrada em degrau de tensão de 10 V e condições iniciais nulas. A resistência é de 1 kOhm e o capacitor de 2000 uF.

Resolução. Primeiramente será necessário elaborar o circuito requisitado:

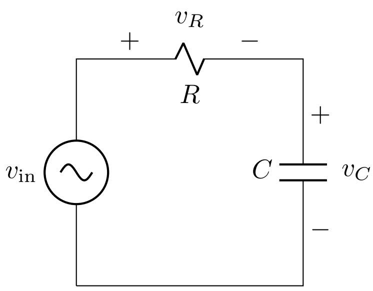

Figura 1.1: Circuito RC

Note que o degrau de alimentação será represetado como uma fonte variável e analisando pela **Lei das Malhas** nessa única malha, obtêm-se a seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
v_{\text{in}} &= v_R + v_C \\
&= Ri + v_C \\
v_{\text{in}} &= RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C \qquad (1.1.1) \\
&= RC\dot{v}_C + v_C \\
&\boxed{\dot{v}_C = \frac{1}{RC}v_{\text{in}} - \frac{1}{RC}v_C} \qquad (1.1.2)
\end{aligned}
$$

Desta forma, a equação **??** será representada no Simulink com o seguinte diagrama:

`es601_ex01_im01.png`

Figura 1.2: Diagrama no Simulink

Note que nesta configuração apresenta $\tau = RC = 2$ s, desta forma a simulação deve possuir ao menos $5\tau = 10$ s de análise para que o transiente seja superado. Consequentemente obtêm-se o seguinte gráfico para representar a tensão sobre o capacitor:

es601_ex01_im02.png

Figura 1.3: Gráfico da Simulação no Simulink

Exercício. Calcular a solução analítica (resolver a equação diferencial ou usar Laplace, como preferir), implementar no MATLAB e comparar o resultado com o do Simulink.

Resolução. Inicialmente parte-se da equação **??** que será solucionada pela **Transformada de Laplace** como representada abaixo:

$$v_{\text{in}} = RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C$$

$$v_{\text{in}}u(t) = RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C \qquad \text{Incluindo } \texttt{Função Degrau}$$

$$\boxed{\frac{v_{\text{in}}}{s} = RC(sV_C - v_{C0}) + V_C} \qquad \text{Aplicando } \texttt{Laplace} \tag{1.1.3}$$

As condições iniciais serão consideradas como não nulas no desenvolvimento para demonstração de um caso geral. Na sequência será necessário isolar a variável desejada, V_C, procedendo da seguinte forma:

$$V_C(RCs + 1) = \frac{v_{\text{in}}}{s} + RCv_{C0}$$

$$V_C(s + \frac{1}{RC}) = \frac{v_{\text{in}}}{RCs} + v_{C0}$$

$$\boxed{V_C = \frac{v_{\text{in}}}{RCs(s + \frac{1}{RC})} + \frac{v_{C0}}{(s + \frac{1}{RC})}} \qquad \text{Equação Isolada} \tag{1.1.4}$$

Note que será necessário simplificar a equação através de **Frações Parciais** para que a **Anti-Transformada de Laplace** possa ser aplicada e solução encontrada. Desta forma tem-se a seguinte equação:

$$\frac{v_{\text{in}}}{RCs(s + \frac{1}{RC})} = \frac{A}{RCs} + \frac{B}{(s + \frac{1}{RC})} \qquad \begin{cases} As + BRCs = 0 & \rightarrow \boxed{B = -v_{\text{in}}} \\ \frac{A}{RC} = v_{\text{in}} & \rightarrow \boxed{A = RCv_{\text{in}}} \end{cases}$$

Obtém-se a seguinte equação geral para V_C:

$$V_C = \frac{v_{\text{in}}}{s} + \frac{v_{\text{in}}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{v_{C0}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$v_C(t) = v_{\text{in}} - v_{\text{in}}e^{-\frac{1}{RC}t} + v_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad \text{Aplicando } \texttt{Anti-Laplace}$$

$$\boxed{v_C(t) = v_{\text{in}}(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) + v_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t}} \qquad \text{Aplicando Condições Iniciais} \tag{1.1.5}$$

$$\boxed{v_C(t) = 10(1 - e^{-\frac{1}{2}t})} \tag{1.1.6}$$

Equação acima será modelada em Matlab através do seguinte algoritmo:

```
%%======================================================================
%%                    Configuration
%%======================================================================

clc
clear
close all

%%======================================================================
%%                    Main Code
%%======================================================================

Vin = 10            %% Inicial Coltage
R   = 1*10^(3)      %% Resistence
C   = 2000*10^(-6)  %% Capacitance

t0 = linspace(0,10,10000);
y0 = Vin*(1 - e.^(-(1/(R*C)).*t0));


LW = 2;     %Line Width
FS = 20;    %Font Size

plot(t0, y0, 'linewidth', LW, 'b')

xlabel("X", "fontsize",FS); %Legend X
ylabel("Y", "fontsize",FS); %Legend Y

axis ([0 10 0 10]); grid; set(gca , "fontsize", FS); %Format

legend("VC", "location", "southeast") %Legend Data
```

Isso trará o seguinte resultado:

es601_ex01_im03.png

Figura 1.4: Gráfico Analítico no Matlab

Nota-se que o gráfico é, como esperado, semelhante ao obtido através da simulação no Simulink. Desta forma, os métodos de solução são igualmente eficazes para descrever o comportamento da tensão no capacitor.