MA327 - Álgebra Linear

Resumo Teórico

1 de abril de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

Conteúdo

1. Matrizes

1.1. Matriz Inversa

Definição Uma matriz quadrada A_n será inversível se houver uma única matriz quadrada B_n que satisfaz a operação abaixo, onde I_n será a matriz identidade quadrada de tamanho n:

$$\boxed{A \times B = I}$$

Propriedade Considerando que uma matriz A é inversível e que $B = A^{-1}$ temos que:

1. Se A e B são inversíveis o produto AB também seré inversível;

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

2. Transposição e Inversão são comutativos;

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$$

1.2. Operações Elementares

1. **Permutação** da *i-ésina* linha pela *j-ésima* linha;

$$l_i \leftrightarrow lj$$

2. **Multiplicação** da *i-ésima* linha por um escalar $\lambda \neq 0$;

$$l_i = l_i \cdot \lambda$$

3. **Substituição** da *i-ésima* linha pela soma da *i-ésima* linha com a *j-ésima* linha multiplicada por λ;

$$l_i = l_i + l_j \cdot \lambda$$

Definição Sejam A_n e B_n, dizemos que A e B serão equivalentes se B é obtida de A através de operações elementares.

Definição Dada uma matriz $A_{m\times n}$ e R, a forma escada de A, definimos o *Posto* de A como sendo o N^o de linhas não nulas de R. Detona-se o posto de A por $p(A)$.

Definição Dada uma matriz $A_{m\times n}$, com seus elementos denotados por $A = [a_{ij}]$ está será anti-simétrica se $A^T = -A$.

1.3. Sistemas Lineares

Definição Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ e $y_1, \cdots, y_n$ escalares então um *Sistema Linear* com n-equações e n-incógnitas é dada pela família:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & y_2 \\ & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & y_n \end{cases}$$

Classificação Sistemas, em alguns casos, permitem interpretações geométricas, pois as soluções podem representam a intersecção das equações.

1. O *Sistema Possível e Determinado* representam equações com solução única;
2. O *Sistema Possível e Indeterminado* representam equações com infinitas soluções;
3. O *Sistema Impossível* representam equações que não apresentam solução;

Teorema Seja $A_{m\times n}$, $Y_{m\times 1}$ e $X_{1\times n}$ então:

1. O *Sistema Possível e Determinado* se $p([A|Y]) = p(A) = n$
2. O *Sistema Possível e Indeterminado* se $p([A|Y]) = p(A) < n$
3. O *Sistema Impossível* se $p(A) < p([A|Y])$;

2. Corpos

Definição Um corpo será um conjunto $\mathbb{F}$ de elementos abritários que apresente 2 operações básicas, normalmente referidas como a soma e o produto, e possua as propriedades derivadas enuciadas abaixo:

1. $+$: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, usalmente soma;
   (a) Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
   (b) Comutatividade: $x + y = y + x$;
   (c) Elemento Neuro: $\exists!0 \in \mathbb{F} : x + 0 = x, x \in \mathbb{F}$;
   (d) Elemento Inverso: Dado $x \in \mathbb{F}; \exists!x \in \mathbb{F}; x + (-x) = 0$;
2. $\cdot$: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, usalmente produto;
   (a) Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
   (b) Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$;
   (c) Elemento Neutro: $\exists!1 \in \mathbb{F} : 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F}$;
   (d) Elemento Inverso: Dado $x \in \mathbb{F}; x \neq 0, \exists!x^{-1}; x \cdot (x^{-1}) = 1$;
3. Propriedade comum as operações $\forall x, y, z \in \mathbb{F}; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

3. Espaços Vetorias

Definição Considerando um conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Conjunto V não vazio;
2. Corpo $\mathbb{F}$ de escalares, usualmente os $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
3. Duas operaçõs:
   (a) Soma Vetorial: $+ : V \times V \to V$;
   (b) Multiplicação por Escalar: $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$;
4. Propriedades Internas
   (a) Associatividade: $u + (r + w) = (u + v) + w$;
   (b) Comutatividade: $u + r = r + u$;
   (c) Elemento Neutro: $\exists 0_V ; u + 0_V = u$;
   (d) Elemento Inverso: Dado $u \in \mathbb{V}; \exists - u \in \mathbb{V}; u + (-u) = 0_V$;
5. Propriedades Externas
   (a) Asso. entre Escalar e Vetor: $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$
   (b) Asso. entre Escalar e Vetor: $\alpha(\beta + u) = \alpha\beta + \alpha u$
   (c) Asso. entre Escalar e Vetor: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
   (d) Elemento Neutro: $1 \cdot u = u, \forall u \in \mathbb{V}$

Nomenclatura Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $\mathbb{V}$ é *Espaço Vetorial Real* enquanto se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ dizemos que $\mathbb{V}$ é *Espaço Vetorial Complexo*

Teorema Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$, o *Elemento Inverso* e o *Elemento Neutro* são únicos.

Teorema As seguintes equações são válidas:

1. Cancelamento: $u + v = w + v \to u = w$
2. $0_{\mathbb{F}} v = 0_{\mathbb{V}}$
3. $\alpha 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$
4. $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$
5. Se $\alpha u = 0$, então $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ ou $u = 0_V$
6. Se $\alpha u = \alpha v$ e $\alpha \neq 0_{\mathbb{F}} \to u = v$
7. Se $\alpha v = \beta v$ e $v \neq 0_{\mathbb{V}} \to \alpha = \beta$
8. $-(u + v) = -u + (-v) = -u - v$

3.1. Subespaços Vetoriais

Definição Seja $\mathbb{V}$ em espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um *Subespaço Vetorial* de $\mathbb{V}$ é um conjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ dotado das seguintes propriedades:

1. O subespaço vetorial não poderá ser vazio;
2. O subespaço vetorial V deve ser fechado para soma;
3. O subespaço vetorial V deve ser fechado para multiplicação por escalar;

Teorema Um subconjunto $\mathbb{W}$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}$ se, e somente se:

$$\alpha u + \beta v \in \mathbb{W}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

$$\forall v, u \in \mathbb{W}$$

4. Combinação Linear

Definição Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que $u \in V$ será *Combinação Linear* de $v_1, \dots, v_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha n \in \mathbb{F}$;

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Seja $S = v_1, \dots, v_n$ o subconjunto $u \in V; u = \alpha_1, v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{F}$ é um subespaço vetorial de V, denominado *Subespaço Gerado* por S. O cojunto S é dito ser os *Geradores*, ou *Sistema de Geradores*. O conjunto denotado é representado por:

$$\boxed{[S]; \quad [v_1, \dots v_n]; \quad \langle S \rangle}$$

Definição Dizemos que um espaço vetorial V é *Finitamente Gerado* se existe $S = v_1, \dots, v_n \subset V$ tal que $V = [S]$.

4.1. Soma e Intersecção de Subespaços

Teorema 1 Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e U, W subespaços de U. Então o conjunto $U \cap W = \{v \in V : v \in U, v \in W\}$ é um subespaço vetorial.

Corolário A interseção de uma coleção arbritária de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

Teorema 2 Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e U, W subespaços vetoriais. O conjunto $V = U + W$ definido como $\{v \in V$ onde $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$ tal que $v = u + w\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{F}$.

Definição O conjunto $U + W$ acima é denominado como *Soma de U e W*. A soma de $U + W$ é dita *Soma Direta* se $U \cap W = 0_v$, representada por:

$$\boxed{U \oplus W}$$

Proposição Sejam U, W subespaços vetoriais de V. Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo $v \in V$ tem decomposição $v = u + w$ tais que $u \in U$ e $w \in W$ única.

Definição Considerando S_U e S_V como os sistemas de geradores de U e V, respectivamente, então o conjunto definido por $U + V$ terá $[S_U \cup S_V]$ como sistema de geradores.

5. Dependência e Independência Linear

Definição Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $S = u_1, \dots, u_n \subset V$. Dizemos que S é *Linearmente Independente* se a combinação linear:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V$$

Onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ implica que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}}$$

Dizemos que S é *Linearmente Dependente* se não é linearmente independente, ou seja, existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ não nulos tais que:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V$$

Propriedades Sejam $S = u_1, \dots, u_n$ conjunto finito em V, então temos que:

1. Todo conjunto que contém um subconjunto LD será LD;
2. Todo subconjunto de um conjunto LI será LI;
3. Todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é LD;
4. Um conjunto será LI se, e somente se, todos os seus subconjuntos forem LI;
5. O conjunto vazio é considerado LI;

Teorema 1 Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $S = u_1, \dots, u_n \subset V$. Então S é linearmente dependente se, e somente se, um elemento de S for combinação linear dos demais.

Teorema 2 Sejam $f_1, \dots, f_n \in C^n([a,b])$, então o conjunto $S = \{f_1, \dots, f_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$ onde o Wronskiano é dado por:

$$\boxed{W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1^1(x) & f_2^1(x) & \cdots & f_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \cdots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = 0, \qquad \forall x \in [a,b]}$$

5.1. Bases e Dimensão

Definição Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Uma base de V é um conjunto de elementos linearmente independentes que gera V.

Teorema 2.2 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Se V é gerado por $S = \{u_1, \dots, u_n\}$, então podemos extrair uma base de S.

Teorema 2.3 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado $S = \{u_1, \dots, u_n\}$. Então, todo conjunto linearmente independente de V é finito e tem no máximo n elementos.

Definição Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ é dito ter *Dimensões Finita* se possui uma base finita. A *Dimensão* de V, denotada por $dim(V)$, é por definição o número de elementos de uma base de V.

Teorema 2.4 Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Se $s \subset V$ é um subconjunto linearmente independente finito, então s é parte de uma base de V.

Definição Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e U, W sejam subconjuntos do espaço V. A dimensão da soma pode ser obtida através da seguinte relação:

$$\boxed{dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)}$$

6. Mudança de Coordenadas

Definição Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de um espaço vetorial $\mathbb{V}$, a *Matriz de Coordenadas* de $v \cap V$, se e somente se $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, será:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1 Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre uma base $\mathbb{F}$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de $\mathbb{V}$. Então existe uma **única** matriz $P = M_n(\mathbb{F})$, inversível como consequência da reciprocidade, tal que:

1. $[v]_\gamma = P \cdot [v]_\beta$
2. $[v]_\beta = P^{-1} \cdot [v]_\gamma$

Definição Sejaqm V e W espaços vetorias sobre $\mathbb{F}$ com dimensão finita. Se $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$ formam bases de V e W respectivamente então a *Matriz Mudança de Base* será definida, onde $[w_i]_\alpha$ são vetores da base β escritos na base α, como:

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} | & & | \\ [w_1]_\alpha & \cdots & [w_n]_\alpha \\ | & & | \end{bmatrix}$$

6.1. Transformações Lineares

Definição Dizemos que uma função $T : V \to W$, onde V e W são espaços vetorias sobre $\mathbb{F}$, será *Transformação Linear* se não influenciar as propriedades básicas de espações vetorias descritos a seguir $\forall v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$:

1. Fechado para soma: $T(v + w) = T(v) + T(w)$;
2. Fechado para multiplicação por escalar: $T(\lambda v) = \lambda T(v)$;
3. Distributiva: $T(av + bw) = aT(v) + bT(w)$;

Propriedades Consequentemente temos que $\forall v_1, \ldots, v_n \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$

1. $T(0_v) = 0_w$;
2. $T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)$;

Necessário resaltar que uma transformação será linear se $T(0_v) = 0_w$, entretanto isso não implica que se $T(v) = 0_w$ então $v = 0_v$.

Transformações Usuais Considere $\mathbb{R}^2$ como espaço vetorial. Então as seguintes transformações serão lineares:

1. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $T_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ então $T_\lambda(x_\lambda, y_\lambda) = \lambda(x, y)$ será dita *Produto por Escalar*;
   (a) Se $\lambda > 1$ então T_λ realiza uma *Expansão*;
   (b) Se $0 < \lambda < 1$ então T_λ realiza uma *Contração*;
   (c) Se $-1 < \lambda < 0$ então T_λ realiza uma *Contração com Reversão*;
   (d) Se $\lambda < -1$ então T_λ realiza uma *Expansão com Reversão*;
2. A transformação $I_v : V \to V$ dada por $I_v(w) = w$ será a operação *Identidade*;
3. A transformação $I_v : V \to V$ dada por $T(v) = 0_V$ será a operação *Nula*;
4. Dado $c = \{c_1, \ldots, c_n\} \in \mathbb{R}^n$ conjunto fixo, então $T_c(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ será dita *Produto Escalar* de x por c;

Teorema Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ com $dim(V) = n$. Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base ordenada de V e $w_1, \ldots, w_n \in W$ são elementos arbitrários, então existe uma *única* transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

7. Transformações

7.1. Núcleo

Definição Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre subsespaços vetorias V e W então define-se o *Núcleo* como o conjunto de todos os zeros da transformação T, formalmente descrito como:

$$\boxed{Ker(T) = \{v \in V; \quad T(v) = 0_W\}}$$

Definição Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a transformação $T : V \to W$ linear então define-se a *Nulidade* de T como:

$$\boxed{dim(Ker(T))}$$

7.2. Imagem

Definição Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre subsespaços vetorias V e W então define-se a *Imagem* como o conjunto de todos os elementos de W obtidos através da transformação de um dos elementos de V, formalmente descrito como:

$$\boxed{Im(T) = \{w \in W; \quad T(v) = w\}}$$

Definição Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a transformação $T : V \to W$ linear então define-se o *Posto* de T como:

$$\boxed{dim(Im(T))}$$

7.3. Injeção

Definição Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a transformação $T : V \to W$ linear então T será *Injetora* se, e somente se, $T(u) = T(v) \iff u = v \quad \forall u, v \in V$, implicando:

1. $Ker(T) = \{0_W\}$, ou seja, $dim(Ker(T)) = 0$;

7.4. Sobrejeção

Definição Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a transformação $T : V \to W$ linear então T será *Sobrejetora* se, e somente se, $\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad T(v) = w$, implicando:

1. $Im(T) = W$, ou seja, $dim(Im(T)) = dim(W)$;

7.5. Bijeção

Definição Uma transformação $T : V \to W$ linear será um *Isomorfismo* se T for injetora e sobrejetora, isto é, *Bijetora*. Neste caso V e W são *Isomorfos*. Assim define-se a *Transformação Inversa* $T^{-1} : W \to U$ tal que $T^{-1}(w) = v \iff T(v) = w$.

Teorema Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e se a transformação linear $T : V \to W$ for um isomorfismo, então T^{-1} também será um isomorfismo.

Teorema Sejam V e W espaços vetoriass sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então V e W são isomorfos se, e somente se, $dim(V) = dim(W)$.

Teorema Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Se $dim(V) = dim(W)$, então a transformação linear $T : V \to W$ será injetora se, e somente se, for sobrejetora.

7.6. Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ onde V apresente dimensão finita. Caso $T : V \to W$ seja linear então:

$$\boxed{dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))}$$

1. Dimensão Real $\mathbb{R}^n$:
$$\boxed{dim(\mathbb{R}^n) = n}$$
2. Dimensão Complexa $\mathbb{C}^n$:
$$\boxed{dim(\mathbb{C}^n) = 2n}$$
3. Dimensão Polinomial $P_n(\mathbb{R})$:
$$\boxed{dim(P_n(\mathbb{R})) = n + 1}$$
4. Dimensão Matricial $M_n(\mathbb{R})$:
$$\boxed{dim(M_n(\mathbb{R})) = 2n}$$

Corolário Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear onde $dim(V) = dim(W)$ então T será injetora se, e somente se, for sobrejetora.

7.7. Matriz de Transformação

Definição Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ com $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente bases de V e W e $T : V \to W$ uma transformação linear unicamente determinada pelos seus valores em α, podendo ser escrita como:

$$\boxed{T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i, \text{ onde } [T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_\beta & \cdots & [v_n]_\beta \\ | & & | \end{bmatrix}}$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{F}$ e $[T]^\alpha_\beta = (a_{ij})$ representa a *Matriz de Transformação* da base α para base β de T. Assim pode-se representar a transformação, em termo de matriciais, como:

$$\boxed{[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [v]_\beta}$$

Teorema Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ com dimensão finita e α e β bases ordenadas respectivamente de V e W. Se as transformações $T, P : V \to W$ forem lineares então:

1. $[T + P]^\alpha_\beta = [T]^\alpha_\beta + [P]^\alpha_\beta$;
2. $[\lambda T]^\alpha_\beta = \lambda [T]^\alpha_\beta$;
3. Se $V = W$, então: $[I_V]^\alpha_\beta = [I_W]^\alpha_\beta$;

Teorema Sejam U, V e W espaços vetorias sobre o corpo $\mathbb{F}$ com dimensão finita e γ, β e α bases ordenadas respectivamente de U, V e W. Se as transformações $T : U \to V$ e $P : V \to W$ forem lineares então a transformação composta $P \cdot T : U \to W$ será linear e representada por:

$$\boxed{[P \circ T]^\gamma_\alpha = [P]^\beta_\alpha [T]^\gamma_\beta}$$

Corolário Sejam U e W espaços vetorias sobre o corpo $\mathbb{F}$ se $T : U \to W$ for um isomorfismo então:

$$\boxed{[T^{-1}]^\gamma_\beta = \left([T]^\beta_\gamma\right)^{-1}}$$

8. Produto Interno

Definição Seja V um espaço vetorial, apenas real ou complexo, então o *Produto Interno* será uma operação definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, caso $\mathbb{R}$, ou $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, caso $\mathbb{C}$;
2. Positividade: $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U \rightarrow \langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
3. Linearidade: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$;
4. Associatividade: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;

8.1. Produto Interno Usual

Definição Considerando os seguintes espaços vetoriais, define-se os *Produtos Internos Usuais* como as seguintes operações sobre as condições necessárias enuciadas acima:

1. Espaços Vetoriais Reais $\mathbb{R}^n$, Produto Interno Euclidiano:

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}$$

2. Espaços Vetoriais Complexos $\mathbb{C}^n$:

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}}$$

3. Espaços Vetoriais Polinomiais Continuas $C([a, b])$:

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx}$$

4. Espaços Vetoriais Matriciais $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle A, B \rangle = tr(B^T \times A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}$$

8.2. Matriz de Produto Interno

Definição Seja V um espaço vetorial, real ou complexo, com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V e seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.
Então considerando $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $u = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ pode-se definir a *Matriz do Produto Interno* com relação a base β como:

$$\boxed{\langle u, v \rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{a_1} & \cdots & \overline{a_n} \end{bmatrix}}_{[\bar{v}]_\beta{}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}}_{\mathrm{A} = [a_{ij}] = [\langle v_j, v_i \rangle]} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{[u]_\beta}, \text{ onde } [v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ e } [u]_\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

8.3. Desigualdade de Cauchy Schwarz

Definição Seja V um espaço vetorail real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, dados $u, v \in V$ teremos a seguinte desigualdade:

$$\boxed{\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \qquad |\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v|| \qquad \langle u, v \rangle^2 \leq ||u||^2 \cdot ||v||^2}$$

Em que a igualdade será possível se, e somente se, u e v forem L.D..

9. Norma

Definição Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, então sua *Norma* em V será a aplicação da seguinte transformação linear, satisfazendo as propriedades abaixo:

$$\boxed{||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+}$$

1. Positividade: $||u|| > 0$, $u \neq 0$ e $||u|| = 0 \iff u = 0$;
2. Associatividade: $||\lambda \cdot u|| = |\lambda| \cdot ||u||$, $\forall u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$;
3. Deesigualdade Triangular: $||u + v|| \geq ||u|| + ||v||$;

9.1. Normas Usuais

Definição Considerando o espaço $\mathbb{R}^n$ define-se genericamente *Norma P* como a equação abaixo, sendo usualmente utilizadas as normas descritas abaixo:

$$\boxed{||x||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad p \in \mathbb{N}_*}$$

1. Norma Infinita:
$$\boxed{||x||_\infty = max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}}$$
2. Norma Pitagórica:
$$\boxed{||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}}$$
3. Norma Unitária:
$$\boxed{||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

Teorema Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então a aplicação $\delta : V \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ será por definição uma *Norma*.

$$\boxed{||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}}$$

9.2. Distância

Definição Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ dotado de uma aplicação que satisfaça as propriedades abaixo, então esta será denominada *Métrica ou Distância* e será definida por:

$$\boxed{d : V \times V \to \mathbb{R}}$$

1. Positividade: $d(u, v) \geq 0$ com $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$;
2. Linearidade: $d(u, v) = d(v, u)$;
3. Desigualdade Triangular: $d(u, v) \geq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in V$;

Teorema Seja V um espaço vetorial normado, isto é, dotado de $||\cdot||$ em V, então a seguinte relação será uma métrica:

$$\boxed{d(u, v) = ||u - v||}$$

10. Ângulo entre Vetores

Definição Seja V um espaço vetorial com produto interno definido $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então, utilizando Cauchy-Schwarz, temos a seguinte relação:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \qquad \forall u, v \in V \text{ tais que } u \neq 0 \neq v$$

Isso implica que existe um único $\theta \in [0, \pi]$ que representa o ângulo entre dois vetores não nulos u e v e este será dado por:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}}$$

1. Ortogonalidade: Se $\langle u, v \rangle = 0$, então u e v são ortogonais e representados por $\perp$;
2. Nulidade: Se $v \perp u \quad \forall u \in V \to v = 0_V$, pois $0_V \perp v \quad \forall v \in V$;
3. Comutatividade: $u \perp v \to v \perp u$;
4. Associatividade: Se $v \perp w$ e $u \perp w$ então $v + u \perp w$
5. Linearidade: Se $v \perp u$ então $\lambda v \perp u \quad \forall \lambda \mathbb{F}$

10.1. Ortogonalidade

Definição Seja um conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, este será *Ortogonal* se cada combinação dois a dois for ortogonal, ou seja, $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ e $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \quad \forall i$, e será *Ortonormal* se for ortogonal e $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i$.

Teorema Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S seja um conjunto ortogonal, então S será L.I..

10.2. Pitágoras

Definição Se $u, v \in V$ são ortogonais, então:

$$\boxed{||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2}$$

10.3. Lei do Paralelogramo

Definição Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então a norma associada satisfaz:

$$\boxed{||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)}$$

10.4. Lei dos Cossenos

Definição Se $u \cdot u$ é norma induzida por um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então:

$$\boxed{||u \pm v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \pm 2||u|| \cdot ||v|| \cos \theta}$$

11. Base Ortogonal

Definição Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então uma base $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ será *Ortogonal*, se atender aos dois primeiros requisitos, ou *Ortonormal*, se atender a todos os resquisitos.

1. $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$;
2. $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0 \quad \forall i$;
3. $\langle v_i, v_i\rangle = 1 \quad \forall i$;

Definição Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e com base ortogonal $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ então dado $u \in V$ temos que as coordenadas de u são relacionadas a base β através dos *Coeficientes de Fourier* denotados abaixo:

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}}$$

Teorema Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e com base ortogonal $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ então dado $u \in V$ temos que as coordenadas de u são relacionadas a base β como segue:

$$\boxed{u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}v_n}$$

Definição Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então está será *Ortogonal* se suas colunas, consequentemente suas linhas pela transposição, formam conjuntos ortogonais, ou seja, $A^T = A^{-1}$.

11.1. Projeção Ortogonal

Definição Seja $S \in V$ um subespaço vetorial de dimensão finita do espaço vetorial V, também com dimensão finita, com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então a *Projeção Ortogonal* de V em S será uma transformação linear $P : V \to S$ descrita abaixo onde $\{u_1, \cdots, u_n\} \in S$ é base ortogonal:

$$\boxed{P(V) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle}u_i}$$

Pela unicidade da decomposição da soma direta o resultado dessa transformação será unicamente determinado, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $P \circ P = P$;
2. $\langle P(v), w\rangle = \langle v, P(w)\rangle$

11.2. Processo de Gram-Schmidt

Definição Considere V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja uma base $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ em V, então existe uma base ortogonal, única a menos de um escalar, $\beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ L.I. obtidos recursivamente:

$$\begin{array}{rcl}
\beta_1 & = & \alpha_1 \\
\beta_2 & = & \alpha_2 - \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1 \\
\beta_3 & = & \alpha_3 - \frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2 - \frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1 \\
& \vdots & \\
\beta_n & = & \alpha_n - \frac{\langle\alpha_n,\beta_{n-1}\rangle}{\langle\beta_{n-1},\beta_{n-1}\rangle}\beta_{n-1} - \cdots - \frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1
\end{array}$$

$$\boxed{\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle\alpha_i, \beta_j\rangle}{\langle\beta_j, \beta_j\rangle}\beta_j}$$

Corolário Todo espaço V de dimensão finita com produto interno e base ortogonal $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ admite base ortonormal β, encontrada através da ortonormalização da base α como segue:

$$\boxed{\beta = \left\{\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{||\alpha_n||_2}\right\}}$$

11.3. Complemento Ortogonal

Definição Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, define-se $S \subset V$ como um conjunto não vazio e denota-se S *Perpendicular* como o conjunto:

$$\boxed{S^{\perp} = \{v \in V; \quad \langle v, u \rangle = 0; \quad \forall u \in S\}}$$

Se S é um subespaço vetorial então $S^{\perp}$, espaço composto apenas por elementos perpendiculares aos elementos de S, será denominado *Complemento Ortogonal* de S.

Teorema Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, define-se $S \in V$ como um conjunto não vazio, temos que $S^{\perp}$ será subespaço vetorial.

Teorema Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $U, W \in V$ são subespaços, então:

$$\boxed{(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}}$$

11.4. Decomposição Ortogonal

Teorema Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, define-se $S \in V$ como subespaço de dimensão finita, então:

$$\boxed{V = S \oplus S^{\perp}}$$

Isso implica que se $U \in V$ puder ser escrito como $U = U_1 + U_2 \in S + S^{\perp}$, então:

$$\boxed{||U||^2 = ||U_1||^2 + ||U_2||^2}$$

Corolário Considerando que $dim(V) < +\infty$, então:

$$\boxed{dim(V) = dim(S) + dim(S^{\perp})}$$

Teorema Considerando que $dim(V) < +\infty$, então:

1. $(U^{\perp})^{\perp} = U$
2. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

12. Transformação Adjunta

Proposição Seja V um espaço vetorial com dimensão finita e produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $f : V \to \mathbb{F}$ linear, ou seja, f é um *Funcional Linear*, uma transformação linear de subespaço vetorial para um corpo qualquer, então existe um único $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$.

Definição Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ respectivamente. Assim a *Adjunta de T* será a única transformação $T^* : W \to V$ definida por:

$$\boxed{\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V \quad \forall v \in V \ \ \forall w \in W}$$

Se $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ são bases ortonormais de V e W respectivamente então:

1. $[T]_\gamma^\beta = [\langle T(v_j), w_i \rangle]$;
2. $[T^*]_\beta^\gamma = \left[\overline{[T]_\gamma^\beta}\right]^t$;

Propriedades

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$;
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;
3. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;
4. $(T^*)^* = T$;
5. $I^* = I$;

Teorema Toda transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos admite adjunta.

Teorema Sejam V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos complexo, caso seja real pode-se desconsiderar o asterisco, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ respectivamente e a transformação linear $T^* : W \to V$ então:

$$\boxed{Ker(T) = Im(T^*)^\perp \text{ e } V = Ker(T) \oplus Im(T^*)}$$

$$\boxed{Ker(T^*) = Im(T)^\perp \text{ e } W = Ker(T^*) \oplus Im(T)}$$

12.1. Transformações Simétricas e Hermitianas

Definição Sejam $V \in W$ espaços vetoriais reais, ou complexos, com dimensão finita, então a transformação linear $T : V \to W$ será *Simétrica*, ou *Hermitiana* se $T = T^*$, implicando:

$$\boxed{\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall v \in V \ \ \forall w \in W}$$

Teorema Seja V espaço vetoria de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja β base ortonormal de V, então a transformação linear $T : V \to V$ será simétrica, ou hermitiana, se, e somente se, a matriz $[T]_\beta^\beta$ for simétrica.

Teorema Os autovalores desta transformação são reais.

12.2. Transformações Anti-Simétricas e Anti-Hermitianas

Definição Seja V espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja β base ortonormal de V, então a transformação linear $T : V \to V$ será *Anti-Simétrica*, ou *Anti-Hermitiana*, se $T^* = -T$.

$$\boxed{\langle T(v), w \rangle = -\langle v, T(w) \rangle \quad \forall v \in V \ \ \forall w \in V}$$

Teorema Seja a transformação linear $T : V \to V$ no espaço vetorial de dimensão finita V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. T será anti-simétrica, ou anti-hermitiana, se, somente se, a matriz $[T]_\beta^\beta$ for anti-simétrica, ou anti-hermitiana, para alguma base β ortonormal.

Teorema Os autovalores desta transformação são imaginários puros.

12.3. Transformações Ortogonais

Definição Seja a transformação linear $T : V \to W$ nos espaços vetoriais U e W com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ será *Ortogonal* se o produto escalar, consequentemente o ângulo, for preservado:

$$\boxed{\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v \in V \;\; \forall w \in V}$$

Sendo notável:

1. T será isomorfismo, caso $dim(V)$ seja finita;
2. T será isometria, isto é, $||T(v)|| = ||v|| \;\; \forall v$;
3. No caso complexo: $T^* = T^{-1}$. No caso real: $T^T = T^{-1}$;

Teorema Seja a transformação linear $T : V \to V$ ortogonal se, e somente se, $[T]_\beta^\beta$ for ortogonal, se $A \times A^T$, para alguma base β ortonormal.

13. Autovalores e Autovetores

Definição Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a transformação linear $T : V \to V$, então o escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ será **Autovalor** de T se existe vetor $v \neq 0 \in V$, denominado **Autovetor** de T, tal que:

$$\boxed{T(v) = \lambda v}$$

Autovalores são solução do **Polinômio Característico** de T em uma base α qualquer, enquanto o subespaço vetorial V_λ será **Autoespaço** associado a um autovalor λ de T. Demonstrados nas seguintes equações:

$$\boxed{p(\lambda) = det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I_n) = 0} \qquad \boxed{V_\lambda = \{v \in V; \quad T(v) = \lambda v\}}$$

1. **Multiplicidade Algébrica**: Repetições de um autovalor λ de T como raíz;
2. **Multiplicidade Geométrica**: Dimensão de V_λ;5

14. Matrizes Especiais

Definição Dado $x \in \mathbb{R}^n$, então $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pode ser representado com relação a base canônica $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ por combinação linear. Desse modo, o produto interno usual será dado por:

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = \begin{bmatrix}\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_n\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Y^* X}$$

14.1. Matriz Hermitiana

Definição Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Caso A seja **Hermitiana**, ou **Auto-Adujunta**, seus autovalores são reais e seus autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então:

$\boxed{\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^* Y\rangle}$, caso A seja **Hermitiana**: $\boxed{\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle}$

Matriz **Hermitiana**: $\boxed{A = \overline{A^T}}$

14.2. Matriz Simétrica

Definição Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Caso A seja **Simétrica**, ou **Auto-Adujunta**, seus autovalores são reais e seus autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então:

$\boxed{\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^T Y\rangle}$, caso A seja **Simétrica**: $\boxed{\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle}$

Matriz **Simétrica**: $\boxed{A = A^T}$

14.3. Matriz Unitária

Definição Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Caso A seja **Unitária**, seus autovalores são $|\lambda| = 1$, pois $\det(A) = \pm 1$, e seus autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então:

$\boxed{\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle}$, caso A seja **Unitária**: $\boxed{||Ax|| = ||x||}$

Matriz **Unitária**: $\boxed{A^{-1} = \overline{A^T}}$

14.4. Matriz Ortogonal

Definição Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Caso A seja **Ortogonal**, seus autovalores são $|\lambda| = 1$, pois $\det(A) = \pm 1$, e seus autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então:

$\boxed{\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle}$, caso A seja **Ortogonal**: $\boxed{||Ax|| = ||x||}$

Matriz **Ortogonal**: $\boxed{A^{-1} = A^T}$

14.5. Matriz Idempontente

Definição Seja $A \in \mathbb{M}(\mathbb{F})$. Caso A seja **Idempotente**, seus autovalores são 0 e 1, então:

Matriz **Idempontente**: $\boxed{A \times A = A}$

14.6. Matriz Reflexiva

Definição Seja $A \in \mathbb{M}(\mathbb{F})$. Caso A seja **Reflexiva**, seus autovalores são ± 1, então:

Matriz **Reflexiva**: $\boxed{A \times A = I}$

14.7. Matriz Positiva Definida

Definição Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ Hermitiana, A será *Positiva Definida* se, e somente se, seus autovalores são todos positivos, e *Positiva Semi-Definida*, respectivamente, se:

$$\langle AX, X\rangle > 0, \quad \langle AX, X\rangle \geq 0, \qquad \forall X \neq 0 \in \mathbb{C}^n$$

14.8. Matrizes Semelhantes

Definição Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, então A e B são **Semelhantes** se $\exists P \in M_n(\mathbb{F})$ invertível tal que:

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

15. Diagonalização

Teorema Seja $A \in \mathbb{M}(\mathbb{F})$ e γ uma base ordenada de $\mathbb{F}_n$. Se T_A é a transformação linear associada à A, então:

$$\boxed{[T_A]_\alpha^\alpha = P^{-1}AP}$$

Onde P é uma matriz mudança da base γ para a base canônica β.

Teorema Seja V espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e β uma base ordenada de V. Se $T : V \to V$ é linear e $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ é uma matriz semelhante a $[T]_\beta^\beta$. Então existe base β de V tal que $[T]_\gamma^\gamma = B$.

Definição Uma transformação linear $T : V \to V$ é dita ser **Diagonalizável** se existe base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

Corolário A matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ é diagonalizável se, e somente se, T_A for diagonalizável.

Definição A matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ é dita ser **Simples** se possui um conjunto de vetores linearmente independentes. Isso ocorre se, e somente se, A for diagonalizável.

Teorema Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de T com autovetores associados $v_1, \ldots, v_n$, então $v_1, \ldots, v_n$ será linearmente independente.

Corolário Se $dim(V) < \infty$ e $T : V \to V$ uma transformação linear que possui $dim(V)$ autovalores distintos, então T será diagonalizável.

Teorema A transformação T será diagonalizável se, e somente se, V possuir base de autovetores de T se, e somente se, a soma das multiplicidades geométricas for igual a $dim(V)$.

15.1. Teorema Espectral Complexo

Definição Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz **Hermitiana**, ou seja $A = \overline{A^T}$, portanto diagonalizável, então existe uma matriz **Unitária** P, ou seja $A^{-1} = \overline{A^T}$, composta pelos autovetores de A, e uma matriz **Diagonal** D, ou seja $d_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$, composta pelos autovalores de A, tal que:

$$P^{-1}AP = D \to A = PD\overline{P^T}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ V_{\lambda_1} \\ \\ \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \\ V_{\lambda_n} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\quad \overline{V_{\lambda_1}} \quad] \\ \vdots \\ [\quad \overline{V_{\lambda_n}} \quad] \end{bmatrix}}$$

15.2. Teorema Espectral Real

Definição Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz **Simétrica**, ou seja $A = A^T$, portanto diagonalizável, então existe uma matriz **Ortogonal** P, ou seja $A^{-1} = A^T$, composta pelos autovetores de A, e uma matriz **Diagonal** D, ou seja $d_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$, composta pelos autovalores de A, tal que:

$$P^{-1}AP = D \to A = PDP^T$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ V_{\lambda_1} \\ \\ \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \\ V_{\lambda_n} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\quad V_{\lambda_1} \quad] \\ \vdots \\ [\quad V_{\lambda_n} \quad] \end{bmatrix}}$$

16. Interpretação de Autovalores e Autovetores

16.1. Classificação de Pontos Críticos

Definição Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, seus máximos ou mínimos locais podem ser determinados a partir dos pontos críticos, obtidos pela seguinte equação:

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0}$$

Estes pontos são classificados através da **Matriz Hessiana** como descrito a seguir:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad \text{onde: } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Reformulação Note que esta matriz é simétrica e, portanto, diagonalizável. Assim os resultados de autovalores e autovetores são válidos. Considerando a aproximação de Taylor para um ponto crítico (x_c, y_c) temos que:

$$f(x,y) - f(x_c,y_c) \approx \frac{1}{2}\langle H(x_c,y_c)(x,y),(x,y)\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} H(x_c,y_c) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Pontos máximos e mínimos poderão ser diferenciados pelos autovalores da matriz Hessiana. Desta maneira, estes pontos são classificados pela seguinte equação:

$$\lambda_{H(x_c,y_c)} \begin{cases} \text{Estritamente Positivos,} & \text{Ponto de Mínimo} \\ \text{Estritamente Negativos,} & \text{Ponto de Máximo} \\ \text{Positivos e Negativos,} & \text{Ponto de Cela} \end{cases}$$

16.2. Cônicas

Definição Seja um conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, representando diferente cortes de um cone por um plano. Ou seja, satisfazendo a seguinte equação:

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

Esta equação poderá ser representada matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + fI_2 = 0$$

Reformulação Nota-se que A é simétrica e, portanto, será diagonalizável. Se $\alpha = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então existe $\beta = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ tal que a seguinte expressão seja **Ortogonal**:

$$I_\beta^\alpha A I_\alpha^\beta = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Deseja-se simplificar a expressão inicial para sua equivalente rotacionada de tal forma que a equação característica seja canônica. Assim, considera-se $v \in \mathbb{R}^2$, pertencente a cônica, tal que $v = x_1 v_1 + y_1 v_2$, então:

$$[v]_\alpha = I_\alpha^\beta [v]_\beta \to \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = I_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T = \left(I_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)^T \to \boxed{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} I_\beta^\alpha}$$

Note que $I^\alpha_\beta = (I^\beta_\alpha)^{-1} = (I^\beta_\alpha)^T$, pois, como as bases α e β são ortonormais, I^α_β será ortonormal. Assim, aplicando estas substituições temos o seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} I^\alpha_\beta A I^\beta_\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} I^\beta_\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + f I_2 = 0$$

Toma-se as substituições $D = I^\alpha_\beta A I^\beta_\alpha$ e $\begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} I^\beta_\alpha$ temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + f I_2 = 0$$

Finalmente, a equação genérica das cônicas, após rotação, pode ser expressa, em função das respectivas bases e autovalores, pela seguinte equação:

$$\boxed{\lambda_1 x_1^2 + g x_1 + \lambda_2 y_1^2 + h y_1 + f = 0}$$

Casos Diferentes combinações de autovalores geram diferentes cônicas, como descrito a seguir:

1. **Autovalores** $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$:
   (a) Caso $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, a cônica será uma eclipse, sua forma degenerada; um ponto, ou vazio;
   (b) Caso $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, a cônica será uma hipérbole, sua forma degenerada; um par de retas concorrentes, ou vazio.;

   Completando quadrados:

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x_1 + \frac{g}{2\lambda_1} \right)^2}_{x_2} + \lambda_2 \underbrace{\left(y_1 + \frac{h}{2\lambda_2} \right)^2}_{y_2} + \underbrace{f - \frac{g^2}{4\lambda_1} - \frac{h^2}{4\lambda_2}}_{r} = 0$$

   Realizando as substituições acima, obtêm-se:

$$\boxed{\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + r = 0}$$

2. **Autovalores** $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$: Neste caso a cônica será uma parábola, sua forma degenerada; uma reta ou duas retas paralelas, ou vazio. Completando quadrados:

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x_1 + \frac{g}{2\lambda_1} \right)^2}_{x_2} + h \underbrace{y_1}_{y_2} + \underbrace{f - \frac{g^2}{4\lambda_1}}_{r} = 0 \qquad g \underbrace{x_1}_{x_2} + \lambda_2 \underbrace{\left(y_1 + \frac{h}{2\lambda_2} \right)^2}_{y_2} + \underbrace{f - \frac{h^2}{4\lambda_2}}_{r} = 0$$

   Realizando as substituições acima, obtêm-se:

$$\boxed{\lambda_1 x_2^2 + h y_2 + r = 0} \qquad \boxed{g x_2 + \lambda_2 y_2^2 + r = 0}$$