
ES601 - Análise Linear de Sistemas

Atividade Teórica

16 de setembro de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

1. Atividade Teórica

Apresentação Resolução das questões de Análise Linear de Sistemas por Guilherme Nunes Trofino, 217276, sobre **Sistemas de Segunda Ordem**.

Questão 1

Exercício 1.1. Considere um sistema mecânico de segunda ordem descrito pela seguinte equação:

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = u} \quad \text{onde:} \quad \begin{cases} u, & \text{Degrau Unitário de 1N} \\ m = 1 \text{ kg}, & \text{Massa} \\ k = 1000 \text{ N/m}, & \text{Constante Elástica} \\ c = 1 \text{ Ns/m}, & \text{Amortecimento} \end{cases} \quad (1.1)$$

Simule a resposta usando o Simulink com saída para `workspace` do MATLAB. Compare a resposta simulada e a resposta analítica.

Observação Utilizar a função `array` dentro do `workspace`.

Resolução. Primeiramente será necessário reescrever a equação que descreve o sistema para que a mesma possa ser representada no Simulink:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx &= u && \text{Simplificação de Notação} \\ m \ddot{x} + c \dot{x} + kx &= u && \text{Isolamento de Variável} \\ \ddot{x} &= \frac{1}{m}u - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x && \text{Equação Simplificada} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Desta forma, a Equação 1.2 será representada no Simulink com o seguinte diagrama:

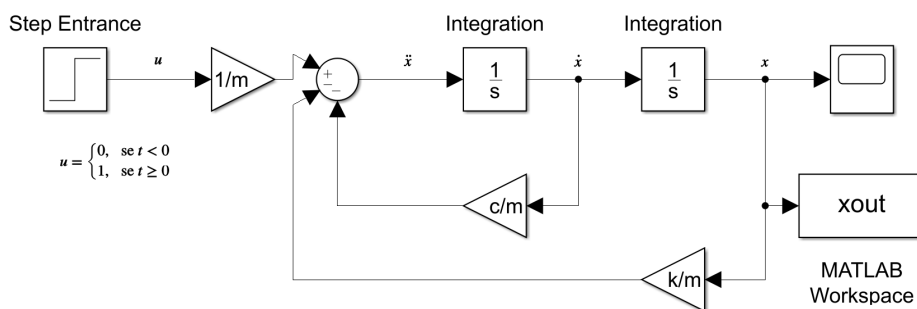


Figura 1.1: Representação da Simulação no Simulink

Realizando a simulação o seguinte gráfico será obtido:

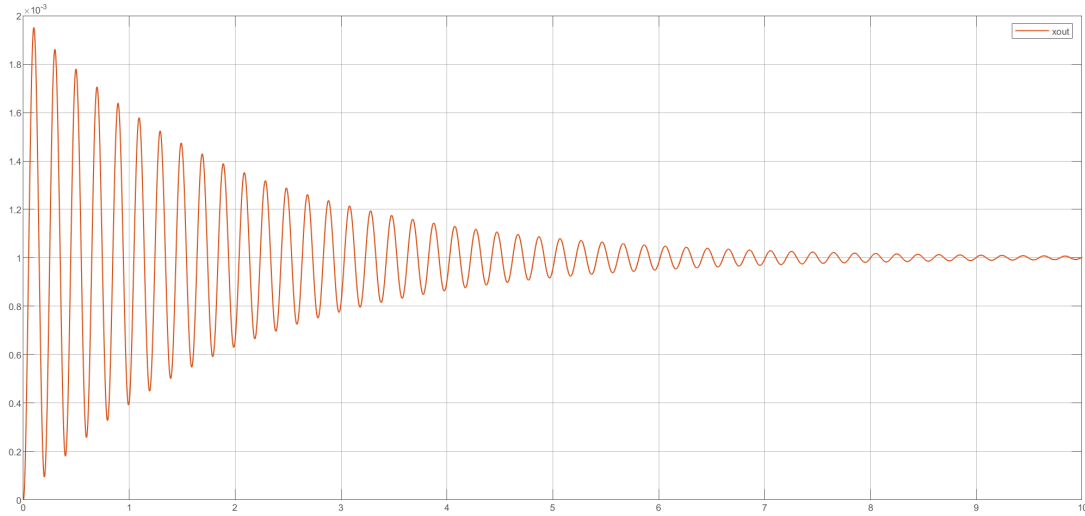


Figura 1.2: Gráfico da Simulação no Simulink

Na sequência será necessário solucionar a equação analiticamente através da **Transformada de Laplace**:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx &= u \\
 m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= u \\
 m(s^2 X - sx_0 - \dot{x}_0) + c(sX - x_0) + kX &= \frac{1}{s} \\
 X(ms^2 + cs + k) &= \frac{1}{s} + mx_0s + m\dot{x}_0 + cx_0 \\
 X &= \frac{1}{s} \frac{1}{ms^2 + cs + k} + \frac{(ms + c)x_0}{ms^2 + cs + k} + \frac{m\dot{x}_0}{ms^2 + cs + k} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Note que $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ como consequência da presença do Degrau demonstrado na sequência:

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = 0 \iff \boxed{\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0}$$

Desta forma apenas a **Solução Particular**, dependente do input, fará parte da continuação da resolução, pois a **Solução Homogênea**, dependente das condições iniciais, será nula. Aplica-se assim frações parciais:

$$\frac{1}{s} \frac{1}{(ms^2 + cs + k)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} = \begin{cases} As^2 + B^2 = 0 & \rightarrow \boxed{B = -1/b} \\ Aas + Cs = 0 & \rightarrow \boxed{C = -a/b} \\ Ab = 1 & \rightarrow \boxed{A = +1/b} \end{cases} \quad \text{onde: } a = \frac{c}{m} \text{ e } b = \frac{k}{m}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{1000} \frac{1}{s} - \frac{1}{1000} \frac{s+1}{(s^2 + 1s + 1000)} \\
 X &= \frac{1}{1000} \frac{1}{s} - \frac{1}{1000} \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 3999/4} \\
 X &= \frac{1}{1000} \frac{1}{s} - \frac{1}{1000} \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 3999/4} - \frac{1}{2000} \frac{2}{\sqrt{3999}} \frac{\sqrt{3999}/2}{(s+1/2)^2 + 3999/4} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{u(t)}{1000} - \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3999}}{2}t\right) - \frac{1}{1000\sqrt{3999}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3999}}{2}t\right)} \quad (1.5)$$

Equação acima será modelada em MATLAB através do seguinte algoritmo:

```

1 %%=====
2 %%                               Main Code
3 %%=====
4
5 m = 1;      %% Mass
6 k = 1000;   %% Elastic Constant
7 c = 1;      %% Damping Constant
8
9
10 A = c/m;
11 B = k/m;
12 C = B - 1/4;
13 D = sqrt(C);
14
15
16 t0 = linspace(0,10,10000);
17 x0 = 1/B - 1/B.*(exp(-t0./2).*cos(D.*t0)) - 1/(B*D).*exp(-t0./2).*sin(D.*t0);
18
19
20 plot(t0, x0, out.tout, out.xout, '.');
21
22
23 LW = 2;     %Line Width
24 FS = 16;    %Font Size
25
26 xlabel("t [s]", "fontsize",FS); %Legend X
27 ylabel("x [m]", "fontsize",FS); %Legend Y
28
29 axis ([0 10 0 0.002]); grid; set(gca, "fontsize", FS); %Format
30
31 legend("x_{0}", "x_{out}", "location", "southeast") %Legend Data

```

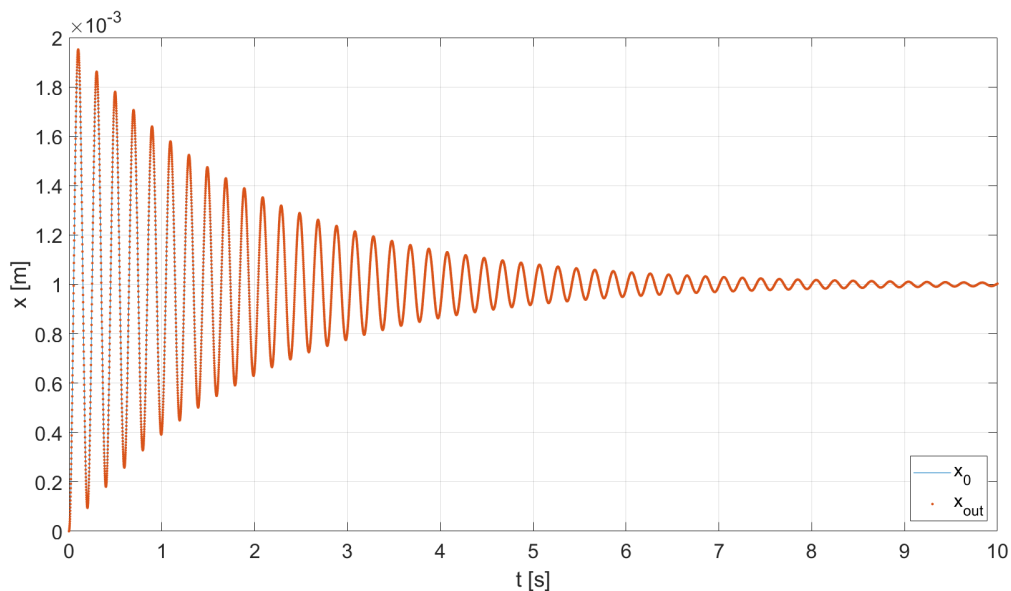


Figura 1.3: Comparação Simulação e Solução Analítica

Nota-se que há sobreposição entre a solução analítica obtida no MATLAB e a simulação realizada no Simulink demonstrando que as respostas são condizentes e adequadas.