MA311 - Cálculo III

Resumo Teórico

19 de agosto de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

Conteúdo

1. Introdução

Apresentação Neste documento será descrito as informações necessárias para compreensão e solução de exercícios relacionados a disciplina 1.0.0.0. Note que este documento são notas realizadas por Guilherme Nunes Trofino, em 19 de agosto de 2021.

2. Equações Diferenciais Ordinais, E.D.O.

Definição Família de equações construídas a partir de uma função $f(t)$ qualquer e suas derivadas como representada na seguinte equação:

$$\boxed{f(t) = b_n(t) \cdot y^n(t) + b_{n-1}(t) \cdot y^{n-1}(t) + \cdots + b_1(t) \cdot y'(t) + b_0(t) \cdot y(t)} \tag{2.0.1}$$

Onde:

1. $b_n(t)$: Representa uma função na variável t;
2. $y^n(t)$: Representa a ésima derivada da função $y(t)$;

Tais equações ocorrem com frequência durante a análise e descrita de problemas físicos, visto que várias variáveis são denotadas através da derivação ou integração de uma propriedade. Desta forma, podem-se classificá-las como descrito a seguir:

1. **E.D.O. não Linear não Homogênea de Ordem N:** Quando a função possui $b_n(t) \neq 1$ e $f(t) \neq 0$ como representado pela seguinte equação:

$$f(t) = b_n(t) \cdot y^n(t) + b_{n-1}(t) \cdot y^{n-1}(t) + \cdots + b_1(t) \cdot y'(t) + b_0(t) \cdot y(t)$$

2. **E.D.O. não Linear Homogênea de Ordem N:** Quando a função possui $b_n(t) \neq 1$ e $f(t) = 0$ como representado pela seguinte equação:

$$0 = b_n(t) \cdot y^n(t) + b_{n-1}(t) \cdot y^{n-1}(t) + \cdots + b_1(t) \cdot y'(t) + b_0(t) \cdot y(t)$$

3. **E.D.O. Linear não Homogênea de Ordem N:** Quando a função possui $b_n(t) = 1$ e $f(t) \neq 0$ como representado pela seguinte equação:

$$f(t) = 1 \cdot y^n(t) + b_{n-1}(t) \cdot y^{n-1}(t) + \cdots + b_1(t) \cdot y'(t) + b_0(t) \cdot y(t)$$

4. **E.D.O. Linear Homogênea de Ordem N:** Quando a função possui $b_n(t) = 1$ e $f(t) = 0$ como representado pela seguinte equação:

$$0 = 1 \cdot y^n(t) + b_{n-1}(t) \cdot y^{n-1}(t) + \cdots + b_1(t) \cdot y'(t) + b_0(t) \cdot y(t)$$

2.1. E.D.O.'s Lineares de 1º Ordem

Definição E.D.O.'s Lineares de 1º Ordem serão equações construídas a partir de uma função $f(t)$ qualquer e sua derivada de 1º Ordem como representada na seguinte equação:

$$\boxed{f(t) = q(t) \cdot y'(t) + p(t) \cdot y(t)} \tag{2.1.1}$$

2.1.1. Teorema da Existência e da Unicidade

Definição E.D.O.'s Lineares de 1º Ordem existirão se, e somente se, atendem as condições enunciadas a seguir. Primeiramente, considera-se as seguintes equações:

$$f(t) = \begin{cases} f(x, y(x)) = y', & \text{Equação Geral} \\ y(a) = b, & \text{Condição Inicial} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Onde:

- Se $f(x, y(x))$ é contínua em uma região R qualquer contida em R^2 então existe solução em R;
- Se $f_y(x, y(x))$ é contínua em uma região R qualquer contida em R^2 então a solução em R é única;

Caso a equação atenda a estes requisitos, então as seguintes classificações serão válidas:

2.1.2. E.D.O. Linear não Homogênea

Definição Função possui $q_n(t) = 1$ e $f(t) \neq 0$ como representado pela seguinte equação:

$$f(t) = 1 \cdot y'(t) + p(t) \cdot y(t) \tag{2.1.3}$$

Resolução E.D.O.'s Lineares e Homogêneas de 1º Ordem são solucionadas através da aplicação do `Fator Integrante` apresentado na seguinte equação:

$$\boxed{u(t) = e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}}$$

Quando este termo é apicado a equação a mesma pode ser simplificada através da derivada do produto como demonstrado a seguir:

$$\frac{\mathrm{d}[u(t) \cdot y(t)]}{\mathrm{d}t} = u(t) \cdot f(t)$$

Quando o problema valores iniciais será necessário realizar substituições para obter a constante correspondente. Consequentemente a solução de tal E.D.O. será:

$$\boxed{y(t) = \frac{\int f(t) \cdot u(t)\,\mathrm{d}t + C}{u(t)}} \tag{2.1.4}$$

2.1.3. E.D.O. Separável

Definição Função possui $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, isto é, quando x e y são variáveis separáveis em funções independentes como mostrado pela seguinte equação:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \tag{2.1.5}$$

Resolução E.D.O.'s Separáveis são diretas e consequentemente a solução será:

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx} \tag{2.1.6}$$

2.1.4. E.D.O. Exata

Definição Função $F(x, y)$ será exata quando puder ser rescrita como combinação linear de funções obtidas a partir das derivadas da função $F(x, y)$ como monstrado pela seguinte equação:

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.1.7}$$

Onde:

1. $F_x(x, y) = M(x, y)$
2. $F_y(x, y) = N(x, y)$

Resolução Caso $M_y \neq N_x$ a equação não seria exata, sendo necessário aplicar um `Fator Integrante` para torná-la exata. Há dois casos possíveis para tal fator, sendo eles:

$$u(x) \text{ ou } u(y) = \begin{cases} e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x} & \text{se depende de x;} \\ e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\,\mathrm{d}y} & \text{se depende de y;} \end{cases}$$

Caso $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, então a equação $F(x, y)$ será exata e sua solução poderá ser encontrada pela aplicação do `Fator Integrante` método que segue:

$$F(x, y) = \begin{cases} \int M(x, y)\,\mathrm{d}x = F_0(x, y) + g(y) & N(x, y) = F_{0y}(x, y) + g'(y) \\ \int N(x, y)\,\mathrm{d}y = F_0(x, y) + g(x) & M(x, y) = F_{0x}(x, y) + g'(x) \end{cases} \tag{2.1.8}$$

2.1.5. Substituição Linear

Definição Quando a função possui todos os termos, exceto $y'(x)$, em uma função separável como mostrado na seguinte equação:

$$y'(x) = F(ax + by(x) + c)$$

Substituição Caso seja separável a seguinte substituição deve ser aplicada:

$$\boxed{V(x) = ax + by(x) + c}$$

Como consequência de qualquer substituição será necessário derivá-la para encontrar $y'(x)$ em função da substituição aplicada como mostrado na equação abaixo:

$$y'(x) = \frac{V'(x) - a}{b}$$

Resolução Na sequência será necessário aplicar os resultados obtidos na equação original e resolve-la como mostrado na equação abaixo:

$$\boxed{V'(x) = bF(V(x)) + a} \tag{2.1.9}$$

2.1.6. Substituição Homogênea

Definição Quando a função possui os termos x e y descritos por quocientes como mostrado na seguinte equação:

$$y'(x) = f(\frac{y}{x})$$

Substituição Caso seja homogênea a seguinte substituição deve ser aplicada:

$$\boxed{V(x) = \frac{y}{x}} \tag{2.1.10}$$

Como consequência de qualquer substituição será necessário derivá-la para encontrar $y'(x)$ em função da substituição aplicada como mostrado na equação abaixo:

$$y'(x) = V(x) + V'(x) \cdot x$$

Resolução Na sequência será necessário aplicar os resultados obtidos na equação original e resolve-la como mostrado na equação abaixo:

$$\boxed{V(x) + V'(x)x = f(V(x))} \tag{2.1.11}$$

2.1.7. Substituição de Bernoulli

Definição Quando a função possui um termo $y^n(x)$, com $n \neq 0, 1$, multiplicando $f(x)$ como mostrado na seguinte equação:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x) \cdot y^n(x)$$

Substituição Caso seja homogênea a seguinte substituição deve ser aplicada:

$$\boxed{V(x) = y^{n-1}(x)}$$

Como consequência de qualquer substituição será necessário derivá-la para encontrar $y'(x)$ em função da substituição aplicada como mostrado na equação abaixo:

$$V'(x) = y'y^n$$

Resolução Na sequência será necessário aplicar os resultados obtidos na equação original e resolve-la como mostrado na equação abaixo:

$$\boxed{\frac{v'(x)}{1-n} + p(x)v(x) = f(x)} \tag{2.1.12}$$

3. Sequências Infinitas

Definição Funções definidas em $f : Z \to R$ onde $f(n) = a_n$, n é o índice da sequência e a_n é o n-ésimo termo da sequência. Todas as propriedades demonstradas e aprendidas em Cálculo I para Limites podem ser aplicadas no estudo de sequências.

3.1. Convergência

Definição Uma sequência, a_n, converge para L se dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $N \geq 0$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.

Exemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \to 1 \tag{3.1.1}$$

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $|\frac{n-1}{n} - 1| < \epsilon$ então $\epsilon > \frac{1}{n}$ logo $N > \frac{1}{\epsilon}$.

Toda sequência convergente é limitada, ou seja, existe K tal que $|a_n| \leq K$. Todavia uma sequência limitada não implica em convergência.

3.2. Divergência

Definição Uma sequência, a_n, diverge se dado qualquer $K > 0$ existe N tal que $a_n \geq K$ para todo $n \geq N$.

Exemplo:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \to \infty \tag{3.2.1}$$

3.3. Ordem de Crescimento

Definição Considerando duas funções quaisquer $f(n)$ e $g(n)$ pode-se analisar a rapidez de crescimento para inferir o resultado. Tomando o seguinte quociente apenas como suposição:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} 0 \\ K \neq 0 \\ \infty \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ implica que $g(n)$ tende ao infinito mais rapidamente do que $f(n)$.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K$ implica que $f(n)$ e $g(n)$ possuem a mesma ordem de crescimento.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ implica que $f(n)$ tende ao infinito mais rapidamente do que $g(n)$.

Assim sendo pode-se ordenar em ordem crescente de crescimento da principais funções, considerando $a > 1$:

$$log_a n < n^k < a^n < n! < n^n \tag{3.3.2}$$

3.4. Sequências Monótonas

Definição Sequências cujos termos podem ser comparados com apenas um símbolo serão sequências monótonas. Há subclassificações em função dos diferentes símbolos possíveis, sendo elas:

Sequências Crescentes: Sequências cujos termos podem ser comparados apenas com $<$.

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n \tag{3.4.1}$$

Sequências não Decrescentes: Sequências cujos termos podem ser comparados apenas com $\leq$.

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \tag{3.4.2}$$

Sequências Decrescentes: Sequências cujos termos podem ser comparados apenas com $>$.

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n \tag{3.4.3}$$

Sequências não Decrescentes: Sequências cujos termos podem ser comparados apenas com $\geq$.

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \tag{3.4.4}$$

3.5. Formas Indeterminadas

Definição Há expressões que não são resultados válidos, demandando manipulação. Entre as principais estão $\infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ às quais aplica-se L'Hospital. Há também $\infty - \infty$, ∞^0 e 0^∞ os quais demandam modificação da expressão. Outra forma incomum é 1^∞ o qual aplica-se e^{ln}

3.6. Séries Numéricas

Definição São consideradas séries numéricas as sequências que envolvem o somatório de uma expressão no infinito.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \tag{3.6.1}$$

Assim como na integração imprópria o infinito é uma impossibilidade, demandando a aplicação de limite tornando-a finita. Durante este processo considera-se a soma parcial, ou seja, até um número qualquer N finito.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N \tag{3.6.2}$$

Em seguida toma-se o limite de N tendendo ao infinito.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{3.6.3}$$

O limite só poderá ser calculado se a série for estritamente definida, isto é, todos os termos estejam descritos na expressão. Sendo assim, serão necessárias modificações nas exxpressões para que as mesmas estejam propriamente definidas e possam assim ser calculadas.

3.7. Séries Geométricas

Definição Serão séries geométricas aquelas em que a expressão somada é da forma x^n onde n serão os números do domínio e x será uma constante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \tag{3.7.1}$$

Há sequências, em sua maioria, em que a simples atribuição de limite não será suficiente para que a mesma possa ser solucionada. Para torná-la estritamente definida será necessário manipular a expressão da seguinte forma:

$$S_n = x + x^2 + \cdots + x^n \tag{3.7.2}$$

$$xS_n = x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} \tag{3.7.3}$$

Note que todos os termos serão comuns a ambas somas parciais com exceção do primeiro e do último, sendo assim a subtração entre tais somas eliminará todos os termos desconhecidos do somatório.

$$S_n - xS_n = x - x^{n+1} \tag{3.7.4}$$

$$S_n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \tag{3.7.5}$$

Com essa manipulação será possível isolar a soma parcial, obtendo uma série estritamente definida. Isso possibilita a aplicação do limite e consequente solução do somatório inicial.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \tag{3.7.6}$$

Consequentemente haverão quatro possibilidades a serem analisadas quanto ao valor de x que influenciarão o resultado final do somatório.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \begin{cases} \frac{x}{1-x}; |x| < 1 \\ -\infty; |x| > 1 \\ \infty; x = 1 \\ Diverge; x = -1 \end{cases} \tag{3.7.7}$$

4. Testes de Série

Como as séries possuem a noção de divergência e convergência, explicadas anteriormente, se faz necessário descobrir como se enquadra cada sequência. Para tal existem diversos testes que avaliam, sobre condições especificas, o comportamento da equação trabalhada.

4.1. Teste de Divergência

Teorema: Se a série converge então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, cuja demonstração segue:

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}, \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \tag{4.1.1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{4.1.2}$$

Note que assumindo que a série seja convergente não deve importar o fim do limite, pois calcular soma no infinito deve tender para o valor da série. Assim pode-se dizer que:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \tag{4.1.3}$$

Note que o resultado da subtração será a_n visto que os demais termos são eliminados com a subtração. Assim obtém-se o resultado:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, Converge \tag{4.1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, Diverge \tag{4.1.5}$$

4.2. Teste da Comparação

Este testes vem como consequência da comparação de limites do Cálculo I, como sequências nada mais são do que somas de finitas avaliadas no infinito o resultado pode ser estendido para o Cálculo III com os devidos ajustes.

Teorema: Sejam a_n e b_n os termos gerais de duas séries distintas tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ temos que:

Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge. Claramente se uma série com termo geral com crescimento mais acelerado converge outra série com crescimento semelhante ou inferior deve convergir.

Se $\sum a_n$ diverge então $\sum b_n$ diverge. Claramente se uma série com termo geral com crescimento menos acelerado diverge outra série com crescimento semelhante ou superior deve divergir.

4.3. Teste da Comparação do Limite

Assim como o Teste da Comparação este teste vem como consequência da comparação de limites do Cálculo I, porém este expende o resultado.

Teorema: Sejam $a_n > 0$ e $b_n > 0$ os termos gerais de duas séries distintas tais que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p \tag{4.3.1}$$

$$0 < p < \infty \tag{4.3.2}$$

Em outras palavras, as séries $\sum a_n$ e $\sum a_n$ possuem a mesma ordem de crescimento. Logo existem r e R tais que $r < p < R$ implicando em:

$$r < \frac{a_n}{b_n} < R \tag{4.3.3}$$

$$rb_n < a_n < Rb_n \tag{4.3.4}$$

Conclui-se, por meio da comparação, que:

Se $\sum Rb_n$ converge então $\sum a_n$ converge. Claramente se uma série com termo geral com crescimento mais acelerado converge outra série com crescimento semelhante ou inferior deve convergir.

Se $\sum rb_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge. Claramente se uma série com termo geral com crescimento menos acelerado diverge outra série com crescimento semelhante ou superior deve divergir.

4.4. Teste da Integral

Teorema: Considere uma função $f(x)$ decrescente e positiva, isto é $f(x) \geq 0$, com $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então temos:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergir.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se e somente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergir.

4.5. Teste da Razão

Teorema: Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $a_n > 0$ define-se L como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{4.5.1}$$

Se $L < 1$ então $\sum a_n$ converge.

Se $L > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

Note que o teorema não estabelece nenhuma conclusão para $L = 1$, assim não é possível inferir nada sobre a sequência.

4.6. Teste da Raiz

Teorema: Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $a_n > 0$ define-se L como:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = L \tag{4.6.1}$$

Se $L < 1$ então $\sum a_n$ converge.

Se $L > 1$ então $\sum a_n$ diverge.

Este teste é normalmente aplicado quando todos os termos da sequência estão elevados a n, possibilitando simplificar drasticamente a equação.

4.7. Convergência Absoluta

Definição Uma série $\sum a_n$ converge absolutamente se sua série absoluta equivalente, $\sum |a_n|$, converge.

Teorema:

4.8. Séries Alternadas

Definição Uma será alternada se seus termos possuírem sinais alternados ao longo de toda a sequência, formalmente descrito como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{4.8.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{4.8.2}$$

4.9. Teste das Séries Alternadas

Teorema: Considerando uma série alternada da forma $\sum (-1)^n a_n$ será convergente se a_n for decrescente e:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{4.9.1}$$

5. Séries de Potência

Definição Será uma série de potência aquela que puder ser representada como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_n(x-x_0)^n \tag{5.0.1}$$

Analisando o somatório nota-se como a constante é atribuída:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}x^n \tag{5.0.2}$$

Geralmente considera-se no caso geral a translação de x em x_0, entretanto pode-se, por conveniência, analisar séries dessa forma em $x_0 = 0$. Nota-se que estas funções podem ser infinitamente diferenciáveis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \tag{5.0.3}$$

5.1. Funções Analíticas

Definição Uma função $f(x)$ é analítica em $x \in J$, onde J é um intervalo simétrico aberto qualquer, se sua Série de Taylor converge em J.

O intervalo de convergência pode ser obtido pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}|x|^{n+1}}{c_n|x|^n} \tag{5.1.1}$$

$$|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{5.1.2}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}}_{I} \tag{5.1.3}$$

Segundo o teste da razão sabe-se que para $|x| \neq 0$ deve-se analisar I.

5.2. Método de Séries de Potência