ES601 - Análise Linear de Sistemas

Atividade Teórica

17 de setembro de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

1. Atividade Teórica

Apresentação Resolução das questões de Análise Linear de Sistemas por Guilherme Nunes Trofino, 217276, sobre **Sistemas de Segunda Ordem** analisados por Laplace.

Questão A

Exercício 1.1. Considere que o seguinte sistema:

$$\boxed{0.1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = u(t)} \quad \text{onde:} \quad \Big\{ y(0) = 10 \quad \text{Condição Inicial} \tag{1.1}$$

Implemente a resposta com condições iniciais nulas em Simulink usando o `Bloco de Transferência`, exporte para o MATLAB e compare com a resposta analítica.

Repita o desenvolvimento anterior considerando as condições iniciais apresentadas.

Resolução. Primeiramente será necessário rescrever a equação que descreve o sistema para que a mesma possa ser representada no Simulink:

$$
\begin{aligned}
0.1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y &= u && \text{Simplificação de Notação} \\
0.1\dot{y} + y &= u && \text{Aplicação de Laplace} \\
0.1(Ys - y_0) + Y &= \frac{1}{s} \\
Y(0.1s + 1) &= \frac{1}{s} + 0.1y_0 \\
Y(s) &= \frac{1}{s(0.1s+1)} + \frac{0.1y_0}{0.1s+1} && (1.2) \\
\boxed{Y(s) = \frac{y_0 s + 10}{s^2 + 10s}} & && (1.3)
\end{aligned}
$$

Neste ponto, para obter-se a equação de Transferência será necessário realizar a seguinte manipulação:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} && \text{onde: } X(s) = \frac{1}{s}, \text{ Impulso Aplicado} \\
\boxed{H(s) = \frac{y_0 s^2 + 10s}{s^2 + 10s}} & && (1.4)
\end{aligned}
$$

Desta forma, a Equação será representada no Simulink com o seguinte diagrama:

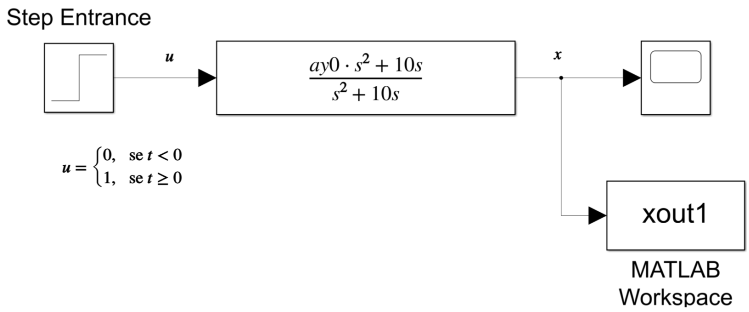

Figura 1.1: Representação da Simulação no Simulink

Realizando a simulação com condições iniciais nulas o seguinte gráfico será obtido:

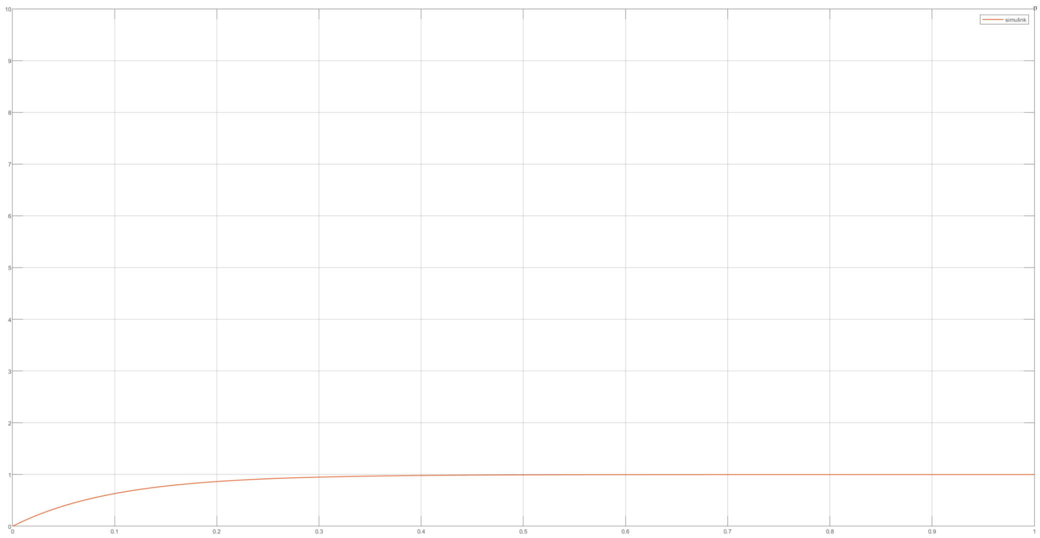

Figura 1.2: Gráfico Simulação Condições Nulas no Simulink

Realizando a simulação com condições iniciais não nulas o seguinte gráfico será obtido:

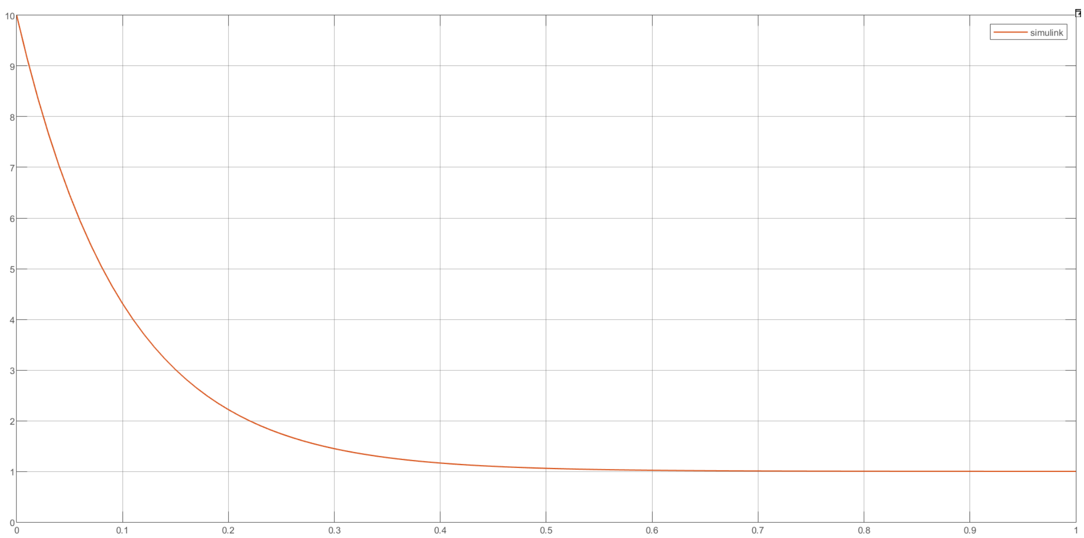

Figura 1.3: Gráfico Simulação Condições não Nulas no Simulink

Na sequência será necessário solucionar a equação analiticamente finalizando a **Transformada de Laplace**:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s(0.1s+1)} + \frac{0.1y_0}{0.1s+1} && \text{Frações Parciais de (1.2)}\\
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{0.1}{0.1s+1} + \frac{0.1y_0}{0.1s+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} + \frac{y_0}{s+10} && \text{Aplicação Inversa de Laplace}\\
y(t) &= 1u(t) - \mathrm{e}^{-10t} + y_0\mathrm{e}^{-10t} \\
&\boxed{y(t) = 1u(t) + (y_0 - 1)\mathrm{e}^{-10t}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Implementando a equação analiticamente com condições iniciais nulas o seguinte gráfico será obtido:

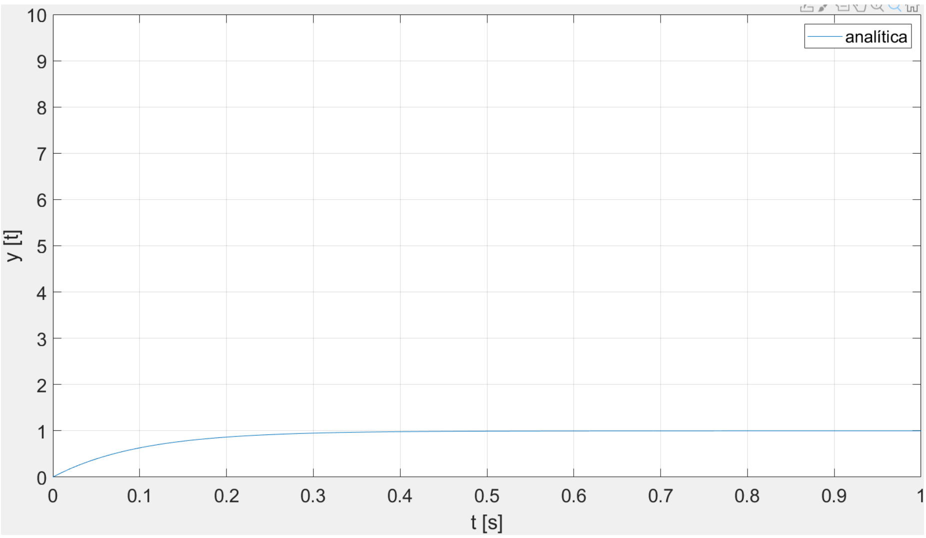

Figura 1.4: Gráfico Analítica Condições nulas no Simulink

Implementando a equação analiticamente com condições iniciais não nulas o seguinte gráfico será obtido:

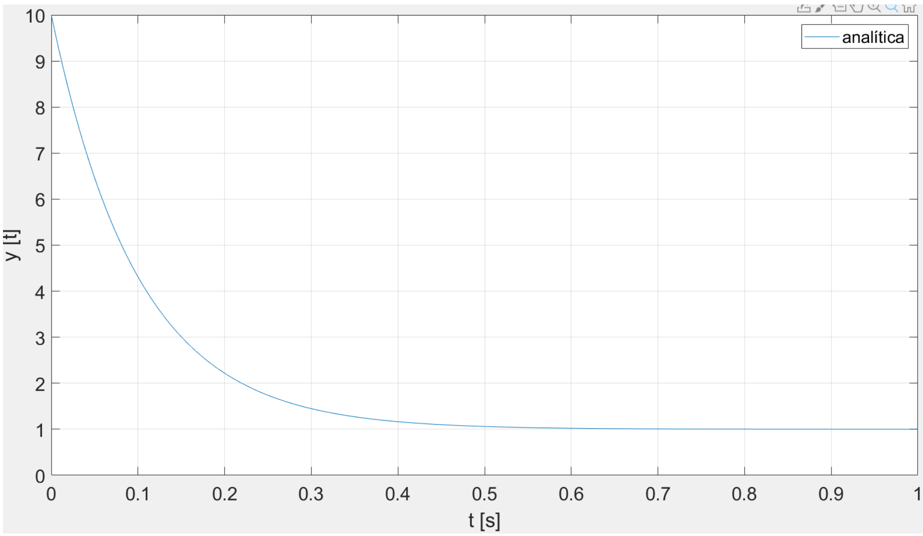

Figura 1.5: Gráfico Analítica Condições não nulas no Simulink

Equação acima será modelada em MATLAB através do seguinte algoritmo:

```matlab
%%=============================================================================
%%                          Main Code
%%=============================================================================


%%     Question A
au0 = 1;          %% Step Function

ay0 = 10;          %% Initial Conditions

ta = linspace(0,10,10000);
ya = au0 + (ay0 - 1).*exp(-10.*ta);


%%     Graphy Plot


plot(ta, ya, out.tout, out.xout1, '.')


LW = 2;      %Line Width
FS = 16;     %Font Size

xlabel("t [s]", "fontsize",FS); %Legend X
ylabel("y [t]", "fontsize",FS); %Legend Y

axis ([0  1 0 10]); grid; set(gca , "fontsize", FS); %Format

legend("analitica", "simulink", "location", "northeast") %Legend Data
```

Compara-se assim as soluções analíticas e simuladas com condições iniciais nulas através do seguinte gráfico:

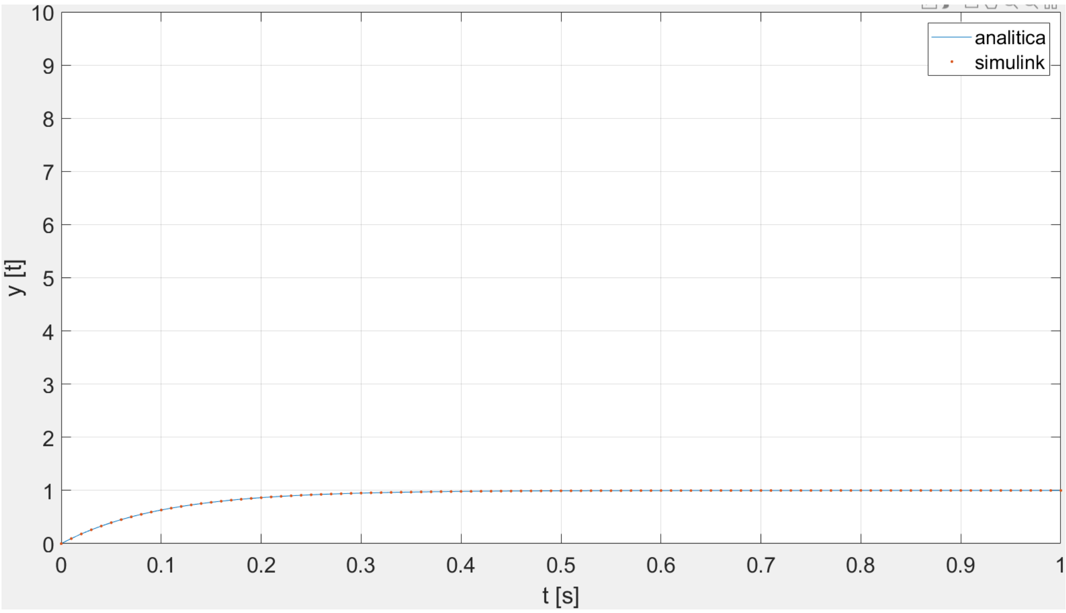

Figura 1.6: Comparação Analítica e Simulink com Condições nulas

Compara-se assim as soluções analíticas e simuladas com condições iniciais não nulas através do seguinte gráfico:

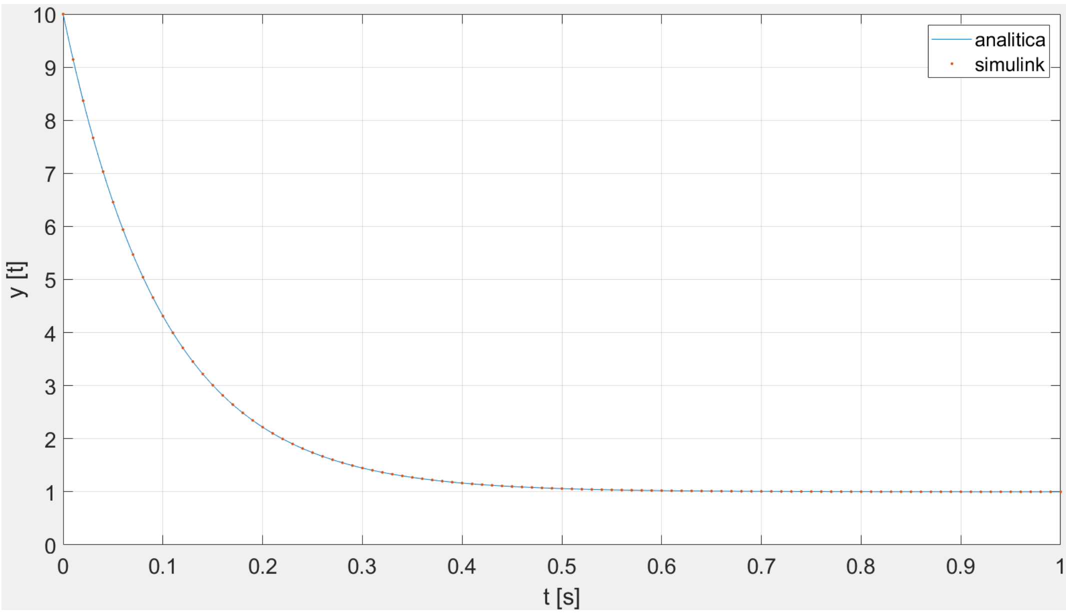

Figura 1.7: Comparação Analítica e Simulink com Condições não nulas

Questão B

Exercício 1.2. Considere que o seguinte sistema:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 20\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 10^4 y = u} \quad \text{onde:} \quad \begin{cases} y(0) = 0 & \text{Condição Inicial} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1 & \text{Condição Inicial} \end{cases} \tag{1.6}$$

Implemente a resposta com condições iniciais nulas em Simulink usando o `Bloco de Transferência`, exporte para o MATLAB e compare com a resposta analítica.

Repita o desenvolvimento anterior considerando as condições iniciais apresentadas.

Resolução. Primeiramente será necessário rescrever a equação que descreve o sistema para que a mesma possa ser representada no Simulink:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 20\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 10^4 y &= u \\ \ddot{y} + 20\dot{y} + 10^4 y &= u \\ (Ys^2 - sy_0 - y_0') + 20(Ys - y_0) + 10^4 Y &= \frac{1}{s} \\ Y(s^2 + 20s + 10^4) &= \frac{1}{s} + y_0 s + 20y_0 + y_0' \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 20s + 10^4)} + \frac{y_0 s + 20y_0 + y_0'}{(s^2 + 20s + 10^4)} \tag{1.7}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{y_0 s^2 + 20y_0 s + y_0' s + 1}{s(s^2 + 20s + 10^4)}} \tag{1.8}$$

Neste ponto, para obter-se a equação de Transferência será necessário realizar a seguinte manipulação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad \text{onde: } X(s) = \frac{1}{s}, \text{ Impulso Aplicado}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{y_0 s^2 + 20y_0 s + y_0' s + 1}{s^2 + 20s + 10^4}} \tag{1.9}$$

Desta forma, a Equação será representada no Simulink com o seguinte diagrama:

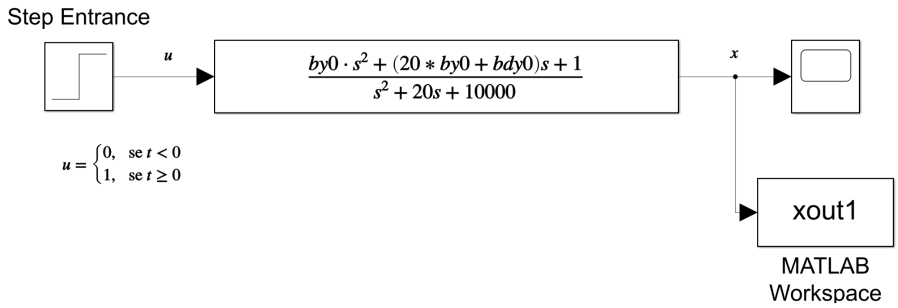

Figura 1.8: Representação da Simulação no Simulink

Realizando a simulação com condições iniciais nulas o seguinte gráfico será obtido:

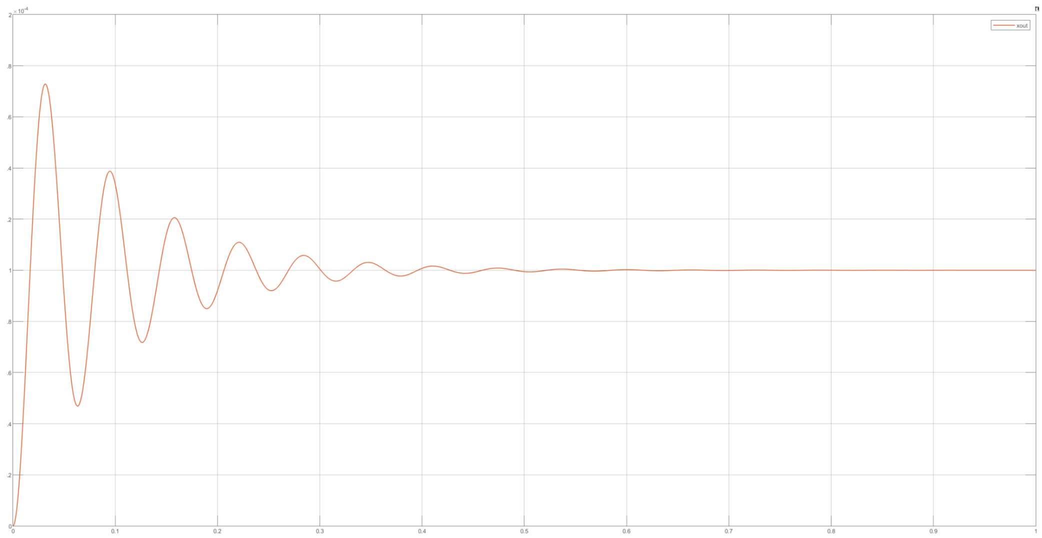

Figura 1.9: Gráfico Simulação Condições Nulas no Simulink

Realizando a simulação com condições iniciais não nulas o seguinte gráfico será obtido:

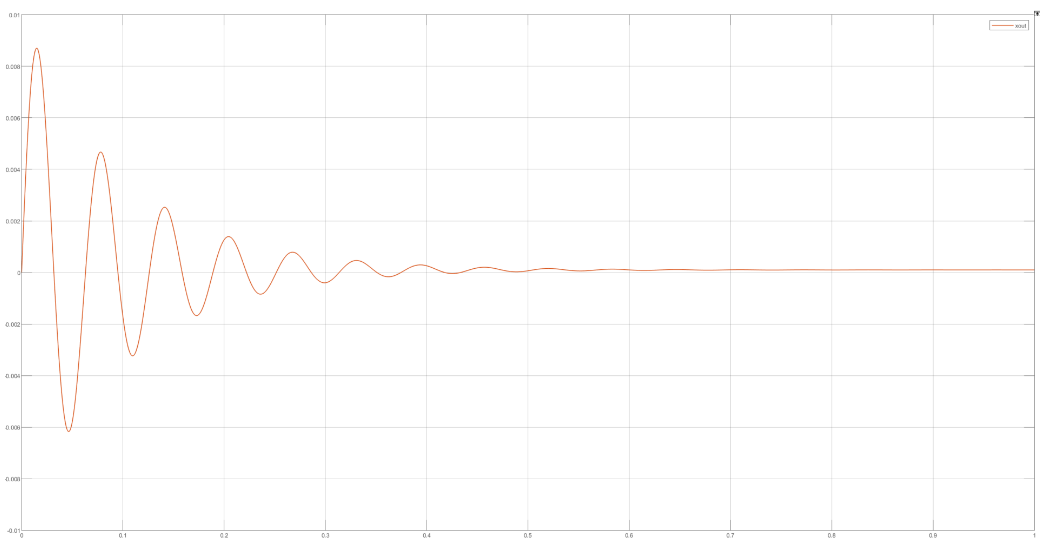

Figura 1.10: Gráfico Simulação Condições não Nulas no Simulink

Na sequência será necessário solucionar a equação analiticamente finalizando a **Transformada de Laplace** com Frações Parciais de (1.7):

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+20s+10^4)} + \frac{y_0 s + 20y_0 + y_0'}{(s^2+20s+10^4)} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+20s+10^4} = \begin{cases} As^2 + Bs^2 = 0 & \rightarrow \boxed{B = -10^{-4}} \\ 20As + Cs = 0 & \rightarrow \boxed{C = -20 \times 10^{-4}} \\ 10^4 A = 1 & \rightarrow \boxed{A = 10^{-4}} \end{cases} \\
Y(s) &= \frac{10^{-4}}{s} - 10^{-4}\frac{s+20}{s^2+20s+10^4} + y_0\frac{s+20}{s^2+20s+10^4} + y_0'\frac{1}{s^2+20s+10^4} \\
Y(s) &= \frac{10^{-4}}{s} + (y_0 - 10^{-4})\frac{s+20}{s^2+20s+10^4} + y_0'\frac{1}{s^2+20s+10^4} \\
Y(s) &= \frac{10^{-4}}{s} + (y_0 - 10^{-4})\frac{s+20}{(s+10)^2+(30\sqrt{11})^2} + y_0'\frac{1}{(s+10)^2+(30\sqrt{11})^2}
\end{aligned}
$$

Toma-se $a = 10^{-4}$ e $b = 30\sqrt{11}$:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= a\frac{1}{s} + (y_0 - a)\frac{(s+10)}{(s+10)^2+(b)^2} + \frac{10(y_0 - a) + y_0'}{b}\frac{b}{(s+10)^2+(b)^2} \\
y(t) &= au(t) + (y_0 - a)\mathrm{e}^{-10t}\cos(bt) + \frac{10(y_0 - a) + y_0'}{b}\mathrm{e}^{-10t}\sin(bt) \\
&\boxed{y(t) = 10^{-4}u(t) + (y_0 - 10^{-4})\mathrm{e}^{-10t}\cos(30\sqrt{11}t) + \frac{10(y_0 - 10^{-4}) + y_0'}{30\sqrt{11}}\mathrm{e}^{-10t}\sin(30\sqrt{11}t)} \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Implementando a equação analiticamente com condições iniciais nulas o seguinte gráfico será obtido:

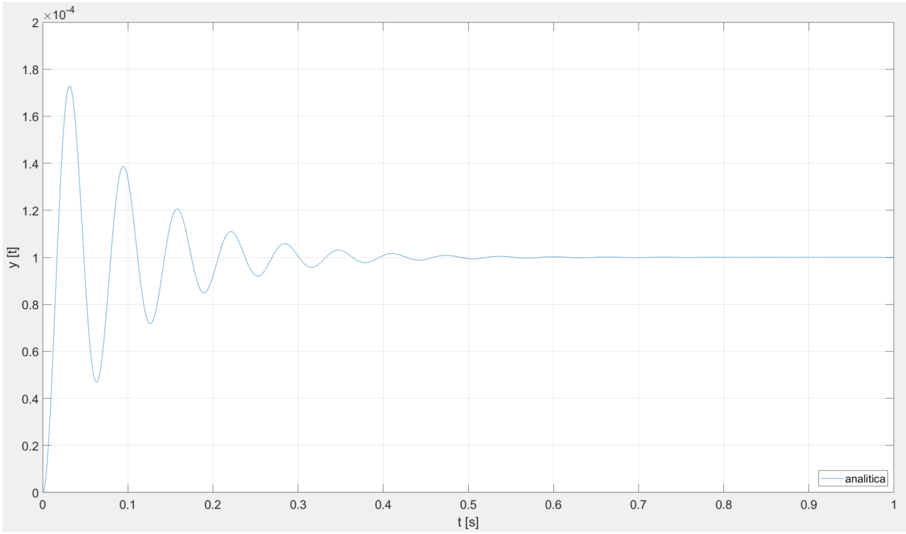

Figura 1.11: Gráfico Analítica Condições nulas no Simulink

Implementando a equação analiticamente com condições iniciais não nulas o seguinte gráfico será obtido:

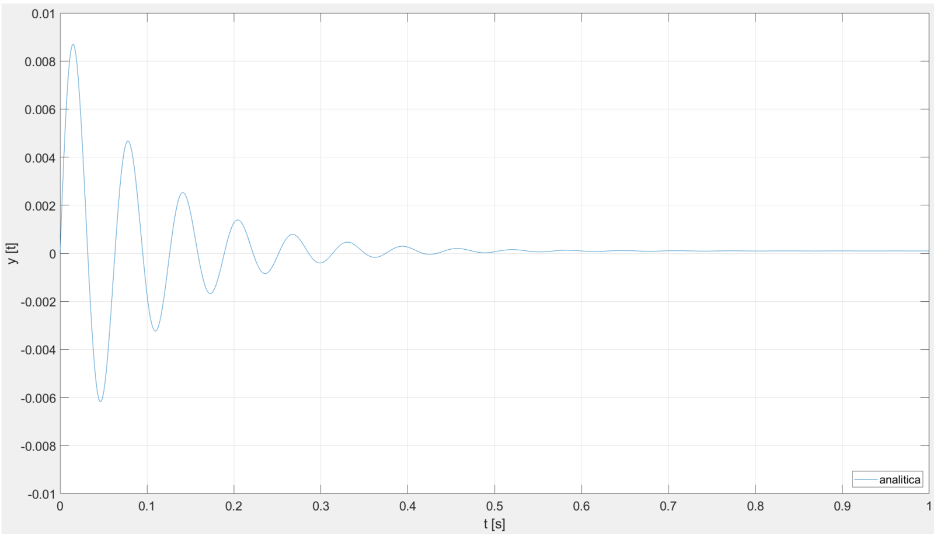

Figura 1.12: Gráfico Analítica Condições não nulas no Simulink

Equação acima será modelada em MATLAB através do seguinte algoritmo:

```
%%==============================================================================
%%                        Main Code
%%==============================================================================


%%     Question B
bu0 = 1;          %% Step Function

ba = 1/10000;     %% Constants
bb = 30*sqrt(11);

by0  = 0;         %% Initial Conditions
bdy0 = 1;

tb = linspace(0,10,10000);
yb = ba*bu0 + (by0 - ba).*exp(-10.*tb).*cos(bb.*tb) + (10.*by0 + bdy0 -
    10.*ba)./bb.*exp(-10.*tb).*sin(bb.*tb);


%%     Graphy Plot


plot(tb, yb, out.tout, out.xout1, '.')


LW = 2;      %Line Width
FS = 16;     %Font Size

xlabel("t [s]", "fontsize",FS); %Legend X
ylabel("y [t]", "fontsize",FS); %Legend Y

axis ([0  1 0 0.0002]); grid; set(gca , "fontsize", FS); %Format

legend("analitica", "simulink", "location", "southeast") %Legend Data
```

Compara-se assim as soluções analíticas e simuladas com condições iniciais nulas através do seguinte gráfico:

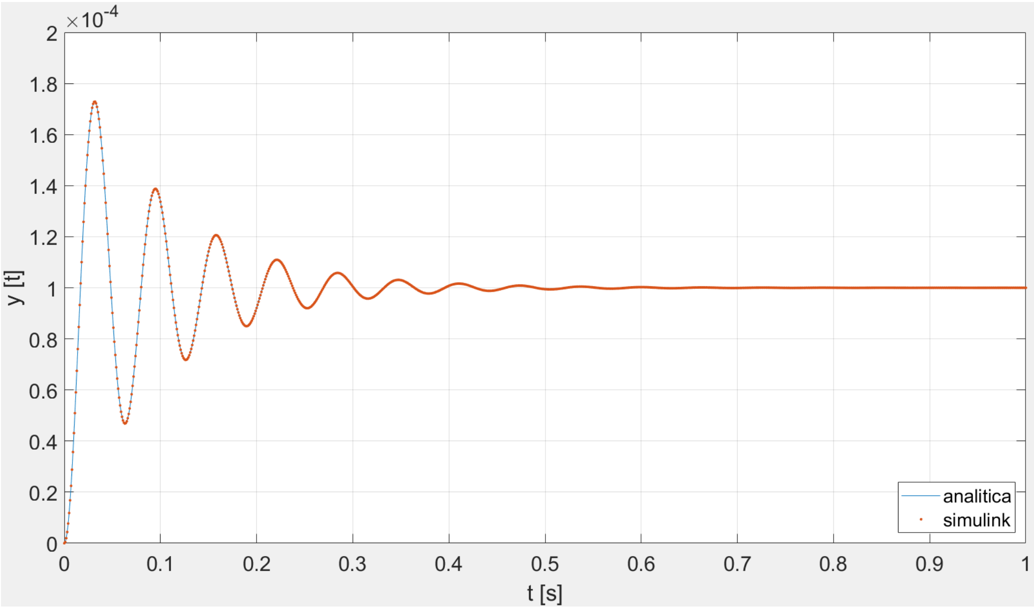

Figura 1.13: Comparação Analítica e Simulink com Condições nulas

Compara-se assim as soluções analíticas e simuladas com condições iniciais não nulas através do seguinte gráfico:

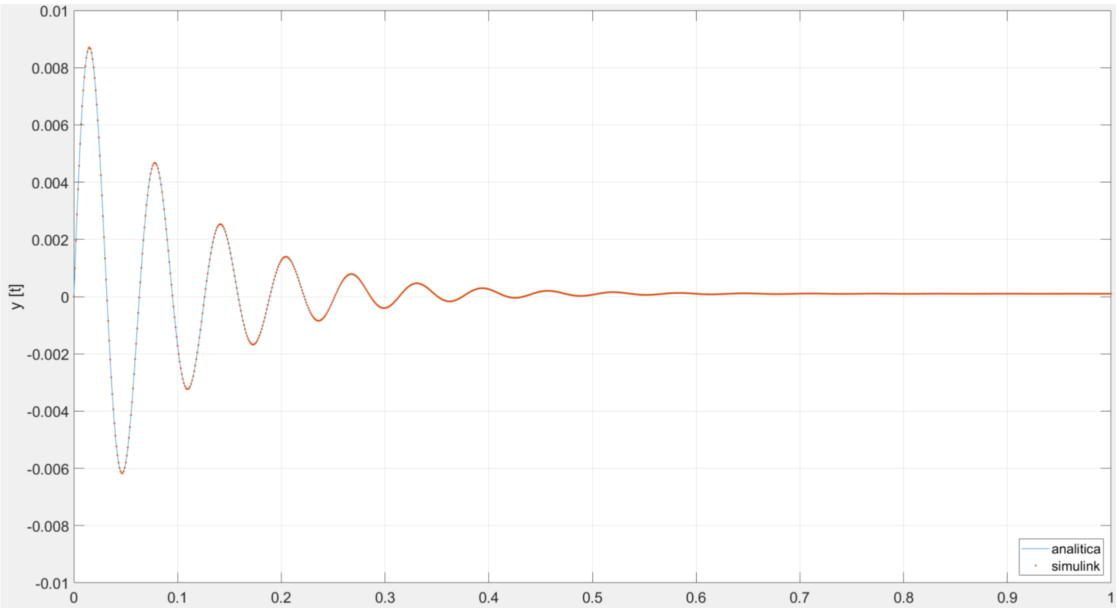

Figura 1.14: Comparação Analítica e Simulink com Condições não nulas