EA611 - Circuitos II

Resumo Teórico

12 de setembro de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

Conteúdo

1. Introdução

Apresentação Neste documento será descrito as informações necessárias para compreensão e solução de exercícios relacionados a disciplina Note que este documento são notas realizadas por em 12 de setembro de 2021.

1.1. Transformada de Laplace

Definição Conversão de uma equação diferencial em equação algébrica e uma convolução em multiplicação. Formalmente descrita pelas seguintes equações:

Forma Bilateral:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{B}\{f(t)\} := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; \mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

Forma Unilateral:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_{0}^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; \mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

Note que a forma `Unilateral` será um caso particular da `Bilateral`. Além disso, no estudo de circuitos elétricos será conveniente a adoção do domínio dos complexos para análise. Assim $s = \sigma + \omega \mathrm{j}$ onde j será a **Unidade Imaginária**, evitando confusão com **Corrente Elétrica** causada pela notação matemática canónica.

Transformações A seguir encontram-se as principais transformações pela definição `Unilateral` necessárias:

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
Degrau Unitário	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Impulso Unitário	$\delta(t)$	1
	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{(s^2+a^2)}$
	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)+a\sin(b)}{(s^2+a^2)}$
Seno Hiperbólico	$\sinh(at)$	$\frac{a}{(s^2-a^2)}$
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)}$
	$e^{at}\;\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
	$e^{at}\;\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
Convolução	$\int_0^t f(\varphi)\; g(t-\varphi)\mathrm{d}\varphi$	$F(s)\cdot G(s)$
Integral	$\int_0^t f(\varphi)\; u(t-\varphi)\mathrm{d}\varphi$	$\frac{F(s)}{s}$
Derivada	$\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}$	$s\cdot F(s)$
Frequência	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Temporal	$f(t-\tau)\mu(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$

Tabela 1.1: Tabela de Transformadas de Laplace

Conside que as funções **Trigonométricas Hiperbólicas** são definidas pelas equações abaixo:

$$\boxed{\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}} \qquad \boxed{\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}} \tag{1.3}$$

1.1.1. Degrau Unitário

Definição Representação de descontinuidade unitária, normalmente utilizada para representar mudanças instantâneas em sistemas. Formalmente descrita pela seguinte equação:

$$\boxed{u(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{2}, & x = a; \\ 1, & x > a; \end{cases}} \tag{1.4}$$

1.1.2. Impulso Unitário

Definição Distribuição infinita no ponto zero e nula no restante da reta. Formalmente descrita pela seguinte equação:

$$\boxed{\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0; \end{cases}} \tag{1.5}$$

Obedecendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1 \quad \text{e} \quad \boxed{\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} f(\tau); & \text{se } \tau \in [a,b] \\ 0; & \text{se } \tau \notin [a,b] \end{cases}}$$

Aplica-se o impulso unitário para se extrair uma **Amostra** do valor de uma função em um determinado ponto.

1.1.3. Transformada da Deriva

Definição Quando aplicada em uma derivada de ordem n será necessário utilizar da recursão e integração por partes, obtendo a seguinte equação geral:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^n}\right\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \cdots - s \cdot f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)} \tag{1.6}$$

1.2. Transformada de Componentes

Definição Substituir as equações que descrevem cada componente empregado em um circuito através de seu equivalente em **Laplace** simplificará os cálculos e poderá integrar suas condições iniciais na análise. Nesta transformação o circuito resultante será puramente resistivo e obedecerá às **Leis de Kirchhoff**.

	Equação Geral	Equação Laplace
Resistor	$v_R(t) = R\ i_R(t)$	$V_R(s) = R\ I_R(s)$
Capacitor	$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\ \mathrm{d}t + v_C(0)$	$V_C(s) = \frac{1}{sC}\ I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$
Indutor	$v_L(t) = L\ \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$	$V_L(s) = sL\ I_L(s) - L\ I_L(0)$

Tabela 1.2: Transformadas de Laplace de Componentes

1.3. Função de Rede

Definição Simplificação dos circuitos de tal forma que análise seja facilitada pela utilização de suas entradas e de suas saídas sempre presupondo que as condições iniciais nulas obtidas pelas seguintes equações:

$$\boxed{H(s) = \frac{I(s)}{V(s)}} \tag{1.7}$$

Onde:

1. $V(s)$, **Entrada:** Tensão de Entrada;
2. $I(s)$, **Saída:** Saída de Corrente;

2. Circuitos Periódicos

Definição Circuitos que são submetidos a sinais de tensão senoidais normalmente presentes em sistemas de potência elétrica com corrente alternada que será representada pela seguinte equação:

$$\boxed{v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)} \tag{2.1}$$

Onde:

1. **Amplitude:** V_M, Representa a `Tensão Máxima` do sinal;
2. **Ciclo:** Características da equação:
   (a) `Frequência:` ω, Representa a quantidade de `Oscilações` por intervalo de tempo;
   (b) `Período:` T, Representa o tempo para realizar uma `Oscilação` do sinal;
3. **Fase:** Indica a defasagem do sinal representada por φ;

2.1. Fasores

Definição Conversão de equações periódicas em **Equações Fasoriais**, isto é, equações que envolvam números complexos para representar um comportamento periódico como descrito pela seguinte equação:

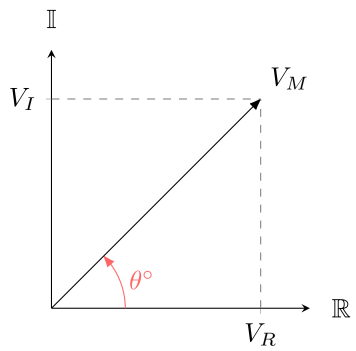

Figura 2.1: Represenação Fasores

$$\boxed{V(t) := V_M \underline{/\theta°}} \tag{2.2}$$

Onde:

1. **Módulo:** V_M, Representa a `Tensão Máxima` do sinal obtido pela seguinte equação:

   $$\boxed{V_M = \sqrt{V_{\mathrm{I}}^2 + V_{\mathrm{R}}^2}}$$

   Onde:

   (a) `Parcela Imaginária:` V_{I};
   (b) `Parcela Real:` V_{R};
2. **Ciclo:** Características da equação:
   (a) `Frequência:` ω, Constante a todos os componentes do circuito;
3. **Fase:** Indica a defasagem do sinal representada por θ obtido pela seguinte equação:

   $$\boxed{\theta° = \tan^{-1}\left(\frac{V_{\mathrm{I}}}{V_{\mathrm{R}}}\right)} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \theta < 0, & \texttt{Atrasado}, \text{ Fase Capacitiva} \\ \theta > 0, & \texttt{Adiantado}, \text{ Fase Indutiva} \end{cases}$$

2.1.1. Multiplicação

Definição Seja $V_1(t) = V_1\angle\theta_1^\circ$ e $V_2(t) = V_2\angle\theta_2^\circ$ então a multiplicação será obtida pela seguinte equação:

$$\boxed{V_1(t) \cdot V_2(t) = (V_1 \cdot V_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)^\circ} \tag{2.3}$$

2.1.2. Divisão

Definição Seja $V_1(t) = V_1\angle\theta_1^\circ$ e $V_2(t) = V_2\angle\theta_2^\circ$ então a multiplicação será obtida pela seguinte equação:

$$\boxed{\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \frac{V_1}{V_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)^\circ} \tag{2.4}$$

2.2. Transformada de Componentes

Definição Substituir as equações que descrevem cada componente empregada em um **Circuito Periódico** através apenas de sua amplitude e sua fase. Nesta transformação o circuito resultante será puramente resistivo com componentes reais e imaginárias e obedecerá às **Leis de Kirchhoff**.

	Equação Periódica	Equação Fasorial
Resistor	$v_R(t) = R\, i_R(t)$	$V_R(t) = R\, I_R(t)$
Capacitor	$i_C(t) = C\, \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$	$V_C(t) = \frac{1}{j\omega C}\, I_C(t)$
Indutor	$v_L(t) = L\, \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$	$V_L(s) = j\omega L\, I_L(t)$

Tabela 2.1: Transformadas de Fasorial de Componentes

2.3. Potência

Definição Seja um sistema com uma fonte $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e $i(t) = I_M \cos(\omega t)$ então a potência instantânea será dada pela seguinte equação:

$$p(t) = R\, i(t)^2 = R\, I_M^2 \cos^2(\omega t) = \boxed{\frac{RI_M^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))} \tag{2.5}$$

Nota-se que a potência instantânea oscila com o dobro da frequência em torno de um valor constante.

2.3.1. Potência Média

Definição Potência fornecida durante um ciclo T de oscilação da equação periódica obtida pela seguinte equação:

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t)\; \mathrm{d}t = \boxed{\frac{V_M\; I_M}{2}\cos(\theta)} \tag{2.6}$$

Onde:

1. **Fase da Carga:** θ, Representando o impedância geral pelo componente analísado:

$$\theta = \begin{cases} -90^\circ, & \text{se carga Capacitiva} \\ 0^\circ, & \text{se carga Resistiva} \\ +90^\circ, & \text{se carga Indutiva} \end{cases}$$

Desta forma define-se como valores eficazes de sinais periódicas os valores necessários em sinais contínuos para que haja a mesma entrega de potência média em um resistor obtidos pela seguinte equação:

$$\boxed{V_{\text{ef}} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{I_{\text{ef}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}} \tag{2.7}$$

2.3.2. Potência Complexa

Definição Potência total consumida por um componente qualquer em um circuito fasorial poderá ser complexa e poderá ser obtida pela seguinte equação:

$$\boxed{S = V_{\text{ef}} \cdot \bar{I}_{\text{ef}} = P + jQ} \tag{2.8}$$

Onde:

1. **Potência Ativa:** P, parte real da potência;
   (a) `Carga Resistiva:` Apresenta apenas potência real;
2. **Potência Reativa:** Q, parte complexa da potência;
   (a) `Carga Capacitiva:` Apresenta apenas potência imaginária negaiva;
   (b) `Carga Indutiva:` Apresenta apenas potência imaginária positiva;

2.3.3. Potência Aparente

Definição Considera-se que o produto entre os valores eficazes de corrente e tensão representa o **Potência Aparente** sobre aquele componente como mostrado na equação a seguir:

$$\boxed{p_{\text{ap}} = V_{\text{ef}}\, I_{\text{ef}}} \tag{2.9}$$

2.3.4. Fator de Potência

Definição Relação entre a potência média e a potência aparente como mostrado na equação a seguir:

$$\boxed{f_p = \frac{\bar{p}}{V_{\text{ef}}\, I_{\text{ef}}} = \cos(\theta)} \tag{2.10}$$

Legislação brasileira exige que as cargas nas indústrias tenham um fator de potência mínimo para que atender as demandas de potência elétrica. Desta forma, pode ser necessário ajustar a impedância da carga $Z = R + jI$ com a inserção de uma carga paralela $Z_i = jI_i$ como mostrado pela seguinte equação:

$$\boxed{I_i = \frac{R^2 + I^2}{R\ \tan(\cos^{-1}(f_p)) - I}} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} I_i < 0, & \text{Carga Capacitiva} \\ I_i > 0, & \text{Carga Indutiva} \end{cases} \tag{2.11}$$

Exemplo 2.1. Seja $Z = 100 + j100$ com $\omega = 100$ Hz e deseja-se um **Fator de Potência** $f_p = 0.95$. Primeiramente tem-se:

$$Z = 100 + j100 = 141.4\underline{/45^\circ}$$

$$\boxed{f_p = \cos(45^\circ) = 0.707} \qquad \text{Fator de Potência Inicial}$$

Nota-se que $0.707 < 0.95$ logo será necessário inserir uma carga paralela:

$$I_i = \frac{100^2 + 100^2}{100 \cdot \tan(\cos^{-1}(0.95)) - 100} = -297.92\Omega$$

Nota-se que $I_i < 0$ trata-se de uma carga Capacitiva desta forma, tem-se:

$$I_i = -\frac{1}{\omega\, C} \qquad \boxed{C = -\frac{1}{\omega\, I_i} = 33,6\mu F}$$