1. Exercício 01

Apresentação Resolução das questões de Circuitos Lógicos por Guilherme Nunes Trofino, 217276.

1.1. Questão 1

Exercício. Você recebe um número binário de 4 bits desconhecido, e foi informado de que a representação binária contém apenas um par de bits vizinhos repetidos. Qual a quantidade de informação que você recebeu?

Resolução. Há no total $2^4 = 16$ números possíveis, sendo que apenas 6 os seguintes atendem as condições estabelecidas como mostrados a seguir:

1101_2	0010_2
0110_2	1001_2
1011_2	0100_2

Sabe-se que a **Quantidade de Informação Recebida** será obtida pela seguinte equação:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{1}{p_x}\right) \quad \text{com} \quad p_x = \frac{6}{16}$$

Logo:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{16}{6}\right) \approx \boxed{1.41504 \text{ bits}}$$

Exercício. Você recebe uma informação adicional dizendo que o número também é par. Qual a quantidade de informação adicional que você recebeu?

Resolução. Agora há no total as 6 combinações já conhecidas, sendo que apenas 3 delas são pares como mostradas a seguir:

0110_2
0010_2
0100_2

Desta forma a **Quantidade de Informação Recebida** será obtida pela seguinte equação:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{1}{p_x}\right) \quad \text{com} \quad p_x = \frac{3}{16}$$

Logo:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{16}{3}\right) \approx 2.41504 \text{ bits}$$

Assim obtendo aproximadamente $\boxed{1\text{bit}}$ adicional de informação.

1.2. Questão 2

Exercício. X é um número binário de 8 bits desconhecido. Você é avisado que a distância de Hamming entre X e 00101101_2 é dois. Quantos bits de informação sobre X você recebeu?

Resolução. Há no total $2^8 = 256$ números possíveis, sendo que apenas 56 atendem as condições visto que a partir do código informado é necessário selecionar `2 bits`.

00101101_2

Inicialmente há 8 posições a serem escolhidas, na sequência há 7 posições disponíveis e a ordem não importa visto que a distância de Hamming deve ser identicamente 2. Desta forma a **Quantidade de Informação Recebida** será obtida pela seguinte equação:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{1}{p_x}\right) \quad \text{com} \quad p_x = \frac{28}{256}$$

Logo:

$$I(x) = \log_2\left(\frac{256}{28}\right) \approx \boxed{3.19265 \text{ bits}}$$

1.3. Questão 3

Exercício. Para cada uma das distribuições de probabilidade dos símbolos, construa uma árvore a partir do altoritmo de Huffman nessas distribuições de probabilidade.

1. $p(A) = 0.31$, $p(B) = 0.2$, $p(C) = 0.2$, $p(D) = 0.19$ e $p(E) = 0.1$;
2. $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.1$, $p(C) = 0.1$, $p(D) = 0.1$ e $p(E) = 0.1$;
3. $p(A) = 0.29$, $p(B) = 0.22$, $p(C) = 0.18$, $p(D) = 0.17$ e $p(E) = 0.14$;

Resolução. Considera-se a seguintes árvores:

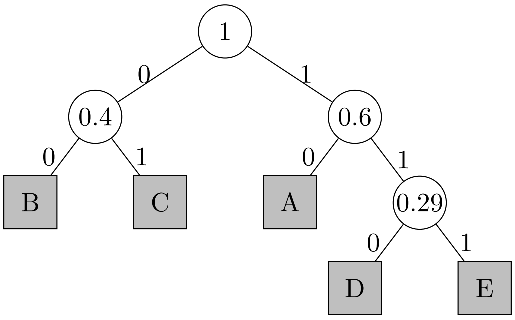

Figura 1.1: Árvore 1

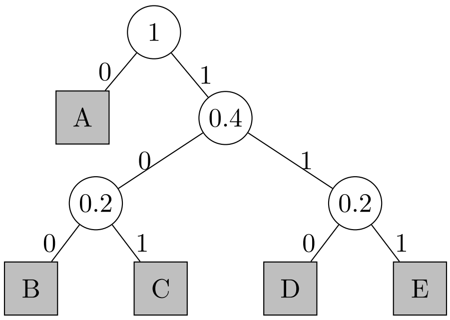

Figura 1.2: Árvore 2

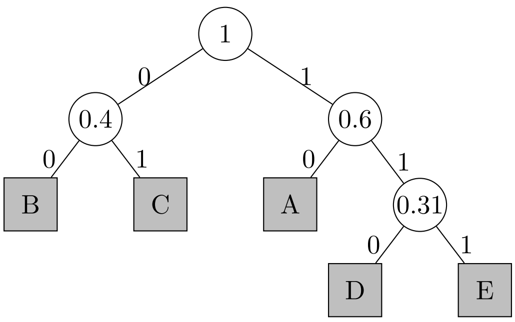

Figura 1.3: Árvore 3

1.4. Questão 4

Exercício. Considere a codificação para dois símbolos $A = 1100110011$ e $B = 0110100000$. Qual é a distância de Hammming entre elas? Quantos bits de erro podem ser detectados? Quantos bits de erro podem ser corrigidos?

Resolução. Nota-se que há 5 bits de diferença como ilustrado pelos caractéres em vermelho:

$$\begin{array}{c} \hline 1100110011_2 \\ 0110100000_2 \\ \hline \end{array}$$

Desta forma, a distância de Hamming, H, a quantidade de erros que podem ser detectados, E_D, e a quantidade de erros que podem ser corrigidos, E_C, são obtidos pelas seguintes equações:

$$\boxed{H = 5} \qquad H = E_D + 1 \rightarrow \boxed{E_D = 4} \qquad H = 2E_C + 1 \rightarrow \boxed{E_C = 2}$$

1.5. Questão 5

Exercício. Codifique a mensagem 01101000101_2 através do código de Hamming (15, 11) estendido. Decodifique-o após de inserir 0, 1 e 2 erros aleatórios, respectivamente. Verifique que as propriedades de correção do código são verificadas.

Resolução. Considere a seguinte codificação em paridade par:

^{0} 0	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 1	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

Quando há 0 erros será trivial, basta analisar os bits de paridade da codificação. Considere que os erros implementados estarão representados com a cor vermelha, desta forma o seguinte procedimento será aplicado para 1 erro:

^{0} 0	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

^{0} 0	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

^{0} 0	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

Nota-se que o `bit de paridade de conjunto` está errado, pois há uma quantidade ímpar de números uns no conjunto de dados. Na sequência nota-se que há um erro na segunda ou quarta coluna e um erro na segunda ou quarta linha da matriz. Assim, conclui-se que há um erro na segunda coluna com a segunda linha. Agora será apresentado o procedimento para 2 erros:

^{0} 1	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

^{0} 1	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

^{0} 1	^{1} 0	^{2} 0	^{3} 0
^{4} 0	^{5} 0	^{6} 1	^{7} 0
^{8} 1	^{9} 1	^{10} 0	^{11} 0
^{12} 0	^{13} 1	^{14} 0	^{15} 1

Nota-se que o `bit de paridade de conjunto` está correto, pois há uma quantidade ímpar de números uns no conjunto de dados. Como o restante da análise anterior se mantém neste caso há 2 erros que não podem ser corrigidos, apenas detectados.