MS211 - Cálculo Numérico

Laboratório 08

1 de abril de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

1. Questão

1.1. Introdução

Problema Notou-se que a dimensão de certo problema estava relacionada com o tempo necessário para solucioná-lo de acordo com seguinte gráfico:

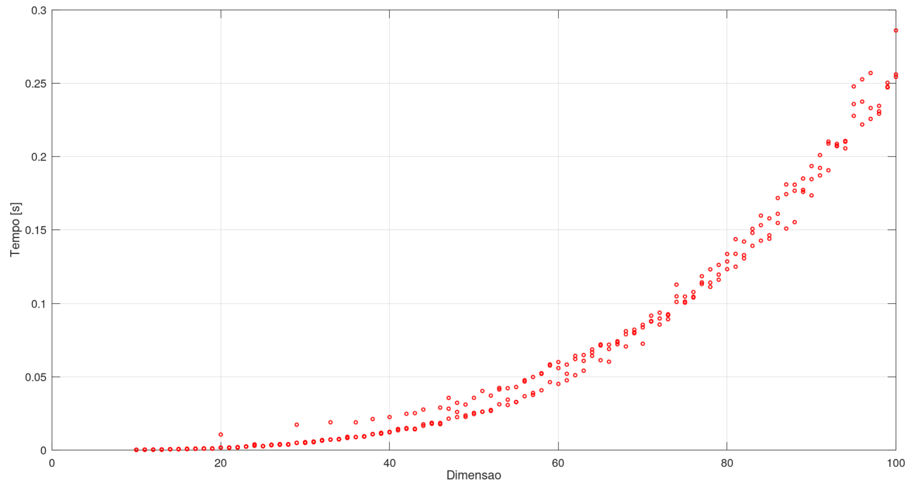

Figura 1: Dimensão pelo Tempo de Execução

Determine

1. Polinômio de grau 4 que melhor se ajusta aos dados obtidos;
2. Estime o tempo necessário para resolver problemas de dimensão 500 e 1000;

1.2. Desenvolvimento

Teoria Suponha que os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do intervalo $[a, b]$ estejam relacionados respectivamente com $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de acordo com a seguinte tabela:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Deseja-se encontrar os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que as funções, preferencialmente contínuas, $g_1, g_2, \ldots, g_n$, escolhidas observando o gráfico, satisfaçam a seguinte equação:

$$\boxed{y(x) \approx \varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)}$$

Mínimos Quadrados Selecionando as funções $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de tal forma que o **Resíduo**, a soma dos quadrados dos desvios, seja mínimo:

$$\boxed{R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - (\alpha_1 g_1(x_i) + \alpha_2 g_2(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)))^2}$$

Isto ocorre quando o gradiente $\nabla R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Desta maneira cada derivada parcial deverá ser zero, implicando na seguinte família de equações:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{i=1}^{k} -2g_j(x_i)[y_i - [\alpha_1 g_1(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)]] \\
&= -2\sum_{i=1}^{k} y_i g_j(x_i) + 2\sum_{i=1}^{k} g_j(x_i)[\alpha_1 g_1(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)]
\end{aligned}
$$

Desta maneira, o gradiente poderá ser representado matricialmente pelas seguintes matrizes:

$$
\boxed{\nabla R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 = -2A^T y + 2A^T A\alpha}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_k) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \cdots & g_2(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A^T}
\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}}_{y}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_k) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \cdots & g_2(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A^T}
\underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_k) & g_2(x_k) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha}
$$

Escolha de Funções Devem ser selecionadas de acordo com o gráfico dos pontos analisados. Funções polinomiais são aproximações suficiente eficientes para maioria dos casos. Desta maneira, temos que:

$$
\boxed{y(x) \approx \underbrace{a_1 1}_{\alpha_0 g_0(x)} + \underbrace{a_2 x}_{\alpha_1 g_1(x)} + \cdots + \underbrace{a_{n-1}x^{n-1}}_{\alpha_n g_n(x)} \underbrace{a_n x^n}_{\alpha_n g_n(x)}}
$$

1.3. Solução

Formulação de Ajuste de Dados Definiu-se que as funções necessárias para aproximar o polinômio de grau 4 seriam as diferentes potências da função. Assim o polinômio de grau 4 que melhor se ajusta as dados obtidos será:

$$
\boxed{\varphi(x) = (0.000074423 \cdot x^4 + 0.017349587 \cdot x^3 + 0.162313064 \cdot x^2 - 2.225595244 \cdot x^1 - 0.223032780) \cdot 10^{-5}}
$$

Considerando essa aproximação são necessários **68.596** e **919.33** segundos para solucionar problemas de dimensão 500 e 1000, respectivamente.

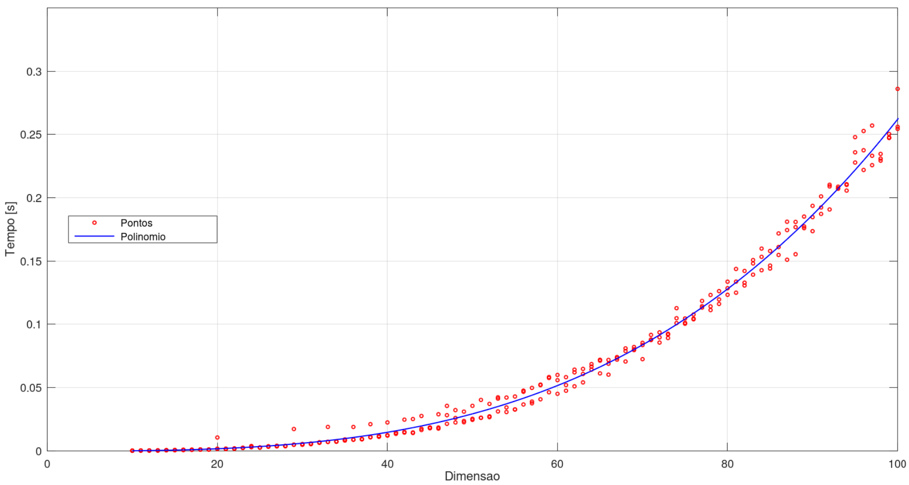

Figura 2: Dimensão pelo Tempo de Execução com Aproximação

1.4. Códigos

```matlab
%==================================================================================
load("Guilherme Nunes Trofino - Atividade8Questao1.mat");
X = dim;
Y = tempo;


%==================================================================================
g0 = @(x) x.^0; %Coeficiente 0
g1 = @(x) x.^1; %Coeficiente 1
g2 = @(x) x.^2; %Coeficiente 2
g3 = @(x) x.^3; %Coeficiente 3
g4 = @(x) x.^4; %Coeficiente 4

M = [ g4(X') g3(X') g2(X') g1(X') g0(X') ]; %Matriz de Coeficients
A = (M'*M)\(M'*Y') %Coeficientes do Polinomio de Grau 4

size(A)

x = 10:1:1000; %Intervalo de Avaliacao da Funcao
y = @(x, A) A(1)*x.^4 + A(2)*x.^3 + A(3)*x.^2 + A(4)*x + A(5);

y(500,  A) %Tempo:  68.596 s
y(1000, A) %Tempo: 919.33  s


%==================================================================================
LW = 2; FS = 20; %Largura das Linhas | Tamanho da Fonte
plot(X, Y,        'linewidth', LW, 'or',  %Dimensao    | Tempo
     x, y(x, A), 'linewidth', LW, 'b' ); %Aproximacao | Tempo

xlabel("Dimensao", "fontsize",FS); %Legenda X
ylabel("Tempo [s]","fontsize",FS); %Legenda Y
axis([0 100 0 0.35]); grid; set(gca, "fontsize", FS); %Formato
legend("Pontos", "Polinomio", "location", "west") %Legenda Dados
```

2. Questão

2.1. Introdução

Problema Casos graves de COVID19 por semana em Campinas, representados na tabela abaixo, não contém dados para os dias 27/12, 03/01, 10/01 e 17/01.

Data	Casos	
02/08	170	x_1
09/08	162	x_2
16/08	145	x_3
23/08	124	x_4
30/08	127	x_5
06/09	116	x_6
13/09	126	x_7
20/09	106	x_8
27/09	95	x_9
04/10	77	x_{10}
11/10	45	x_{11}
18/10	67	x_{12}
25/10	48	x_{13}
01/11	50	x_{14}
08/11	83	x_{15}
15/11	101	x_{16}
22/11	101	x_{17}
29/11	100	x_{18}
06/12	116	x_{19}
13/12	71	x_{20}
20/12	80	x_{21}
27/12	?	x_{22}
03/01	?	x_{23}
10/01	?	x_{24}
17/01	?	x_{25}

Determine Utilizando o modelo auto-regressivo linear:

1. Considerando $k = 4$, estime o valor dos coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 do modelo auto-regressivo linear usando o método dos quadrados mínimos, utilizando todos os valores da tabela.
2. Utilizando os coeficientes determinados no item anterior, estime o número de casos nos dias 27/12, 03/01, 10/01 e 17/01.

2.2. Desenvolvimento

Teoria Considera-se que os dados em um **Modelo Auto-Regressivo Linear** podem ser modelados pela seguinte relação:

$$\boxed{x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \cdots + \alpha_{k-1} x_{n-k+1} + \alpha_k x_{n-k}, \qquad \forall n \geq k+1}$$

Mínimos Quadrados Selecionando as funções $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de tal forma que o **Resíduo**, a soma dos quadrados dos desvios, seja mínimo:

$$\boxed{R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - (\alpha_1 g_1(x_i) + \alpha_2 g_2(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)))^2}$$

Isto ocorre quando o gradiente $\nabla R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Desta maneira cada derivada parcial deverá ser zero, implicando na seguinte família de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{i=1}^{k} -2g_j(x_i)[y_i - [\alpha_1 g_1(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)]] \\
&= -2\sum_{i=1}^{k} y_i g_j(x_i) + 2\sum_{i=1}^{k} g_j(x_i)[\alpha_1 g_1(x_i) + \cdots + \alpha_n g_n(x_i)]
\end{aligned}$$

Desta maneira, o gradiente poderá ser representado matricialmente pelas seguintes matrizes:

$$\boxed{\nabla R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 = -2A^T y + 2A^T A\alpha}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_k) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \cdots & g_2(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_k) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \cdots & g_2(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_k) & g_2(x_k) & \cdots & g_n(x_k) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

Sistema Considerando o método de auto-regressão, tomando $k = 4$, aplicado a todos os dados do problema tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}
x_5 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 \\
x_6 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_5 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_2 \\
& \vdots \\
x_{20} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{19} + \alpha_2 x_{18} + \alpha_3 x_{17} + \alpha_4 x_{16} \\
x_{21} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{20} + \alpha_2 x_{19} + \alpha_3 x_{18} + \alpha_4 x_{17}
\end{cases}$$

Este sistema poderá ser simplesmente representado matricialmente pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{19} & x_{18} & x_{17} & x_{16} \\ 1 & x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ \vdots \\ x_{20} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

2.3. Solução

Método Auto-Regressivo Nota-se que o sistema de equações, solucionado através do método dos mínimos quadrados, possui os seguintes coeficientes:

$$\alpha_0 = 27.55601, \quad \alpha_1 = 0.59273, \quad \alpha_2 = 0.21653, \quad \alpha_3 = 0.13406, \quad \alpha_4 = -0.26193$$

Conhecidos os coeficientes, estima-se que o número de casos graves nos respectivos dias serão aproximadamente:

$$27/12 = 79.706, \quad 03/01 = 71.257, \quad 10/01 = 79.179, \quad 17/01 = 79.648$$

2.4. Códigos

```
%================================================================================
R = [170; 162; 145; 124; 127; 116; 126;
     106;  95;  77;  45;  67;  48;  50;
      83; 101; 101; 100; 116;  71;  80]; %Qtde. Casos em Vetor

M = [ ones(17,1) R(4:20) R(3:19) R(2:18) R(1:17)]; %Constantes das Equacoes
Y = [R(5:21)]; %Resultados das Equacoes


A = (M'*M)\(M'*Y); %Coeficientes da Auto-Regressao
%Alpha 0: x(1) = 27.55601
%Alpha 1: x(2) =  0.59273
%Alpha 2: x(3) =  0.21653
%Alpha 3: x(4) =  0.13406
%Alpha 4: x(5) = -0.26193


x22 = A(1) + A(2)*R(21) + A(3)*R(20) + A(4)*R(19) + A(5)*R(18)
x23 = A(1) + A(2)*x22   + A(3)*R(21) + A(4)*R(20) + A(5)*R(19)
x24 = A(1) + A(2)*x23   + A(3)*x22   + A(4)*R(21) + A(5)*R(20)
x25 = A(1) + A(2)*x24   + A(3)*x23   + A(4)*x22   + A(5)*R(21)
```