ES601 - Análise Linear de Sistemas

Atividade Teórica

12 de setembro de 2021

Guilherme Nunes Trofino
217276

1. Atividade Teórica

Apresentação Resolução das questões de Análise Linear de Sistemas por Guilherme Nunes Trofino, 217276, sobre **Introdução ao Matlab e Simulink**.

Questão 1

Exercício 1.1. Modelar um sistema RC série com tensão aplicada no circuito como entrada e tensão no capacitor como saída. Implementar a equação diferencial como um diagrama de blocos e simular no Simulink para um entrada em degrau de tensão de 10 V e condições iniciais nulas. A resistência é de 1 kOhm e o capacitor de 2000 uF.

Resolução. Primeiramente será necessário elaborar o circuito requisitado:

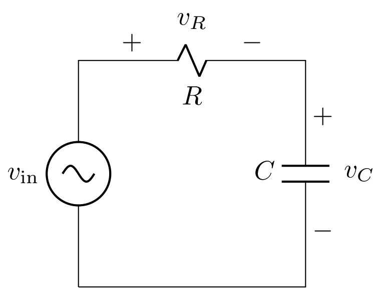

Figura 1.1: Circuito RC

Note que o degrau de alimentação será represetado como uma fonte variável e analisando pela **Lei das Malhas** nessa única malha, obtêm-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
v_{\text{in}} &= v_R + v_C \\
&= Ri + v_C \\
v_{\text{in}} &= RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C \qquad (1.1)\\
&= RC\dot{v}_C + v_C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{v}_C = \frac{1}{RC}v_{\text{in}} - \frac{1}{RC}v_C} \qquad (1.2)$$

Desta forma, a equação 1.2 será representada no Simulink com o seguinte diagrama:

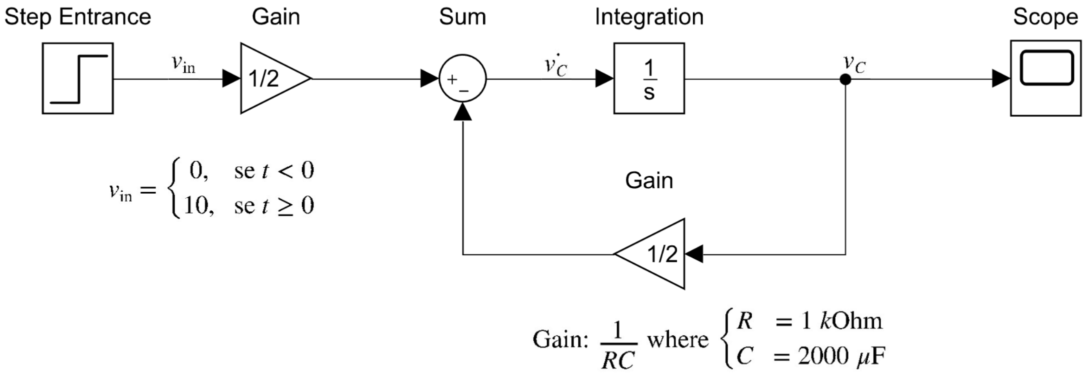

Figura 1.2: Diagrama no Simulink

Note que nesta configuração apresenta $\tau = RC = 2$ s, desta forma a simulação deve possuir ao menos $5\tau = 10$ s de análise para que o transiente seja superado. Consequentemente obtêm-se o seguinte gráfico para representar a tensão sobre o capacitor:

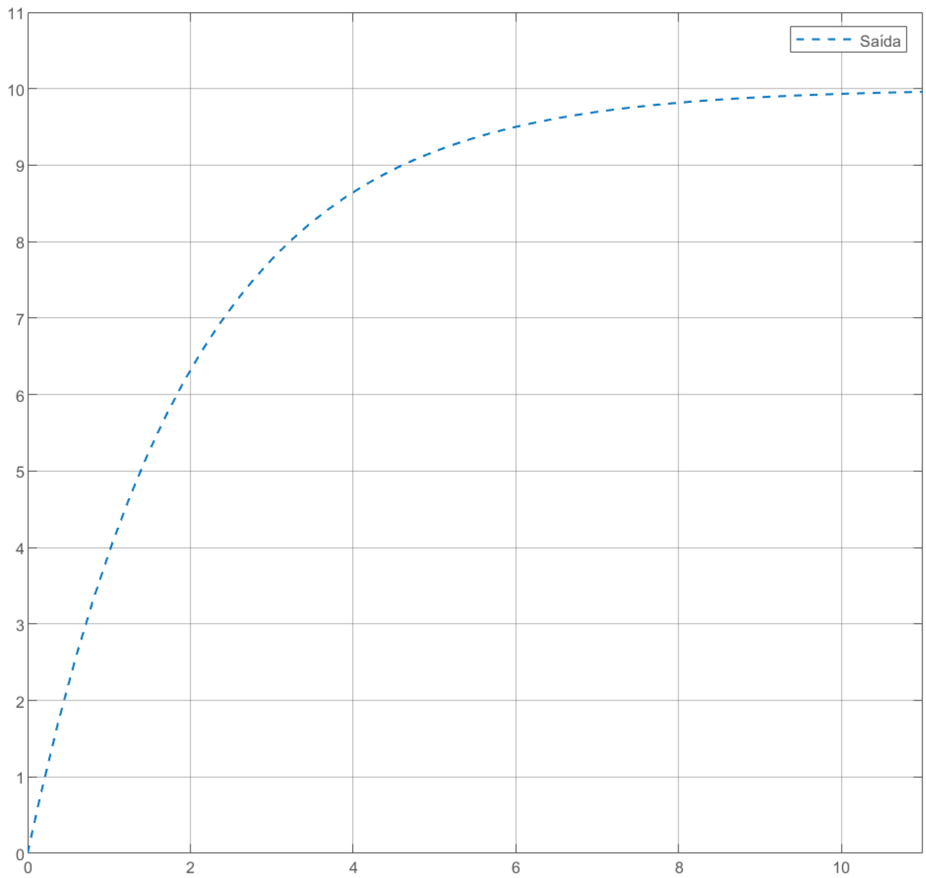

Figura 1.3: Gráfico da Simulação no Simulink

Exercício 1.2. Calcular a solução analítica (resolver a equação diferencial ou usar Laplace, como preferir), implementar no MATLAB e comparar o resultado com o do Simulink.

Resolução. Inicialmente parte-se da equação 1.1 que será solucionada pela **Transformada de Laplace** como representada abaixo:

$$
\begin{aligned}
v_{\text{in}} &= RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C \\
v_{\text{in}}u(t) &= RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C && \text{Incluindo } \texttt{Função Degrau} \\
\boxed{\frac{v_{\text{in}}}{s} = RC(sV_C - v_{C0}) + V_C} & && \text{Aplicando } \texttt{Laplace} \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

As condições iniciais serão consideradas como não nulas no desenvolvimento para demonstração de um caso geral. Na sequência será necessário isolar a variável desejada, V_C, procedendo da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
V_C(RCs+1) &= \frac{v_{\text{in}}}{s} + RCv_{C0} \\
V_C(s+\frac{1}{RC}) &= \frac{v_{\text{in}}}{RCs} + v_{C0} \\
\boxed{V_C = \frac{v_{\text{in}}}{RCs(s+\frac{1}{RC})} + \frac{v_{C0}}{(s+\frac{1}{RC})}} & && \text{Equação Isolada} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Note que será necessário simplificar a equação através de **Frações Parciais** para que a **Anti-Transformada de Laplace** possa ser aplicada e solução encontrada. Desta forma tem-se a seguinte equação:

$$
\frac{v_{\text{in}}}{RCs(s+\frac{1}{RC})} = \frac{A}{RCs} + \frac{B}{(s+\frac{1}{RC})} \qquad \begin{cases} As + BRCs = 0 & \rightarrow \boxed{B = -v_{\text{in}}} \\ \frac{A}{RC} = v_{\text{in}} & \rightarrow \boxed{A = RCv_{\text{in}}} \end{cases}
$$

Obtém-se a seguinte equação geral para V_C:

$$
\begin{aligned}
V_C &= \frac{v_{\text{in}}}{s} + \frac{v_{\text{in}}}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{v_{C0}}{s+\frac{1}{RC}} \\
v_C(t) &= v_{\text{in}} - v_{\text{in}}e^{-\frac{1}{RC}t} + v_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t} && \text{Aplicando } \texttt{Anti-Laplace} \\
\boxed{v_C(t) = v_{\text{in}}(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) + v_{C0}e^{-\frac{1}{RC}t}} & && \text{Aplicando Condições Iniciais} \qquad (1.5) \\
\boxed{v_C(t) = 10(1-e^{-\frac{1}{2}t})} & && (1.6)
\end{aligned}
$$

Equação acima será modelada em Matlab através do seguinte algoritmo:

```
%%=========================================================================
%%                       Configuration
%%=========================================================================

clc
clear
close all

%%=========================================================================
%%                       Main Code
%%=========================================================================

Vin = 10;            %% Inicial Coltage
R   = 1*10^(3);      %% Resistence
C   = 2000*10^(-6); %% Capacitance

t0 = linspace(0,11,10000);
y0 = Vin*(1 - exp(-(1/(R*C)).*t0))


LW = 2;      %Line Width
FS = 16;     %Font Size

plot(t0, y0, '--')

xlabel("t [s]",      "fontsize",FS); %Legend X
ylabel("V_{C} [V]", "fontsize",FS); %Legend Y

axis ([0  11 0 11]); grid; set(gca , "fontsize", FS); %Format

legend("V_{C}", "location", "southeast") %Legend Data
```

Isso trará o seguinte resultado:

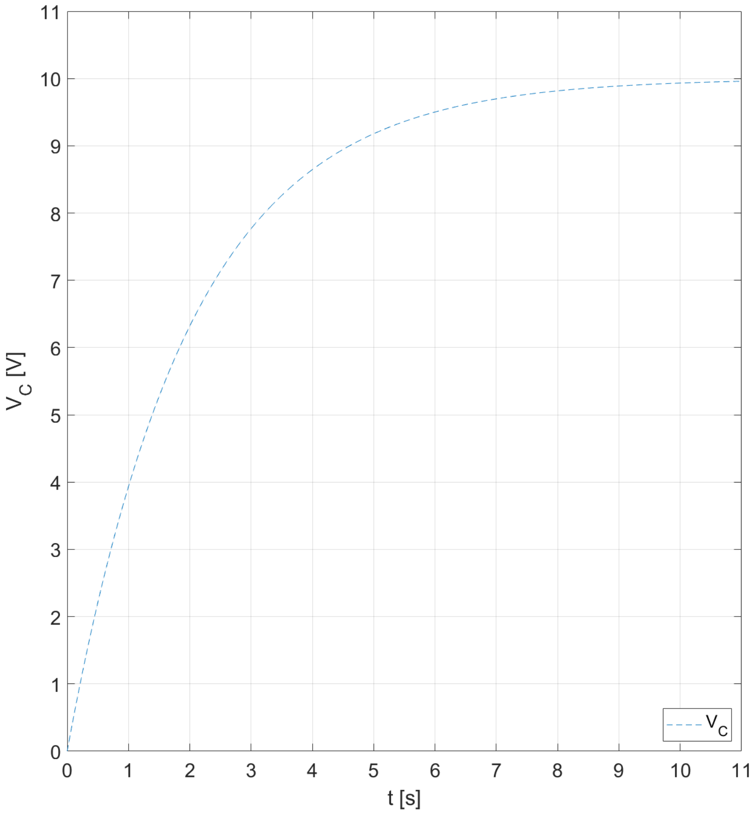

Figura 1.4: Gráfico Analítico no Matlab

Nota-se que o gráfico é, como esperado, semelhante ao obtido através da simulação no Simulink. Desta forma, os métodos de solução são igualmente eficazes para descrever o comportamento da tensão no capacitor.