Problema 2

Pongo un sistema di coordinate cartesiane con l'asse y rivolto verso il basso. Imposto il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m\ddot{\varphi}_1 = -k\varphi - k(\varphi_1 - \varphi_2) + mg \\ m\ddot{\varphi}_2 = -k(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases} \tag{1}$$

Definisco $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$ e riscrivo il sistema portando in forma normale.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 - \omega_0^2(2\varphi_1 - \varphi_2) = g \\ \ddot{\varphi}_2 - \omega_0^2(\varphi_2 - \varphi_1) = g \end{cases} \tag{2}$$

Per trovare i moti normali cerco le soluzioni al sistema del tipo $\varphi_1 = Ae^{i\omega t}$ e $\varphi_2 = Be^{i\omega t}$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Calcolo le derivate seconde $\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2\varphi_1$ e $\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2\varphi_2$ e sostituisco nel sistema (2) rimuovendo la costante g per risolvere il sistema omogeneo.

$$\begin{cases} -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega_0^2(2A - B)e^{i\omega t} \\ -\omega^2 Be^{i\omega t} = -\omega_0^2(B - A)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{3}$$

Posso dividere tutto per $e^{i\omega t}$ siccome non è mai nullo e definire $\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ per ottenere il sistema

$$\begin{cases} \lambda A = 2A - B \\ \lambda B = B - A \end{cases} \tag{4}$$

Che può essere riscritto come

$$\lambda \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ciò equivale a trovare gli autovalori della matrice M. I rispettivi autovettori saranno due soluzioni linearmente indipendenti del sistema, il che ci permette di trovarle tutte a meno di combinazione lineare.

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ciò significa che il sistema fisico ha due moti normali linearmente indipendenti, rispettivamente con pulsazioni

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \qquad \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Cerco ora una soluzione particolare che, per il criterio di somiglianza sarà del tipo $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$ = costante, dunque con derivate nulle. Sostituisco tale Γ nel sistema (2) per ottenere

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{g}{\omega_0^2} \\ -\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{g}{\omega_0^2} \end{cases} \tag{7}$$

Il che mi porta alla soluzione $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{g}{\omega_0^2}$. Il moto generico del sistema fisico avrà dunque equazione

$$\Phi = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \Gamma \tag{8}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad \Phi_1 = u_1 e^{i\omega t} \qquad \Phi_2 = u_2 e^{i\omega t}$$