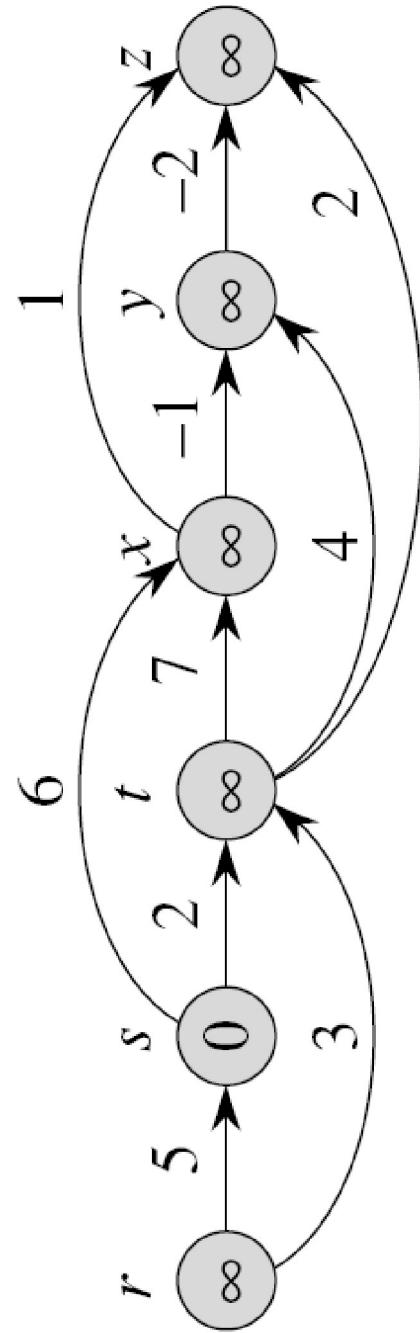


Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Quando os grafos não possuem ciclos, podemos otimizar o algoritmo que calcula o caminho mínimo de um vértice para todos os outros vértices...
- Detalhe... O Algoritmo de **Bellman-Ford continua resolvendo o problema**... mas...
 - Lembrando que ele resolve para o caso mais geral;
 - Ele possui complexidade algorítmica elevada, apesar de ter comportamento polinomial no pior caso.

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

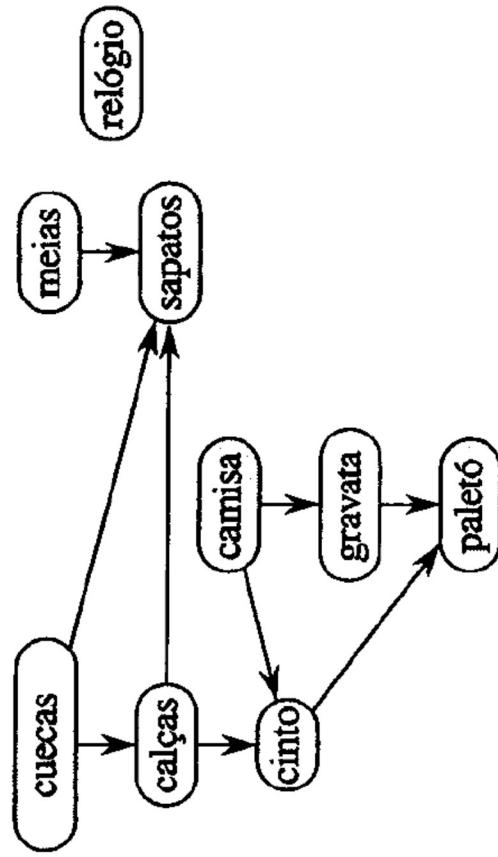
- Antes do aprendizado do algoritmo desta aula, precisamos entender o algoritmo de ordenação topológica...



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **GAO: Grafos Acíclicos Orientados:**

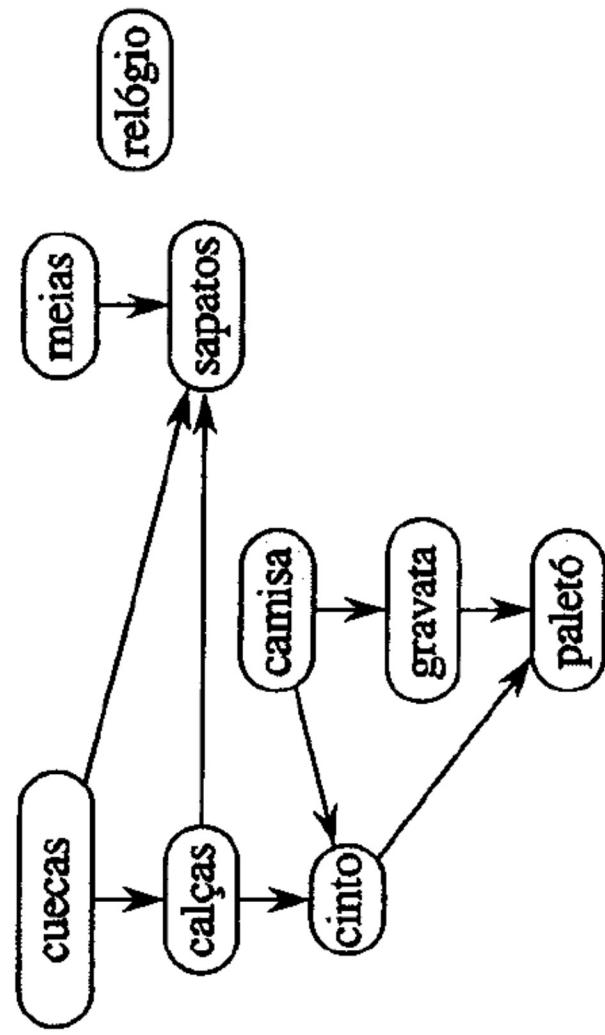
- Estes, são utilizados para indicar precedência de eventos;
- Geralmente utilizados para descrever processos;
- Uma aresta orientada (u, v) no GAO indica que a peça de roupa u deve ser vestida antes da peça v .



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

• Ordenação Topológica:

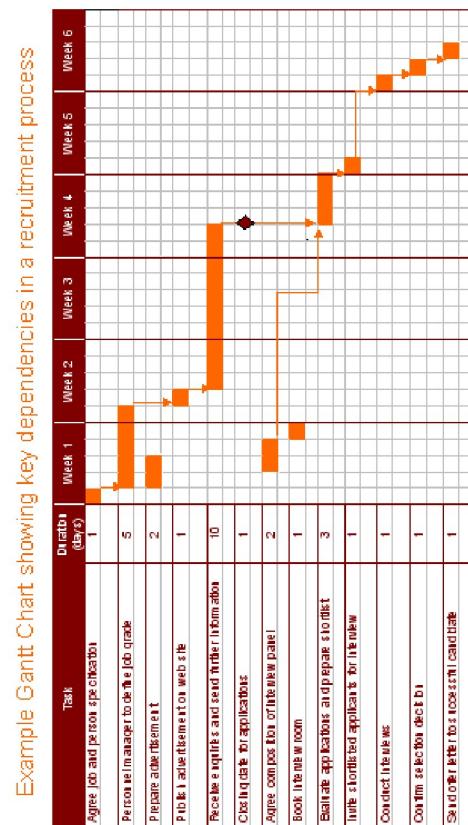
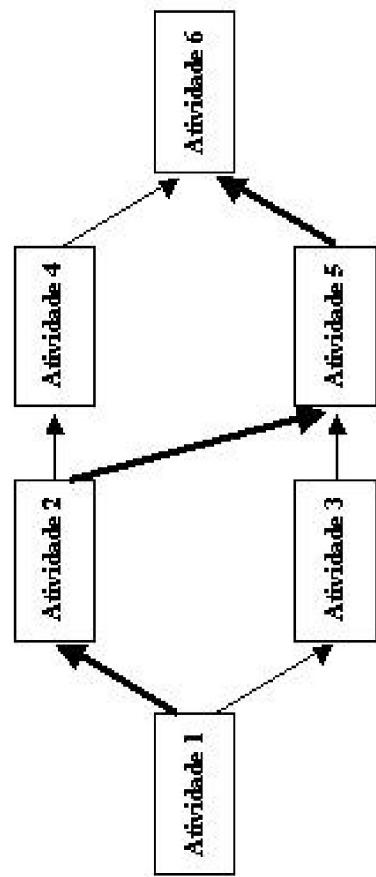
- Exemplo simplificado: o processo de se vestir de um homem...
- Colocar meia antes do sapato:
 - aresta (meia,sapato)
- Colocar camisa antes da gravata
 - Aresta (camisa, gravata)



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

• Ordenação Topológica:

- Grafos acíclicos orientados são utilizados em muitas aplicações para indicar precedência entre eventos;
- Exemplo:
 - Caminho crítico em Gerência de Projetos.



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:

- Algoritmo:
- Entrada: $G = (V, A)$:

- Chamar DFS (busca em profundidade);
- Em função do vetor f (tempo de finalização), retorne uma lista ordenada inversa de todos os vértices do grafo G .

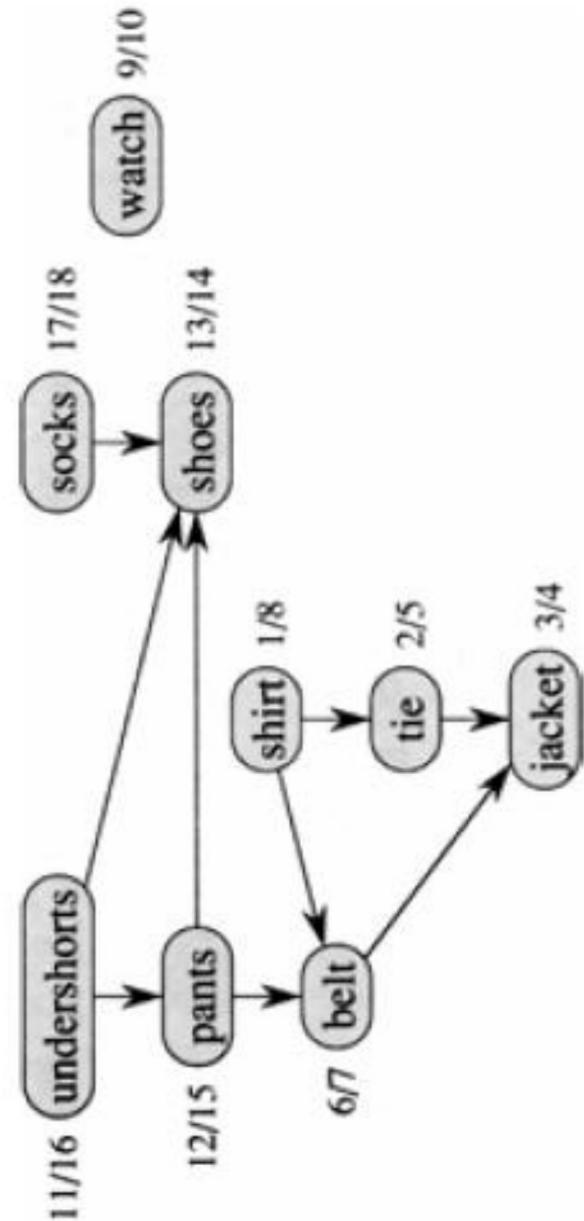
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- De outra forma...

• Ordenação Topológica:

▫ Algoritmo:

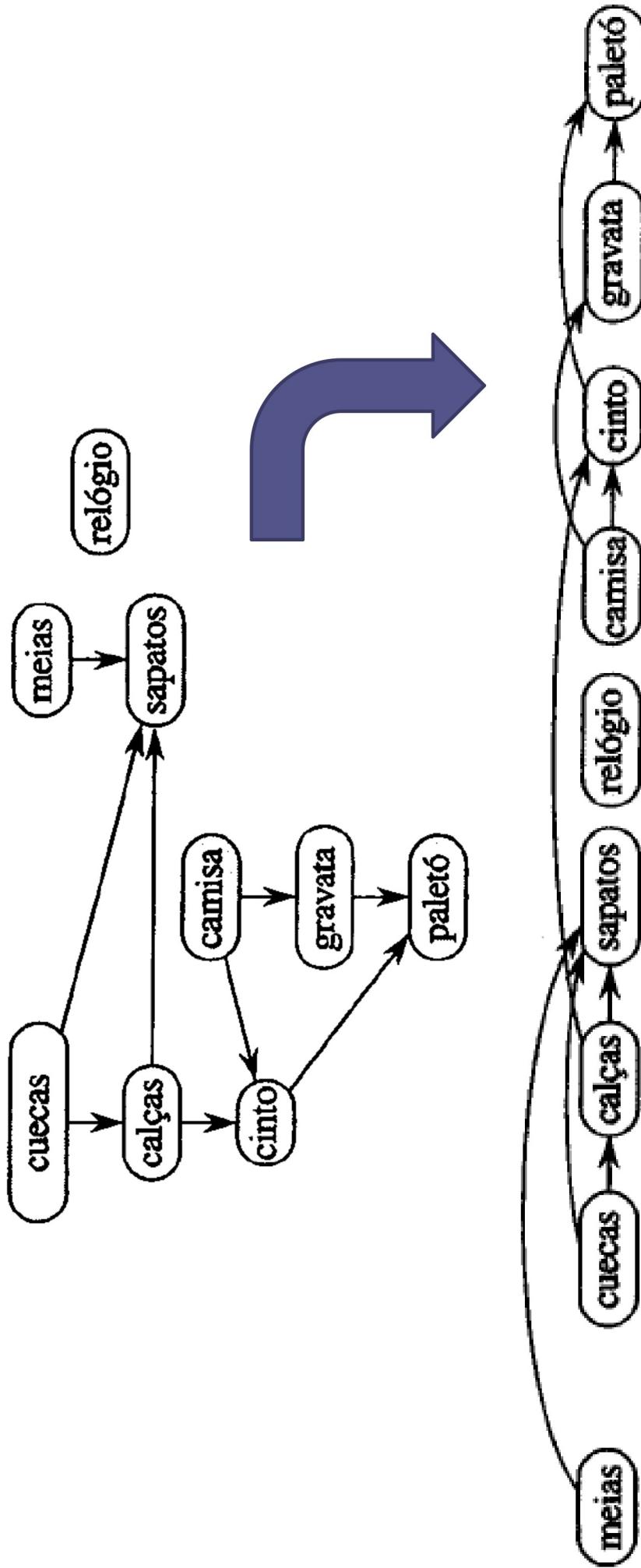
- Chamar DFS (busca em profundidade);
- A medida que os vértices forem marcados como pretos, adicionar o vértice no início de uma pilha...
- Retornar pilha...



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

• Ordenação Topológica:

- Exemplo de execução da ordenação topológica....



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **Ordenação Topológica:**

- Comentário:

- Podemos encontrar algumas implementações da ordenação topológica, que não altera o método original da DFS, e utiliza apenas o vetor f ao final de sua execução.
 - Este método precisa utilizar um algoritmo de ordenação, o que deixa o procedimento “mais caro” computacionalmente.
 - Operação $n \log(n)$ no último passo.

Algoritmo dos Caminhos mais curtos de origem
única em grafos acíclicos orientados

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relaxando as arestas de um GAO (grafo acíclico orientado) ponderado de acordo com uma ordenação topológica de seus vértices, podemos calcular caminhos mais curtos a partir de uma única origem com complexidade $O(|V| + |A|)$;
- Relembando:
 - Bellman-Ford: $O(|V|.|A|)$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relembrando dois métodos básicos:

<p>INICIALIZA($G = (V, A), s$)</p> <p>para cada $v \in V$</p> <p>$d[v] = \infty$</p> <p>$\pi[v] = \text{NULL}$</p> <p>fim para</p> <p>$d[s] = 0$</p> <p>fim</p>	<p>RELAXA(u, v, w)</p> <p>se $d[v] > (d[u] + w(u, v))$ então</p> <p>$d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$</p> <p>$\pi[v] = u$</p> <p>fim se</p> <p>fim</p>
--	--

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

CaminhoM inimo_GAO($G = (V, A)$, w, v_s)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA((V, A) , v_s)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça
 $relaxa(u, v, w)$

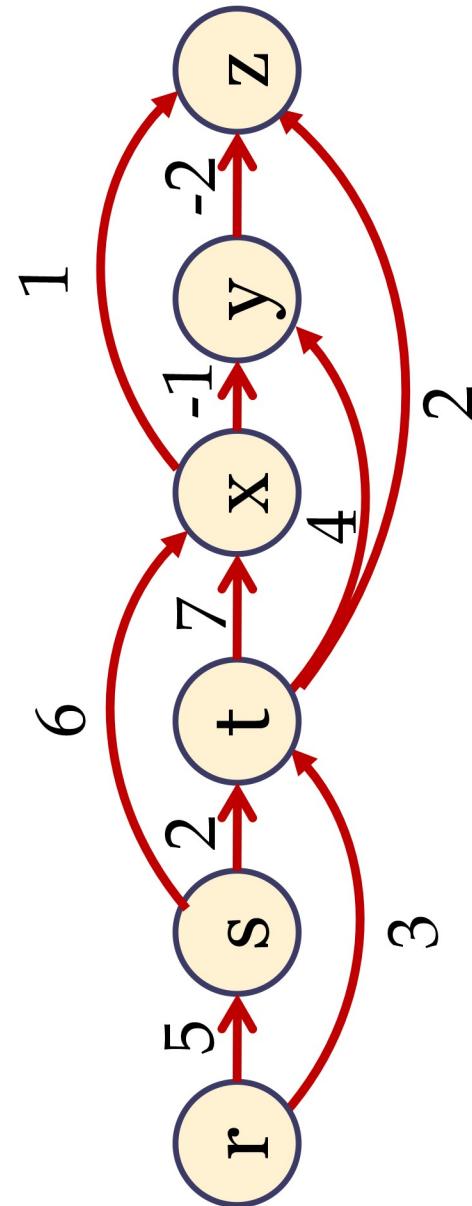
fim para

fim para

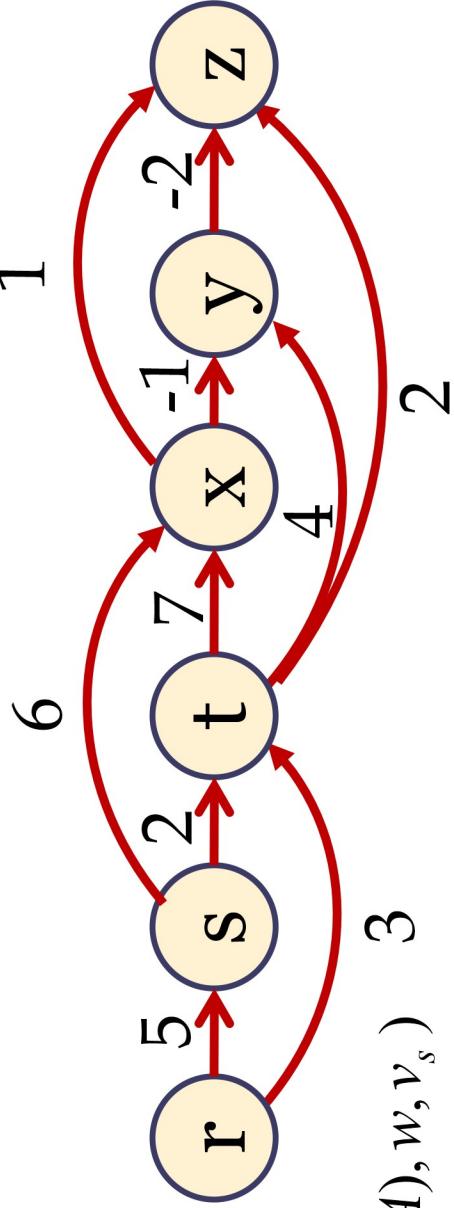
fim.

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Vamos acompanhar para o grafo:



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A)$, w, v_s)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA((V, A) , v_s)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

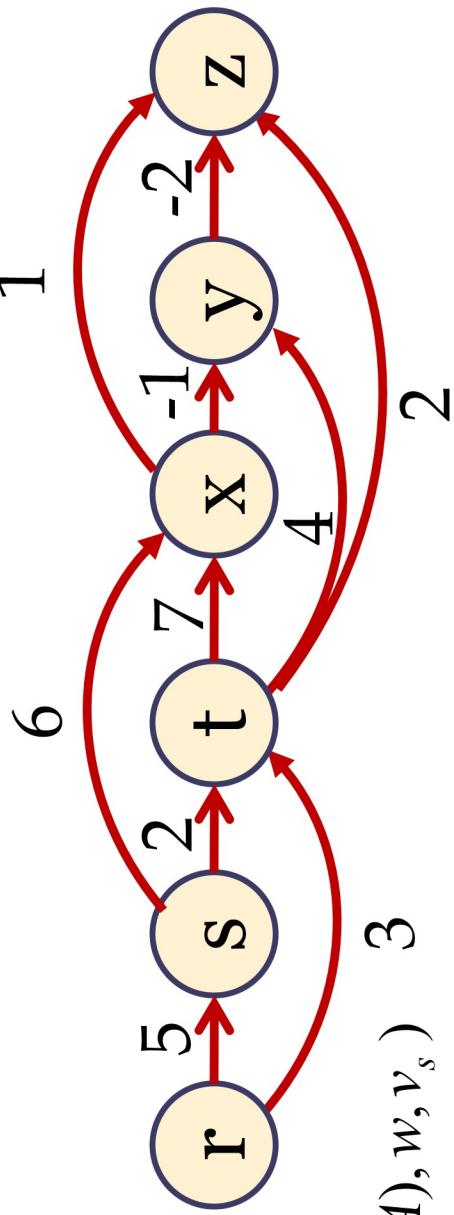
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	---	---	---	---	---	---
π	---	---	---	---	---	---
K	---	---	---	---	---	---

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$\blacktriangleright K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 relaxa(u, v, w)

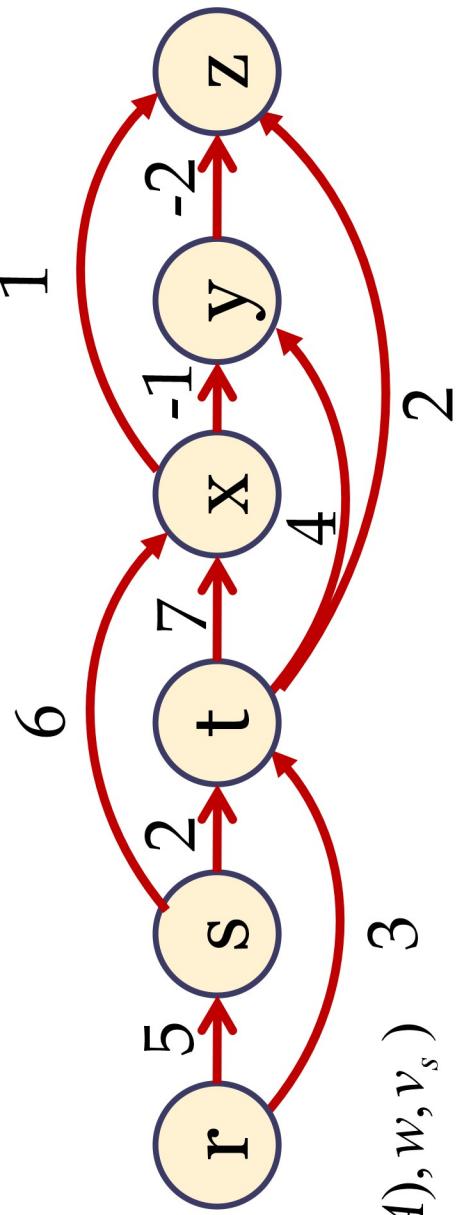
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	---	---	---	---	---	---
π	---	---	---	---	---	---
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

$relaxa(u, v, w)$

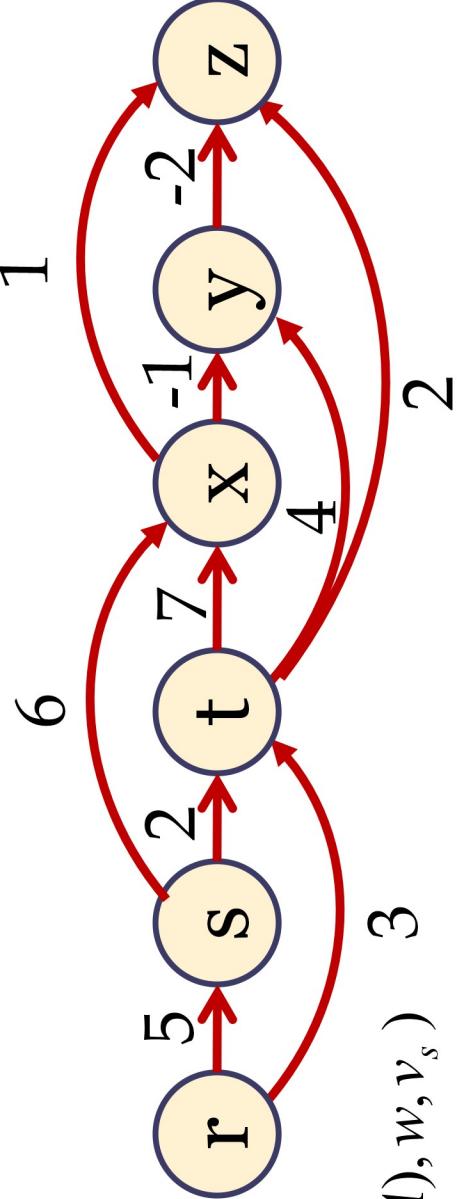
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

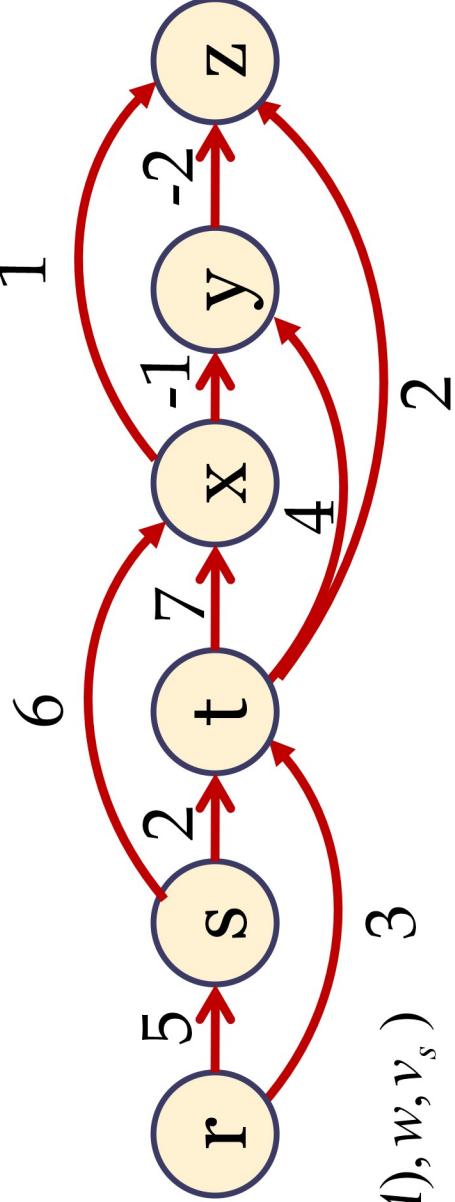
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

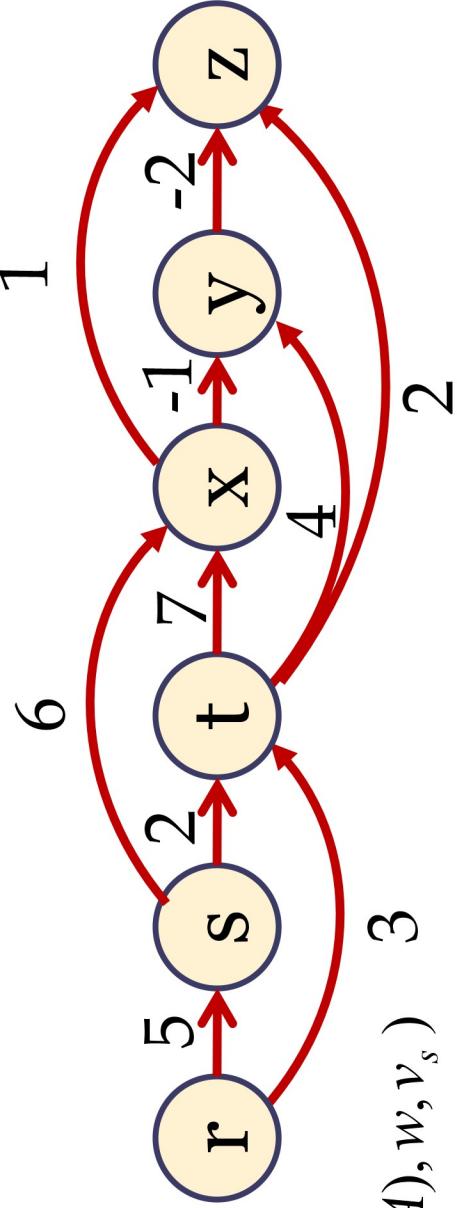
 fim para

 fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL	NULL
K	↑ r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

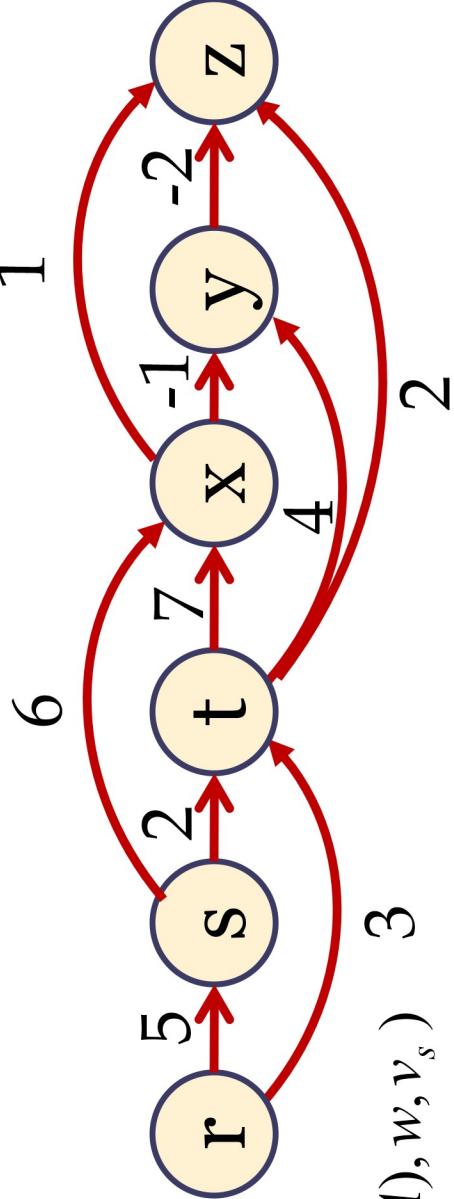
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 relaxa(u, v, w)

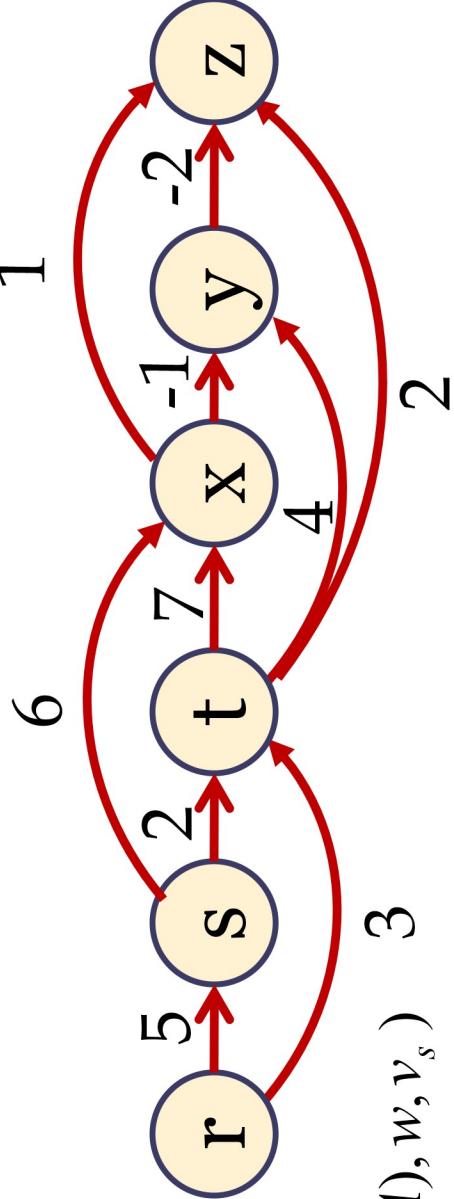
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

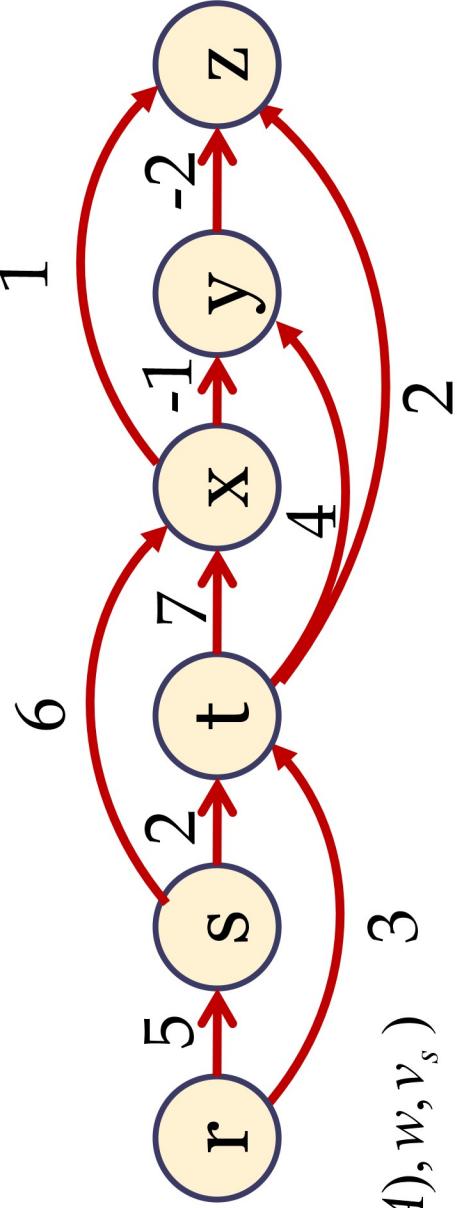
 fim para

 fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	∞	∞	∞
π	NULL	r	r	NULL	NULL	NULL
K	r	↑ s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

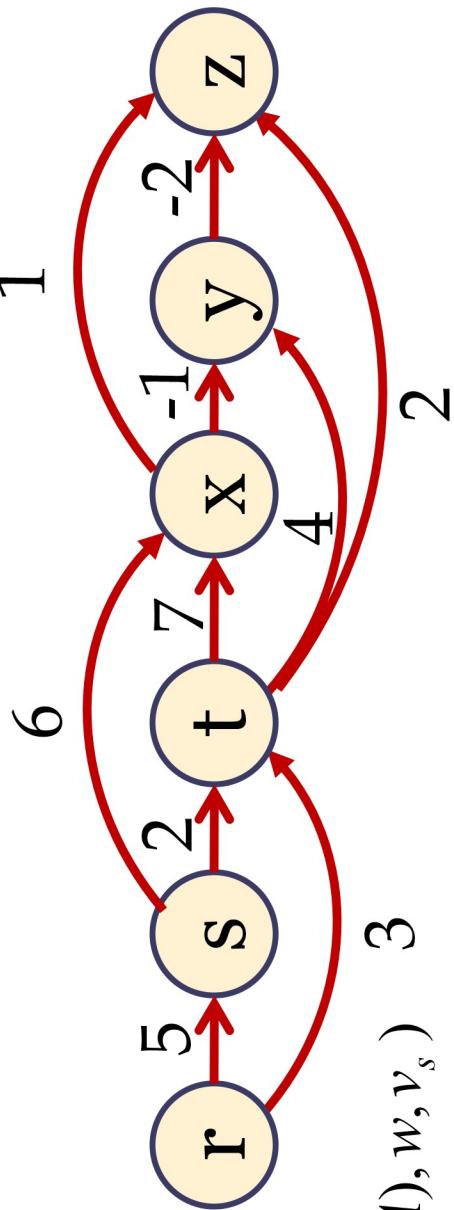
 fim para

fim para

.fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3			
π	NULL	r	r	11	∞	∞
K	r	↑ s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 relaxa(u, v, w)

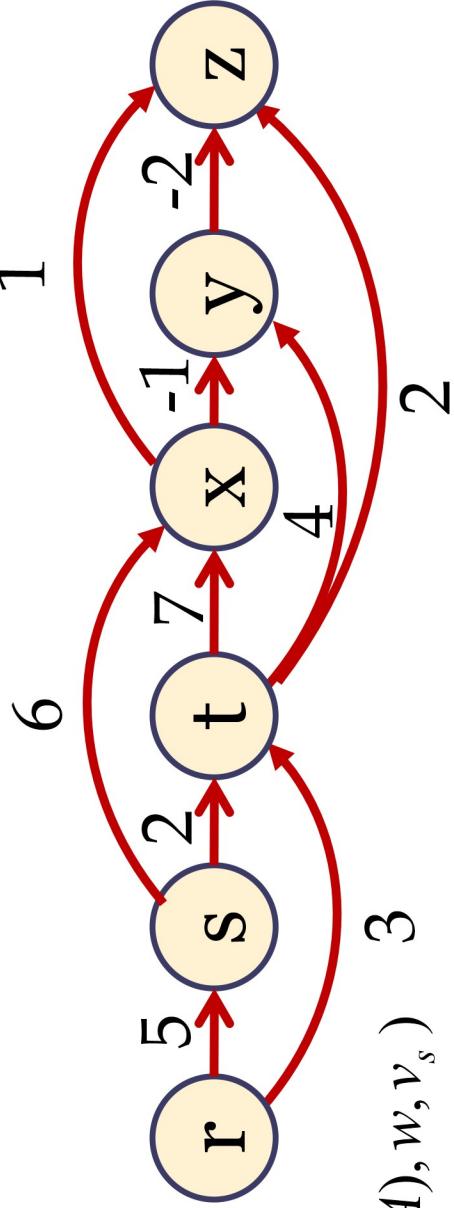
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	11	∞	∞
π	NULL	r	r	s	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

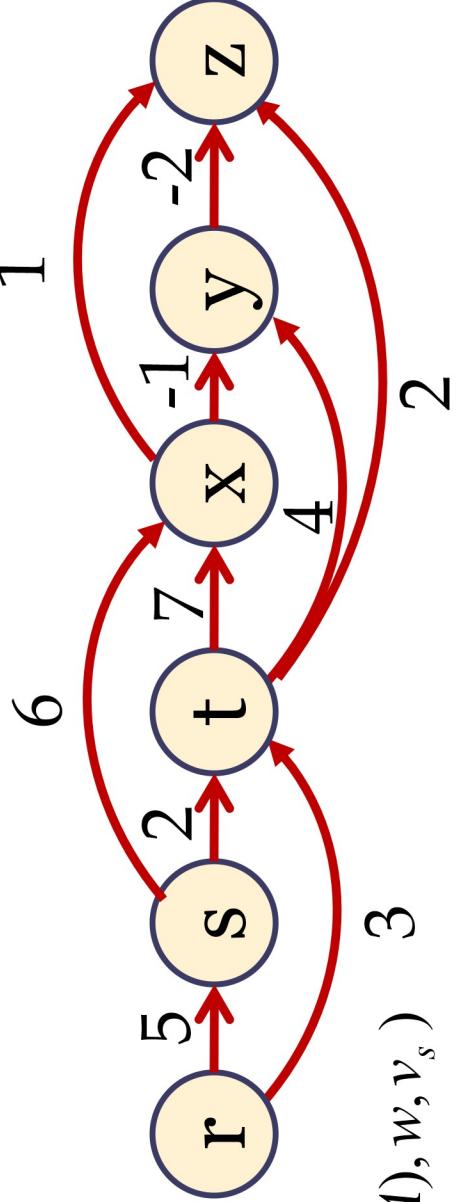
 fim para

fim para

.fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	11	∞	∞
π	NULL	r	r	s	NULL	NULL
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

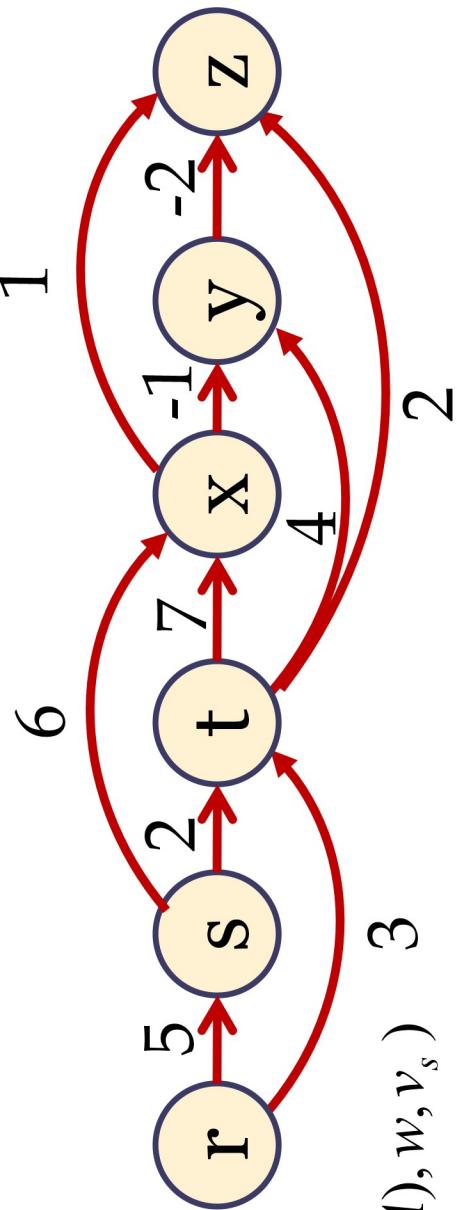
 fim para

 fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3			
π	NULL	r	r		7	5
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
 relaxa(u, v, w)
 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

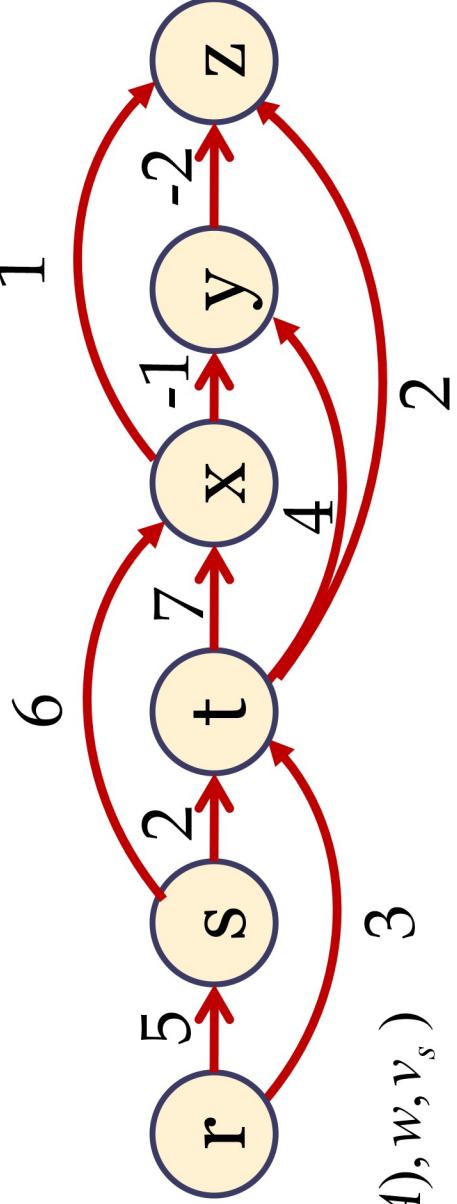
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

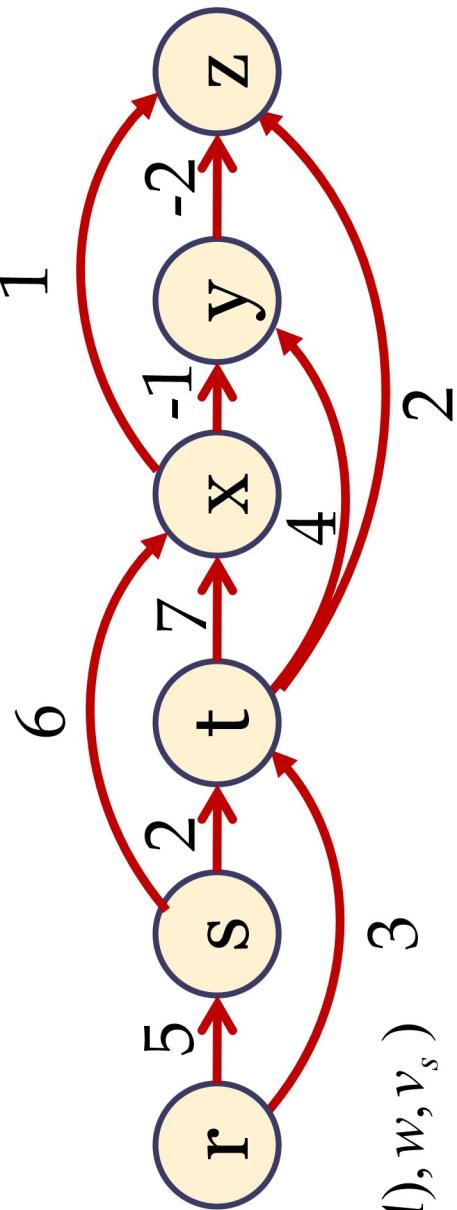
 fin para

fin para

fin.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

$relaxa(u, v, w)$

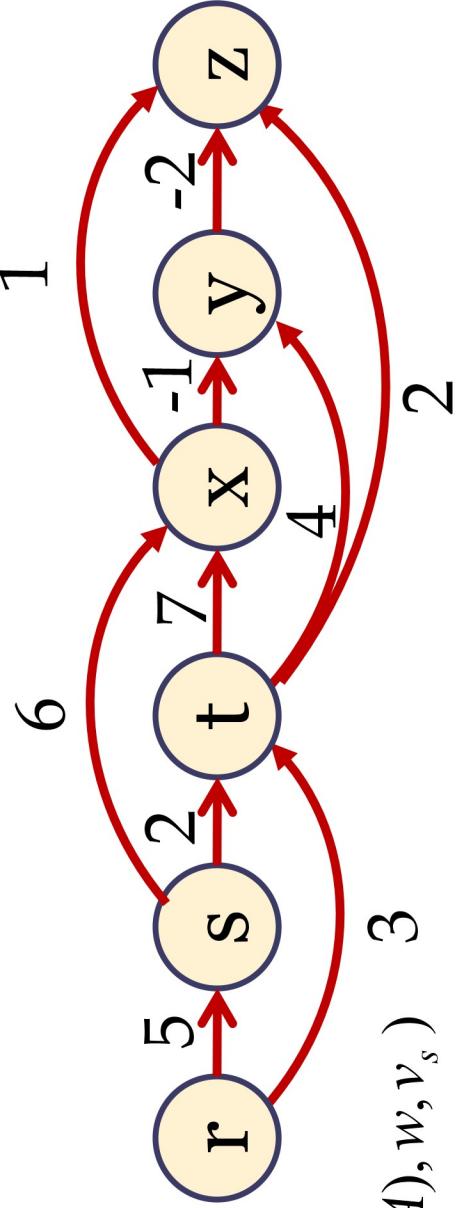
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 ↑ para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 ↑ relaxa(u, v, w)

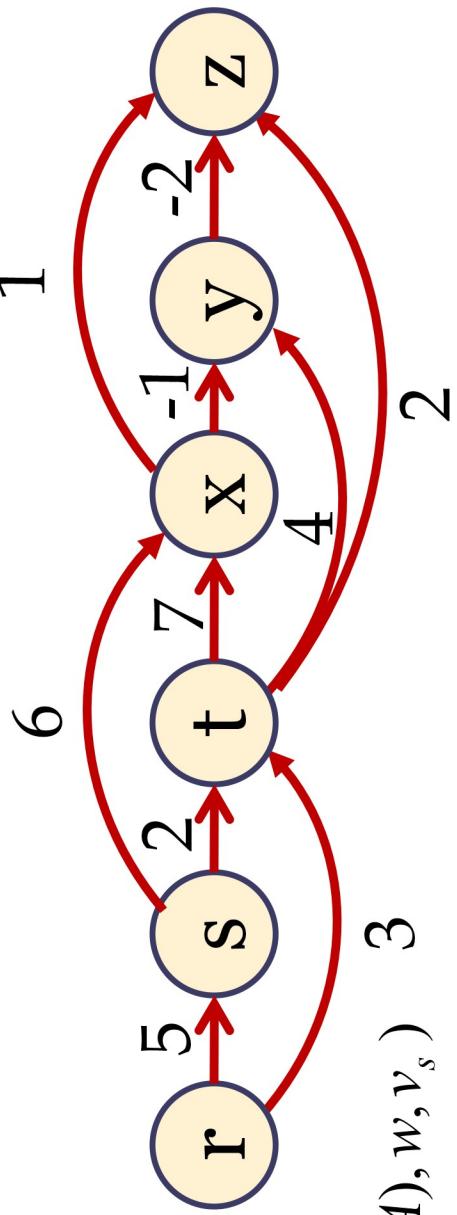
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

$relaxa(u, v, w)$

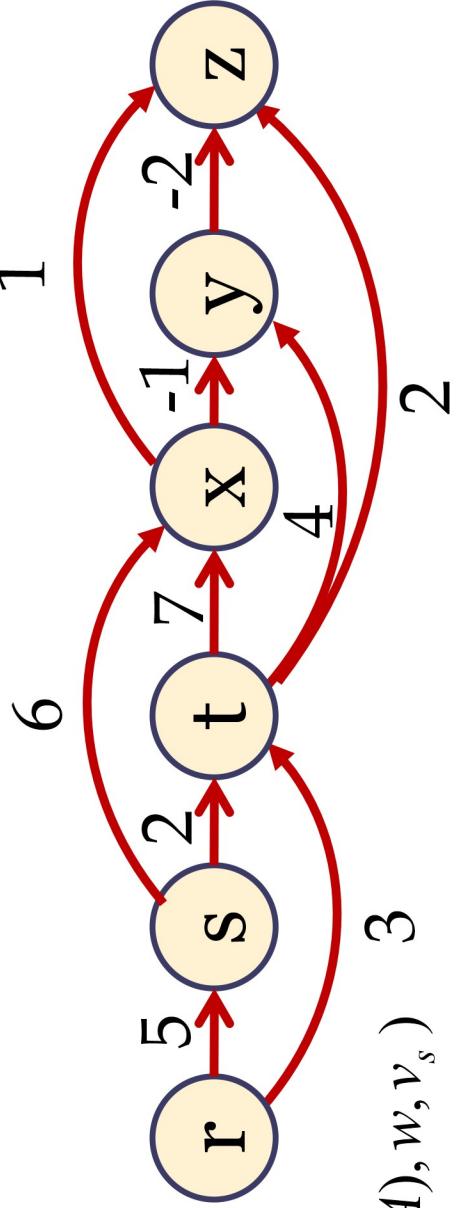
fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoM inímo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

 para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

 relaxa(u, v, w)

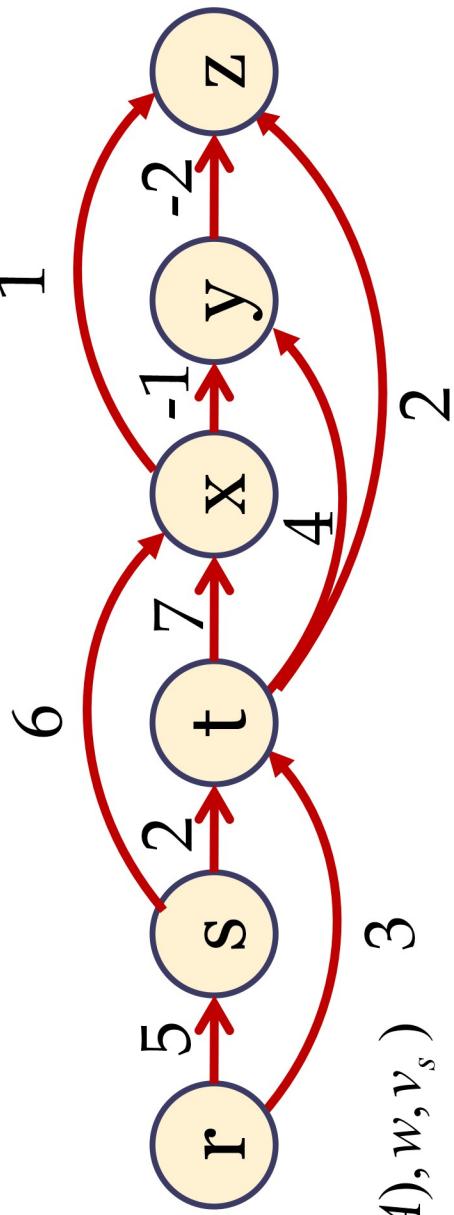
 fim para

fim para

fim.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMínimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

$relaxa(u, v, w)$

fin para

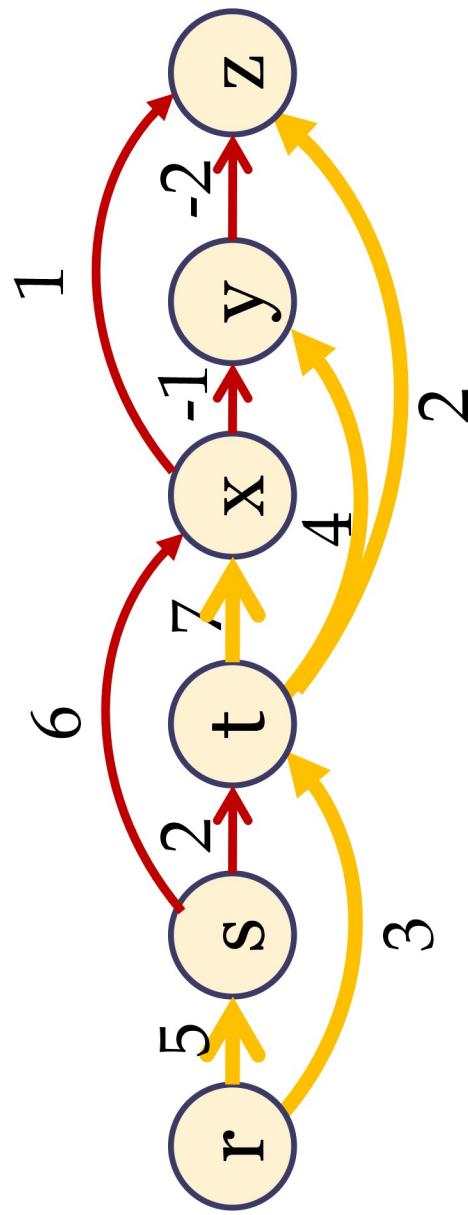
fin para

fin.

vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t
K	r	s	t	x	y	z

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Solução:



vértice	r	s	t	x	y	z
d	0	5	3	10	7	5
π	NULL	r	r	t	t	t