2

Matrices

2.1 Álgebra de matrices

1. En cada uno de los siguientes casos calcular AB y BA si es posible.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$

2. Considere la matriz

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Demostrar que $T_{\theta_1}T_{\theta_2} = T_{\theta_1+\theta_2}$.

3. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Verificar que $A^2 \neq 0$ pero $A^3 = 0$.

4. Verificar que
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = I.$$

5. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar X^3 para
$$X = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

6. Hallar todas la matrices X de tamaño 2×2 tal que $X^2 = X$.

7. Una aerolínea presta servicios en 5 ciudades, digamos A, B, C, D y H. La ciudad H es el centro de operaciones, así que existen vuelos directos de ida y vuelta de H al resto de las ciudades. En cambio, entre las otras ciudades solo hay vuelos directos A⟶C, C⟶D, D⟶B y B⟶A. El diagrama de conectividad se puede representar por la matriz
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
donde, po ejemplo, el valor $C_{21} = 1$ nos dice que hay una conexión directa de B a A, mientras que $C_{31} = 0$ significa que no hay vuelo directo de D a A.

Calcular C^2. ¿Qué información nos da esta matriz?

2.2 Rango de una matriz

1. Determinar una forma escalonada, rango y su forma canónica de cada una de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Hallar el rango de la matríz para todos los valores posibles de λ.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3 Determinante y matriz inversa

1. En cada uno de los siguientes ejercicios hallar la inversa si es posible.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Hallar la matríz X en la siguiente ecuación.

$$X\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Suponga que A, B y $A+B$ son matrices invertibles. Demostrar que

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

4. Sean A y B matrices $n \times n$. Demuestre que si $(I - AB)$ es invertible, entonces $I - BA$ es invertible y

$$(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A.$$

5. Encontrando el valor de las siguientes determinates

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

verificar que $d_4 = d_3 + d_2$.

6. Para las siguientes matrices calcular su determinante.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Sea A una matriz 4×4 con $\det(A) = 2$ y B una matriz 3×3 tal que $\det(B) = -2$. Hallar las siguientes determinantes

(a) $\det(2A)$ (c) $\det(A^2)$ (e) $\det(A^*)$

(b) $\det(-A)$ (d) $\det(A^{-1}+A^*)$ (f) $\det(B^*B^2)$

8. Muestre que

(a) $\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(b) $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)+2d$

9. Se dice que una matríz A es ortogonal si $AA^T = I$. Demuestre que toda matríz ortogonal tiene determinante 1 o -1.

10. Sea A una matríz 2×2 y sea $f(x) = x^2 - ax + b$, donde $a = \mathrm{Tr}A$ y $b = \det(A)$. Muestre que $f(A) = 0$.

11. Supponga que X es una matríz $n \times n$ tal que $X^2 + X + I = 0$. Hallar $\det(X)$.

2.4 Valores y vectores propios

1. Para cada matriz hallar el polinomio característico, valores propios, vectores propios, indicar la multiplicidad algebraica y geométrica.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

2. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -11 & -8 \\ -10 & 11 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

   En su caso, encontrar la matriz no singular P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

   ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c de modo que A sea diagonalizable?

2.5 Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver el siguiente sistema por Regla de Cramer o eliminación de Gauss.

   (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2. Resolver los siguientes

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ -6x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 &= -7 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 5x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 6 + 13x_4 + 3x_5 &= 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_4 + 21x_5 &= 28 \end{aligned}$$

3. Encontrar la solución en terminos de λ.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Considere una economía que consiste de tres sectores: agricultura (A), manufactura (M) y energía (E). En general, parte de la producción de un sector se consume por los tres sectores y el resto se destina para la demanda de los consumidores externos. Supongamos que la relación entre los tres sectores y la demanda externa está dado por la siguiente ecuación.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

   Esto significa: para producir una unidad de producto agrícola se requiere 0.2 unidades de la misma, 0.2 unidades de un bien manufacturado y 0.1 unidades de energía. Etc. ¿Cuanto debería ser la producción de cada sector para satisfacer una demanda externa $d = (80, 60, 50)$?

5. Dividamos una población en tres grupos: los de edad menor a 20, con edad entre 20 y 39 y los que tienen edad entre 40 y 59. Supongamos que, en el año que inicia el estudio, los grupos poseen una cantidad de individuos x_0, y_0 y z_0, respectivamente. La población en el siguiente año estará dado por $x_1 = 0.04x_0 + 1.1y_0 + 0.01z_0$ (reproducción), $y_1 = 0.98x_0$ y $z_1 = 0.92y_0$ (sobrevivencia). La *matriz de Leslie* tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 1.1 & 0.01 \\ 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

   Sea $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$. Determinar el estado de la población en el cuarto año.

6. Considere una economía con tres bienes (q_1, q_2, q_3). Sea Y el ingreso. Supongamos que la demanda de los productos está dado por

$$\begin{aligned} q_1 &= -0.05p_1 + 0.02p_2 - 0.01p_3 + 0.02Y \\ q_2 &= 0.01p_1 - 0.04p_2 + 0.01p_3 + 0.04Y \\ q_3 &= -0.03p_1 + 0.02p_2 - 0.06p_3 + 0.01Y \end{aligned}$$

y la oferta de dichos productos es

$$\begin{aligned} q_1 &= -20 + 0.2p_1 \\ q_2 &= -14 + 0.3p_2 \\ q_3 &= -25 + 0.1p_3 \end{aligned}$$

Suponga que el ingreso es $Y = 1000$. Hallar el precio de equilibrio del mercado.