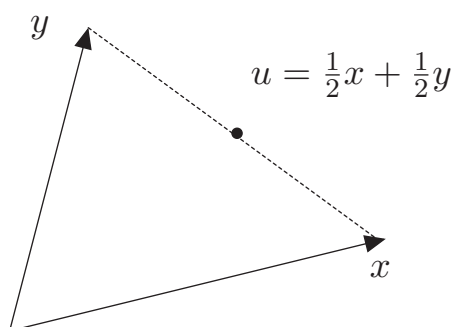


1

Espacio euclidiano n -dimensional

1.1 Álgebra de vectores

1. En la figura se muestra a $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Marque los puntos $u = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$, $u = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$ y $u = x + y$.



2. Sean $x = (1, 2, 3)$, $y = (-3, 1, -2)$ y $z = (2, -3, -1)$. Calcular $x + y + z$ y $2x + 2y + z$.

1.2 Combinación lineal e independencia lineal

1. Expresar w como combinación lineal de los vectores u y v .

- (a) $u = (7, 2)$, $v = (3, 1)$, $w = (7, 5)$.
- (b) $u = (1, 2)$, $v = (3, 1)$, $w = (14, 8)$.
2. Expresar v como combinación lineal de los vectores v_1 , v_2 y v_3 .
- (a) $v = (7, 16, -3)$, $v_1 = (4, 2, 1)$, $v_2 = (4, -3, 2)$, $v_3 = (1, 3, -1)$
- (b) $v = (4, 7, 0)$, $v_1 = (4, 2, 1)$, $v_2 = (4, -3, 2)$, $v_3 = (0, 5, -1)$
3. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores son linealmente independientes.
- (a) $(1, 1), (-3, 2)$
- (b) $(-1, 1, 0), (0, 1, 2)$
- (c) $(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)$
4. Sin realizar cálculos, indicar por qué los siguientes vectores son linealmente dependientes.
- (a) $(1, 2), (3, 2), (5, 6)$
- (b) $(1, 0, 2), (1, 1, -1), (3, 1, 3), (1, 3, 4)$
5. Determinar el valor de a de tal manera que los vectores $(0, 1, a)$, $(a, 1, 0)$ y $(1, a, 1)$ sean linealmente independientes.
6. Demostrar que el conjunto $\{(1, 1), (-1, 2)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 y hallar las coordenadas del vector $(1, 0)$ con respecto a dicha base.
7. Sean (a, b) y (c, d) vectores en \mathbb{R}^2 . Si $ad - bc = 0$, demuestre que los vectores son linealmente dependientes. Si $ad - bc \neq 0$, demuestre que son linealmente independientes.
8. Suponga que u y v son vectores tal que $v \neq 0$. Demuestre que existe un escalar α tal que $w = \alpha v$.
9. Suponga que los vectores u, v y w son linealmente independientes. Demuestre que los vectores $u + v - 2w$, $u - v - w$ y $u + w$ también son linealmente independientes.

10. Dado n puntos de masa m_i , $i = 1, 2, \dots, n$ con vector posición v_i , respectivamente, el centro de masa está definido como el punto cuyo vector posición es $v = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i$ donde $M = \sum_{i=1}^n m_i$. Si tres puntos de masa están dados por $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (1, 5, -6)$ y $v_3 = (-2, -5, 4)$, encontrar v .

Una aplicación de este concepto en la economía se puede ver en la liga www.zerohedge.com/news/journey-economic-center-world.

1.3 Rectas y planos

1. Dibujar las rectas:

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

(b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}.$

(c) $2x + 3y = -1.$

¿A qué distancia del origen está cada recta?

2. Dibujar las rectas:

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

(b) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}.$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ y es ortogonal a $(1, 1)$.

4. Determinar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(1, 2)$. Muestre además que el punto $(4, 5)$ está en dicha recta.

5. Determinar la ecuación vectorial de la recta $2x + 2y + 3 = 0$. Verificar que el punto $(-1/2, -1)$ está en la recta.

6. Hallar la intersección de la recta $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$ con el plano $4x - 3z = 0$.

7. Determinar la ecuación cartesiana de la recta que resulta de intersectar los planos:

(a) $x + y + z = 1, \quad 2x - y + z = 1.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Considere el plano que pasa por los puntos

$$(1, 2, 3), \quad (-1, 1, 2), \quad (2, 1, 3).$$

- (a) Hallar su ecuación cartesiana y paramétrica.
 (b) Verificar que el punto $(7, 2, 5)$ está a dicho plano.
 (c) ¿A qué distancia está el plano del origen?
9. La línea de segmento que une dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define por $x(1 - t) + yt, 0 \leq t \leq 1$. Dibujar el segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Verificar que el punto $(3/2, 3/2)$ está en el segmento.
10. En el mercado existen tres tipos de bien x, y, z . El sistema de precios es $p = (2, 3, 4)$. Con un presupuesto de 100\$, invirtiendo todo, ¿cuánto se pueden comprar? Graficar las posibles combinaciones.

1.4 Norma y producto escalar

- Sean $x = (1, 2, -3)$ y $y = (-1, 3, 5)$, verificar la desigualdad de Cauchy–Bunyakowsky–Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
- Suponga que a, b y c son números reales tal que $a + b + c = 0$. Calcule el ángulo entre los vectores $x = (a, b, c)$ y $y = (c, a, b)$.
- Si $\|x\| = 5$ y $\|x\| = 3$, ¿Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande de $\|x - y\|$?
- Partiendo de los vectores $x = (1, 2, 3)$ y $y = (1, -1, 3)$, encontrar dos vectores ortogonales (calcular la proyección ortogonal de x sobre y). Una vez que encuentre los dos vectores ortogonales,

digamos u y v , agregue el vector $z = (1, 1, 1)$. Verificar que el vector

$$w = z - \frac{\langle z, u \rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle z, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

es ortogonal a u y v . Este proceso se conoce como el método de ortogonalización de Gram–Schmidt.

5. Demostrar las siguientes propiedades:

- (a) $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$,
- (b) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$,
- (c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

6. Sean $x = (1, 2, -3)$, $y = (-1, 3, 5)$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$. Verificar para $p = 1$ y $p = \infty$ si las siguientes propiedades se cumplen:

- (a) $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$,
- (b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

7. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

- (a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$;
- (b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$ para todo $p \geq 1$.

8. Para cada sistema de precios y presupuesto, dibujar el conjunto bienes (canasta de bienes) asequibles

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle p, x \rangle \leq k\}.$$

- (a) $p = (2, 5)$, $k = 50$.
- (b) $p = (5, 2, 10)$, $k = 100$.

9. Para cada canasta de bienes y presupuesto, dibujar el conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}_+^n : \langle p, x \rangle \geq k\}.$$

- (a) $x = (20, 2)$, $k = 50$.
- (b) $x = (30, 50, 20)$, $k = 100$.

10. Suponga que existen dos algoritmos para predecir el tipo de cambio Dolar/Peso de mañana. ¿Cómo saber cual predice mejor? Podemos calcular con ambos, esperamos el tipo de cambio real y comparamos los errores. Sin embargo, este único experimento no nos garantiza que el mismo algoritmo sea mejor en todos los casos. Para reducir ese riesgo, realizamos n observaciones para cada algoritmo y calculamos el vector de errores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Luego, por ejemplo, comparamos los promedios

$$\frac{1}{n} (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} (|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|).$$

Lo cual resulta equivalente a comparar el vector x con el vector y mediante la norma $\|\cdot\|_1$.

Si $x = (5, 0, 0)$ y $y = (2, 2, 2)$ determinar cual de los algoritmos predice mejor de acuerdo a las normas $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.