

# **Bonyolultságelmélet jegyzet**

Készítették Grolmusz Vince előadásai alapján a 2025/25. évi hallgatók

(Nem hivatalos lektorátlan verzió)

2025. ősz

# Contents

1	Kommunikációs játékok .....	3
2	NP-n túl .....	9
2.1	Polinomialis hierarchia .....	9
2.2	PSPACE teljesség .....	12
3	Interaktív bizonyítások .....	16
3.1	Zero Knowledge Proofs .....	21
4	Véletlen bonyolultság osztályok .....	23

# 1 Kommunikációs játékok

Ennek a fejezetnek a nagy része (majdnem minden) a számítástudomány jegyzetből lett átemelve.

Ezt a fejezetet újra kell olvasni és megnevezni mekkora az átfedés a számítástudományon elhangzottak és a bonyolultságon elhangzottak között. A fő tettek megtalálhatók bizonyításokkal: Teglalapp fedes, Mehlhorn–Schmidt, AUY

Cél: van két játékos, akik bármit ki tudnak számolni gyorsan, de egymás között nehezen kommunikálnak.

## Definíció 1.1

## Kommunikációs játék

Adott  $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  és  $x, y \in \{0, 1\}^n$ . A ismeri  $x$ -et, de  $y$ -t nem, B ismeri  $y$ -t, de  $x$ -et nem. Ki akarják számolni  $f(x, y)$ -t. A költség az A és B között (bármely irányban) kommunikált bitek száma.

Akkor tekintjük  $f(x, y)$ -t kiszámoltnak, ha az egyik játékos ismeri  $f(x, y)$ -t, és a másik játékos tudja, hogy az egyik tudja.

## Definíció 1.2

## Protokoll költsége

A  $P$  protokoll mellett  $f$  költsége a legrosszabb  $(x, y)$  input páron  $\kappa_P(f)$ .

## Megjegyzés

Megkövetelhetnénk, hogy mindketten tudják  $f(x, y)$ -t, ez 1 bit különbséget jelentene csak legfeljebb.

## Definíció 1.3

## Protokoll

A közös számolási módszer szabályait, hogy mikor ki, és milyen bitet küld protokollnak nevezzük. (Ez az algoritmus megfelelője több játékos esetén.)

## Példa

Legyen  $f$  tetszőleges, ekkor A elküldheti  $x$ -et B-nek, aki „ingyen” kiszámolja  $f(x, y)$ -t. Ennek a költsége  $n$ .

## Példa

## ID-függvény

Legyen

$$\text{ID}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = y \\ 0, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

Ekkor a fenti  $P$  protokollal  $\kappa_P(\text{ID}) = n$  teljesül.

## Definíció 1.4

## Kommunikációs bonyolultság

$\kappa(f)$  a  $\kappa_P(f)$ -ek minimuma az összes  $f$ -et kiszámoló  $P$  protokollon.

### Tétel 1.5

$$\kappa(\text{ID}) = n.$$

Ennek a bizonyításához kell a következő definíció és tétel.

### Definíció 1.6

### Kommunikációs mátrix

Az  $f$  kommunikációs mátrixa az az  $M_f \in \{0, 1\}^{2^n \times 2^n}$ , amelynek sorai  $x$ -szel, oszlopai  $y$ -nal vannak indexelve, és az  $x$ -hez tartozó sor  $y$ -hoz tartozó oszlopában  $f(x, y)$  szerepel.

### Megjegyzés

A továbbiakban a  $\log$  mindig a 2-es alapú logaritmust jelenti.

### Tétel 1.7

### Mehlhorn–Schmidt

$\kappa(f) \geq \log r(M_f)$ , ahol  $r(M_f)$  az  $M_f$  mátrix rangját jelöli.

**Proof:** Legyen  $P$  egy adott protokoll. Tegyük fel, hogy  $A$  kezd. Ekkor  $A$  kommunikál egy bitet. Ez rögzített  $P$  protokoll mellett bizonyos  $x$ -ekre 0, bizonyos  $x$ -ekre 1. Ezzel az  $M_f$  mátrixot két részre bontja: az egyik részben azon sorok vannak, amelyekre 0-t mond, a másikon azok, amelyekre 1-et. Ezek közül az egyik sorrangja  $\geq \frac{1}{2} r(M_f)$ .

Ezt ismételjük addig, amíg  $A$  lép. Amikor  $B$  lép, akkor ugyanez elismételhető oszloprangra, de egy mátrix sor- és oszloprangja megegyezik. Ha  $x$  és  $y$  olyan, hogy minden lépésnél a nagyobb rangú részmátrixot adják meg, akkor  $k$  lépés után a részmátrix rangja  $\geq 2^{-k} r(M_f)$ .

Tegyük fel, hogy a  $k$ . lépésben vége van a játéknak. Ekkor szimmetriaokokból feltehető, hogy  $A$  tudja  $f(x, y)$ -t, és  $B$  tudja, hogy  $A$  tudja. Mivel  $A$  tudja  $f(x, y)$ -t, az így kapott részmátrix minden sora homogén, azaz vagy csupa 0-t, vagy csupa 1-et tartalmaz. Ha pedig egy sor nem homogén, akkor  $A$  nem tudhatja biztosan  $f(x, y)$ -t. Hasonlóan, az, hogy  $B$  tudja biztosan  $f(x, y)$ -t, az azzal ekvivalens, hogy a kapott részmátrix minden oszlopa homogén.

Mivel homogén részmátrix rangja 1, az előbbi egyenlőtlenség szerint  $1 \geq 2^{-k} r(M_f)$ , azaz  $2^k \geq r(M_f)$  fog teljesülni minden olyan  $(x, y)$  párra, amelyeket  $P$   $k$  lépésben számol ki.  $\square$

### Következmény 1.8

Innen könnyen kijön, hogy  $\kappa(\text{ID}) = n$ , ugyanis  $M_{\text{ID}} = I_{2^n}$ , és  $r(I_{2^n}) = 2^n$ , tehát  $n \leq \kappa(\text{ID})$  a Mehlhorn–Schmidt-tétel miatt. Másrészt láttuk, hogy  $\kappa(f) \leq n$  minden  $f$ -re, így  $\kappa(\text{ID}) = n$ .

### Megjegyzés

Felső becslés nem ismeretes  $\kappa(f)$ -re. Lovász és Suchs nevéhez fűződő sejtés szerint  $\exists c > 0$  :  $\kappa(f) \leq \log^c(r(M_f))$ . Tudjuk, hogy  $c > 2$  kell hogy teljesüljön. Ismert továbbá, hogy  $\kappa(f) \leq r(M_f)$ .

### Következmény 1.9

$\text{DISJ}(x, y) = \chi_{\{x \cdot y = 0\}}$ , a halmazdiszjunktsági feladat. Akkor erre is  $\kappa(\text{DISJ}) = n$ .

**Proof of Következmény:** Elemszám szerint rendezve az  $n$  elemű halmaz részhalmazait a sorokban, és a komplementereiket az oszlopokban

$$M_{\text{DISJ}} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

felsőháromszög alakú, vagyis  $\kappa(\text{DISJ}) = n$

□

### Definíció 1.10

### Nemdeterminisztikus kommunikációs bonyolultság

Alíz ismeri  $x$ -et, Bob ismeri  $y$ -t, E.T. ismeri mindkettőt, és  $f$ -et is. Utóbbi meg akarja győzni a játékosokat, hogy tudja. Ezt egy bizonyítással teszi, amit függetlenül A-nak, és B-nek is el kell fogadnia. Egy fix E.T. által az  $(x, y)$  párra adott bizonyítás hossza, amikor azt akarja bizonyítani, hogy  $f(x, y) = 1$  legyen  $\kappa_1^{\text{E.T.}}(f(x, y))$ . Legyen továbbá

$$\kappa_1^{\text{E.T.}}(f) := \max_{\{x, y: f(x, y) = 1\}} \kappa_1^{\text{E.T.}}(f(x, y)),$$

végül

$$\kappa_1(f) = \min_{\text{E.T.}} \kappa_1^{\text{E.T.}}(f)$$

a legjobb E.T. által a legrosszabb esetben adott bizonyítás hossza. Hasonlóan definiáljuk a  $\kappa_0(f)$ -et is.

### Megjegyzés

$\max \kappa_0(f), \kappa_1(f) \leq \kappa(f)$  teljesül, hiszen reprodukálhatja az adott esetben a protokoll által megszabott kommunikációját

### Példa

Ha  $x \neq y$ , akkor az  $(i, x_i = 0)$  pár (ahol  $y_i = 1$ ) megadása  $\log(n) + 1$  bit hosszú, és bizonyítja, hogy az ID feladat nem teljesül. Egyenlőségre nem látszik kapásból hasonló jó bizonyítás.

### Tétel 1.11

### Az ND kommunikációs bonyolultság jellemzése fedő téglalapokkal

$\kappa_1(f)$  az a legkisebb  $t$  szám, hogy  $M_f$  egyesei lefedhetők  $2^t$  darab csupa 1-es részmátrixsal

### Megjegyzés

$M_f$ -et már ismerjük, a kommunikációs mátrix. A tételben részmátrix alatt az oszlopok, és sorok egy-egy részhalmazait kiválasztva, a metszetekből álló részt értjük. Figyelem, ez nem feltétlenül egy összefüggő téglalap!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-ben az első és utolsó sor, és oszlopok által meghatározott rész is egy ilyen csupa egyes részmátrix.

### Következmény 1.12

Láttuk, hogy  $M_{ID} = I_{2^n}$ , ezt pedig csak úgy fedhetjük le csupa 1-es téglalapokkal, ha külön-külön kiválasztjuk az átlóelemeket. Következik, hogy  $\kappa_1(ID) = n$ .

**Proof of Az ND kommunikációs bonyolultság jellemzése fedő téglalapokkal:**

$(\kappa_1(f) \leq t)$

Tekintsük a fedő téglalapokat. Alíznek van egy sora, Bobnak egy oszlopa. A protokollban megállapodnak a  $2^t$  darab fedőmátrix egy sorrendjében. E.T. bizonyítása az lesz, hogy hanyadik rész mátrixban van az  $(x, y)$  metszet, ez  $t$  bittel kódolható, leellenőrzik, hogy benne van-e az adatuk, és mivel ez csupa egyesből áll, így szükségszerűen  $f(x, y) = 1$ . %feltesszük, hogy E.T. nem hazudik?

$(\kappa_1(f) \geq t)$

Legyen

$H_\alpha = \{(x, y) : A\text{-nál } x, B\text{-nél } y \text{ van, és } \alpha \text{ üzenetet hallják, akkor elfogadják a bizonyítást}\}.$

Ha  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H_\alpha$ , akkor  $(x_1, y_2), (x_2, y_1) \in H_\alpha$ , hiszen az  $\alpha$  bizonyítást Alíz elfogadta  $(x_1, y_1)$ -re, az ő nézőpontjából semmi nem különbözteti meg a szituációt attól, mintha  $(x_1, y_2)$  lenne a felállítás, ezt pedig Bob is elfogadja, hiszen számára  $(x_1, y_2)$ , és  $(x_2, y_2)$  ugyanolyan, és ez utóbbit elfogadta  $\alpha$ -ra. Következik, hogy minden  $\alpha$ -ra  $H_\alpha$  megfelel egy rész mátrixnak. Ha E.T. legfeljebb  $t$  bitből bizonyítani tudja, hogy  $f(x, y) = 1$ , ez szolgáltat lazanyát és  $2^t$  darab csupa egyes rész mátrixot. □

Randomizálva azonban gyorsan is lehet a következő Simon és Rabin nevéhez fűződő protokollal. A generál egy véletlen  $p$  prím  $\in \{1, \dots, n^2\}$  (ahol  $\log x, \log y \leq n$ ), és elküldi az  $(x \bmod p, p)$  üzenetet, B pedig leellenőrzi, hogy  $x \equiv y \bmod p$  teljesül-e, és ezt mondjuk százszor megismétlik.

Ha egyszer is az teljesül, hogy inkongruensek, akkor az eredeti számok sem lehettek egyenlőek, ha mindig kongruensek, és mégsem egyenlőek, akkor százszor teljesült az, hogy  $p | x - y \neq 0$ .

$A \leq 2^n$  számoknak legfeljebb  $n$  darab prímosztója lehet, és  $n^2$ -ig nagyjából  $\pi(n^2) \sim \frac{n^2}{2 \log(n)}$  darab prím van. Annak a valószínűsége, hogy egyszer teljesül a kongruencia

$$\mathbb{P}(p | x - y) \leq \frac{n}{\frac{n^2}{2 \log(n)}} = \frac{2 \log n}{n} \rightarrow 0.$$

Egy kommunikáció  $4 \log n$  bitet küld, ergo összesen  $400 \log n$  bitnyi kommunikáció történik.

**Nem (teljesen) triviális protokollok:**

### Példa

Tekintsünk egy fagráfot, aminek van két részfája. Kérdés, hogy az  $n$  csúcsú  $T$  fa  $T_1, T_2$  részfáinak van-e közös csúcsa. Alíz kapja  $T_1$ -et, Bob  $T_2$ -t értelemszerűen, és mindketten ismerik  $T$ -t. Ez eldönthető lenne a DISJ játék speciális eseteként, de adunk egy okosabb protokollt.

Alíz megmondja  $T_1$  egy tetszőleges  $v$  csúcsát (ez ugye  $\log n$  bit kommunikáció). Majd Bob kiszámolja  $T_2$ -ben a  $v$ -hez legközelebbi  $w$  csúcsot, mivel fában egyértelmű út van két csúcs között, ez értelmes. Ezt visszaküldi Alíznek, ellenőrzi, hogy  $w \in T_1$ , ha igen, ez metszetbeli, és készen vagyunk, ha nem, akkor azt mondja, hogy a két fa diszjunkt. Ugyanis, ha a legközelebbi  $w$  pont nem része a fának, de egy további  $u$  pont része lenne  $T_1$ -nek, az  $uw$  szakasz  $T_2$ -ben van, az  $uv$  szakasz pedig  $T_1$ -ben, vagyis  $u$  közelebb van  $v$ -hez, mint  $w$ .

### Példa

Most Alíz és Bob két részgráfot kap egy  $G$  gráfból úgy, hogy  $G_A$  független csúcsokból áll,  $G_B$  pedig egy teljes részgráf. Kérdés, hogy van-e metszet?

Világos, hogy ha van, legfeljebb 1 pontból állhat.

1. Alíz megnézi, hogy van-e legalább  $\frac{n}{2}$  fokú  $v$  csúcs a gráfjában, ha igen, akkor  $(1, v)$ -t küldi el, ha nem, 0-t.
2. Bob megnézi, hogy van-e  $< \frac{n}{2}$  fokú  $w$  csúcs  $G_B$ -ben, ha igen,  $(1, w)$ -t küld, ha nincs, 0-t.

Ezek után Bob tudja, hogy  $G_A$   $v$ -ből, és a nem-szomszédaiából áll, ez legfeljebb  $\frac{n}{2}$  csúcsból áll, és iteratíven folytathatjuk ezt az eljárást amíg lehet. Ha Bob talál egy kis fokszámú  $w$  csúcsot, akkor az ő gráfjának a többi csúcsa ennek a szomszédai közül kerül ki, és ismét rekurzíven folytatható az eljárás. Mi történik, ha mindketten 0-t küldenek? Alíz gráfjában minden csúcs kisebb mint  $\frac{n}{2}$  fokú,  $G_B$ -ben pedig minden csúcs legalább  $\frac{n}{2}$  fokú, ez a két feltétel kizárja egymást, így a két gráf diszjunkt. Addig ismételtetik a fenti lépést, amíg nem mondanak mindketten nullát. Egy lépés  $\log n + 1$  bit, és  $\log n$  lépésben persze kimerítik a gráfot, vagyis  $O(\log^2 n)$  bitre van összesen szükség.

### Tétel 1.13

Aho–Ullman–Yanakakis

Minden  $f$ -re

$$\kappa(f) \leq (2 + \kappa_0(f))(2 + \kappa_1(f)).$$

### Lemma 1.14

Ha  $M$  egy  $0-1$  mátrix,  $H$  egy azonosan nulla részmátrixa,  $H$  sorai alkossák az  $A$ , oszlopai a  $B$  mátrixot, ekkor  $\rho(A) + \rho(B) \leq \rho(M)$ , ahol  $\rho(M)$  a sor/oszloppermutációval képezhető legnagyobb négyzetes felsőháromszög részmátrix méretét jelöli, aminek a főátlója csupa 1-ből áll.

**Proof of Lemma:** A lemma azon múlik, hogy  $A$  és  $B$ -t külön-külön mozgathatjuk, a csupa nulla metszet nem fog változni, és a másik mátrixhoz nem nyúltunk hozzá, diszjunkt sorokból/oszlopokból áll. Egy permutációval megfelelő helyre visszük  $A$ -ban a maximális  $U_A$  felsőháromszög mátrixot, ezt  $B$ -ben is elvégezve ( $U_B$ ) kapunk egy  $\begin{bmatrix} U_B & \\ 0 & U_A \end{bmatrix}$  felsőháromszöget  $M$ -ben.

$$\left[ \begin{array}{ccc} & \boxed{B_1} & \\ \boxed{A_1} & 0 & \boxed{A_2} \\ & \boxed{B_2} & \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} & \boxed{B_1} & \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_1} & U_B & & & \\ \boxed{A_1} & 0 & 0 & U_A & \boxed{A_2} & \\ \boxed{A_1} & 0 & 0 & \boxed{A_2} & \boxed{A_2} & \\ & \boxed{B_2} & \boxed{B_2} & & & \end{array} \right]$$

□

**Proof of Aho–Ullman–Yanakakis:** Világos, hogy  $\rho(M_f) \leq r(M_f)$ , és  $\log \rho(M_f) \leq \kappa_1(f)$  teljesülnek, mert egy csupa 1 főátlójú felsőháromszög mátrix teljes rangú, illetve ref{NDKB jell} miatt.

Indukcióval belátjuk, hogy  $\kappa(f) \leq (2 + \log \rho(M_f))(2 + \kappa_0(f))$ . Ha  $\rho(M_f) = 1$ , akkor nem is kell kommunikálni, mert egy ilyen mátrixban vagy csak egyesek állnak, vagy pontosan egy sorában vagy oszlopában vannak egyesek. Az általános lépésben tekintsük a kommunikációs mátrix nullásainak a fedését  $2^{\kappa_0(f)}$  darab csupa nulla részmátrixszal. Alíz megnézi, hogy fedí-e az ő  $x$  inputjának egy részét olyan csupa 0 részmátrix, hogy a hozzá tartozó sorokból alkotott  $A$  mátrixra  $\rho(A) \leq \frac{\rho(M_f)}{2}$ , ha igen, akkor elküldi az  $(1, a \text{ csupa nulla részmátrix sorszáma})$  üzenetet, ez legfeljebb  $1 + \kappa_0(f)$  bit kommunikáció, ha nincs ilyen részmátrix, akkor 0-t küld. Bob hasonlóan megnézi, hogy van-e az  $y$ -jához olyan fedő csupa 0 mátrix, amely oszlopaihoz tartozó  $B$  mátrixra  $\rho(B) \leq \frac{\rho(M_f)}{2}$ , ha igen  $(1, a \text{ fedő mátrix sorszáma})$ , ha nincs ilyen, akkor pedig 0-t küld.

Mi történik, ha mindketten 0-t küldenek?

Akkor  $f(x, y) = 1$ , hiszen ha 0 lenne, akkor a metszetüket lefedné egy csupa 0 részmátrix, de az eddigi kommunikáció szerint az ezen fedőmátrixhoz tartozó sorok, és oszlopok  $\rho$  értékei összesen többet adnak, mint  $\rho(M_f)$ , ellentmondásban a lemmánkkal. □

### Definíció 1.15

### Kommunikációs bonyolultságok

- $f \in P^{CC}$ , ha  $\exists c > 0 : \kappa(f) \leq \log^c n$ .
- $f \in NP^{CC}$ , ha  $\exists c > 0 : \kappa_1(f) \leq \log^c n$ .
- $f \in co-NP^{CC}$ , ha  $\exists c > 0 : \kappa_0(f) \leq \log^c n$ .

A fenti tétel következményeként adódik, hogy  $P^{CC} = NP^{CC} \cap co-NP^{CC}$ .

Láttuk továbbá, hogy  $NP^{CC} \neq co-NP^{CC}$ , mert ID benne van a jobb oldalon, de a balban nincs.

$P^{CC} \neq co-NP^{CC}$  szintén az ID miatt (így  $P^{CC} \neq NP^{CC}$  is teljesül).



## 2 NP-n túl

### 2.1 Polinomialis hierarchia

#### Definíció 2.1

#### Polinomiális reláció

Azt mondjuk, hogy  $P(x, y_1, y_2, \dots, y_l)$  egy polinomiális reláció, ha  $\exists i$  úgy, hogy  $\forall i : |y_i| \leq |x|^c$  és  $P(x, y_1, \dots, y_i)$  kiszámolható  $|x|$ -ben polinomimális időben.

#### Definíció 2.2

#### $\Sigma_i$

Tetszőleges  $L$  nyelvre  $L \in \Sigma_i \Leftrightarrow \exists P(x, y_1, \dots, y_i)$  polinomiális reláció úgy, hogy  $x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_i$  úgy, hogy  $P(x, y_1, y_2, \dots, y_i)$  teljesül. Ahol  $Q$  a következőképpen van definiálva:

$$Q = \begin{cases} \forall & \text{ha } i \text{ paros} \\ \exists & \text{ha } i \text{ páratlan} \end{cases}$$

#### Definíció 2.3

#### $\Pi_i$

Tetszőleges  $L$  nyelvre  $L \in \Pi_i \Leftrightarrow \exists P(x, y_1, \dots, y_i)$  polinomialis relacio úgy, hogy  $x \in L \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots \tilde{Q} y_i$  úgy, hogy  $P(x, y_1, y_2, \dots, y_i)$  teljesül. Ahol  $\tilde{Q}$  a következőképpen van definiálva:

$$\tilde{Q} = \begin{cases} \forall & \text{ha } i \text{ páratlan} \\ \exists & \text{ha } i \text{ paros} \end{cases}$$

#### Példa

Pár nevezetes bonyolultsági osztály amit már ismerünk:

1.  $\text{NP} = \Sigma_1$
2.  $\text{co-NP} = \Pi_1$
3.  $\text{P} = \Sigma_0 = \Pi_0$

#### Megjegyzés

1. Minden  $i$ -re  $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ . Valasszuk úgy a polinomimalis relaciót hogy az utolsó változótól ne függjön.
2. Minden  $i$ -re  $\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$ . Valasszuk úgy a polinomimalis relaciót hogy az első változótól ne függjön.
3. Minden  $i$ -re  $\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ .
4. Minden  $i$ -re  $\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$ .

Ezen osztályokat a következő hierarchiával tudjuk vizuálisan jellemezni.

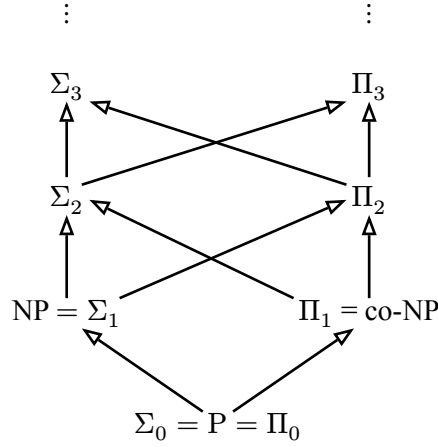


Figure 1: Polinomiális hierarchia vizualizáció

#### Definíció 2.4

#### Polinomialis Hierarchia

$$PH = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$$

#### Definíció 2.5

$$INDEPENDENT := \{(G, m) : \alpha(G) \geq m\}$$

azaz, azon  $G$  grafok és  $m$  számok parosai, melyekre  $G$  függetlenségi száma nagyobb mint  $m$ .

#### Definíció 2.6

$$EXACT\_INDEPENDENT := \{(G, m) : \alpha(G) = m\}$$

azaz, azon  $G$  grafok és  $m$  számok parosai, melyekre  $G$  függetlenségi száma pontosan  $m$ .

#### Állítás 2.7

$$EXACT\_INDEPENDENT \in \Sigma_2$$

**Proof:**  $\exists H \subseteq V(G)$  független csucshalmazz és  $|H| = m$

$\forall H' \subseteq V(G)$  csucshalmazra, ahol  $|H| = m + 1$  mar  $H'$  összefüggo. □

#### Megjegyzés

A letezés ( $\exists$ ) és a mindent ( $\forall$ ) nem kell polinomialis időben számolni, csak a  $H$ -t és  $H'$ -t kell polinomialis időben ellenőrizni.

#### Tétel 2.8

Ha  $\exists i \geq 1$  amire  $\Sigma_i = \Pi_i$ , akkor  $\Sigma_{i+1} = \Pi_{i+1}$ , amiből tovább következik, hogy  $PH = \Sigma_i = \Pi_i$ . Azt mondjuk, hogy a polinomialis hierarchia *összeomlik* az  $i$ -edik szintre.

**Proof:** Mivel tudjuk, hogy  $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ , ezért elég azt belátnunk, hogy  $\Sigma_{i+1} \subseteq \Sigma_i$  és ezzel belátjuk, hogy  $\Sigma_i = \Sigma_{i+1}$ . Hasonló módon be tudjuk látni hogy  $\Pi_i = \Pi_{i+1}$ .

Legyen  $L \in \Sigma_{i+1}$  tetszőleges nyelv, bizonyítsuk be hogy  $L \in \Sigma_i$ . Mivel  $L \in \Sigma_{i+1}$ , ezért letezik egy  $P$  polinomialis relacio, melyre

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists \dots Q y_{i+1} P(x, y_1, \dots, y_i).$$

Tovabba, letezik egy  $L' \in \Pi_i$  nyelv, melyre

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 : (x, y_1) \in L'.$$

Figyelem, itt csak annyi történt hogy beillesztettük egy extra  $y_1$  változót a letezés ( $\exists$ ) kvantorral a  $P$  definicio ele, így kaptunk egy definiciót  $\Sigma_{i+1}$ -re.

Mivel  $\Sigma_i = \Pi_i$ , ezért  $L' \in \Sigma_i$ , tehát letezik egy polinomialis relacio  $S$  ugy, hogy

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 \forall \dots Q y_{i+1} S(x, y_1, \dots, y_i).$$

Csoportosíthatjuk  $y_1$ -et és  $y_2$ -t.

$$x \in L \Leftrightarrow \exists (y_1, y_2) \forall \dots Q y_{i+1} S(x, (y_1, y_2), \dots, y_i).$$

A jobboldalon  $i$  darab kvantor van és pont abban a sorrendben mint ahogy kell lenniük  $\Sigma_i$  definiciojához. Tehát beláttuk, hogy ha  $Lin\Sigma_{i+1}$  akkor  $L \in \Sigma_i$ . □

## Tétel 2.9

Savitch

Ha  $f(n) \geq n$ , akkor

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

**Proof:** Legyen  $L \in \text{NSPACE}(f(n))$  egy tetszőlegese nyelv, a célunk megmutatni, hogy  $L$  felismerhető egy determinisztikus Turing-géppel  $f^2(n)$  tárban.

Figyeljük meg, hogy aha egy Turing-gép  $t$  tárat használ futása alatt, akkor legfeljebb  $O(2^{c \cdot t})$  különböző konfigurációba kerülhet.

Tudjuk, hogy van egy nemdeterminisztikus Turing-gép mely felismeri az  $L$  nyelvet, tehát a konfigurációs gráfban van út a kezdőállapotból a reprezentáns elfogadó állapotok csúcsába. Mivel legfeljebb  $2^{c \cdot f(n)}$  konfiguráció van, ezért egy elfogadó út hossza legfeljebb  $2^{c \cdot f(n)}$ .

Ha tudunk mutatni egy determinisztikus Turing-gépet ami el tudja dönteni egy gráfban, hogy adott  $s$  és  $t$  csúcsok között van-e út  $O(\log^2 n)$  tárban, akkor a konfigurációs gráfra alkalmazva  $O(f^2(n))$  méretű tárat használó eljárást adnánk  $L$  felismerésére.

Megmutatjuk, hogy  $O(\log^2 n)$  tárban el tudjuk dönteni, hogy  $s$  és  $t$  között megy-e út egy adott  $G$  gráfban. Legyen  $\text{st-conn}(k, s, t)$  az algoritmus ami eldönti, hogy legfeljebb  $k$  hosszú út van-e  $s$  és  $t$  között. Nyilván ha van olyan  $u \in V(G)$  csúcs mely  $s$ -ből elérhető legfeljebb  $k/2$  hosszú úton és  $u$ -ból  $t$  elérhető legfeljebb  $k/2$  hosszú úton, akkor  $s$ -ből  $t$  is elérhető legfeljebb  $k$  hosszú úton.

Tehát a következőképpen néz ki a rekurzióknk:

$$\begin{cases} \text{st-conn}(0, s, t) = \begin{pmatrix} s & \stackrel{?}{=} & t \end{pmatrix} \\ \text{st-conn}(1, s, t) = (st) \stackrel{?}{\in} E(G) \\ \text{st-conn}(k, s, t) = \exists u \in V(G) : \text{st-conn}(k/2, s, u) \wedge \text{st-conn}(k/2, u, t). \end{cases}$$

Látszik, hogy a rekurzió mélysége  $O(\log n)$  és mindegyik rekurzív hívásban csak a függvény argumentumait kell tárolnunk amiket bitekben  $O(\log n)$  tárban meg tudjuk oldani. Tehát az st-conn algoritmus  $O(\log^2 n)$  tárban működik, és ezzel készen is vagyunk, mivel

$$(\log(2^{c \cdot f(n)}))^2 = (c \cdot f(n) \cdot \log 2)^2 = c^2 \cdot f^2(n) = O(f^2(n)).$$

□

### Következmény 2.10

$$\text{NPSpace} = \text{PSpace}$$

**Proof:** Polinom négyzete polinom.

□

## 2.2 PSPACE teljesség

### Definíció 2.11

### PSPACE teljesség

Azt mondjuk, hogy  $L$  PSPACE teljes, ha  $L \in \text{PSPACE}$  és  $\forall L' \in \text{PSPACE}$  nyelvre  $L' \leq L$ . Tehát  $L'$  visszavezethető  $L$ -re polinomiális időben.

### Definíció 2.12

### tqbf – Totally Quantified Boolean Formula

Azt mondjuk, hogy  $\varphi$  egy teljesen kvantifikált Boole-formula, ha olyan alakra írható, hogy

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_l x_l f(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

ahol  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  és  $x_i$  Boole változók és  $f(x_1, \dots, x_l)$  egy konjunktív normál formula (CNF).

### Példa

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z ((x \vee z) \wedge y)$$

Ez a formula igaz.

### Megjegyzés

Egy tqbf vagy igaz vagy hamis. Nem olyan mint egy CNF ahol az a kérdés hogy van-e helyes behelyettesítése, hanem magát a kvantálás megválaszolja, hogy a formula igaz vagy hamis.

### Definíció 2.13

### TQBF – True Quantified Boolean Formula

$$\text{TQBF} := \{\varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ egy tqbf és } \varphi = \text{true}\}.$$

Azaz TQBF az igaz teljesen kvantifikált Boole formulák nyelve.

### Tétel 2.14

A TQBF nyelv PSPACE teljes.

**Proof:**

#### 1. TQBF $\in$ PSPACE

Végezzünk teljes indukciót a kvantorok számára. Ha  $(n - 1)$  kvantoros tqbf ellenőrzését el tudjuk végezni  $\text{poly}(n)$  tárbán, akkor  $n$  kvantoros tqbf ellenőrzésénél csak 1-el több bitet kell tárolnom a kvantor típusára és meg  $x_n$  értékét.

## 2. $\forall L \in \text{PSPACE} : L \propto \text{TQBF}$

Röviden megemlítiük, hogy ebben az esetben nem tudjuk azt a trükköt eljátszani amivel bizonyítottuk, hogy  $\text{SAT} \in \text{NPC}$ , mert a Turing-gép összes szabályos lépését leíró formula hossza már bőven nem polinomiális lesz. Ez a trükk azért működött a SAT feladatnál, mert ott polinomiális időben kellett ellenőriznünk, itt viszont a tárnak kell polinomiálisnak lennie.

Az ötlet, hogy újra felhasználjuk az st-conn feladatot. Ha fel tudjuk írni az st-conn feladatot mint egy polinomiálisan méretű tqbf a kezdő csúcsra és az elfogadó csúcsok reprezentására a konfiguráció gráfra, akkor készen lennénk. Mivel bármilyen polinomiális tárbán felismerhető nyelvet át tudunk írni polinomiális időben egy polinomiálisan hosszú tqnf-re.

Nézzük mit ad a köztes csúcs trükk amit már használtunk a Savitch tétel bizonyításában:

$$\text{st-conn}(k, s, t) \Leftrightarrow \exists u \in V : \text{st-conn}(k/2, s, u) \wedge \text{st-conn}(k/2, u, t).$$

A probléma ezzel a felírással, hogy bár feleztük a  $k$  paramétert, de a formula hossza nőtt, tehát összességében nem értünk el érdembeli javulást.

A trükk az, hogy kihasználjuk az univerzális kvantort ( $\forall$ ), hogy ne kelljen dupláznunk a formula méretét:

$$\text{st-conn}(k, s, t) \Leftrightarrow \exists u \in V \forall (x, y) \in \{(s, u), (u, t)\} : \text{st-conn}(k/2, x, y).$$

Ha az  $L$  nyelvet  $t$  tárbán felismerte egy Turing-gép, akkor legfeljebb  $2^{c \cdot t}$  konfigurációja van. Tehát a konfigurációs gráfnak legfeljebb  $2^{c \cdot t}$  csúcsa van. Mivel a jobboldali formula mérete polinomiális és  $k$  értékét mindig felezzük, ezért a végső formula mérete polinomiális lesz.

□

### Definíció 2.15

### Generalized Geography játék

Legyen  $(G, u)$  egy rendezett pár, ahol  $G$  egy irányított gráf és  $u \in V(G)$  a gráf egy adott csúcsa. A játékot Alíz és Bob játssza a következő szabályok alapján:

- Alíz kezd az  $u$  csúcsból.
- Alíz és Bob felváltva lépnek.
- A jelenlegi csúcsból csak belőle kifelé menő élrel keresztül szabad lépni a következő csúcsba.
- Már látogatott csúcsba tilos lépni.
- Ha a soron következő játékosnak már nincs szabályos lépése, akkor az ellenfél nyer.

### Megjegyzés

Ez a játék az általánosítása az ország-város játéknak, ahol felváltva sorolunk városokat azzal a megkötéssel, hogy a következő város azzal a betűvel kezdődhet amivel az előző végződött és az veszít aki már nem tud várost mondani.

### Definíció 2.16

### Generalized Geography osztály

$$\text{GG} = \{(G, u) : \text{Alíznek van nyerő stratégiája } u\text{-ból indulva}\}.$$

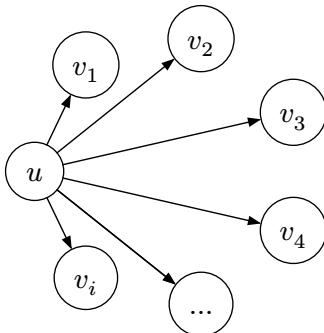
## Tétel 2.17

A GG nyelv PSPACE teljes.

*Proof:*

### 1. $GG \in PSPACE$

Végezzünk teljes indukciót a leghosszabb út hosszára. Ha polinomiális tárban el tudjuk dönteni, hogy Bob-nak nincsen stratégiája legfeljebb  $(n - 1)$  hosszú útra, akkor tudjuk, hogy Alíz-nak van nyerő stratégiája.



Nézzük meg  $u$ -nak az összes ki-szomszédkára, hogy Bob-nak nincs nyerő stratégiája. Mivel minden szomszédra polinomiális tárban eldönthetjük, és a tárat újra tudjuk használni, ezért az egész feladatot el tudjuk dönteni polinomiális tárban.

### 2. $TQBF \propto GG$

Tehát a bizonyítás ezen részén azt kell belátnunk, hogy ha kapunk egy teljesen kvantifikált Boole-formulát, akkor arra tudunk adni egy irányított gráfot, amiben pontosan akkor van nyerő stratégiája Alíz-nak, ha a tqnf igaz. Legyen például a tqnf a következő:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_l x_l f(x_1, x_2, \dots, x_l).$$

Az irányított gráfot két részből fogjuk felépíteni: kvantifikált értékadások (bal), és ellenőrzés (jobb). Az értékadás részben mindegyik  $x_i$  változóra létrehozunk egy kétirányú elágazást, ahol a balra vezető út azt jelenti, hogy  $x_i$  igaz, míg a jobbra vezető út azt, hogy  $x_i$  hamis.

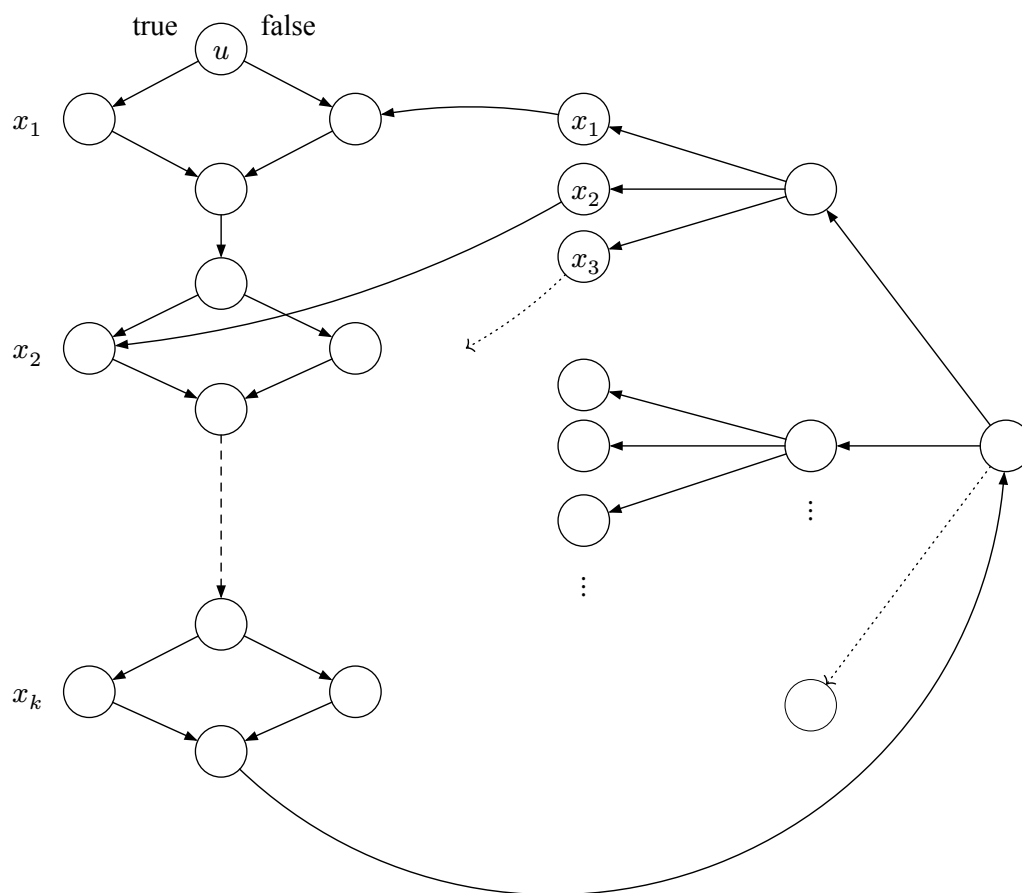
Az értékadásokat az alapján írjuk le, hogy éppen hogyan vannak kvantifikálva. Ha létezési kvantort ( $\exists$ ) látunk, akkor Alízt kényszerítjük lépésre, ha univerzális kvantort ( $\forall$ ), akkor Bobot kényszerítjük lépésre. Ha nem pontosan felváltva szerepelnek a kvantorok, akkor adunk az ellenfélnek egy triviális lépést ahol nincs választása csak előre menni.

Például, ha egymás után van  $\forall x_i$  és  $\forall x_{i+1}$ , akkor egymás után kéne lépni kettőt Bobnak, de ezt a szabályok nem engedik. Ezért azt csináljuk hogy Bob lép egyet, azután beszúrunk egy választás nélküli direkt élt a következő választási lehetőséghez, ezzel kényszerítve Alízt és visszaadva Bobnak a lépés lehetőségét.

A második részben, ahol ellenőrizzük a formulát, úgy írjuk fel a gráfot hogy a gyűjtő csúcsba lépést Bobra kényszerítjük, így Alíz jön soron. Alíz rámutat egy blokk-ra ahol ő tudja hogy minden változó hamis. Így Bob bármelyik változót választja a blokkból az hamis lesz. Azt hogy egy változó hamis úgy mutatjuk meg, hogy miután Bob kiválasztotta, adunk Alíz-nak egy ingyen lépést és utána bekötjük a gráf első felébe oda ahol választottuk  $x_i$  értékét. Ha  $x_i$  tagadása szerepel a blokkban akkor abba a csúcsba kötjük be ami azt reprezentálja, hogy  $x_i$  hamis, különbe abba ami azt hogy  $x_i$  igaz.

Mostmár könnyű meggondolni, hogy ebben az irányított gráfban az, hogy Alíznak van nyerő stratégiája az ekvivalens azzal, hogy a tqnf igaz. Mivel az hogy Alíznak van nyerő stratégiája pont azt jelenti hogy amikor Alíz nyer akkor létezik ( $\exists$ ) olyan lépés, hogy Bob bármit lép ( $\forall$ ) még úgy is Alíz fog nyerni.

A következő ábra talán jobban elmagyarázza az érvelést.



□

### 3 Interaktív bizonyítások

#### Példa

Interaktív protokoll gráf *nem* izomorfizmusra.

Artúrnak vagy két gráfja  $G$  és  $G'$  melyekről el szeretné dönteni, hogy izomorfak-e. Artúr csak egy buta halandó ember, akkor is ha király, csak polinomiális idejű algoritmust tud lefuttatni a fejében. Szerncsére Merlin okosabb mint Artúr és a saját mágiájával bármit ki tud számolni a fejében egy lépés alatt, viszont nem feltétlenül mond mindig igazat.

Artúr a két gráf közül kiválaszt egy gráfot, permutálja a csúcsok számozását, és megkérdezi Merlintől, hogy melyik gráfot mutatja most éppen. Amire Merlin megmondja, hogy  $G$  vagy  $G'$  a mutatott gráf.

Ha a két gráf izomorf, akkor Merlinnek sincs esélye kitalálni melyik gráfot mutatja éppen Artúr, és így a legfeljebb tippelhet.

Tehát Artúr megkérdezi Merlint a fent leírt módon 100-szor, hogy a jelenleg mutatott gráf melyik. Ha Merlin mindegyik alkalommal jól válaszolt akkor vagy nem izomorf a két gráf és így Merlinnek egyértelmű melyik mutatja Artúr, vagy végig tippelt és így  $\frac{1}{2^{100}}$  eséllyel mindig pont jót mondott.

Azaz, a gráf *nem* izomorfizmusra a fent leírt protokoll egy interaktív bizonyítás.

#### Definíció 3.1

#### Interaktív protokoll

Azt szeretnénk eldönteni, hogy egy adott  $w$  szóra és  $L$  nyelvre  $w \stackrel{?}{\in} L$ .

A bizonyítást Merlin és Artúr együtt foglyák végezni. Merlin bizonyít, míg Artúr ellenőrzi Merlin bizonyításait. Artúr egy randomizált Turing-gép, míg Merlin bármit ki tud számolni az input alapján egy lépés alatt.

Először merlin szól és mond egy polinomiális hosszú üzenetet. Erre Artúr Merlin üzenete és  $w$  függvényében polinomiálisan sok véletlen számot felhasználva válaszol. Ezt az interakciót megismételi a két fél amíg Artúr el nem szánja magát és vagy elfogadja a  $w$  szót vagy elutasítja.

Azt mondjuk, hogy a protokoll elfogadja az  $L$  nyelvet, ha  $w \in L$  esetén van olyan Merlin, hogy Artúr legalább  $1 - \frac{1}{2^{|w|}}$  valószínűséggel elfogadja  $w$ -t, és  $w \notin L$  eseté minden Merlin esetén Artúr legfeljebb  $\frac{1}{2^{|w|}}$  valószínűséggel fogadja el  $w$ -t, azaz téved.

#### Definíció 3.2

#### IP osztály

$$\text{IP} := \{L : w \in L\text{-et interaktív protokollal lehet bizonyítani}\}$$

#### Példa

$\text{NP} \subseteq \text{IP}$

**Proof of példa:**  $w \in L \in \text{NP}$ , tehát létezik egy polinomiális tanu  $w \in L$ -re. Ha pont ezt a polinomiális tanut válaszolja Merlin akkor az egy jó egy lépéses protokoll.  $\square$



### Tétel 3.3

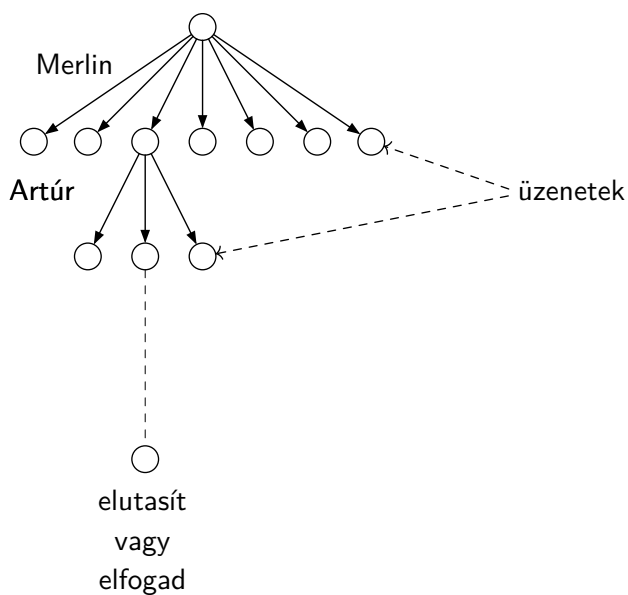
$$\text{IP} \subseteq \text{PSPACE}$$

A bizonyítás előtt bevezjük a következő segítő fogalmat.

#### Definíció 3.4

#### Protokoll fa

A protokoll fa egy fix  $L$  nyelvre és fix  $w$  szóra az összes lehetséges Artúr–Merlin interakciót ábrázolja egy faként a következő módon.



#### Megjegyzés

Habár egy szinten exponenciálisan sok csúcs lehet, ezt a gráfot be tudjuk járni polinomiális tárbán.

**Proof of Tétel 3.3:** Ha Artúr válaszol akkor vegyük a súlyozott átlagát a lehetséges válaszoknak az elutasítási valószínűségét.

Ha viszont Merlin válaszol akkor a maximális elutasítási valószínűséget adjuk meg.

**TODO:** Jobban leírni a bizonyítást.

□

### Tétel 3.5

#### Shamir

$$\text{IP} = \text{PSPACE}$$

A bizonyításhoz először bevezetünk pár segéd fogalmat és bizonyítunk valamit róluk. A tétel bizonyítása és segéd állítások az eredeti cikk alapján lettek feldolgozva, ami elérhető a következő linken: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/146585.146609>

### Definíció 3.6

### Egyszerű tqbf

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi$  teljesen kvantifikált Boole-formula *egyszerű*, ha minden  $x_i$  változójára igaz, hogy  $x_i$  kvantálásának helye és előfordulásának helye között legfeljebb egy darab univerzális kvantor ( $\forall$ ) van.

### Példa

A következő formula egy egyszerű tqbf:

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2) \wedge \forall x_3 (x_2 \wedge x_3 \wedge x_3)].$$

A következő formula nem egy egyszerű tqbf, mivel a késsel jelölt  $x_1$  változó kvantálása és második használata (negáltja) között kettő pirossal jelölt univerzális kvantor ( $\forall$ ) is van.

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \wedge x_2) \wedge \forall x_3 (\overline{x_1} \wedge x_3)]$$

### Lemma 3.7

Minden teljesen kvantifikált Boole-formula egyszerű alakra hozható polinomiális időben.

**Proof:** Ha az eredeti tqbf nem egyszerű akkor van egy első  $x_i$  változó melynek a kvantálása és használata között több mint egy univerzális kvantor van. Ebben az esetben nézzük meg az első használatát  $x_i$ , mely már sérti a feltételt és cseréljük le  $x_i$ -t  $\exists x_i^1 [(x_i \wedge x_i^1) \vee (\overline{x_i} \wedge \overline{x_i^1})]$ .

Tehát  $x_i$  kvantálása utáni első univerzális kvantor után létrehozunk egy új változót,  $x_i^1$ , mely értéke pont  $x_i$ .

Ezt a módosítást addig csináljuk amíg nem jutunk egyszerű formulához. □

### Definíció 3.8

### Formula aritmetizáltja

Egy teljesen kvantifikált Boole-formulához rendelt aritmetizáltja egy aritmetikai kifejezés, melyet úgy kapunk, hogy a formulában a következő előfordulásokat a megadott párjukra cseréljük le:

$$\begin{aligned} \text{True} &\mapsto 1, & \text{False} &\mapsto 0, & x &\mapsto x \\ x \vee y &\mapsto x + y & x \wedge y &\mapsto x \cdot y & \overline{x} &\mapsto (1 - x) \end{aligned}$$

A kvantorok viszont a következőképpen cseréljük le:

$$\forall x(\dots) \mapsto \prod_{x \in \{0,1\}} (\dots) \quad \exists x(\dots) \mapsto \sum_{x \in \{0,1\}} (\dots)$$

### Megjegyzés

Az aritmetizált értéke egy egész szám.

Nyilván látszik, hogy a teljesen kvantifikált Boole-formula pontosan akkor igaz, ha az aritmetizáltja nem nulla.

### Példa

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 [(x_1 \wedge x_2) \vee \exists x_3 (\bar{x}_2 \wedge x_3)].$$

Ennek a tqbf-nek aritmetizáltja a következő:

$$f = \prod_{x_1 \in \{0,1\}} \sum_{x_2 \in \{0,1\}} \left[ (x_1 \cdot x_2) + \sum_{x_3 \in \{0,1\}} (1 - x_2) \cdot x_3 \right].$$

Figyeljük meg, hogy  $\varphi$  aritmetizáltja nem feltétlenül egy polinomiális méretű szám, a következő példa mutatja hogy  $2^{2^n}$  nagyságú is lehet:

$$\prod \prod \dots \prod (\dots) \geq 2^{2^n},$$

ahol a belső (...) kifejezés  $\geq 2$  és  $n$  darab produktum szerepel egymás mellett.

### Állítás 3.9

Ha  $0 < f < 2^{2^n}$ ,  $f \in \mathbb{Z}$ , akkor  $\exists p$  prím úgy, hogy  $2^n < p < 2^{2^n}$  és  $f \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

**Proof:** Tegyük fel, hogy  $f \neq 0$ . Ha  $f \equiv 0 \pmod{p_i}$  minden  $2^n < p_i < 2^{2^n}$ , akkor a Kínai maradék tétel miatt  $f \equiv 0 \pmod{\prod p_i}$ .

A prímszám tétel azt állítja hogy ha  $\pi(x)$  jelöli a az  $x$ -ig terjedő prímszámok számát, akkor

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$$

A mi esetünkben  $2^n$  és  $2^{2^n}$  közé eső prímek száma a következő:

$$\frac{2^{2^n}}{\log(2^{2^n})} - \frac{2^n}{\log(2^n)} = \frac{2^{2^n}}{2n} - \frac{2^n}{n} \geq 2^n.$$

Ebből az következik, hogy a  $2^n$  és  $2^{2^n}$  közötti prímek szorzata legalább  $(2^n)^{2^n} = 2^{n2^n} \geq 2^{2^n}$ .

Viszont  $f \leq 2^{2^n}$ , ezért nem lehet 0 modulo egy nagyobb szám mint  $2^{2^n}$ .

Ezzel ellentmondásra jutottunk és emiatt valóban létezik egy ilyen prím.

Ha viszont  $f = 0$ , akkor bármilyen prím jó, mert  $f \equiv 0 \pmod{p}$  bármilyen  $p$ -re. □

### Definíció 3.10

Azt mondjuk, hogy  $f$  aritmetizáltnak a funkcionális formája  $f(x_1)$ , amit úgy kapunk, hogy  $f$ -ben szereplő első  $\prod_{x_1}$  avagy  $\sum_{x_i}$  jelet eltörlünk és így már a kifejezés függ  $x_1$  értékétől és egy függvényt kapunk.

## Példa

Tekintsük a következő igaz tqbf-et:

$$\varphi = \forall x_1 [\bar{x}_1 \vee \exists x_2 \forall x_3 (x_1 \wedge x_2) \vee x_3].$$

Ennek a tqbf-nek az aritmetizáltja a következő:

$$f = \prod_{x_1 \in \{0,1\}} \left[ (1 - x_1) + \sum_{x_2 \in \{0,1\}} \prod_{x_3 \in \{0,1\}} (x_1 \cdot x_2 + x_3) \right],$$

melynek értéke 2. Ezen aritmetizált funkcionális formája a következő:

$$f(x_1) = \left[ (1 - x_1) + \sum_{x_2 \in \{0,1\}} \prod_{x_3 \in \{0,1\}} (x_1 \cdot x_2 + x_3) \right].$$

Egy mindenható Merlin persze egyből megmondja, hogy  $f(x_1) = x_1^2 + 1$ .

Egy tqbf aritmetizáltja exponenciálisan nagy fokszámú polinom is lehet, például

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$$

aritmetizáltja

$$f = \prod_{x_1 \in \{0,1\}} \prod_{x_2 \in \{0,1\}} \dots \prod_{x_n \in \{0,1\}} (x_1 + x_2 + \dots x_n),$$

melynek funkcionális formájában  $2^{n-1}$ -ed fokon fog szerepelni  $(x_1 + c)$  tag. Nyilván ilyen komplikált polinomokat Artúr nem tud kezelni.

## Állítás 3.11

Ha  $\varphi$  egy egyszerű tqbf, akkor az aritmetizáltjának a funkcionális formája  $f(x_1)$  egy polinom melynek foka legfeljebb lineáris  $\varphi$  méretében.

**Proof:** Mivel  $\varphi$  egy egyszerű tqbf, ezért  $x_1$  kvantálása és használata között legfeljebb egy univerzális kvantor lehet. A polinom fokát csak a szorzások befolyásolják és ebből legfeljebb egy lehet  $x_1$  előtt ami duplázza  $x_1$  fokát.  $\square$

**Proof of IP = PSPACE:** Azt bizonyítjuk hogy interaktív protokollt tudunk adni a TQBF nyelv felismerésére. Az előbb láttuk hogy minden tqbf hozható *egyszerű* tqbf alakra, továbbá azt is hogy egy tqbf pontosan akkor igaz, ha aritmetizáltja nem nulla. Azt is láttuk, hogy ha  $f \neq 0$ , akkor van egy intervallumon egy prím amire  $f \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Tehát a következőben csak arra adunk interaktív protokollt, hogy egy egyszerű tqbf aritmetizáltja  $f \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

## Interaktív protokoll

A protokoll azt fogja bizonyítani, hogy  $f \not\equiv 0 \pmod{p}$ , ahol  $f$  már  $\varphi$ -nek az aritmetizáltja.

1. Először Merlin elküldi  $f \pmod{p}$  értékét Artúrnak és a funkcionális formáját egyszerű polinom alakra hozva  $f(x_1)$ .
2. Ha Merlin egy  $\prod$  törlésével kapta a függvényt, akkor Artúr ellenőrzi, hogy  $f(0) \cdot f(1) \equiv f \pmod{p}$ , ha viszont  $\sum$  törlésével kapta akkor azt ellenőrzi, hogy  $f(0) + f(1) \equiv f \pmod{p}$ .

Miután Artúr ellenőrizte  $f$ -et és  $f(x)$ -et, véletlenül választ  $\xi \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  számot és behelyettesíti  $\xi$ -t és megkapja az  $f(\xi)$  kifejezést. Merlinnek elküldi  $f(\xi)$ -t.

3. Erre Merlinnek ki kell számolnia  $f(\xi)$ -t és meg kell adnia egyszerű polinom alakra hozva a funkcionális formáját.

4. A protokoll így folytatódik tovább míg ki nem ürül a kifejezés.

Ha Merlin becsületesen játszik, akkor Artúr mindig elfogad.

Ha viszont Merlin csal, akkor csak ott van értelme csalnia hogy  $f$  értékéről hazudik. Ekkor viszont  $f(x)$  polinomot is meg kell hamisítani vagy különben egyből lebukna Artúr egyszerű ellenőrzésével. Tehát Merlin  $f$  helyett  $f'$ -t mond.

Feltéve hogy  $f \not\equiv f' \pmod{p}$ , akkor

$$\mathbb{P}((f - f')(\xi) = 0) \approx \frac{1}{2^n},$$

azaz annak a valószínűsége, hogy a két polinom értéke pont megegyezik  $\xi$ -ben exponenciálisan kicsi. Mivel  $p > 2^n$  különböző szám lehet  $\xi$  és  $f - f'$  fokszáma lineáris  $n$ -ben.

Következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a sok csalás után megússza Merlin  $\frac{1}{2^n}$ . □

## 3.1 Zero Knowledge Proofs

### Definíció 0.1

### Zero Knowledge Proof

Egy zero knowledge proof (ZK) két szereplő interakciója: Merlin (a bizonyító) és Artúr (az ellenőrző).

Egy ZK-nak a következő három tulajdonságot kell teljesítenie:

1. Ha a bizonyítandó állítás igaz, akkor egy őszinte Artúrt meg tudja győzni egy őszinte Merlin.
2. Ha az állítás hamis, akkor még csalással sem tudja Merlin meggyőzni Artúrt, legfeljebb egy kis valószínűséggel téved Artúr.
3. Ha az állítás igaz, akkor Artúr nem tud meg semmi extra információt azon kívül hogy igaz az állítás Merlin bizonyításából.

### Megjegyzés

Az első két feltétel tehát csak annyit jelent, hogy ez egy interaktív bizonyítás. A lényeg pont az hogy Artúr nem tud meg semmi mást azon kívül hogy igaz az állítás.

### Példa

### Gráf nem izomorfizmus

Adott két gráf  $G_1, G_2$  és el szeretnénk dönteni, hogy  $G_1 \not\cong G_2$ .

Artúr újra címezi a csúcsokat és megmutatja az egyik gráfot. Erre Merlinnek meg kell mondania, hogy  $G_1$ -et vagy  $G_2$ -t mutatta fel Artúr.

Adott egy  $G$  gráf, mely ismert Merlin és Artúr számára is. Merlinnek be kell bizonyítania, hogy ő ismer egy Hamilton-kört  $G$ -ben.

1. Merlin újra címezi  $G$  csúcsait egy permutációval, ezzel létrehoz egy  $H$  gráfot, mely persze izomorf  $G$ -vel.
2. Fölírja  $H$  éleit egy-egy lapra és fejjel lefelé elhelyezi őket az asztalra és mostmár nem nyúlhat hozzájuk addig amíg Artúr meg nem engedi.
3. Most Artúr a következő kettő eset közül választ:
  - Merlin, bizonyítsd be, hogy  $H$  valóban izomorf  $G$ -vel.
  - Merlin mutasd meg a Hamilton-körödet  $H$ -ban.
1. Ha azt kell bizonyítania Merlinnek, hogy  $G \simeq H$ , akkor felfordítja az összes lapot és elmondja a permutációt amivel újra címkézte a csúcsokat. Ezzel Artúr meg tud győződni, hogy valóban izomorf a két gráf.
2. Ha viszont  $H$ -ban kell mutatnia Merlinnek egy Hamilton-kört, akkor felfedi csak azokat az éleket amik Hamilton-kört alkotnak.

**Proof:** Az előző bizonyítás valóban egy zero knowledge proof, mivel ha Merlin ismert egy Hamilton-kört  $G$ -ben, akkor erről meggyőződött Artúr. Ha Merlin nem ismert egy Hamilton-kört  $G$ -ben, akkor még Artúr kérdése előtt el kellett döntenie, hogy vagy egy valid izomorf gráfot kreál vagy egy valid Hamilton kört, ami nem izomorf  $G$ -vel. Mivel Merlin nem tudja előre Artúr kérdését ezért mindig  $1/2$  eséllyel lebukik.

Másrészről, Artúr nem tudott meg semmi többet a Hamilton körről mint, hogy létezik, mivel akkor is amikor Merlin mutat neki egy Hamilton-kört akkor is csak  $H$ -ban mutat fel  $n$  élet ami  $n$  csúcsot tartalmaz, de ezt már eddig is tudta Artúr. □

## 4 Véletlen bonyolultság osztályok

Volt, hogy  $L \in \text{NP}$  pontosan akkor, ha létezik polinomiális tanu minden  $w \in L$ -re.

### Definíció 4.1

RP

$L \in \text{RP} \iff \exists T$  Turing gép amely  $w \in L$  esetén legalább  $1/2$  eséllyel elfogad és  $w \notin L$  esetén 1 valószínűséggel elutasít.

Ezt mind várhatóan polinomiális időben.

### Megjegyzés

A következő táblázat ilusztrálja az esetek valószínűségét:

Válasz	Igaz	Hamis
Valóság		
Igaz	$\geq 1/2$	$\leq 1/2$
Hamis	0	1

### Megjegyzés

Ha  $L \in \text{RP}$ , akkor feltehető, hogy polinomiális ideig működik az őt elfogadó Turing-gép.

### Proof of Megjegyzés:

RP definíciójából a várható lépésszám polinomiális, tehát  $\mathbb{E}(t(w)) \leq |w|^c$  valamilyen  $c > 0$ -ra.

**TODO:** Valami Markov egyenlőtlenség és ha kétszer futtatod akkor valamiért okés?

□

### Megjegyzés

Az a sejtés, hogy  $\text{RP} = \text{P}$ , de ezt még nem sikerült bizonyítani, de nem sokan lepődnének meg ha valóban így lenne.

### Megjegyzés

Érthetően  $\text{P} \subseteq \text{RP} \subseteq \text{NP}$ .

### Definíció 4.2

P/f

$\text{P}/f$  azon nyelveket jelöli, melyekre létezik egy Turing-gép, ami elfogadja a  $w, a$  párt polinomiális időben, ahol  $a$  egy legfeljebb  $f(|w|)$  méretű szó amit megadunk és csak az input hosszától függ.

### Megjegyzés

Az előző definícióban fontos, hogy a sugás kizárólag az input hosszától függ, tehát minden  $k$  hosszú inputra ugyanazt a sugást adjuk meg a Turing-gépnek.

### Megjegyzés

$P/1 \stackrel{?}{=} P$ , ahol  $P/1$  azt jelenti, hogy mindegyik input hosszhoz kizárólag egy betűt/bitet süghatunk.

A válasz negatív, sőt  $P/1$ -ben nem is mindegyik nyelv rekurzív, nem hogy polinomiális időben felismerhető nyelvek.

A bizonyításhoz tekintsünk egy tetszőleges nem rekurzív nyelvet a  $\{0, 1\}$  ábécé fölött, ilyen nyilván van mert majdnem mindegyik nyelv nem rekurzív. Mivel megszámlálhatóan sok Turing-gép van és mindegyik Turing-gép legfeljebb egy nyelvet ismer fel és megszámlálhatatlanul sok nyelv van adott ábécé fölött, ezért majdnem minden nyelv *nem* rekurzív.

A  $\{0, 1\}$  ábécé fölötti  $L$  nyelvet felfoghatjuk úgy mint a természetes számok egy részhalmazát  $L \subseteq \mathbb{N}$ , ahol egy szó egy természetes szám bináris alakja. Eltekintve attól hogy mit kezdünk a kezdő nullásokkal...

Legyen  $K$  az a nyelv, amiben a  $\overbrace{11111\dots 11111}^x$  szavak vannak, ahol  $x \in L$ . Tehát  $K$  egy unáris nyelv ahol pontosan az  $x$  hosszú szavak vannak, ahol  $x \in L$ .

Ez a nyelv nyilván nem rekurzív, mert  $L$  sem az.

### Definíció 4.3

$P/\text{poly}$

$$P/\text{poly} = \bigcup_{k=1}^{\infty} P/n^k$$

### Definíció 4.4

$P/\log$

$$P/\log = \bigcup_{k=1}^{\infty} P/k \cdot \log n$$

### Tétel 4.5

Adleman

$$RP \subseteq P/\text{poly}$$

**Proof: TODO**

□

### Definíció 4.6

$L^n$

$$L^n = L \cap \Sigma_0^n$$

Tehát  $L$ -nek a pontosan  $n$  hosszú szavai.

### Definíció 4.7

Ritka nyelv

Azt mondjuk, hogy  $L$  ritka, ha  $\exists c > 0$  úgy, hogy  $\forall n \ |L^n| \leq n^c$ .

### Tétel 4.8

Mahaney

Ha  $L$  ritka és NP-teljes, akkor  $P = NP$ .



#### Definíció 4.9

Unáris nyelv

Azt mondjuk, hogy az  $L$  nyelv unáris, ha  $L \subseteq \{1\}^*$ , azaz olyan szavakból áll melyekben csak 1-es szerepel. (pl.: 1111 vagy 11)

#### Tétel 4.10

Berman

Ha  $L$  unáris és NP-teljes, akkor  $P = NP$ .

*Proof:* **TODO**

□

#### Lemma 4.11

DFS a CNF fában, akkor megállásig vagy  $n$  darab kielégíthető csúcson mentem át vagy nullán... **TODO**

*Proof:* kinda trivi.

□

#### Tétel 4.12

Fortune

Ha  $A$  egy ritka nyelv és  $\overline{\text{SAT}} \propto A$ , akkor  $P = NP$ .

Itt a  $\overline{\text{SAT}}$  azt a nyelvet jelöli amiben azon konjunktív normál formák vannak, melyeket nem lehet kielégíteni.

*Proof:* **TODO**

□