Bonyolultságelmélet jegyzet

Készítették Grolmusz Vince előadásai alapján a 2025/25. évi hallgatók

(Nem hivatalos lektorálatlan verzió)

2025. ősz

Contents

1 Kommunikációs játékok

Ennek a fejezetnek a nagy resze (majdnem minden) a szamitastudomany jegyzetbol lett atemelve.

Ezt a fejezetet ujra kell olvasni es megnezni mekkora az atfedes a szamitastudomanyon elhangzottak es a bonyelm-en elhangzottak kozott. A fo tetelek megtalahatok bizonyitasokkal: Teglalap fedes, Mehlhorn–Schmidt, AUY

Cél: van két játékos, akik bármit ki tudnak számolni gyorsan, de egymás között nehezen kommunikálnak.

Definition 1.1 — **Kommunikációs játék**

Adott $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ és $x, y \in \{0,1\}^n$. A ismeri x-et, de y-t nem, B ismeri y-t, de x-et nem. Ki akarják számolni $f(x,y)$-t. A költség az A és B között (bármely irányban) kommunikált bitek száma.

Akkor tekintjük $f(x,y)$-t kiszámoltnak, ha az egyik játékos ismeri $f(x,y)$-t, és a másik játékos tudja, hogy az egyik tudja.

Definition 1.2 — **Protokoll költsége**

A P protokoll mellett f költsége a legrosszabb (x,y) input páron $\kappa_{P(f)}$.

Remark

Megkövetelhetnénk, hogy mindketten tudják $f(x,y)$-t, ez 1 bit különbséget jelentene csak legfeljebb.

Definition 1.3 — **Protokoll**

A közös számolási módszer szabályait, hogy mikor ki, és milyen bitet küld protokollnak nevezzük. (Ez az algoritmus megfelelője több játékos esetén.)

Example

Legyen f tetszőleges, ekkor A elküldheti x-et B-nek, aki „ingyen" kiszámolja $f(x,y)$-t. Ennek a költsége n.

Example — **ID-függvény**

Legyen

$$\mathrm{ID}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ha } x = y \\ 0, \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

Ekkor a fenti P protokollal $\kappa_P(\mathrm{ID}) = n$ teljesül.

Definition 1.4 — **Kommunikációs bonyolultság**

$\kappa(f)$ a $\kappa_P(f)$-ek minimuma az összes f-et kiszámoló P protokollon.

Theorem 1.5

$$\kappa(\mathrm{ID}) = n.$$

Ennek a bizonyításához kell a következő definíció és tétel.

Definition 1.6 **Kommunikációs mátrix**

Az f kommunikációs mátrixa az az $M_f \in \{0,1\}^{2^n \times 2^n}$, amelynek sorai x-szel, oszlopai y-nal vannak indexelve, és az x-hez tartozó sor y-hoz tartozó oszlopában $f(x,y)$ szerepel.

Remark

A továbbiakban a log mindig a 2-es alapú logaritmust jelenti.

Theorem 1.7 **Mehlhorn–Schmidt**

$\kappa(f) \geq \log r(M_f)$, ahol $r(M_f)$ az M_f mátrix rangját jelöli.

Proof: Legyen P egy adott protokoll. Tegyük fel, hogy A kezd. Ekkor A kommunikál egy bitet. Ez rögzített P protokoll mellett bizonyos x-ekre 0, bizonyos x-ekre 1. Ezzel az M_f mátrixot két részre bontja: az egyik részben azon sorok vannak, amelyekre 0-t mond, a másikban azok, amelyekre 1-et. Ezek közül az egyik sorrangja $\geq \frac{1}{2}(M_f)$.

Ezt ismételjük addig, amíg A lép. Amikor B lép, akkor ugyanez elismételhető oszloprangra, de egy mátrix sor- és oszloprangja megegyezik. Ha x és y olyan, hogy minden lépésnél a nagyobb rangú részmátrixot adják meg, akkor k lépés után a részmátrix rangja $\geq 2^{-k} r(M_f)$.

Tegyük fel, hogy a k. lépésben vége van a játéknak. Ekkor szimmetriaokokból feltehető, hogy A tudja $f(x,y)$-t, és B tudja, hogy A tudja. Mivel A tudja $f(x,y)$-t, az így kapott részmátrix minden sora homogén, azaz vagy csupa 0-t, vagy csupa 1-et tartalmaz. Ha pedig egy sor nem homogén, akkor A nem tudhatja biztosan $f(x,y)$-t. Hasonlóan, az, hogy B tudja biztosan $f(x,y)$-t, az azzal ekvivalens, hogy a kapott részmátrix minden oszlopa homogén.

Mivel homogén részmátrix rangja 1, az előbbi egyenlőtlenség szerint $1 \geq 2^{-k} r(M_f)$, azaz $2^k \geq r(M_f)$ fog teljesülni minden olyan (x,y) párra, amelyeket P k lépésben számol ki. ☐

Corollary 1.8

Innen könnyen kijön, hogy $\kappa(\mathrm{ID}) = n$, ugyanis $M_{\mathrm{ID}} = I_{2^n}$, és $r(I_{2^n}) = 2^n$, tehát $n \leq \kappa(\mathrm{ID})$ a Mehlhorn–Schmidt-tétel miatt. Másrészt láttuk, hogy $\kappa(f) \leq n$ minden f-re, így $\kappa(\mathrm{ID}) = n$.

Remark

Felső becslés nem ismeretes $\kappa(f)$-re. Lovász és Suchs nevéhez fűződő sejtés szerint $\exists c > 0 :$ $\kappa(f) \leq \log^c(r(M_f))$. Tudjuk, hogy $c > 2$ kell hogy teljesüljön. Ismert továbbá, hogy $\kappa(f) \leq r(M_f)$.

Corollary 1.9

$\mathrm{DISJ}(x,y) = \chi_{\{x \cdot y = 0\}}$, a halmazdiszjunktsági feladat. Akkor erre is $\kappa(\mathrm{DISJ}) = n$.

Proof of Corollary: Elemszám szerint rendezve az n elemű halmaz részhalmazait a sorokban, és a komplementereiket az oszlopokban

$$M_{\text{DISJ}} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

felsőháromszög alakú, vagyis $\kappa(\text{DISJ}) = n$ ☐

Definition 1.10 **Nemdeterminisztikus kommunikációs bonyolultság**

Alíz ismeri x-et, Bob ismeri y-t, E.T. ismeri mindkettőt, és f-et is. Utóbbi meg akarja győzni a játékosokat, hogy tudja. Ezt egy bizonyítással teszi, amit függetlenül A-nak, és B-nek is el kell fogadnia. Egy fix E.T. által az (x, y) párra adott bizonyítás hossza, amikor azt akarja bizonyítani, hogy $f(x, y) = 1$ legyen $\kappa_1^{\text{E.T.}}(f(x, y))$. Legyen továbbá

$$\kappa_1^{\text{E.T.}}(f) := \max_{\{x,y: f(x,y)=1\}} \kappa_1^{\text{E.T.}}(f(x, y)),$$

végül

$$\kappa_1(f) = \min_{\text{E.T.}} \kappa_1^{\text{E.T.}}(f)$$

a legjobb E.T. által a legrosszabb esetben adott bizonyítás hossza. Hasonlóan definiáljuk a $\kappa_0(f)$ -et is.

Remark

$\max \kappa_0(f), \kappa_1(f) \leq \kappa(f)$ teljesül, hiszen reprodukálhatja az adott esetben a protokoll által megszabott kommunikációját

Example

Ha $x \neq y$, akkor az $(i, x_i = 0)$ pár (ahol $y_i = 1$) megadása $\log(n) + 1$ bit hosszú, és bizonyítja, hogy az ID feladat nem teljesül. Egyenlőségre nem látszik kapásból hasonló jó bizonyítás.

Theorem 1.11 **Az ND kommunikációs bonyolultság jellemzése fedő téglalapokkal**

$\kappa_1(f)$ az a legkisebb t szám, hogy M_f egyesei lefedhetők 2^t darab csupa 1-es részmátrixxal

Remark

M_f-et már ismerjük, a kommunikációs mátrix. A tételben részmátrix alatt az oszlopok, és sorok egy-egy részhalmazait kiválasztva, a metszetekből álló részt értjük. Figyelem, ez nem feltétlenül egy összefüggő téglalap!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-ben az első és utolsó sor, és oszlopok által meghatározott rész is egy ilyen csupa egyes részmátrix.

Corollary 1.12

Láttuk, hogy $M_{\mathrm{ID}} = I_{2^n}$, ezt pedig csak úgy fedhetjük le csupa 1-es téglalapokkal, ha külön-külön kiválasztjuk az átlóelemeket. Következik, hogy $\kappa_1(\mathrm{ID}) = n$.

Proof of Az ND kommunikációs bonyolultság jellemzése fedő téglalapokkal:

($\kappa_1(f) \le t$)

Tekintsük a fedő téglalapokat. Alíznak van egy sora, Bobnak egy oszlopa. A protokollban megállapodnak a 2^t darab fedőmátrix egy sorrendjében. E.T. bizonyítása az lesz, hogy hanyadik részmátrixban van az (x, y) metszet, ez t bittel kódolható, leellenőrzik, hogy benne van-e az adatuk, és mivel ez csupa egyesből áll, így szükségszerűen $f(x, y) = 1$. %feltesszük, hogy E.T. nem hazudik?

($\kappa_1(f) \ge t$)

Legyen

$$H_\alpha = \{(x, y) : \text{A-nál } x, \text{ B-nél } y \text{ van, és } \alpha \text{ üzenetet hallják, akkor elfogadják a bizonyítást}\}.$$

Ha $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H_\alpha$, akkor $(x_1, y_2), (x_2, y_1) \in H_\alpha$, hiszen az α bizonyítást Alíz elfogadta (x_1, y_1)-re, az ő nézőpontjából semmi nem különbözteti meg a szituációt attól, mintha (x_1, y_2) lenne a felállás, ezt pedig Bob is elfogadja, hiszen számára (x_1, y_2), és (x_2, y_2) ugyanolyan, és ez utóbbit elfogadta α-ra. Következik, hogy minden α-ra H_α megfelel egy részmátrixnak. Ha E.T. legfeljebb t bitből bizonyítani tudja, hogy $f(x, y) = 1$, ez szolgáltat lazannyát és 2^t darab csupa egyes részmátrixot. ☐

Randomizálva azonban gyorsan is lehet a következő Simon és Rabin nevéhez fűződő protokollal. A generál egy véletlen p prímet $\in \{1, .., n^2\}$ (ahol $\log x, \log y \le n$), és elküldi az $(x \bmod p, p)$ üzenetet, B pedig leellenőrzi, hogy $x \equiv y \bmod p$ teljesül-e, és ezt mondjuk százszor megismétlik.

Ha egyszer is az teljesül, hogy inkongruensek, akkor az eredeti számok sem lehettek egyenlőek, ha mindig kongruensek, és mégsem egyenlőek, akkor százszor teljesült az, hogy $p | x - y \ne 0$.

A $\le 2^n$ számoknak legfeljebb n darab prímosztója lehet, és n^2-ig nagyjából $\pi(n^2) \sim \frac{n^2}{2\log(n)}$ darab prím van. Annak a valószínűsége, hogy egyszer teljesül a kongruencia

$$\mathbb{P}(p | x - y) \le \frac{n}{\frac{n^2}{2\log(n)}} = \frac{2\log n}{n} \to 0.$$

Egy kommunikáció $4 \log n$ bitet küld, ergo összesen $400 \log n$ bitnyi kommunikáció történik.

Nem (teljesen) triviális protokollok:

Example

Tekintsünk egy fagráfot, aminek van két részfája. Kérdés, hogy az n csúcsú T fa T_1, T_2 részfáinak van-e közös csúcsa. Alíz kapja T_1-et, Bob T_2-t értelemszerűen, és mindketten ismerik T-t. Ez eldönthető lenne a DISJ játék speciális eseteként, de adunk egy okosabb protokollt.

Alíz megmondja T_1 egy tetszőleges v csúcsát (ez ugye $\log n$ bit kommunikáció). Majd Bob kiszámolja T_2-ben a v-hez legközelebbi w csúcsot, mivel fában egyértelmű út van két csúcs között, ez értelmes. Ezt visszaküldi Alíznak, ellenőrzi, hogy $w \in T_1$, ha igen, ez metszetbeli, és készen vagyunk, ha nem, akkor azt mondja, hogy a két fa diszjunkt. Ugyanis, ha a legközelebbi w pont nem része a fának, de egy további u pont része lenne T_1-nek, az uw szakasz T_2-ben van, az uv szakasz pedig T_1-ben, vagyis u közelebb van v-hez, mint w.

Example

Most Alíz és Bob két részgráfot kap egy G gráfból úgy, hogy G_A független csúcsokból áll, G_B pedig egy teljes részgráf. Kérdés, hogy van-e metszet?

Világos, hogy ha van, legfeljebb 1 pontból állhat.

1. Alíz megnézi, hogy van-e legalább $\frac{n}{2}$ fokú v csúcs a gráfjában, ha igen, akkor $(1, v)$-t küldi el, ha nem, 0-t.
2. Bob megnézi, hogy van-e $< \frac{n}{2}$ fokú w csúcs G_B-ben, ha igen, $(1, w)$-t küld, ha nincs, 0-t.

Ezek után Bob tudja, hogy G_A v-ből, és a nem-szomszédaiból áll, ez legfeljebb $\frac{n}{2}$ csúcsból áll, és iteratíven folytathatjuk ezt az eljárást amíg lehet. Ha Bob talál egy kis fokszámú w csúcsot, akkor az ő gráfjának a többi csúcsa ennek a szomszédai közül kerül ki, és ismét rekurzíven folytatható az eljárás. Mi történik, ha mindketten 0-t küldenek? Alíz gráfjában minden csúcs kisebb mint $\frac{n}{2}$ fokú, G_B-ben pedig minden csúcs legalább $\frac{n}{2}$ fokú, ez a két feltétel kizárja egymást, így a két gráf diszjunkt. Addig ismételgetik a fenti lépést, amíg nem mondanak mindketten nullát. Egy lépés $\log n + 1$ bit, és $\log n$ lépésben persze kimerítik a gráfot, vagyis $O(\log^2 n)$ bitre van összesen szükség.

Theorem 1.13 **Aho–Ullman–Yanakakis**

Minden f-re

$$\kappa(f) \le (2 + \kappa_0(f))(2 + \kappa_1(f)).$$

Lemma 1.14

Ha M egy $0-1$ mátrix, H egy azonosan nulla részmátrixa, H sorai alkossák az A, oszlopai a B mátrixot, ekkor $\rho(A) + \rho(B) \le \rho(M)$, ahol $\rho(M)$ a sor/oszloppermutációval képezhető legnagyobb négyzetes felsőháromszög részmátrix méretét jelölli, aminek a főátlója csupa 1-ből áll.

Proof of Lemma: A lemma azon múlik, hogy A és B-t külön-külön mozgathatjuk, a csupa nulla metszet nem fog változni, és a másik mátrixhoz nem nyúltunk hozzá, diszjunkt sorokból/oszlopokból áll. Egy permutációval megfelelő helyre visszük A-ban a maximális U_A felsőháromszög mátrixot, ezt B-ben is elvégezve (U_B) kapunk egy $\begin{bmatrix} U_B & \\ 0 & U_A \end{bmatrix}$ felsőháromszöget M-ben.

$$\begin{bmatrix} & B_1 & \\ A_1 & 0 & A_2 \\ & B_2 & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & B_1 & B_1 & & \\ & B_1 & U_B & & \\ A_1 & 0 & 0 & U_A & A_2 \\ A_1 & 0 & 0 & A_2 & A_2 \\ & B_2 & B_2 & & \end{bmatrix}$$

Proof of Aho–Ullman–Yanakakis: Világos, hogy $\rho(M_f) \leq r(M_f)$, és $\log \rho(M_f) \leq \kappa_1(f)$ teljesülnek, mert egy csupa 1 főátlójú felsőháromszög mátrix teljes rangú, illetve ref{NDKB jell} miatt.

Indukcióval belátjuk, hogy $\kappa(f) \leq (2 + \log \rho(M_f))(2 + \kappa_0(f))$. Ha $\rho(M_f) = 1$, akkor nem is kell kommunikálni, mert egy ilen mátrixban vagy csak egyesek állnak, vagy pontosan egy sorában vagy oszlopában vannak egyesek. Az általános lépésben tekintsük a kommunikációs mátrix nullásainak a fedését $2^{\kappa_0(f)}$ darab csupa nulla részmátrixszal. Alíz megnézi, hogy fedi-e az ő x inputjának egy részét olyan csupa 0 részmátrix, hogy a hozzá tartozó sorokból alkotott A mátrixra $\rho(A) \leq \frac{\rho(M_f)}{2}$, ha igen, akkor elküldi az (1, a csupa nulla részmátrix sorszáma) üzenetet, ez legfeljebb $1 + \kappa_0(f)$ bit kommunikáció, ha nincs ilyen részmátrix, akkor 0-t küld. Bob hasonlóan megnézi, hogy van-e az y-jához olyan fedő csupa 0 mátrix, amely oszlopaihoz tartozó B mátrixra $\rho(B) \leq \frac{\rho(M_f)}{2}$, ha igen (1,a fedő mátrix sorszáma), ha nincs ilyen, akkor pedig 0-t küld.

Mi történik, ha mindketten 0-t küldenek?

Akkor $f(x, y) = 1$, hiszen ha 0 lenne, akkor a metszetüket lefedné egy csupa 0 részmátrix, de az eddigi kommunikáció szerint az ezen fedőmátrixhoz tartozó sorok, és oszlopok ρ értékei összesen többet adnak, mint $\rho(M_f)$, ellentmondásban a lemmánkkal.

Definition 1.15 **Kommunikációs bonyolulstágok**

$f \in \mathrm{P}^{\mathrm{CC}}$, ha $\exists c > 0 : \kappa(f) \leq \log^c n$.
$f \in \mathrm{NP}^{\mathrm{CC}}$, ha $\exists c > 0 : \kappa_1(f) \leq \log^c n$.
$f \in \text{co-NP}^{\mathrm{CC}}$, ha $\exists c > 0 : \kappa_0(f) \leq \log^c n$.

A fenti tétel következményeként adódik, hogy $\mathrm{P}^{\mathrm{CC}} = \mathrm{NP}^{\mathrm{CC}} \cap \text{co-NP}^{\mathrm{CC}}$.

Láttuk továbbá, hogy $\mathrm{NP}^{\mathrm{CC}} \neq \text{co-NP}^{\mathrm{CC}}$, mert ID benne van a jobb oldalban, de a balban nincs.

$\mathrm{P}^{\mathrm{CC}} \neq \text{co-NP}^{\mathrm{CC}}$ szintén az ID miatt (így $\mathrm{P}^{\mathrm{CC}} \neq \mathrm{NP}^{\mathrm{CC}}$ is teljesül).

2 NP-n túl

2.1 Polinomialis hierarchia

Definition 2.1 **Polinomiális reláció**

Azt mondjuk, hogy $P(x, y_1, y_2, ..., y_l)$ egy polinomiális reláció, ha $\exists i$ úgy, hogy $\forall i : |y_i| \leq |x|^c$ es $P(x, y_1, ..., y_i)$ kiszámolható $|x|$-ben polinomimális időben.

Definition 2.2 **Σ_i**

Tetszőleges L nyelvre $L \in \Sigma_i \Leftrightarrow \exists P(x, y_1, ..., y_i)$ polinomiális reláció úgy, hogy $x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 ... Q y_i$ úgy, hogy $P(x, y_1, y_2, ..., y_i)$ teljesül. Ahol Q a következőképpen van definiálva:

$$Q = \begin{cases} \forall \text{ ha } i \text{ paros} \\ \exists \text{ ha } i \text{ paratlan} \end{cases}$$

Definition 2.3 **Π_i**

Tetszoleges L nyelvre $L \in Pi_i \Leftrightarrow \exists P(x, y_1, ..., y_i)$ polinomialis relacio ugy, hogy $x \in L \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 ... \tilde{Q} y_i$ ugy, hogy $P(x, y_1, y_2, ..., y_i)$ teljesul. Ahol $\tilde{Q}$ a kovetkezokeppen van definialva:

$$\tilde{Q} = \begin{cases} \forall \text{ ha } i \text{ paratlan} \\ \exists \text{ ha } i \text{ paros} \end{cases}$$

Example

Pár nevezetes bonyolultsági osztály amit már ismerünk:
1. NP $= \Sigma_1$
2. co-NP $= \Pi_1$
3. P $= \Sigma_0 = \Pi_0$

Remark

1. Minden i-re $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$. Valasszuk ugy a polinomimalis relaciot hogy az utolso valtozotol ne fuggjon.
2. Minden i-re $\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$. Valasszuk ugy a polinomimalis relaciot hogy az elso valtozotol ne fuggjon.
3. Minden i-re $\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$.
4. Minden i-re $\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$.

Ezen osztalyokat a kovetkezo hierarchiaval tudjuk vizualisan jellemezni.

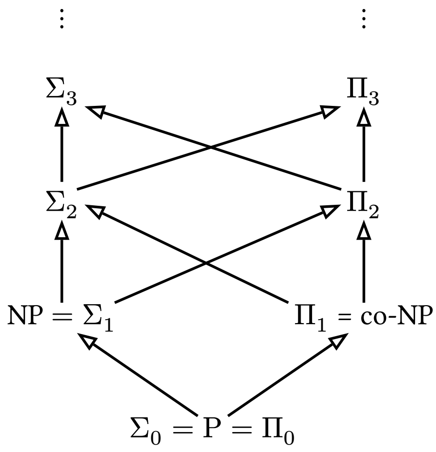


Figure 1: Polinomiális hierarchia vizualizáció

Definition 2.4 **Polinomialis Hierarchia**

$$\mathrm{PH} = \bigcup_{\{i=1\}}^{\infty} \Sigma_i = \bigcup \{i=1\}^{\infty} \Pi_i$$

Definition 2.5

$$\text{INDEPENDENT} := \{(G, m) : \alpha(G) \geq m\}$$

azaz, azon G grafok es m szamok parosai, melyekre G fuggetlensegi szama nagyobb mint m.

Definition 2.6

$$\text{EXACT\_INDEPENDENT} := \{(G, m) : \alpha(G) = m\}$$

azaz, azon G grafok es m szamok parosai, melyekre G fuggetlensegi szama nagyobb pont m.

Proposition 2.7

$$\text{EXACT\_INDEPENDENT} \in \Sigma_2$$

Proof: $\exists H \subseteq V(G)$ fuggetlen csucshalmmaz es $|H| = m$
$\forall H' \subseteq V(G)$ csucshalmazra, ahol $|H| = m + 1$ mar H' osszefuggo.

Remark

A letezest ($\exists$) es a mindent ($\forall$) nem kell polinomialis idoben szamolni, csak a H-t es H'-t kell polinomialis idoben ellenorizni.

Theorem 2.8

Ha $\exists i \geq 1$ amire $\Sigma_i = \Pi_i$, akkor $\Sigma_{\{i+1\}} = \Pi_{i+1}$, amibol tovabb kovetkezik, hogy $\mathrm{PH} = \Sigma_i = \Pi_i$. Azt mondjuk, hogy a polinommialis hierarchia *osszeomlik* az i-edik szintre.

Proof: Mivel tudjuk, hogy $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$, ezert eleg azt belatnunk, hogy $\Sigma_{i+1} \subseteq \Sigma_i$ es ezzel belatjuk, hogy $\Sigma_i = \Sigma_{i+1}$. Hasonlo modon be tudjuk latni hogy $\Pi_i = i_{i+1}$.

Legyen $L \in \Sigma_{i+1}$ tetszoleges nyelv, bizonyitsuk be hogy $L \in \Sigma_i$. Mivel $L \in \Sigma_{i+1}$, ezert letezik egy P polinomialis relacio, melyre

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists ... Q y_{i+1} P(x, y_1, ..., y_i).$$

Tovabba, letezik egy $L' \in \Pi_i$ nyelv, melyre

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 : (x, y_1) \in L'.$$

Figyelem, itt csak annyi tortent hogy beillesztettuk egy extra y_1 valtozot a letezes ($\exists$) kvantorral a Pi_i definicio ele, igy kaptunk egy definiciot Σ_{i+1}-re.

Mivel $\Sigma_i = \Pi_i$, ezert $L' \in \Sigma_i$, tehat letezik egy polinomialis relacio S ugy, hogy

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 \forall ... Q y_{i+1} S(x, y_1, ..., y_i).$$

Csoportosithatjuk y_1-et es y_2-t.

$$x \in L \Leftrightarrow \exists (y_1, y_2) \forall ... Q y_{i+1} S(x, (y_1, y_2), ..., y_i).$$

A jobboldalon i darab kvantor van es pont abban a sorrendben mint ahogy kell lenniuk Σ_i definiciojahoz. Tehat belattuk, hogy ha $Lin\Sigma_{i+1}$ akkor $L \in \Sigma_i$. ⍰

Theorem 2.9 **Savitch**

Ha $\forall n f(n) \geq n$, akkor

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

Proof: Legyen $L \in \text{NSPACE}(f(n))$ egy tetszőlegese nyelv, a célunk megmutatni, hogy L felismerhető egy determinisztikus Turing-géppel $f^2(n)$ tárban.

Figyeljük meg, hogy aha egy Turing-gép t tárat használ futása alatt, akkor legfeljebb $O(2^{c \cdot t})$ különböző konfigurációba kerülhet.

Tudjuk, hogy van egy nemdeterminisztikus Turing-gép mely felismeri az L nyelvet, tehát a konfigurációs gráfban van út a kezdőállapotból a reprezentáns elfogadó állapotok csúcsába. Mivel legfeljebb $2^{c \cdot f(n)}$ konfiguráció van, ezért egy elfogadó út hossza legfeljebb $2^{c \cdot f(n)}$.

Ha tudunk mutatni egy determinisztikus Turing-gépet ami el tudja dönteni egy gárfban, hogy adott s és t csúcsok között van-e út $O(\log^2 n)$ tárban, akkor a konfigurációs gráfra alkalmazva $O(f^2(n))$ méretű tárat használó eljárást adnánk L felismerésére.

Megmutatjuk, hogy $O(\log^2 n)$ tárban el tudjuk dönteni, hogy s és t között megy-e út egy adott G gráfban. Legyen $\text{st-conn}(k, s, t)$ az algoritmus ami eldönti, hogy legfeljebb k hosszú út van-e s és t között. Nyilvan ha van olyan $u \in V(G)$ csúcs mely s-ből elérhető legfeljebb $k/2$ hosszú úton és u-ból t elérhető legfeljebb $k/2$ hosszú úton, akkor s-ből t is elérhető legfeljebb k hosszó úton.

Tehát a következőképpen néz ki a rekurziónk:

$$\begin{cases} \text{st-conn}(0, s, t) = \left(s \stackrel{?}{=} t\right) \\ \text{st-conn}(1, s, t) = (st) \stackrel{?}{\in} E(G) \\ \text{st-conn}(k, s, t) = \exists ?\, u \in V(G) : \text{st-conn}(k/2, s, u) \land \text{st-conn}(k/2, u, t). \end{cases}$$

Látszik, hogy a rekurzió mélysége $O(\log n)$ és mindegyik rekurzív hívásban csak a függvény argumentumait kell tárolnunk amiket bitekben $O(\log n)$ tárban meg tudjuk oldani. Tehát az st-conn algoritmus $O(\log^2 n)$ tárban működik, és ezzel készen is vagyunk, mivel

$$\left(\log\left(2^{c \cdot f(n)}\right)\right)^2 = (c \cdot f(n) \cdot \log 2)^2 = c^2 \cdot f^2(n) = O(f^2(n)).$$

Corollary 2.10

$$\text{NPSPACE} = \text{PSPACE}$$

Proof: Polinom négyzete polinom.

2.2 PSPACE teljesség

Definition 2.11 **PSPACE teljesség**

Azt mondjuk, hogy L PSPACE teljes, ha $L \in \text{PSPACE}$ és $\forall L' \in \text{PSPACE}$ nyelvre $L' \propto L$. Tehát L' visszavezethető L-re polinomiális *időben.*

Definition 2.12 **tqbf – Totally Quantified Boolean Formula**

Azt mondju, hogy φ egy teljesen kvantifikált Boole-formula, ha olyan alaba írható, hogy

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_l x_l f(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

ahol $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ és x_i Boole változók és $f(x_1, \dots, x_l)$ egy konjunktív normál formula (CNF).

Example

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z((x \vee z) \wedge y)$$

Ez a formula igaz.

Remark

Egy tqbf vagy igaz vagy hamis. Nem olyan mint egy CNF ahol az a kérdés hogy van-e helyes behelyettesítése, hanem magát a kvantálás megválaszolja, hogy a formula igaz vagy hamis.

Definition 2.13 **TQBF – True Quantified Boolean Formula**

$$\text{TQBF} := \{\varphi,\ \text{ahol } \varphi \text{ egy tqbf és } \varphi = \text{true}\}.$$

Azaz TQBF az igaz teljesen kvantifikált Boole formulák nyelve.

Theorem 2.14

A TQBF nyelv PSPACE teljes.

Proof:

1. TQBF $\in$ PSPACE

Végezzünk teljes indukciót a kvantorok számára. Ha $(n-1)$ kvantoros tqbf ellenörzését el tudjuk végezni $\text{poly}(n)$ tárban, akkor n kvantoros tqbf ellenörzésénél csak 1-el több bitet kell tárolnom a kvantor típsára és meg x_n értékét.

2. $\forall L \in \mathbf{PSPACE} : L \propto \mathbf{TQBF}$

Röviden megemlítjük, hogy ebben az esetben nem tudjuk azt a trükköt eljátszani amivel bizonyítottuk, hogy SAT ∈ NPC, mert a Turing-gép összes szabályos lépését leíró formula hossza már bőven nem polinomiális lesz. Ez a trükk azért működött a SAT feladatnál, mert ott polinomiális időben kellett ellenőriznünk, itt viszont a tárnak kell polinomiálisnak lennie.

Az ötlet, hogy újra felhasználjuk az st-conn feladatot. Ha fel tudjuk írni az st-conn feladatot mint egy polinomiálisan méretű tqbf a kezdő csúcsra és az elfogadó csúcsok reprezentására a konfiguráció gráfra, akkor készen lennénk. Mivel bármilyen polinoiális tárban felismerhető nyelvet át tudunk írni polinomiális időben egy polinomiálisan hosszú tqnf-re.

Nézzük mit ad a köztes csúcs trükk amit már használtunk a Savitch tétel bizonyításában:

$$\text{st-conn}(k, s, t) \Leftrightarrow \exists u \in V : \text{st-conn}(k/2, s, u) \land \text{st-conn}(k/2, u, t).$$

A probléma ezzel a felírással, hogy bár feleztük a k paramétert, de a formula hossza nőt, tehát összességében nem értünk el érdembeli javulást.

A trükk az, hogy kihasználjuk az univerzális kvantort (∀), hogy ne kelljen dupláznunk a formula méretét:

$$\text{st-conn}(k, s, t) \Leftrightarrow \exists u \in V \forall (x, y) \in \{(s, u), (u, t)\} : \text{st-conn}(k/2, x, y).$$

Ha az L nyelvet t tárban felismerte egy Turing-gép, akkor legfeljebb $2^{c \cdot t}$ konfigurációja van. Tehát a konfigurációs gráfnak legfeljebb $2^{c \cdot t}$ csúcsa van. Mivel a jobboldali formula mérete polinomiális és k értékét mindig felezzük, ezért a végső formula mérete polinomiális lesz.

$\boxed{?}$

Definition 2.15 **Generalized Geography játék**

Legyen (G, u) egy rendezett pár, ahol G egy irányított gráf és $u \in V(G)$ a gráf egy adott csúcsa. A játékot Alíz és Bob játsza a következő szabályok alapján:
- Alíz kezd az u csúcsból.
- Alíz és Bob felváltva lépnek.
- A jelenlegi csúcsból csak belőle kifele menő élel keresztül szabad lépni a következő csúcsba.
- Már látogatott csúcsba tilos lépni.
- Ha a soron következő játékosnak már nincs szabályos lépése, akkor az ellenfél nyer.

Remark

Ez a játék az általánosítása az ország-város játéknak, ahol felváltva sorolunk városokat azzal a megkötéssel, hogy a következő város azzal a betűvel kezdőthet amivel az előző végződött és az veszít aki már nem tud várost mondani.

Definition 2.16 **Generalized Geography osztály**

$$\text{GG} = \{(G, u) : \text{Alíznak van nyerő stratégiája } u\text{-ból indulva}\}.$$

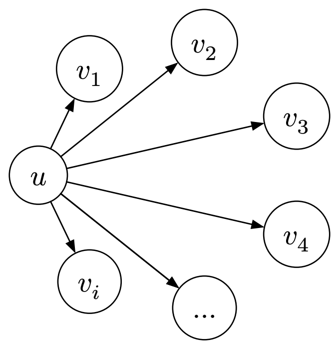
Theorem 2.17

A GG nyelv PSPACE teljes.

Proof:

1. GG ∈ PSPACE

Végezzünk teljes indukciót a leghosszabb út hosszára. Ha polinomiális tárban el tudjuk dönteni, hogy Bob-nak nincsen stratégiája legfeljebb $(n-1)$ hosszú útra, akkor tudjuk, hogy Alíznak van nyerő stratégiája.



Nézzük meg u-nak az összes ki-szomszédkára, hogy Bob-nak nincs nyerő stratégiája. Mivel minden szomszédra polinomiális tárban eldönthetjük, és a tárat újra tudjuk használni, ezért az egész feladatot el tudjuk dönteni polinomiális tárban.

2. TQBF ∝ GG