Bonyelm invitational

Bonyolultság elmélet gyakorlat

Toffalini Leonardo

Feladat 1

Mutast meg, hogy ha a **P**

Lemma 0.1 — Schwartz–Zippel

Legyen $P \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ egy nem azonosan nulla polinom, aminek a foka legalább $d \geq 0$. Legyen S egy véges halmaz és $r_1, ..., r_n \in S$ véletlen elemek. Ekkor

$$\mathbb{P}(P(r_1, ..., r_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

Megoldás

$$A \cdot B = C \iff AB - C = 0$$

Ha $AB - C = 0$, akkor $(AB - C)x = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re. Nyilván $AB - C$ is egy $n \times n$-es egész mátrix.

Figyeljük meg, hogy egy $c \cdot x$ skaláris szorzat érthető úgy mint egy c együthatókkal rendelkező n változós elsőrendű polinomba behelyettesítés:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + ... + x_3 c_n.$$

Ha $AB - C$ sorait a c_i vektorok jelölik, akkor $(AB - C)x = 0$ ekvivalens azzal, hogy x gyöke a c_i együtthatús elsőfokú n változós polinomoknak.

Tehát az algoritmus csak annyit fog csinálni, hogy kiválaszt véletlenül egy n hosszú x vektort egy kellően nagy halmazból és leteszteli, hogy $(AB - C)x \stackrel{?}{=} 0$.

Ha van olyan koordináta ami nem 0, akkor fixen $AB \neq C$, ha viszont a csupa nulla vektort kapjuk eredményül, akkor csak kis eséllyel tévedünk.

Amikor a nem választ mindig eltaláljuk és az igenlő válasznál mindig legfeljebb $\frac{1}{2}$ eséllyel tévedünk az a **co-RP** definíciója. Tehát ez a feladat **co-RP**-ben van. Mivel **co-RP** $\subseteq$ **BPP**, ezért **BPP**-ben is benne van ez a feladat.

Ennek az algortimusnak a futásideje valóban négyzetes (logaritmusoktól eltekintve), mivel sosem szoroztunk össze mátrixokat, csak mátrix-vektor szorzatot számoltunk, ami négyzetes időben könnyen kiszámolható. Újra zárójelezve látjuk, hogy

$$(AB - C)x = A(Bx) - Cx,$$

ahonnan valóban csak három mátrix-vektor szorzatot és egy vektor-vektor kivonást kell elvégeznünk RAM-gépen, amit meg tudunk csinálni $\tilde{O}(n^2)$ időben.