

Negyedik házifeladat

TOFFALINI LEONARDO, leonardotoffalini@gmail.com, JPWNJX

Feladat

Hogyan keressünk hatékonyan egy csúcssúlyozott fában (negatívok is lehetnek a súlyok) maximális összsúlyúfüggetlen csúcshalmazt.

Megoldás

Jelöljünk ki egy tetszőleges r csúcsot mint gyökeret.

Jelölje $A[v]$ a maximális súlyú független csúcshalmaz súlyát azon részfában, mely v alatt van és v benne van a csúcshalmazban.

Hasonlóképpen, jelölje $B[v]$ a maximális független csúcshalmaz súlyát azon részfában, mely v alatt van és v nincs benne a csúcshalmazban.

Ekkor mindegyik v csúcsra, ha v benne benne van a csúcshalmazban, akkor egyik gyereke se lehet benne, ezért

$$A[v] = w(v) + \sum_u B[u],$$

ahol u gyereke v -nek az r gyökerű fában.

Ha viszont v nincs benne a csúcshalmazban, akkor bármelyik gyereke benne lehet vagy nem, ezért

$$B[v] = \sum_u \max\{A[u], B[u]\},$$

ahol u gyereke v -nek.

Ezeket az alfeladatokat megoldjuk DFS sorrendben, és a végső válaszunk a következő:

$$\max\{A[r], B[r]\}.$$

A futásidő linearás a csúcsok számában n , mivel minden részfeladatot megoldunk. Ezért $2n$ részfeladatot kell megoldanunk.

Egy kicsit kell figyelnünk arra, hogy mennyi idő egy következő részfeladatot megkapni. Ha naivan azt mondjuk, hogy legfeljebb n elem maximumát kell megtalálni, akkor $O(n^2)$ -es algoritmust kapnánk. Viszont megfigyelhetjük, hogy egy maximumnál $d(v) - 1$ elem közül kell megtalálnunk a maximumot, és ha ezeket összeadjuk akkor $O(m)$ -et kapunk, ami egy fában $O(n)$.