S16

Materia Diseño de algoritmos

Fecha September 18, 2023

Add a property

Add a comment...

Caso homogéneo con raíces diferentes

$T(n) = \sum_{j=1}^{k} C_1 x_j^n$ $x_i =$ una raíz de multiplicidad m

$T(n) = \sum_{j=1}^{m} d_j n^{m-j} x_1^n$

Caso no homogéneo

$\sum_{j=1}^{k} a_j T(n-j) = \sum_{i=1}^{s} b_i^n P_i(n)$ $P_i(n)$ polinomio de grado d_i

$(\sum_{j=0}^{k} a_j x^{k-j}) \prod i = 1^s (x - bi)^{d_i+1} = 0$

Ejemplo

Cuando el argumento tiene una fracción en terminos de n significa que el facor va en terminos de una potencia (podemos deducir aa que potencia viendo al denominador)

$$T(n) = \frac{3}{2}T(\frac{n}{2}) - \frac{1}{2}T(\frac{n}{4}) - \frac{1}{n}$$

$T(1) = 1$ y $T(2) = \frac{3}{2}$

n es potencia de 2

Cambio de variable

$n = a^k \Rightarrow n = 2^k$

$T(2^k) = \frac{3}{2}T(2^{k-1}) - \frac{1}{2}T(2^{k-2}) - \frac{1}{2^k}$ → No homogéneo

Cambio de variable

$H(k) = T(2^k)$

$$H(k) = \frac{3}{2}H(k-1) - \frac{1}{2}H(k-2) - \frac{1}{2^k}$$
$$H(k) - \frac{3}{2}H(k-1) + \frac{1}{2}H(k-2) = -(\frac{1}{2})^k$$

Ecuacion no homogenea $H(k) - \frac{3}{2}H(k-1) + \frac{1}{2}H(k-2) = -(\frac{1}{2})^k(1)$ con $d = 0, b = \frac{1}{2}$

$$(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^1 = 0$$

Soluciones

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}$$
$$H(k) = C_1(\frac{1}{2})^k + C_2k(\frac{1}{2})^k + C_3 1^k = T(2^k)$$

Con $n = 2^k, k = logn$

$$T(n) = \frac{C_1}{n} + C_2\frac{1}{n}logn + C_3$$
$$T(4) = \frac{3}{2}T(2) - \frac{1}{2}T(1) - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$T(n) = 1 + \frac{logn}{n} \in O(?)$$

$$T(1) = C_1 + \quad +C_3 = 1$$
$$T(2) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + C_3 = \frac{3}{2}$$
$$T(4) = \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + C_3 = \frac{6}{4}$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{1} = lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{logn}{n}}{1} = lim_{n\to\infty}1 + \frac{logn}{n}$$
$$= 1 + lim_{n\to\infty}\frac{logn}{n} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 1$$

Por lo tanto $T(n) = 1 + \frac{logn}{n} \in O(1)$

Recurrencias no lineales

Es cualquier cosa que no se exprese en términos de n (de forma no lineal)

Lineales: $n^kT(n), n^k, logn, f(n)$

No lineal: $T^a(n), f(T)$

Para resolverlas se puede realizar un cambio de variables que las logre expresar en términos de su ecuación homogénea o no homogénea

---

Ejemplo

$T(n) = nT^3(\frac{n}{2}) \qquad T(1) = \frac{1}{3}$

Por $\frac{n}{2}$ sabemos que n es potencia de 2 por o tanto la expresión que nos conviene es $n = 2^k$

Sustituimos

$T(2^k) = 2^kT^3(2^{k-1})$

$H(k) = T(2^k)$

$H(k) = 2^kH^3(k-1)$

Aplicamos log de ambos lados para eliminar los exponentes

$logH(k) = log(2^kH^3k-1))$

Aplicamos propiedades de los logaritmos (

$= log2^k + logH^3(k-1)$

$= k + 3logH(k-1)$

Cambio de variable

$U(k) = logH(k)$

$U(k) = k + U(k-1)$

$U(k) - 3U(k-1) = k$

$\overline{T(n) - 3T(n-1) = n = b^nP(n)} \qquad b = 1, d = 1$

Ecuación característica

$(x-3)(x-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\sum_{j=0}^{k} a_j x^{k-j})(x-b)^{d+1} = 0$

Por lo tanto $U(k) = C_1 3^k + C_2 1^k + C_3 k 1^k$

$= C_1 3^k + C_2 + C_3 k$

$H(k) = 2^{U(k)}$

$H(k) = 2^{C_1 3^k + C_2 + C_3 k} \quad n = 2^k \quad \rightarrow k = logn$

$T(n) = 2^{C_1 3^{logn} + C_2 + C_3 logn}$

$T(2) = 2T^3(1) = 2(\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$T(4) = 4T^3(2) = 4(\frac{2}{9})^3 = \frac{32}{19683}$

$T(1) = 2^{C_1 + C_2} = \frac{1}{3}$

$T(2) = 2^{3C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2}{9}$

$T(4) = 2^{9C_1 + C_2 + 2C_3} = \frac{32}{19'683}$

Para resolverlos aplicamos log de ambos lados

$C_1 + C_2 = log\frac{1}{3}$

$3C_1 + C_2 + C_3 = log\frac{2}{9}$

$9C_1 + C_2 + 2C_3 = log\frac{32}{19'683}$