S7

Materia	Diseño de algoritmos
Fecha	@August 21, 2023

Medidas asintóticas

1. Autocontenido: $f(n) \epsilon O(f(n))$ → Reflexión
   $f(n) \in \Omega(f(n))$
   $f(n) \in \theta(f(n))$
2. Transitividad:
   Si $a \leq b, \quad b \leq c, \quad a \leq c$
   $f(n) \epsilon O(g(n))$ y $\quad g(n) \epsilon O(h(n)) \Rightarrow f(n) \epsilon O(h(n))$

   $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $g(n) \in \Omega(h(n)) \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \Omega(h(n))$
   $f(n) \in \theta(g(n))$ y $g(n) \in \theta(h(n)) \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \theta(h(n))$

Clasificación de los algoritmos con notación O

Def. → Decimos que un algoritmo es eficiente mientras sea menor su **complejidad**

Determinar el orden de complejidad

Ejemplo .- Tenemos 3 implementaciones distintas de un mismo algoritmo, los tiempos son:

$$2^{n+1}, \qquad n^2 logn, \qquad n^4$$

$$T_1(n), \qquad T_2(n), \qquad T_3(n)$$

1. Aplicamos propiedad 8) (identidad)

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=k \qquad \frac{n}{n^2}\to 0$$

a) $k=0 \quad \Rightarrow \quad f(n)\in O(g(n))$

$$g(n)\notin=(f(n))$$

b) $k\neq 0 \quad y \quad k<\infty \quad \Rightarrow \quad O(f(n))=O(g(n))$

c) $k=\overset{+}{-}\infty \quad \Rightarrow \quad g(n)\in O(f(n))$

$$f(n)\notin O(g(n))\Rightarrow f(n)\in\Omega(g(n))$$

Aplicamos L´hopital

$$lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2logn}=$$

❤️ $e^{ln2^{n+1}}=2^{n+1}$

$$\frac{d}{dn}e^{(n+1)ln2}$$

$$=e^{(n+1)ln2}\left(\frac{d}{dn}(n+1)ln2\right)$$

$$=ln2\ 2^{n+1}$$

$$\frac{d}{dn}(nln2+ln2)=ln2$$

⚠️ **Derivadas útiles**

$$\frac{de^{u(x)}}{dx}=e^{u(x)}\frac{du(x)}{dx}$$

$$\frac{d\,lnu(x)}{dx}=\frac{1}{u(x)}\frac{du(x)}{dx}$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2logn}=lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}ln2}{}$$

⚠️ **Regla de cadena**

$$\frac{du(x)v(x)}{dx}=u(x)\frac{dv(x)}{dx}+v(x)\frac{du(x)}{dx}$$

⚠️ $log_b n=\frac{ln\,n}{ln\,b}$

————-2————————-

$$\frac{d}{dx}log_b u(x)=\frac{ln\,u(x)}{ln\,b}$$

$$=\frac{1}{ln\,b}\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx}$$

🧡 $$\frac{d}{dn}n^2logn$$
$$= n^2\frac{d}{dn}logn + logn\frac{d}{dn}n^2$$ Aplicamos 2
$$= \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}ln2} + 2nlogn$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2logn} = lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}ln2}{\frac{n}{ln2} + 2nlogn}$$

🍇 $$2\frac{d}{dx}nlogn =$$
$$= 2(n\frac{dlogn}{dn} + logn) \qquad = 2(n\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}ln2} + logn)$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2logn} = lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}ln2}{\frac{n}{ln2} + 2nlogn}$$

$n(nlogn)$

$$= lim_{n\to\infty}\frac{(ln2)^2 2^{n+1}}{\frac{1}{ln2} + \frac{2}{ln2} + 2logn}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{(ln2)^3 2^{n+1}}{2\frac{1}{nln2}}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(ln2)^4 n2^{n+1} = \infty$$

Conclusión → c) $n^2logn \in O(2^{n+1})$ /log es mas chico que otro

---

Comparar $T_1(n)$ y $T_3(n)$

$$lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n^4} = lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}ln2}{4n^3}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{(ln2)^2 2^{n+1}}{12n^2} = lim_{n\to\infty}\frac{(ln2)^3 2^{n+1}}{24n} = lim_{n\to\infty}\frac{(ln2)^4 2^{n+1}}{24} = \infty$$

Conclusión → c) $n^4 \in O(2^{n+1})$ / n^4 es mas chico que otro

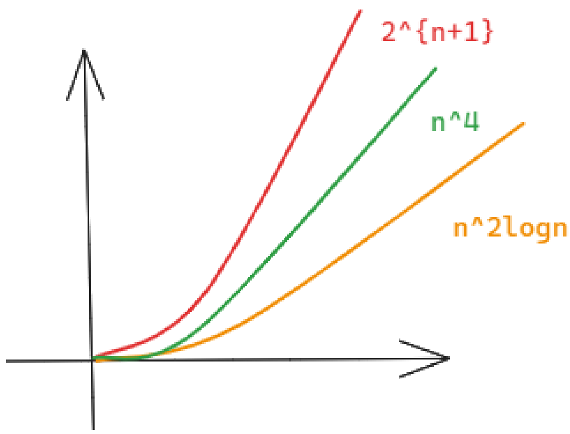
---

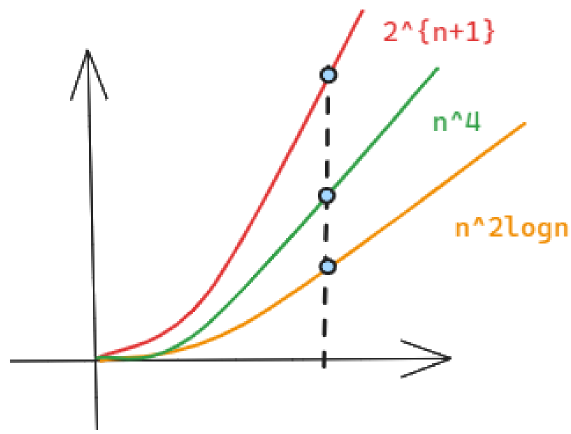
Comparar $T_2(n)$ y $T_3(n)$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^2logn}{n^4}=lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{1}{nln2}}{24n}$$
$$=lim_{n\to\infty}\frac{1}{12n^2ln2}=0$$

Conclusión → c) $n^2logn \in O(n^4)$

Resultado: $n^2logn \in O(n^4) \in O(2^{n+1})$





Tarea moral

$T_1(n)=nlogn$

$T_2(n)=n^2logn$

$T_3(n)=n^6$

$T_4(n)=n^2$

$T_1(n)yT_2(n)$

$lim_{n\to\infty}\frac{nlogn}{n^2logn}=$ Como ambas tienen $logn$ podemos cancelarlos para simplificar

$$lim_{n\to\infty}\frac{n\cancel{logn}}{n^2\cancel{logn}}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=0$$

Conclusión $nlogn \in O(n^2logn)$

$T_2(n)yT_3(n)$

$lim_{n\to\infty}\frac{n^2logn}{n^6}=$ Como ambas tienen n^2 los cancelamos

$$lim_{n\to\infty}\frac{logn}{n^4}=0$$

Conclusión $n^2logn \in O(n^4)$

$T_3(n) y T_4(n)$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{n^2}=lim_{n\to\infty}n^4=\infty$$

Conclusión $n^2 \in O(n^6)$

$T_4(n) y T_1(n)$

$$lim_{n\to\infty}\frac{nlogn}{n^2}=lim_{n\to\infty}\frac{logn}{n}=0$$

Conclusión $nlogn \in O(n^2)$

Resultado: $nlogn \in O(n^2) \in O(n^2logn) \in O(n^6)$

$$nlogn < n^2 < n^2logn < n^6 \quad = \quad T_1(n) < T_4(n) < T_2(n) < T_3(n)$$