

S1

📌 Materia	Diseño de algoritmos
📅 Fecha	@September 1, 2023

Complejidad de Algoritmos Recursivos

$$T(n) = E(T)$$

Se clasifican en

- **Homogeneas** $n \in \mathbb{N} 1, 2, \dots$

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \dots + a_k T(n-k) = 0$$

$$k = 3$$

$$T(n) = -\frac{a_1}{a_0} T(n-1) - \frac{a_2}{a_0} T(n-2) - \frac{a_3}{a_0} T(n-3)$$

$$T(4) = -\frac{a_1}{a_0} T(3) - \frac{a_2}{a_0} T(2) - \frac{a_3}{a_0} T(1)$$

Condiciones iniciales

Condiciones iniciales $T(1), T(2), T(3), \dots, T(k)$

- **No homogéneas**

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \dots + a_k T(n-k) = b^n P(n) = f(n)$$

En algunos casos una ecuación de recurrencia no homogénea se puede escribir en términos de homogénea (solo en algunos casos)

$T(n) = E(T) = F(n) \rightarrow$ si la puedes convertir en términos de $F(n)$ se puede deducir el orden

$$T(n) = 8T(n-1) \quad \text{Condición inicial } T(1) = 1 \text{ ecuación válida para } n \geq 2$$

$$n \quad T(n)$$

$$1 \quad 1$$

$$2 \quad T(2) = 8T(1) = 8$$

$$3 \quad T(3) = 8T(2) = 64$$

Ejem

$$T(n) = \alpha x^{n+k}$$

$$x^{n-1+k}$$

$$a_0 \alpha x^{n+k} + a_1 \alpha x^{n+k-1} + \dots + a_k \alpha x^{n+k-k} = 0$$

$$a_0 \cancel{\alpha} x^{n+k} + a_1 \cancel{\alpha} x^{n+k-1} + \dots + a_k \cancel{\alpha} x^{n+k-k} = 0$$

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k x^0 = 0$$

Ecuación o polinomio característico

Podría tener hasta k raíces. (homogénea)

- k raíces diferentes
- raíces de multiplicidad
- raíces complejas

$$k = 5$$

Debemos encontrar aquellos valores de x que la satisfacen (que al sustituirlos dan cero) “raíces”

Esta comprobado que si el polinomio es de grado n tiene a lo mas n raíces o n valores de x

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

si el polinomio es de grado 5 tiene a lo mas 5 raíces o 5 valores de x .



Pueden ser de distintas multiplicidades

2 iguales y 3 diferentes (2 raíces de multiplicidad....) → en realidad tiene 4 raíces

1. k raíces diferentes

Si existe una solución $T(n) = \alpha x^{n+k}$ existen:

$$T(n) = \alpha_1 x_1^{n+k}$$

$$T(n) = \alpha_2 x_2^{n+k}$$

...

$$T(n) = \alpha_k x_k^{n+k}$$

Por lo tanto la suma, también es una solución, $T(n) = \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j^{n+k}$

En los libros se puede encontrar así $\sum_{j=1}^k C_j x_j^n \rightarrow$ nos falta encontrar C_j la encontramos con las condiciones iniciales

Ejemplo $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)$

$$T(n) - T(n-1) - 2T(n-2) = 0$$

$$T(1) = 1, T(2) = 2$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = -2$$

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = 2, x = -1$$

Solución

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 (-1)^n \quad \text{Por lo tanto } \in O(2^n)$$

Si K es de orde n vamos a tener n euaciones lineales

Ahora, **determinar el valor de C_1 y C_2**

$$T(1) = C_1 2 + C_2 (-1)^1 = 1$$

$$T(2) = C_1 2^2 + C_2 (-1)^2 = 2$$

$$= + \frac{2C_1 - C_2 = 1}{4C_1 + C_2 = 2}$$

$$= 6C_1 = 3 \quad C_1 = 1/2, \quad C_2 = 0$$

$$= 6C_1 = 3C_1 = 1/2, \quad C_2 = 0$$

2. Raíces de multiplicidad

Si todas las raíces son diferentes

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) = 0$$

Si hay multiplicidad supongamos que es m en x_1

$$(x - x_1)^m (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{k-m+1}) = 0 \quad l$$

Ejemplo

Le ponemos números $k = 5$ y $m = 3$

$$(x - x_1)^3 (x - x_2)(x - x_3) = 0$$

La suma que es solucion = $\sum_{j=1}^k C_j x_j^n + \sum_{j=1}^m n^{j-1} D_j x_1^n$

todas las soluciones $T(n) = \alpha_2 x_2^{n+k}$ existen: $T(n) = \alpha_1 x_1^{n+k} \rightarrow D$

$$T(n) = \alpha_3 x_3^{n+k} \quad T(n) = \alpha_1^1 x_1^{n+1} n$$

$$\dots \quad T(n) = \alpha_1^2 n^2 x_1^{n+1}$$

$$T(n) = \alpha_{k-m+1} \cdot x_{k-m+1}^{n+1}$$

Ejemplo

$k = 5$ si k es 5 el polinomio es de grado 5 $m = 3$

al hacer las raíces notamos que hay 3 raices iguales y 2 diferentes

$$3 \rightarrow x_1 \quad x_2 \quad y \quad x_3$$

$$T(n) = C_2 x_2^n + C_3 x_3^n + D_1 x_1^n + D_2 x_1^n + D_3 n^2 x_1^n$$

Tengo 2 raíces de multiplicidad 2 $\rightarrow m = 2 \quad l = 2$

$$k = 5$$

$$2 \ x_1 \ 2 \ x_2 \ x_3$$

$$T(n) = C_3 x_3^n + D_1 x_1^n + D_2 n x_1^n + E_1 x_2^n + E_2 n x_2^n$$