S15

Materia Diseño de algoritmos

Fecha September 11, 2023

+ Add a property

C Add a comment...

Ecuaciones homogéneas

$\sum_{j=0}^{k} a_k T(n-k) = 0$

y el polinomio característico $\sum_{j=0}^{k} a_k x^{k-j} = 0$

Y las no homogéneas $\sum_{j=0}^{k} a_k T(n-k) =$ Un polinomio de grado k $b^n P(n)$ no necesariamente tiene que ser de orden n, (se complica el algebra)

Ejemplo:

$T(n) + 2T(n-1) = 3^n(n^2 + n + 1)$

$b = 3, \quad P(n)$ grado 2

$T(1) = 1$

$T(n+1) + 2T(n) = 3^{n+1}(n^2 + 2n + 1 + n + 2)$

$T(n+1) + 2T(n) = 3^{n+1}(n^2 + 3n + 3)$

Multiplicamos por 3 la ecuación original T(n)

$3T(n) + 6T(n-1) = 3^{n+1}(n^2 + n + 1)$ $\quad * \; 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$

Restamos

▶ procedimiento

$T(n+1) + 2T(n) = 3^{n+1}(n^2 + 3n + 3)$

$3T(n) + 6T(n-1) = 3^{n+1}(n^2 + n + 1)$

$$T(n+1) - T(n) - 6T(n-1 = 3^{n+1}(3n+3) - 3^{n+1}(n+1)$$

$$T(n+1) - T(n) - 6T(n-1) = 3^{n+1}(2n+2)$$

Sustituimos $n+1$ con n

$$T(n) - T(n-1) - 6T(n-2) = 3^n 2n$$

Se obtienen 2 ecuaciones:

$$T(n+1) - T(n) - 6T(n-1) = 3^{n+1}(2n+2)$$

$T(n) - T(n-1) - 6T(n-2) = 3^n 2n$ —→ Multiplicamos por 3

$$3T(n) - 3(n-1) - 18T(n-2) = 3^{n+1}2n$$

Restamos ambas

$$T(n+1) - T(n) - 6T(n-1) = 3^{n+1}(\cancel{2n}+2)$$

$$3T(n) - 3(n-1) - 18T(n-2) = \cancel{3^{n+1}2n}$$

$$T(n+1) - 4T(n) - 3T(n-1) + 18T(n-2) = 3^{n+1} \cdot 2$$

Se vuelve a sustituir $n-1$ con n

$$T(n) - 4T(n-1) - 3T(n) + 18T(n-1) = 3^n \cdot 2$$

Se vuelven a obtener 2 ecuaciones

$$T(n+1) - 4T(n) - 3T(n-1) + 18T(n-2) = 3^{n+1} \cdot 2$$

$T(n) - 4T(n-1) - 3T(n-2) + 18T(n-3) = 3^n \cdot 2$ —→ multiplicamos por 3

$$3T(n) - 12T(n-1) - 9T(n-2) + 54T(n-3) = 3^{n+1}2$$

Restamos ambas

$$T(n+1) - 4T(n) - 3T(n-1) + 18T(n-2) = 3^{n+1} \cdot 2$$

$$3T(n) - 12T(n-1) - 9T(n-2) + 54T(n-3) = 3^{n+1}2$$

$$T(n+1) - 7T(n) + 9T(n-1) + 27T(n-2) - 54T(n-3) = 0$$

Sustituimos

$$T(n) - 7T(n-1) + 9T(n-2) + 27T(n-3) - 54T(n-4) = 0$$

Por lo tanto hay $k = 4$ raíces, Para obtener las condiciones iniciales restantes, sustituimos

$n = 2 \qquad T(2) + 2T(1) = 3^2(2^2 + 2 + 1)$

$\qquad\qquad T(2) = 63\text{—}2 = 61$

$$n = 3 \qquad T(3) + 2T(2) = 3^3(3^2 + 3 + 1)$$

$$T(3) = 27 \cdot 13 - 2(61) = 229$$

$$n = 4 \qquad T(4) + 2T(3) = 3^4(16 + 4 + 1)$$

$$T(4) = 3^4 \cdot 21 - 2 \cdot 229 = 1243$$

Y obtenemos

$$\Rightarrow T(n) - 7T(n-1) + 9T(n-2) + 27T(n-3) - 54T(n-4) = 0$$

$$T(1) = 1, \quad T(2) = 61, \quad T(3) = 229, \quad T(4) = 1243$$

Por lo tanto el polinomio queda

$$x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$$

Y las soluciones serían

$x = -2, \quad x = 3$ con $x = 3$ multiplicidad 3

Se puede expresar de la sig forma $(x+2)(x-3)^3 = 0$ corresponden a: $b^n = 3^n$ y $d+1$

Solución

$$T(n) = C_1(-2)^n + C_2 3^n + C_3 n 3^n + C_4 n^2 3^n$$

$T(1)\ldots$

$T(2)\ldots$

$T(3)\ldots$

$T(4)\ldots$

Por lo tanto si el polinomio se puede expresar de la forma

$$\sum_{j=0}^{k} a_k T(n-k) = b^n P(n)$$

las raíces ya generales quedan de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{j=0}^{k} a_k x^{k-j}\right)(x-b)^{d+1} = 0$$

Por lo tanto se obtiene la ecuación homogénea (se elimino el termino no homogéneo)é

$$T(n) + 2T(n-1) = 0 \qquad x + 2 = 0 \qquad x = -2$$

Método de variación de parámetros.

´Puede darse la oportunidad de factorizar el polinomio característico

$\sum_{j=0}^{k} a_k T(n-k) = \sum_{i=1}^{m} b_i^n P_i(n)$ donde $P_i(n)$ es un polinomio de grado d_i

$$\left(\sum_{j=0}^{k} a_k x^{k-j}\right) \prod_{i=1}^{m} (x-b_i)^{d_i+1} = 0$$

No lineales

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

n es potencia de 2 $n\alpha a^k$ → a real

$T(1) = 1, \qquad T(2) = 2$

Podemos proponer a $n = a^k$

$\Rightarrow n = 2^k$ No $T(n)$

$T(2^k) = 4T(\frac{2^k}{2}) + 2^k$

$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$ cambio de variable

sea $H(k) = T(2^k)$

$\quad H(k-1) = T(2^{k-1})$

$H(k) = 4H(k-1) + 2^k$

$H(k) - 4H(k-1) + 2^k$

$\boxed{T(n) - 4T(n-1) = 2^n}$ Tenemos que $b = 2$ con un polinomio de grado $d = 0$

Por lo tanto la ecuación homogénea sería

$T(n) - 4T(n-1) = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

Por lo tanto la solución es

$(x-4)(x-2)^1 = 0$

$H(k) = C_1 4^k + C_2 2^k = T(2^k)$

Acomodamos los términos en términos de $T(2^k)$

$\quad = C_1(2 \cdot 2)^k + C_2 2^k$

$\quad = C_1 2^{2k} + C_2 2^k$

$\quad = C_1 (2^k)^2 + C_2 2^k \qquad 2^k = n$

$T(n) = C_1 n^2 + C_2 n$