S18

Materia Diseño de algoritmos

Fecha September 22, 2023

Add a property

Add a comment...

Método teorema maestro

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ $f(n) \rightarrow$ función de costo. $a, b \rightarrow$ cualquier real > 0

1. **Si** $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $f(n) \in O(n^{log_b a - \epsilon})$

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(n^{log_b a})$
2. **Si** $\exists\ k \geq 0$ tal que $f(n) \in \theta(n^{log_b a} log^k n)$

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(n^{log_b a} log^{k+1} n)$
3. **Si** $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $f(n) \in \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$

   y además $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para cualquier $c < 1$

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(f(n))$

Ejemplo: $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$

Cambio de variable propuesto: $n = 3^k$

$T(3^k) = 9T(3^k - 1) + 3^k$

$T(3^k) = H(k)$

$H(k) - 9H(k-1) = 3^k = b^k P(k)$

$(x - 9)(x - 3) = 0$

$$H(k) = C_1 9^+ C_2 3^k = T(3^k)$$
$$= C_1(3^2)^k + C_2 3^k$$
$$T(n) = C_1 n^2 + C_2 n$$

Ahora sabemos que $f(n) = n, \quad a = 9, \quad b = 3$

1. **Si** $\exists \ \epsilon > 0$ tal que $f(n) \in O(n^{log_b a - \epsilon})$

   $n \in O(n^{2-\epsilon})$ cierto $\quad 0 < \epsilon \leq 1$

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(n^2)$

Ejemplo: $T(n) = T(\frac{2}{3}n) + 1$

Cambio de variable: $n = (\frac{3}{2})^k$

$T((\frac{3}{2})^k) = T(\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^k) + 1, \quad T((\frac{3}{2})^k) = H(k)$

$H(k) - H(k-1) = 1$ Sabemos que $b = 1, \quad d = 0$

$$(x-1)(x-1) = 0$$

$H(k) = C_1 1^k + C_2 k 1^k$ $\quad logn = klog\frac{3}{2}$

$$= C_1 + C_2 k = T((\tfrac{3}{2})^k)$$
$$T(n) = C_1 + \tfrac{C_2}{log\frac{3}{2}} logn \in O(logn)$$
$$\theta(logn)$$

1. Checamos si se cumple que existe un epsilon mayor a cero tal que 1 sea de orden $O(n^{log_{\frac{3}{2}} 1 - \epsilon})$

   $1 \in O(n^{-\epsilon})?$ no existe epsilon

2. **Si** $\exists \ k \geq 0$ tal que $f(n) \in \theta(n^{log_b a} log^k n)?$

   es cierta con $k = 0$

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(logn)$

$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + nlogn$

Cambio de variable $n = 4^k$

$T(4^k) = 3T(4^{k-1}) + 4^k log 4^k$

$T(4^k) = H(k)$

$H(k) - 3H(k-1) = 4^k 2k$ sabemos $b = 4, \quad d = 1$

$$(x-3)(x-4)^2 = 0$$

$$H(k) = C_1 3^k + C_2 4^k + C_2 k 4^k = T(4^k)$$

Regreso $n = 4^k \Rightarrow logn = log4^k = k = \frac{logn}{2}$

$$H(k) = C_1 3^k + C_2 4^k + C_2 k 4^k = T(4^k)$$

$$= C_1 3^{\frac{1}{2}logn} + C_2 n + C_3 \frac{logn}{2} n$$

$$= C_2 n + \frac{C_3}{2} nlogn + C_1 3^{\frac{1}{2}logn}$$

- Comparamos para obtener su orden

  $lim_{n \to \infty} \frac{nlogn}{3^{\frac{1}{2}logn}}$ L'hopital

  $(nlogn)\text{'} = \frac{n\, ln\, n}{ln2}$

  $(3^{\frac{1}{2}logn})' = (3^{\frac{1}{2}\frac{lnn}{ln2}})$

  $\frac{1}{ln2} lim_{n \to \infty} \frac{n\, ln\, n}{3^{\frac{1}{2}\frac{lnn}{ln2}}}$ cambio de variable $\alpha = \frac{1}{2ln2}$

  $lim_{n \to \infty} \frac{n\, ln\, n}{3^{\alpha ln\, n}} = lim_{n \to \infty} \frac{lnn + 1}{\alpha ln(3) n^{\alpha ln(3) - 1}}$ L'hopital

  > $3^{\alpha lnn} = e^{ln(3^{\alpha lnn})}\ e^{\alpha ln(n) ln(3)}$
  > $= e^{ln(n^{\alpha ln(3)})} = n^{\alpha ln(3)}$

  $\frac{ln(3)}{2ln2} \approx 0.8$

  $$= lim_{n \to \infty} = \frac{\frac{1}{n}}{\alpha ln(3)(\alpha ln(3) - 1) n^{\alpha ln(3) - 2}} \to \infty$$

  Por lo tanto $3^{\frac{1}{2}lonn} \in O(nlogn)$

  Por lo tanto $T(n) \in \theta(nlogn)$

Ahora sabemos que $a = 3, \quad b = 4, \quad f(n) = nlogn$

1. **Si** $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $nlogn \in O(n^{log_4 3-\epsilon})$?

   $log_4 3 \approx 0.8$ $nlogn \in O(n^{0.8-\epsilon})$ No existe

2. **Si** $\exists\, k \geq 0$ tal que $f(n) \in \theta(n^{0.8} log^k n)$?

   No existe k

3. **Si** $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $f(n) \in \Omega(n^{0.8+\epsilon})$ Se puede satisfacer si tomamos un ϵ entre 0 y 0.2

   y que además $3\frac{n}{4}log\frac{n}{4} \leq cnlogn$ $c < 1$

   $\frac{3}{4}n(logn - log4) = \frac{3}{4}n(logn - 2) \leq cnlogn$ Si proponemos una $c = \frac{3}{4}$

   $\frac{3}{4}nlogn - \frac{3}{4}n2 \leq \frac{3}{4}nlogn$ Se cumple

   Por lo tanto $T(n) \in \theta(nlogn)$