S11

Materia Diseño de algoritmos

Fecha September 1, 2023

Add a property

Add a comment...

Complejidad de Algoritmos Recursivos

$T(n) = E(T)$

Se clasifican en

- **Homogeneas** $n \in N 1, 2, ...$

  $a_0 T(n) + a_1 t(n) + ... + a_n T(n-k) = 0$

  $k = 3$

  $$T(n) = -\frac{a_1}{a_0} T(n-1) - \frac{a_2}{a_0} T(n-2) - \frac{a_3}{a_0} T(n-3)$$

  $$T(4) = -\frac{a_1}{a_0} T(3) - \frac{a_2}{a_0} T(2) - \frac{a_3}{a_0} T(1)$$

  Condiciones iniciales

Condiciones iniciales $T(1), T(2), T(3), ..., T(k)$

- **No homogéneas**

  $a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + ... + a_k T(n-k) = b^n P(n) = f(n)$

  En algunos casos una ecuacion de recurrencia no homogénea se puede escribir en terminos de homogénea(solo en algunos casos)

$T(n) = E(T) = F(n)$ → si la puedes convertir en terminos de $F(n)$ se puede deducir el orden

$T(n) = 8T(n-1)$ Condicion inicial $T(1) = 1$ ecuacion valida para $n \geq 2$

n	$T(n)$
1	1
2	$T(2) = 8T(1) = 8$
3	$T(3) = 8T(2) = 64$

Ejem

$T(n) = \alpha x^{n+k}$

x^{n-1+k}

$a_0 \alpha x^{n+k} + a_1 \alpha x^{n+k-1} + ... + a_k \alpha x^{n+k-k} = 0$

$a_0 \cancel{\alpha x}^{n+k} + a_1 \cancel{\alpha x}^{n+k-1} + ... + a_k \cancel{\alpha x}^{n+k-k} = 0$

$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k x^0 = 0$

Ecuacion o polinimio característico

Podría tener hasta k raíces. (homogenea)

- k raíces diferentes
- raíces de multiplicidad
- raíces complejas

$k = 5$

Debemos encontrar aquellos valores de x que la satisfacen (que al sustituirlos dan cero) “raices”

Esta comprobado que si el polinomio es de grado n tiene a lo mas n raíces o n valores de x

$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$

si el polinomio es de grado 5 tiene a lo mas 5 raíces o 5 valores de x.

> 💡 Pueden ser de distintas multiplicidades
> 2 iguales y 3 diferentes (2 raices de multiplicidad....) → en realidad tiene 4 raices

1. k raíces diferentes

   Si existe una solucion $T(n) = \alpha x^{n+k}$ existen:

   $$T(n) = \alpha_1 x1^{n+k}$$
   $$T(n) = \alpha_2 x_2^{n+k}$$
   $$\dots$$
   $$T(n) = \alpha_k x_k^{n+k}$$

   Por lotanto la suma, tambien es una solución, $T(n) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^{n+k}$

   En los librs se puede encontrar así $\sum_{j=1}^{k} C_j x_j^n$ → nos falta encontrar C_j la encontramos con las condiciones iniciales

   Ejemplo $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)$

   $$T(n) - T(n-1) - 2T(n-2) = 0 \qquad T(1) = 1, T(2) = 2$$
   $$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = -2$$
   $$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$
   $$x^2 - x - 2 = 0$$
   $$x = \frac{-b + -\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 + -\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 + -\sqrt{9}}{2} = \frac{1 + -3}{2}$$
   $$x = 2, x = -1$$

   Solución

   $T(n) = C_1 2^n + C_2(-1)^n$ Por lo tanto $\in O(2^n)$

   Si K es de orde n vamos a tener n euaciones lineales

   Ahora, **determinar el valor de** C_1 y C_2

   $$T(1) = C_1 2 + c_2(-1)^1 = 1$$
   $$T(2) = C_1 2^2 + C_2(-1)^2 = 2$$
   $$= + \begin{matrix} 2C_1 - \cancel{C_2} = 1 \\ 4C_1 + \cancel{C_2 = 2} \end{matrix}$$
   $$= 6C_1 = 3 \quad C_1 = 1/2, \qquad C_2 = 0$$
   $$= 6C_1 = 3C_1 = 1/2, \qquad C_2 = 0$$

2. Raíces de multiplicidad

   Si todas las raíces son diferentes

   $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k) = 0$

   Si hay multiplicidad supongamos que es m en x_1

   $(x - x_1)^m(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{k-m+1}) = 0 \quad l$

   Ejemplo

   Le ponemos números $k = 5$ y $m = 3$

   $(x - x_1)^3(x - x_2)(x - x_3) = 0$

   La suma que es solucion = $\sum_{j=1}^{k} C_j x_j^n + \sum_{j=1}^{m} n^{j-1} D_j x_1^n$

   todas las soluciones $T(n) = \alpha_2 x_2^{n+k}$ existen: $T(n) = \alpha_1 x_1^{n+k}$ → D

   $T(n) = \alpha_3 x_3^{n+k}$ $\qquad T(n) = \alpha_1^1 x_1^{n+1} n$

   $\ldots$ $\qquad T(n) = \alpha_1^2 n^2 x_1^{n+1}$

   $T(n) = \alpha_{k-m+1} . x_{k-m+1}^{n+1}$

   Ejemplo

   $k = 5$ si k es 5 el polinomio es de grado 5 $m = 3$

   al hacer las raíces notamos que hay 3 raices iguales y 2 diferentes

   $3 \to x_1 \qquad x_2 \quad y \quad x_3$

   $T(n) = C_2 x_2^n + C_3 x_3^n + D_1 x_1^n + D_2 x_1^n + D_3 n^2 x_1^n$

   Tengo 2 raices de multiplicidad 2 → $m = 2 \quad l = 2$

   $k = 5$

   2 x_1 2 x_2 x_3

   $T(n) = C_3 x_3^n + D_1 x_1^n + D_2 n x_1^n + E_1 x_2^n + E_2 n x_2^n$