S6

Materia	Diseño de algoritmos
Fecha	@August 18, 2023

Medidas asintóticas

Cota suprema O

$f(n) \leq kg(n), \quad k > 0, \quad \underline{n \geq n_0}$

Cota Inferior Ω

$f(n) \geq kg(n), \quad k > 0, \quad \underline{n \geq n_0}$

Cota θ

$k_1 g(n) \leq f(n) \leq k_2 g(n), \quad k_1, k_2 > 0, \quad \underline{n \geq n_0}$

.

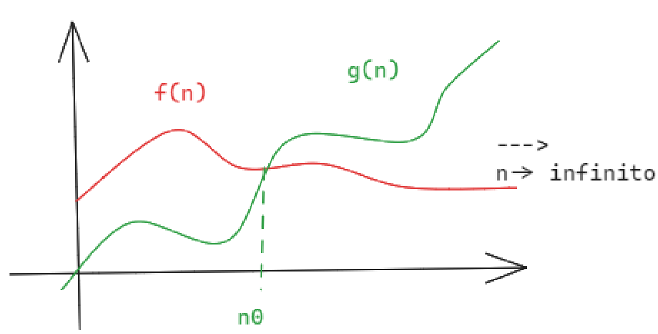
.

.

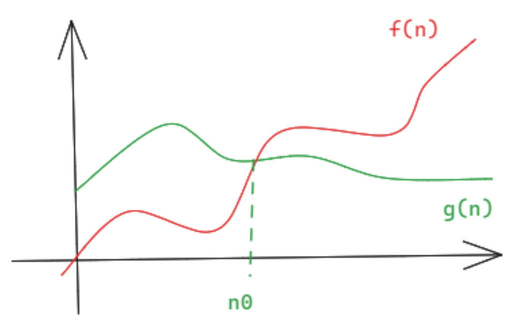
$n \to \infty$

.

.



$f(n) \leq kg(n)$
$f(n) \in O(g(n))$



$f(n) \geq kg(n)$
$f(n) \in \Omega(g(n))$

💡 **Notación**

$f(n) \in O(g(n))$
$f(n) = O(g(n))$

8) Propiedad de Orden

Si $lim_{n\to\infty} \quad \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ entonces.

1. Prueba de identidad Si $k \neq 0 \quad |k| < \infty$

   decimos $O(f(n)) = O(g(n))$

2. Prueba de inclusión. Si $k = 0$ entonces.

   $f(n) \in O(g(n))$, además $g(n) \notin (f(n))$

3. Prueba de exclusión. Si $k \to \pm\infty$. entonces

   $f(n) \notin O(g(n))$, además, $g(n) \in O(f(n))$
   $f(n) \in \Omega(g(n))$

Teorema

Dados $f(n)$ y $g(n)$ decimos que
$f(n) \in \theta(g(n))$ si
$\underline{f(n) \in O(g(n))}$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$

$f(n) <= k_1 g(n) \quad f(n) \geq k_2 g(n)$

⚠️ Existe otra relación de orden que es "o" (o minúscula) $f(n) \in o(g(n))$ esto establece que tanto se están acercando dos funciones

---

Ejemplo. Son ciertas?

1. $n^2 \in O(n^3)$ se establece que existe (sin conocer su valor) $n_0 \to$
   $\exists \quad n_0$

   $n^2 \leq kn^3$

   Se establece la propiedad del limite

   $lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^3} = lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ Sí. (prueba de inclusión)

2. $T(n) = 8n^2 + nlogn$

💡 Solo se puede hablar de n_0 si existen funciones con las cuales comparar funciones (para establecer la mejor función en términos de tiempo).
Nos interesa hacer las comparaciones cuando $n \rightarrow \infty$ que es el peor caso.

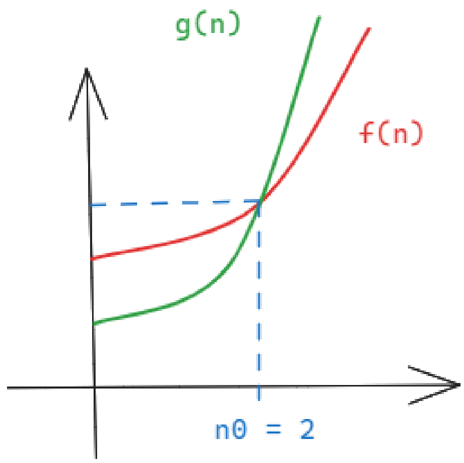
2. $2^{n+1} \in O(2^n)$

   $lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ (prueba de identidad)

   Si $O(f(n)) = O(g(n))$

   $f(n) \in O(g(n_1)$

   $g(n) \in O(f(n_1)$ Establece que ambas crecen de igual forma.



---

3. $(n+1)! \in O(n!)$

   $lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!}$

   $= lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty$

   Por exclusividad → falsa

   No $\exists k$ tal que $(n+1)! \leq kn!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$
$= n \cdot (n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1$ $\}$
$(n-1)!$
$= n(n-1)!$

$(n+1)! \in \Omega(n!)$ → no es de orden O Pero de cumple el orden Omega

---

4. $2^n \in O(3^n)$

   $lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = lim_{n\to\infty} (\dfrac{2}{3})^n = 0$

$\frac{2}{3} < 1$	Inclusion → verdadero.

5. $logn \in O(n^{1/2})$

$$lim_{n\to\infty}\frac{logn}{n^{1/2}}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{ln\,n}{ln2}.\frac{1}{n^{1/2}} =$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{ln2}.\frac{1}{\frac{1}{2}n^{1/2-1}}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln2}.\frac{\sqrt{n}}{n}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln2}.\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Inclusión Sí

⚠️ log siempre que no sea especificado este se considera como en base 2

💡 **Regla de L'hopital**

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{n\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

💡 $\frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$

$a = 2^{\alpha}$

$loga = log2^{\alpha} = \alpha log2 = \alpha$

$lna = ln2^{\alpha} = \alpha ln2 lna =$

$log\,a\,ln\,2 loga = \frac{lna}{ln2}$