Procesamiento de señales. Fundamentos

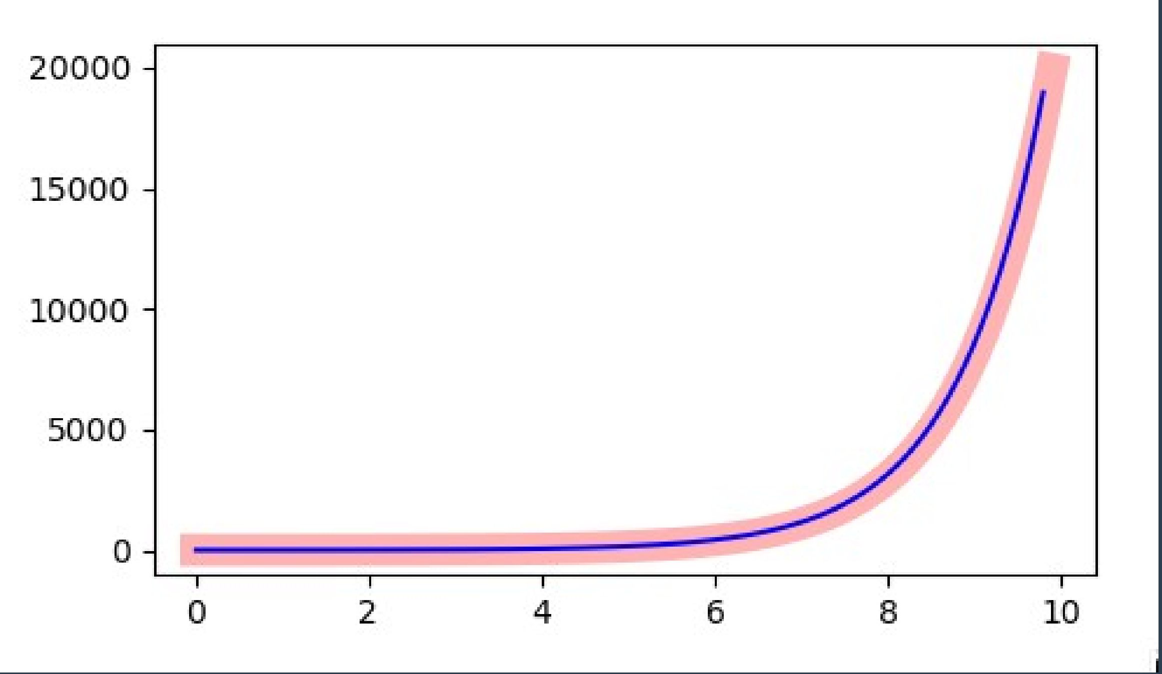
Clase 3 - Euler | Fourier - DFT

- El numero e
- Derivada de e^t y e^(jt)
- Circulo modulando una señal
- Maquina de Rei-Ruof
- DFT - Transformada discreta de Fourier
- Propiedades
- Spectral Leakage + Zero padding
- Energia y relacion de Parseval
- DFT (FFT) en la CIAA
- I-DFT Transformada inversa de Fourier
- Señales complejas

2.71828182845904509079559...

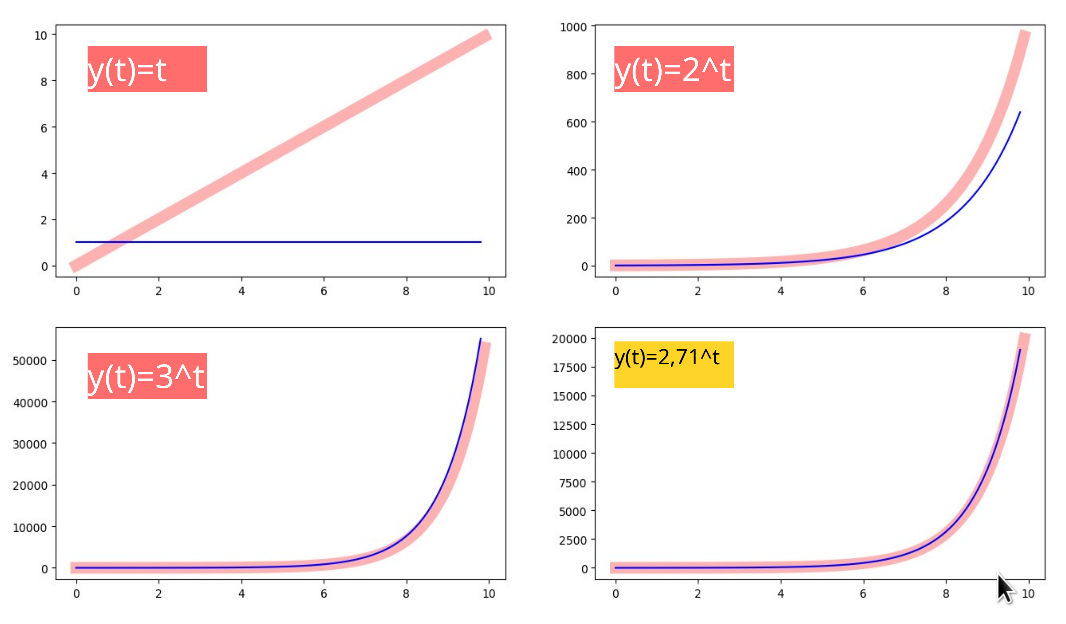
Numero e

- Que tiene de especial e?
- Encuesta
- https://forms.gle/b9Gqr8sSehuJcdNQA
- Ver codigo: derivadas.py



Funcion derivada de e^t

- La única función en la cual la derivada es igual a si misma
- $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



La derivada es igual a la funcion

$$f(t) = e^t \implies f'(t) = e^t$$
$$f(t) = e^{kt} \implies f'(t) = ke^{kt}$$

Funcion derivada de e^(j*t)

- Y que pasa con la derivada de la funcion compleja?

La derivada es igual a la funcion

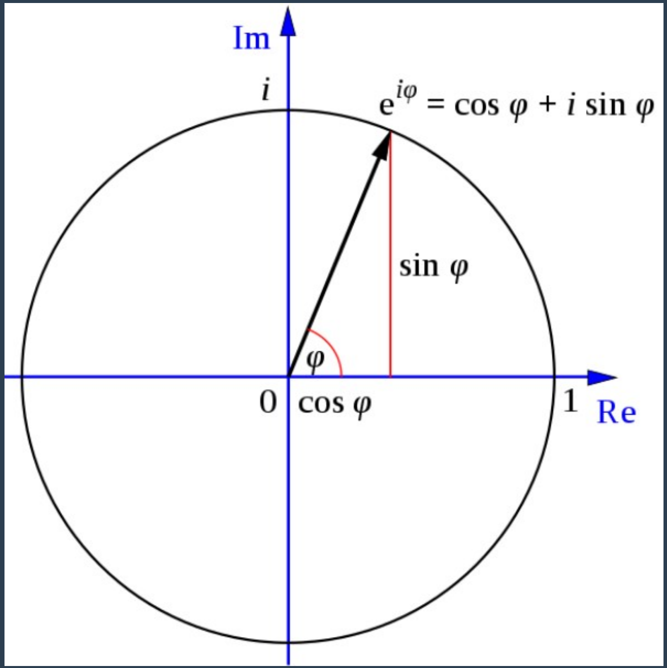
$$f(t) = e^{jt} \implies f'(t) = je^{jt}$$

$$e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$$

$$e^{j\pi} = -1$$

$$e^{\frac{j\pi}{2}} = j$$

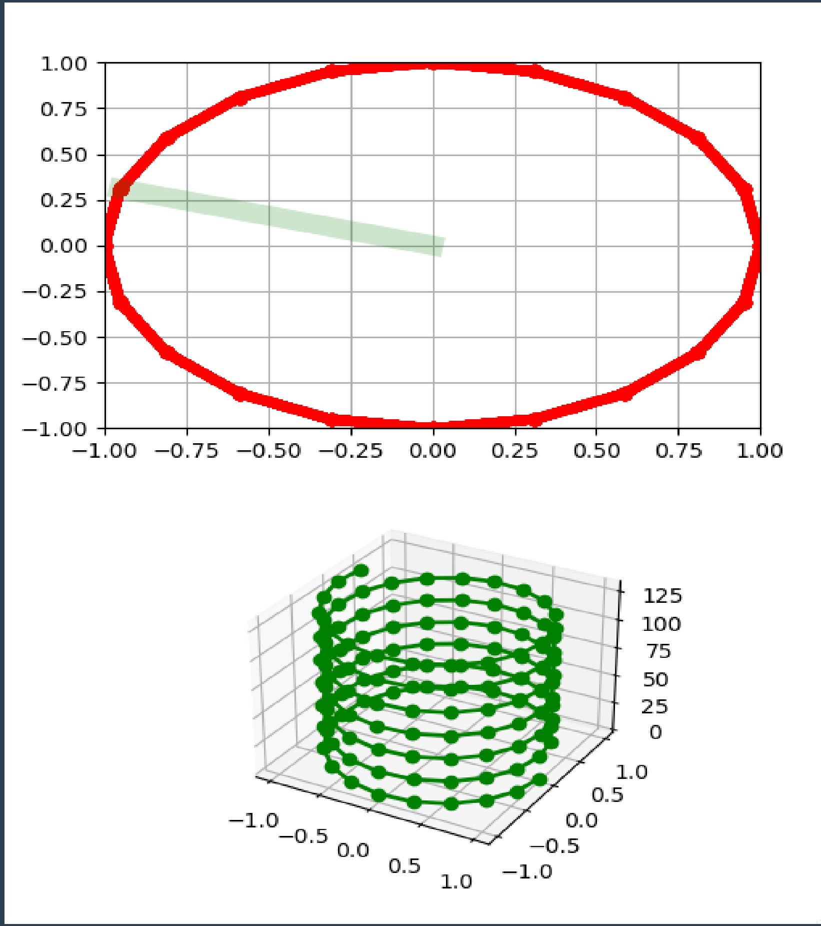
$$e^{\frac{j3\pi}{2}} = -j$$



- Ver codigo: euler1.py

Simulando e^(j*t) con Python

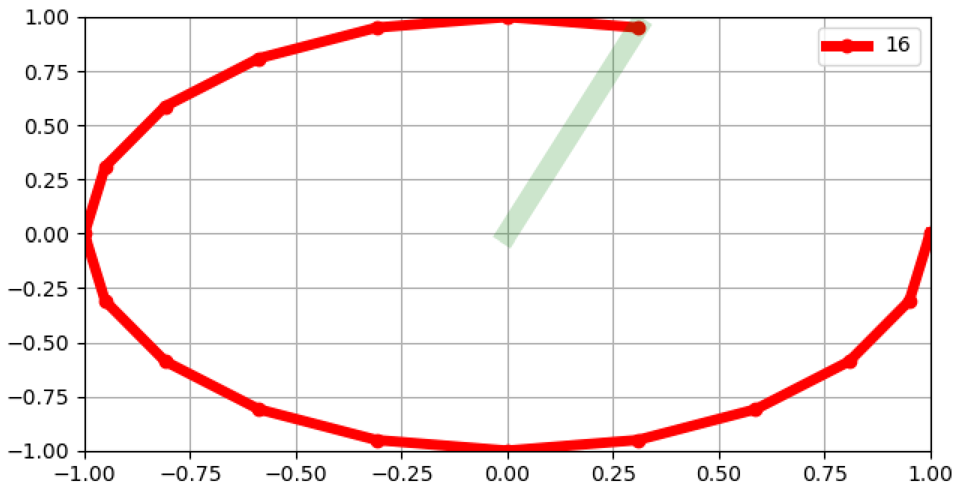
- Fs=20
- N=20
- CircleFrec=1Hz
- Traza un circulo sampleado cada 1/Fs
- Ver codigo: euler1.py

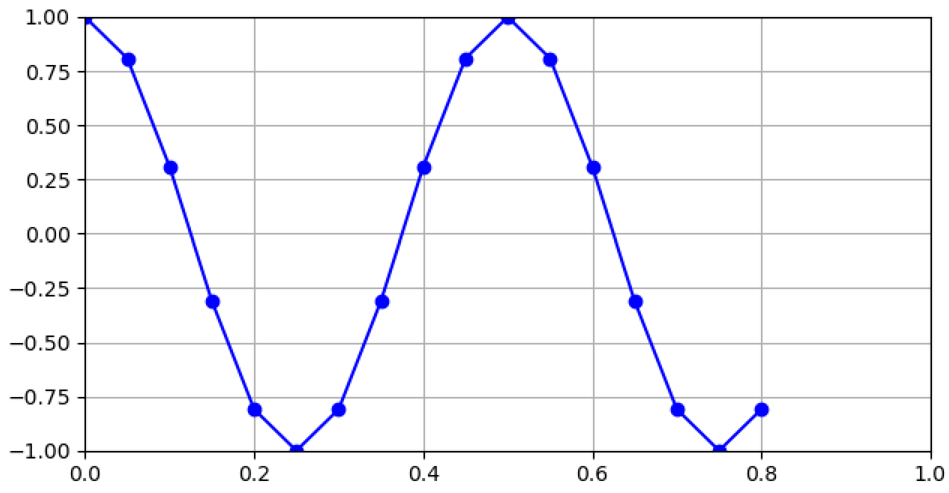


e^(j*t) y una senoidal con Python

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- CircleFrec=1Hz
- Traza un circulo sampleado cada 1/Fs

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- signalFrec=2Hz
- Traza una senoide sampleada a 1/Fs



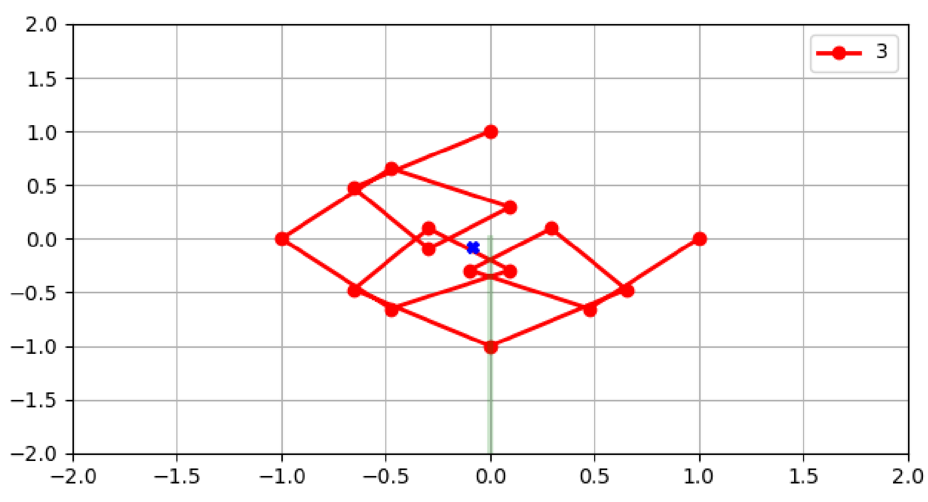


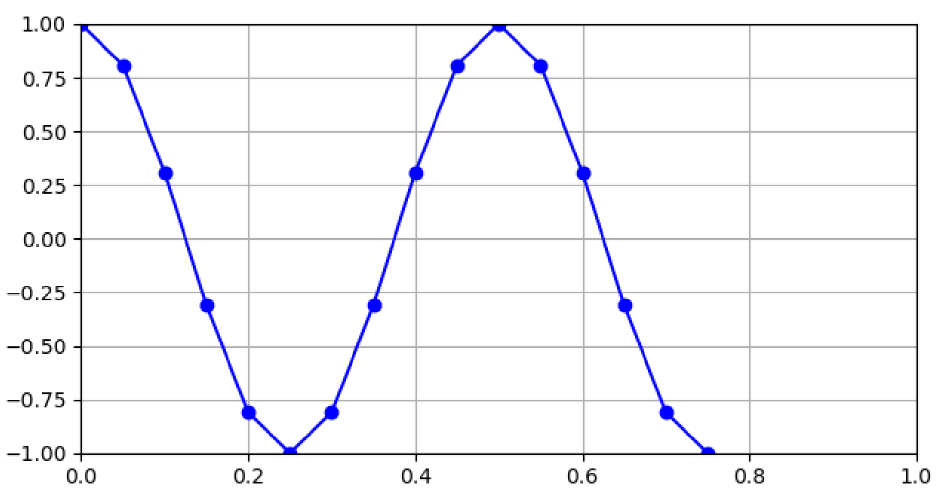
- Ver codigo: euler2.py

La senoidal modulada con e^(j*t)

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- CircleFrec=0 a (Fs-1)
- Traza un circulo modulado con la senoidal

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- signalFrec=2Hz
- Traza una senoide sampleada a 1/Fs

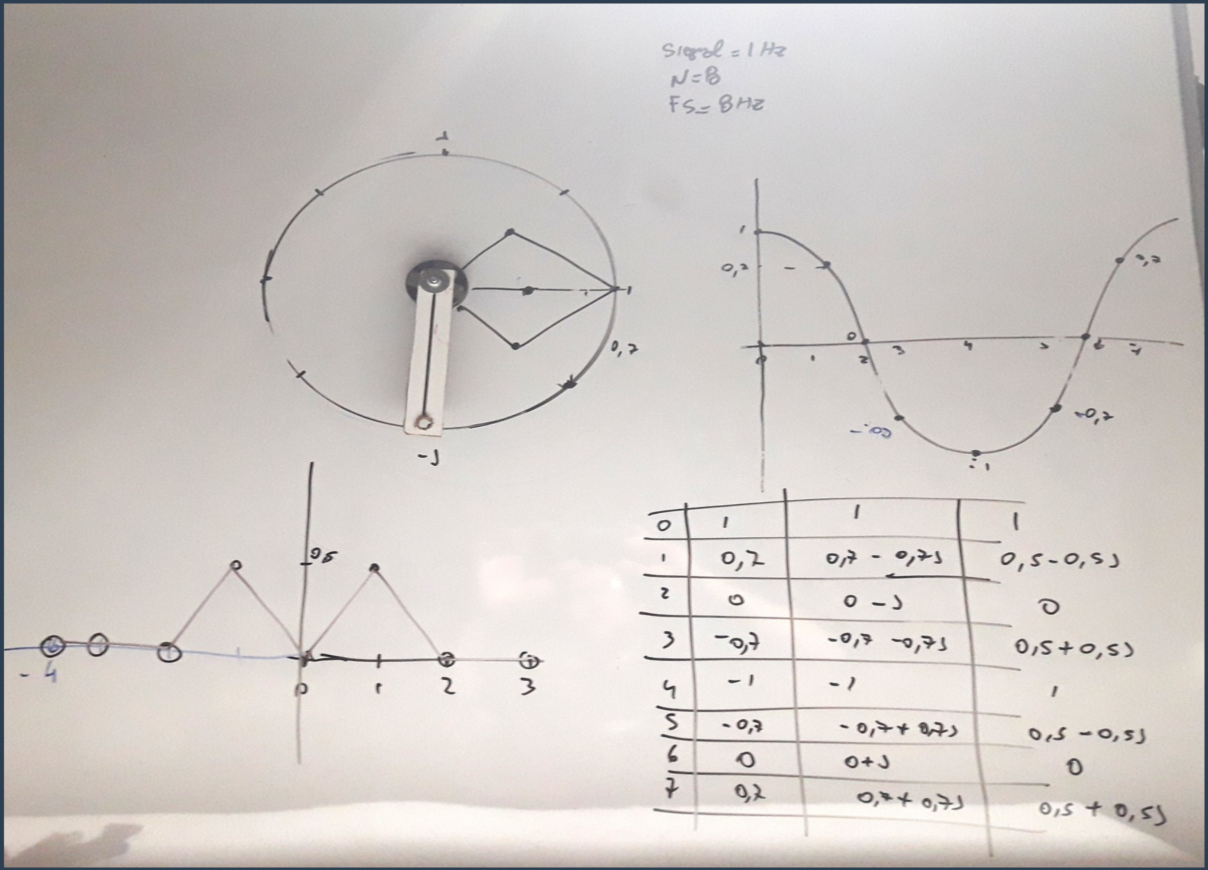




- Ver codigo: euler3.py

La maquina de Rei-Ruof

- Fs=8
- N=8
- Signal=1Hz
- Para cada frecuencia Fs/N*n se modula la señal con el vector que traza el circulo
- Luego se calcula el promedio y se lo asigna a la Fs/N*n

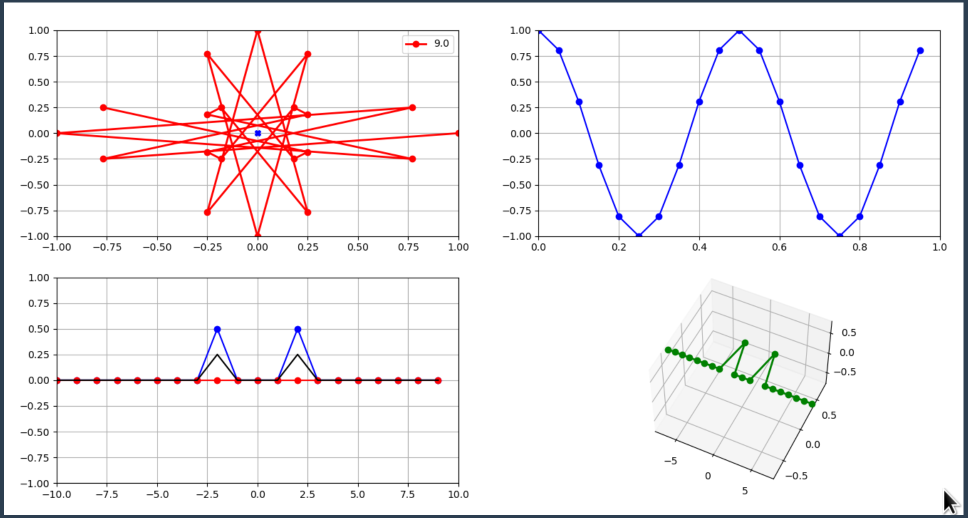


- Ver codigos: maquina_reiruof.py

Centro de masas de la senoidal modulada

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- CircleFrec=-Fs/2 a (Fs/2-Fs/N) cada fs/N
- Grafico el centro de masas para cada CircleFrec
- El centro de masas es un numero complejo!

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- signalFrec=2Hz
- Traza una senoide sampleada a 1/Fs



- Ver códigos: euler4.py y euler5.py

Centro de masas == Transformada discreta de Fourier??

$$Cm(k) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n) * e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}}{n}$$

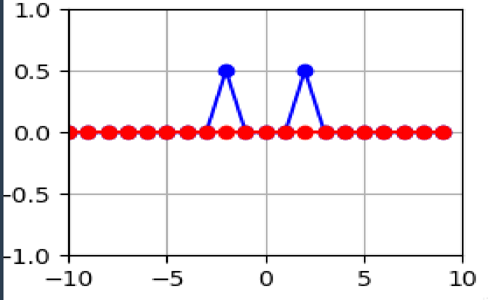
- Cm=Centro de masas en k
- Xk = DFT en k
- La diferencia es 1/n ??
- Y si normalizo de otra manera ?

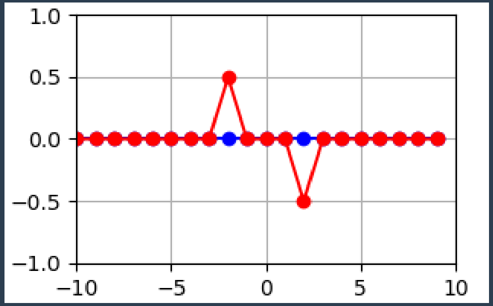
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Resumen de propiedades

- Fs=20 => ts=0.05
- N=20
- Resolución en tiempo= 1/fs
- Resolución en Frecuencia= fs/N
- Muestras en tiempo =N
- Puntos en frecuencia = N
- Números en frecuencia complejos
- Números en tiempo reales??

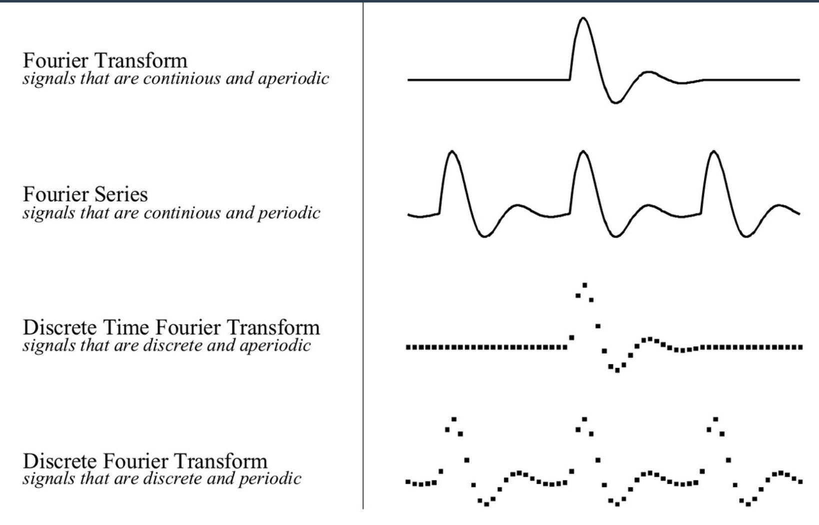
- DFT en n=0 representa la componente de continua
- Si la entrada es real la DFT es compleja conjugada
- Si la señal es par (cos) la DFT es real pura
- Si la señal es impar (sin) la DFT es imaginaria pura





Familia de transformadas

- Existe una relación entre las transformadas de Fourier en tiempo continuo y en tiempo discreto
- De las dos opciones en tiempo discreto la DTFT no es realizable dado que implican infinitos puntos.
- Solo utilizaremos la DFT
- En general el calculo de la DFT lo hacemos utilizando el algoritmo FFT.
- No estudiaremos la implementación de la FFT, solo lo utilizamos para calcular la DFT de manera eficiente



Time Duration		
Finite	Infinite	
Discrete FT (DFT) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega_k n}$ $k = 0, 1, \ldots, N-1$	Discrete Time FT (DTFT) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ $\omega \in [-\pi, +\pi)$	discr. time n
Fourier Series (FS) $X(k) = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-j\omega_k t} dt$ $k = -\infty, \ldots, +\infty$	Fourier Transform (FT) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $\omega \in (-\infty, +\infty)$	cont. time t
discrete freq. k	continuous freq. ω	

Potencia espectral – Parseval

- Como en tiempo y en frecuencia se representa la misma, ambos deberán tener la misma energía => Relación de Parseval
- El modulo cuadrado de la DFT representa la densidad de potencia espectral
- La sumatoria de todos los bines en frecuencia (positivas y negativas) representa la potencia promedio de la señal

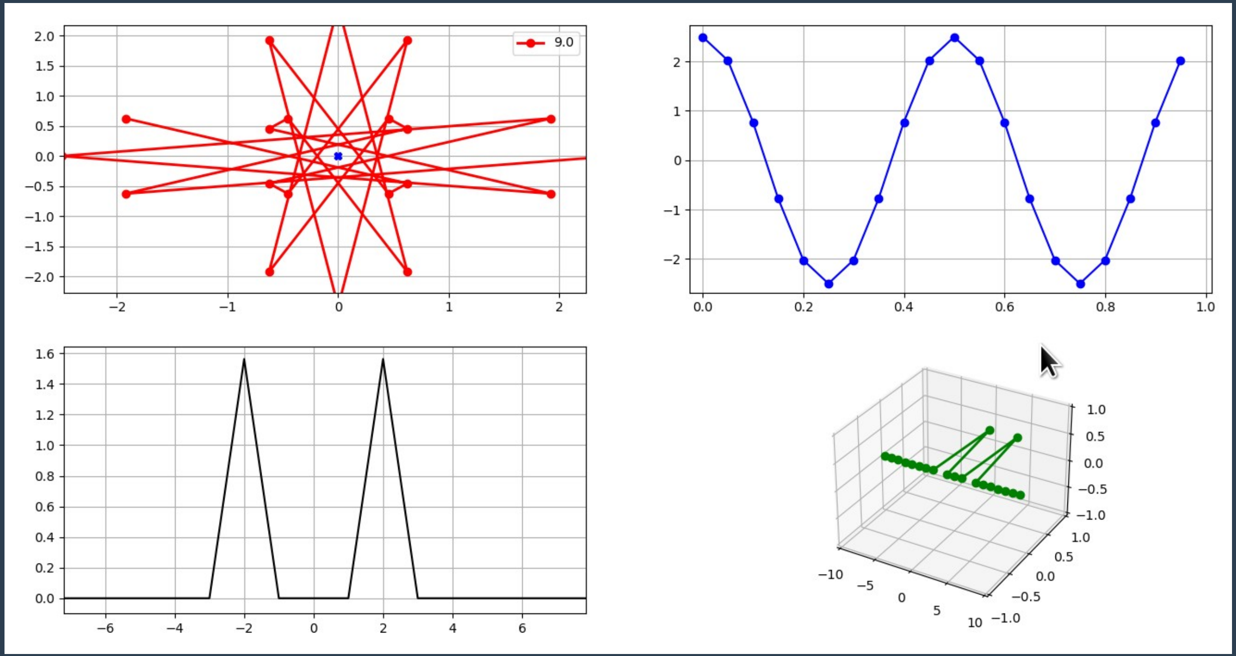
$$P_{sin} = \frac{A^2}{2}$$

$$P_{sin} = \frac{2{,}5^2}{2}$$

$$P_{sin} = 3{,}125W$$

$$P = 1{,}56 + 1{,}56$$

$$P = 3{,}125W$$

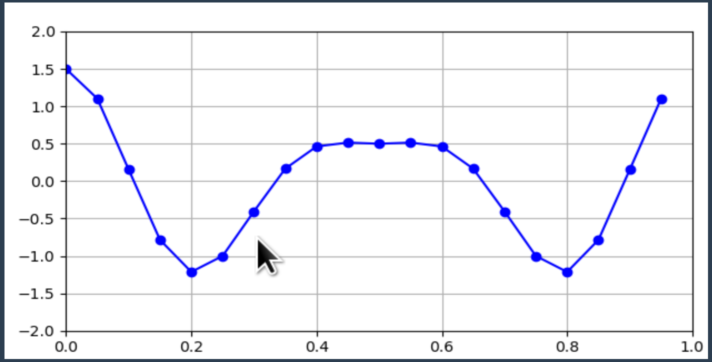


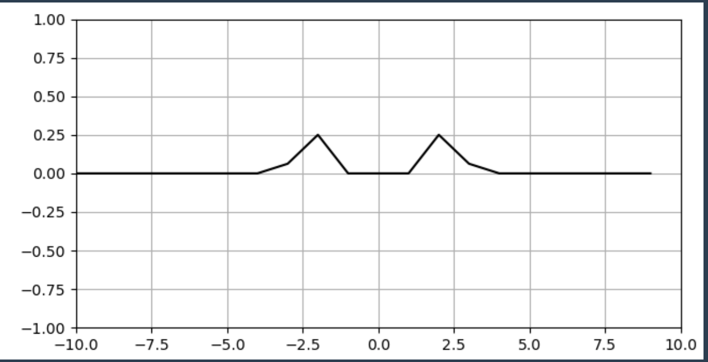
- Ver código: euler5.py

Resolución espectral

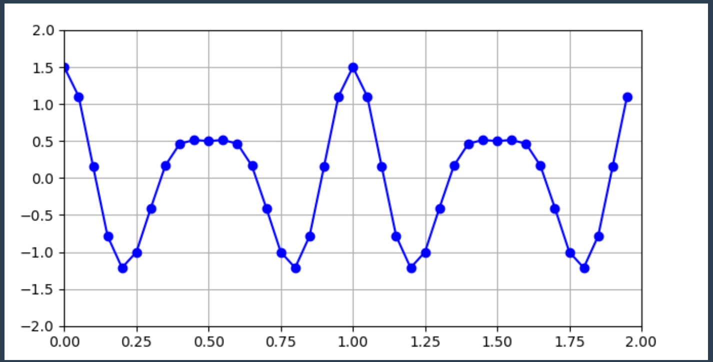
- Es una medida de cuanto se puede discriminar en frecuencia
- Resolución espectral = fs/N
- Para una determinada Fs, cuando mas grande N mejor resolución espectral
- Ej:
  - R deseada 5hz
  - Fs=1000 => N >= 200
  - tiempo de adquisición >= N/fs=0,2 segs
- Ej
  - R deseada 0,01Hz
  - Fs=1000 => N >= 100000
  - tiempo de adquisición >= N/fs= 100segs

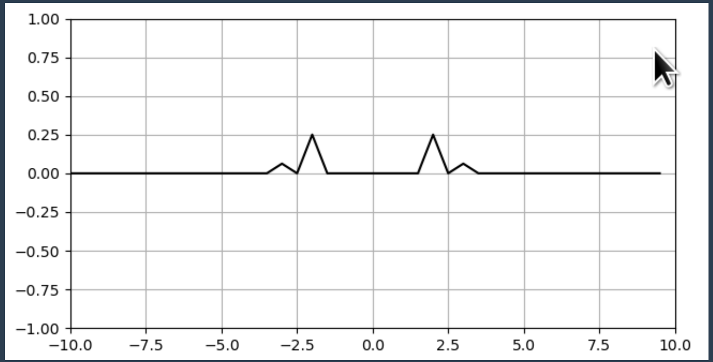
Fs=20 0 N=20





Fs=20 0 N=40

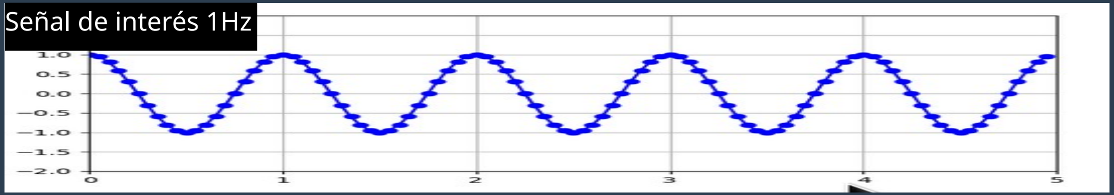


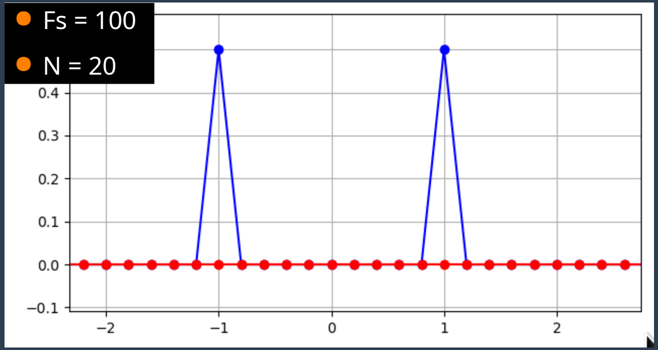


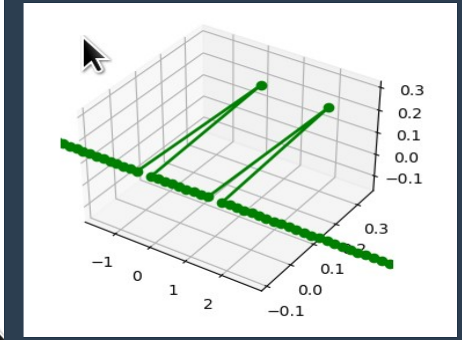
- Ver código: euler5.py

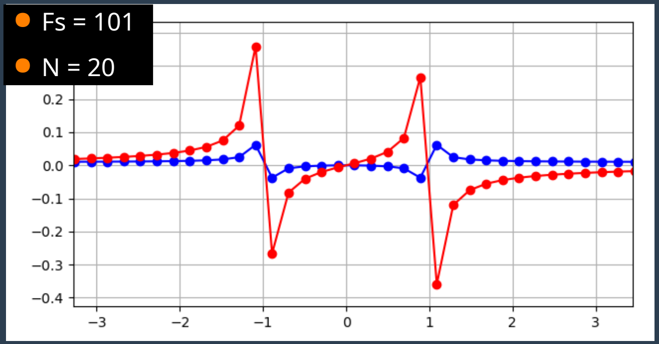
Fuga espectral – Spectral leakage

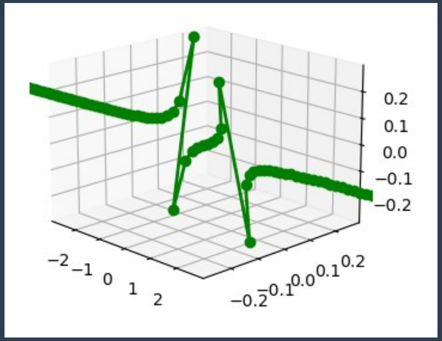
- Si la relación Fs/N=5 es múltiplo de la señal de interés la DFT resuelve bien
- Si no, aparece un efecto no deseado.
- Como mitigarlo??









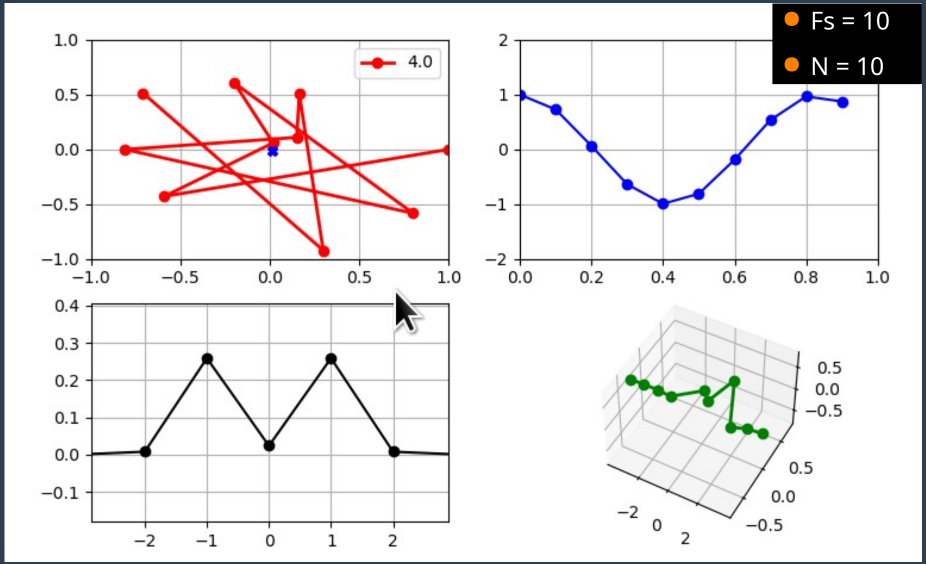


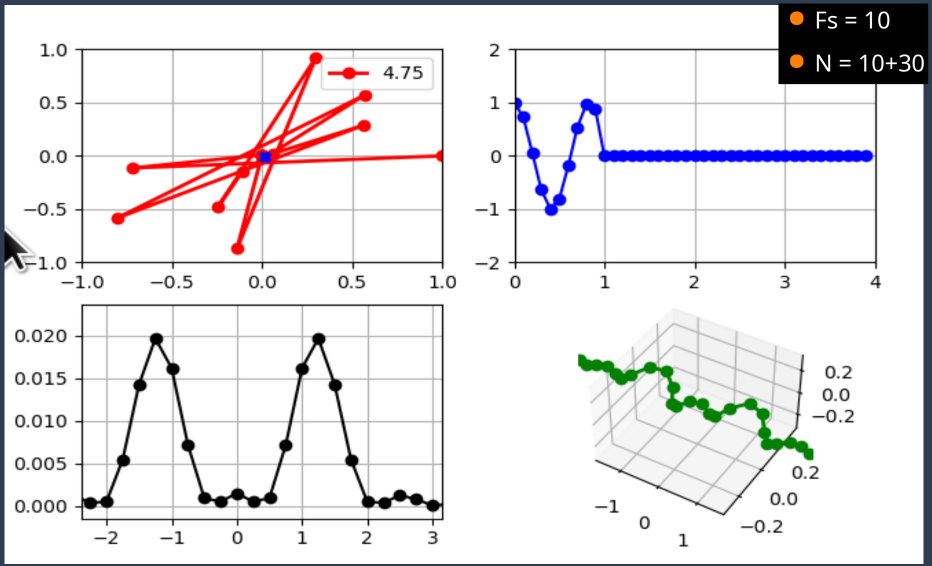
- Ver código: euler5_leakage.py

Fuga espectral – Zero padding

- La idea es tener mas frecuencias intermedias entre fs/N
- Para eso incrementamos N rellenando con ceros la señal original N+Z = N'
- Un efecto adverso es que la amplitud de la DFT se ve disminuida
- La nueva resolución espectral es fs/N'

Señal de interés 1,2Hz



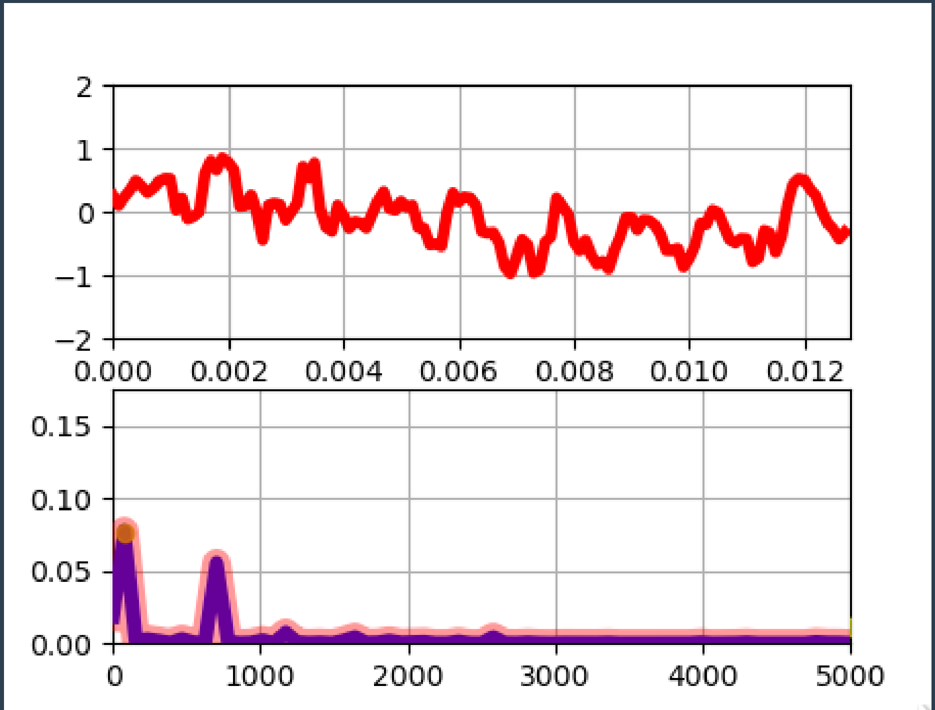


- Ver código: euler5_zero.py

Experimentación con la CIAA

FFT con CMSIS-DSP en Q1.15

- En los ejemplos se utiliza Q1.15
- Leer la documentación!
- https://www.keil.com/pack/doc/CMSIS/DSP/html/group__RealFFT.html#ga053450cc600a55410ba5b5605e96245d
- Investigar otras opciones con float.
- Hay que inicializar la estructura antes de usar
- La fft MODIFICA los datos de entrada
- Siempre verificar el tipo de datos de salida.

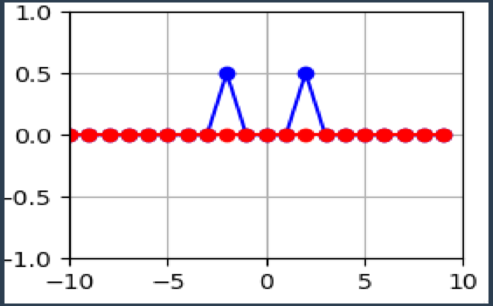


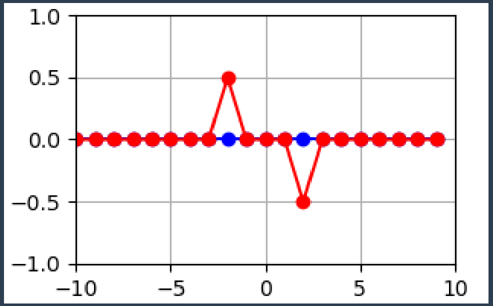

```
arm_rfft_init_q15          ( &S ,header.N ,0 ,1          );
arm_rfft_q15               ( &S ,fftIn ,fftOut           );
arm_cmplx_mag_squared_q15 ( fftOut ,fftMag ,header.N/2+1 );
```

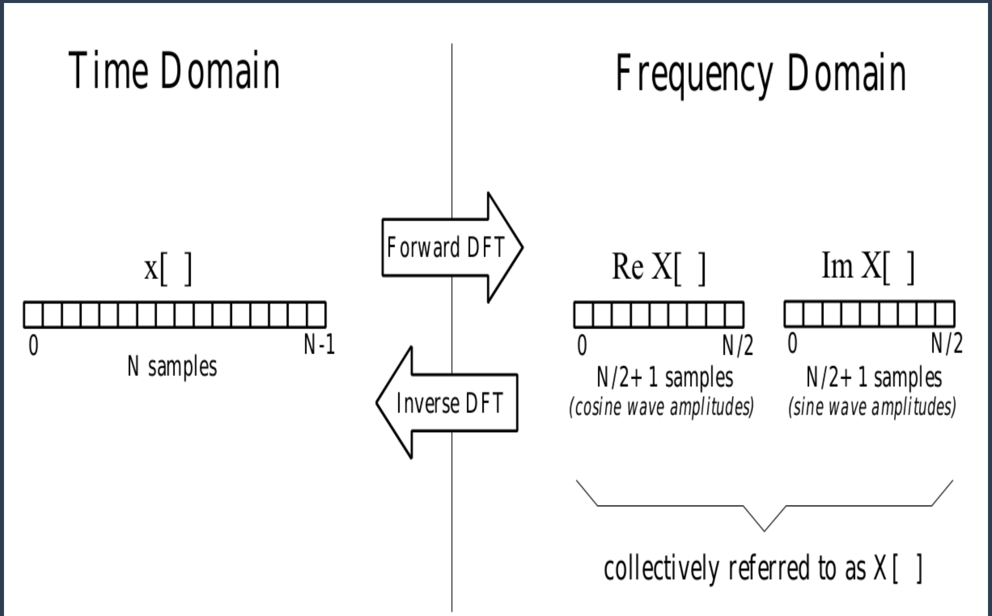
- Ver carpeta clase3/psf1

FFT Real con CMSIS-DSP

- Si la señal de entrada es reales, la DFT tiene simetría alrededor del n=0
- Se puede hacer y usar solo la mitad de los cálculos
- NOTA: La salida de la función de CMSIS intercala la parte real y la imaginaria







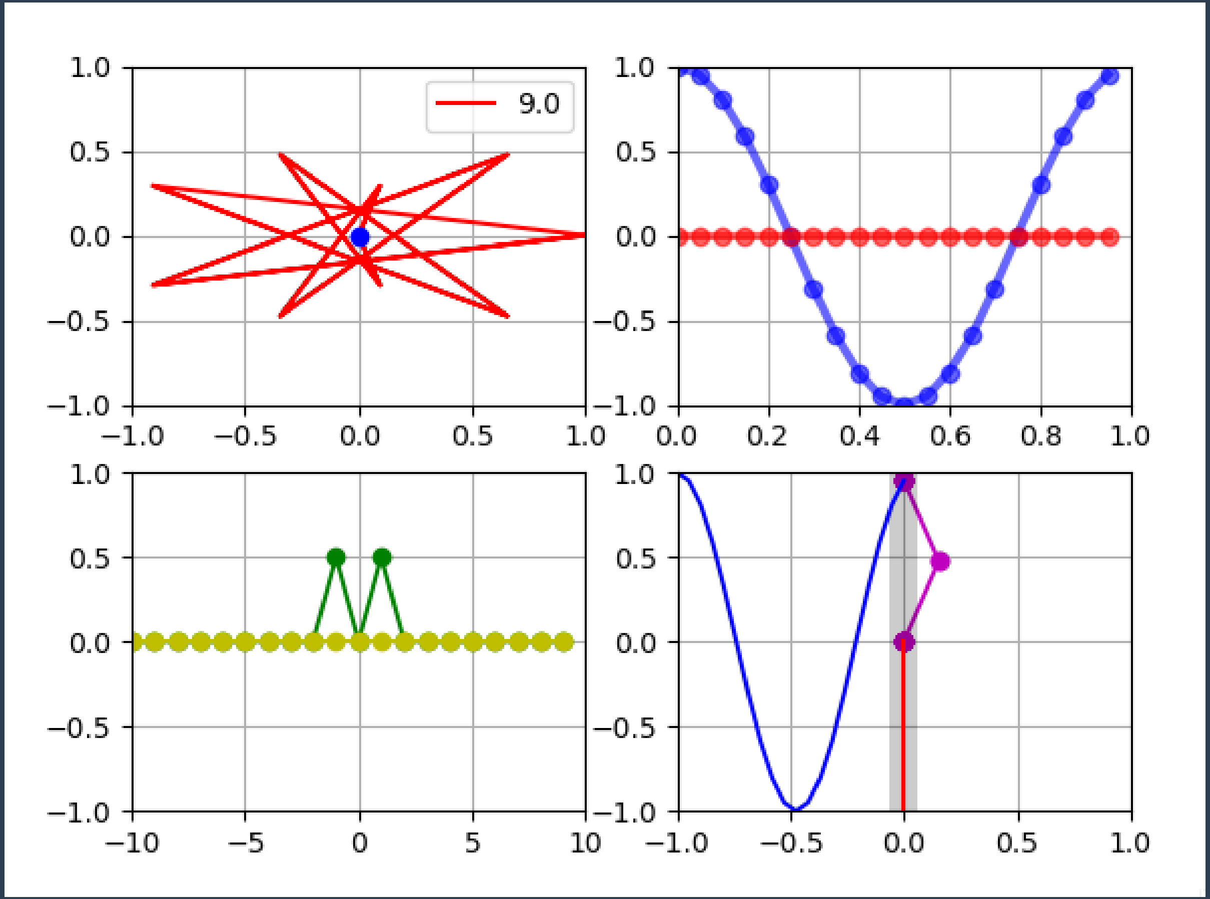
X = { real[0], imag[0], real[1], imag[1], real[2], imag[2] ... real[(N/2)-1], imag[(N/2)-1 }

- Ver carpeta clase3/psf1

IDFT – Transformada inversa de Fourier

IDFT – En que se parece a la DFT?

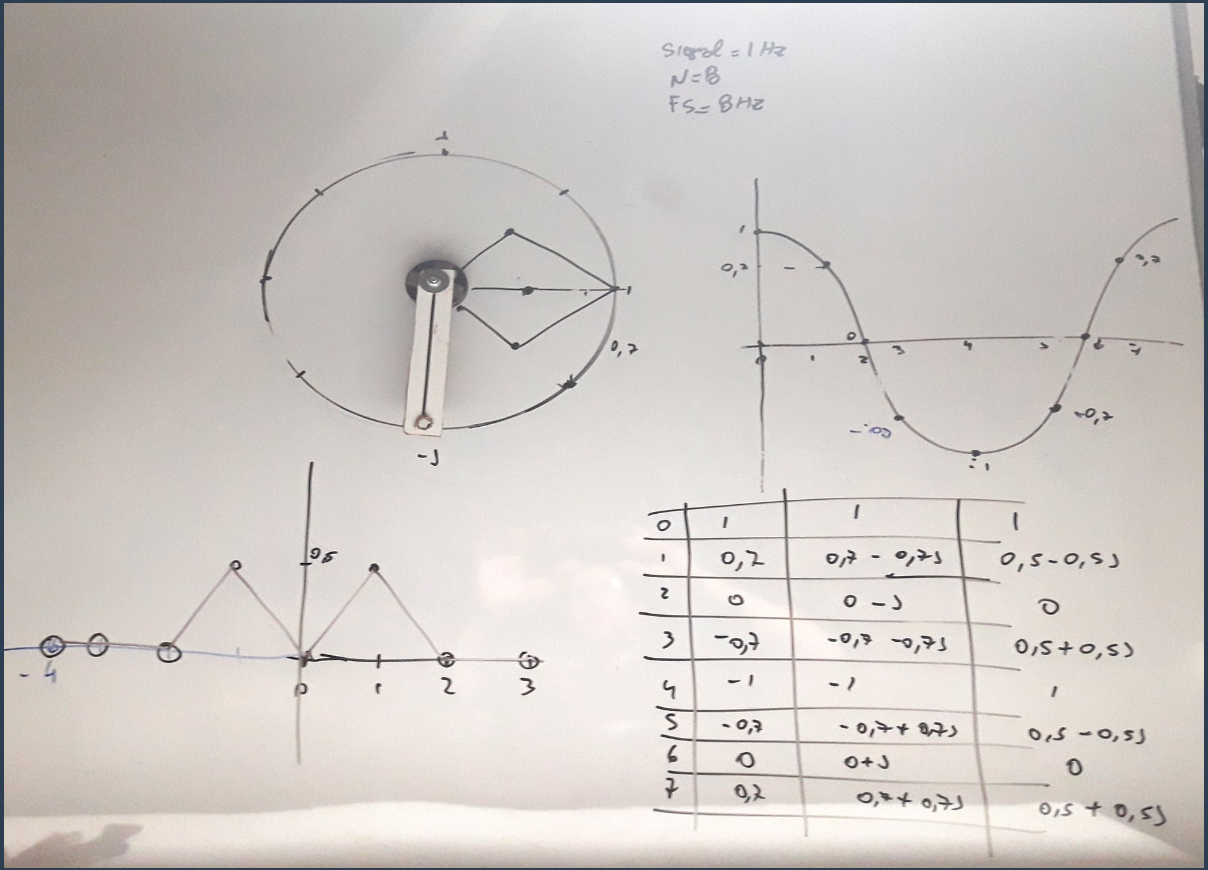
- Como reconstruyo la señal en tiempo desde la DFT??
- Cada bin en la DFT es un numero complejo. Un vector.
- Si se suma vectorialmente todos los vectores se obtiene la señal en tiempo.
- El resultado es real?? seguro?



- Ver código: euler6.py

Sirve la maquina de Rei-Ruof?

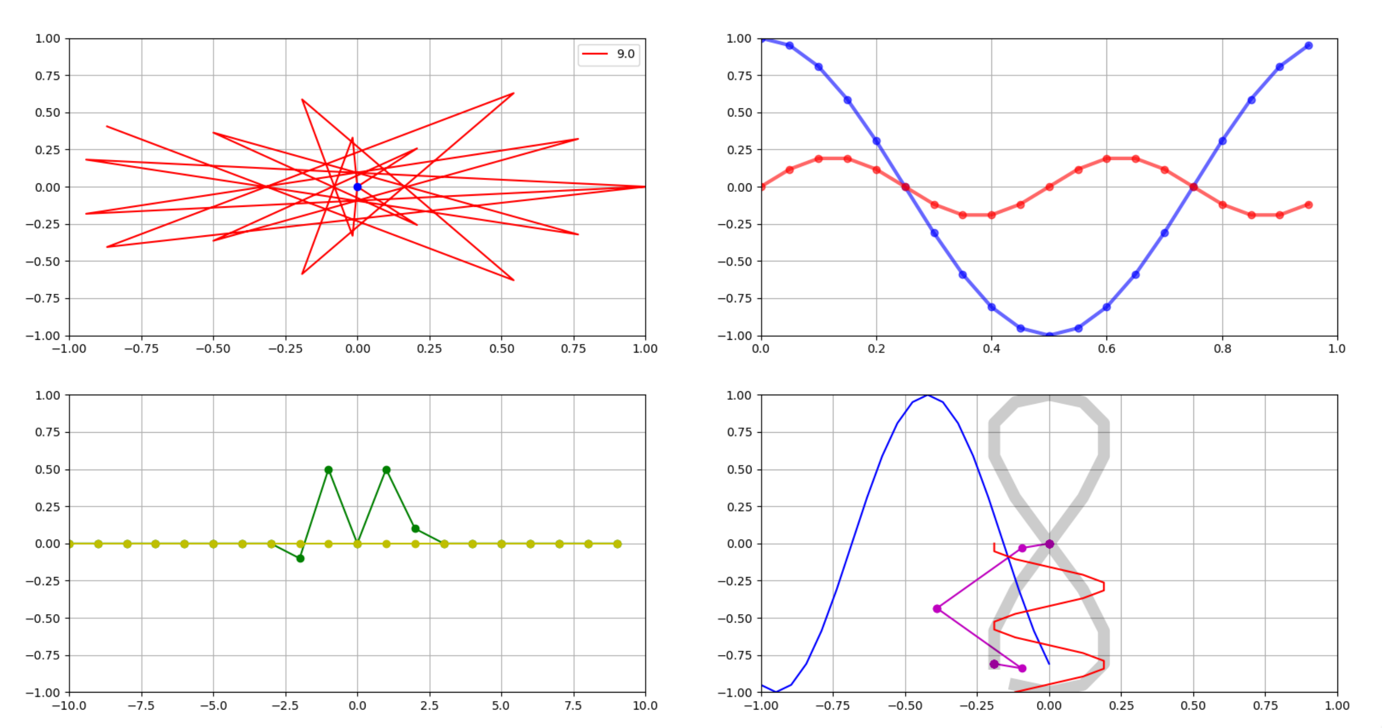
- Fs=8
- N=8
- Signal=1Hz
- Para cada frecuencia Fs/N*n se modula la DFT con el vector que traza el circulo
- Luego se calcula el promedio y se lo asigna a a cada instante de tiempo (1/fs)*n



- Ver códigos: maquina_reiruof.py

Señales complejas

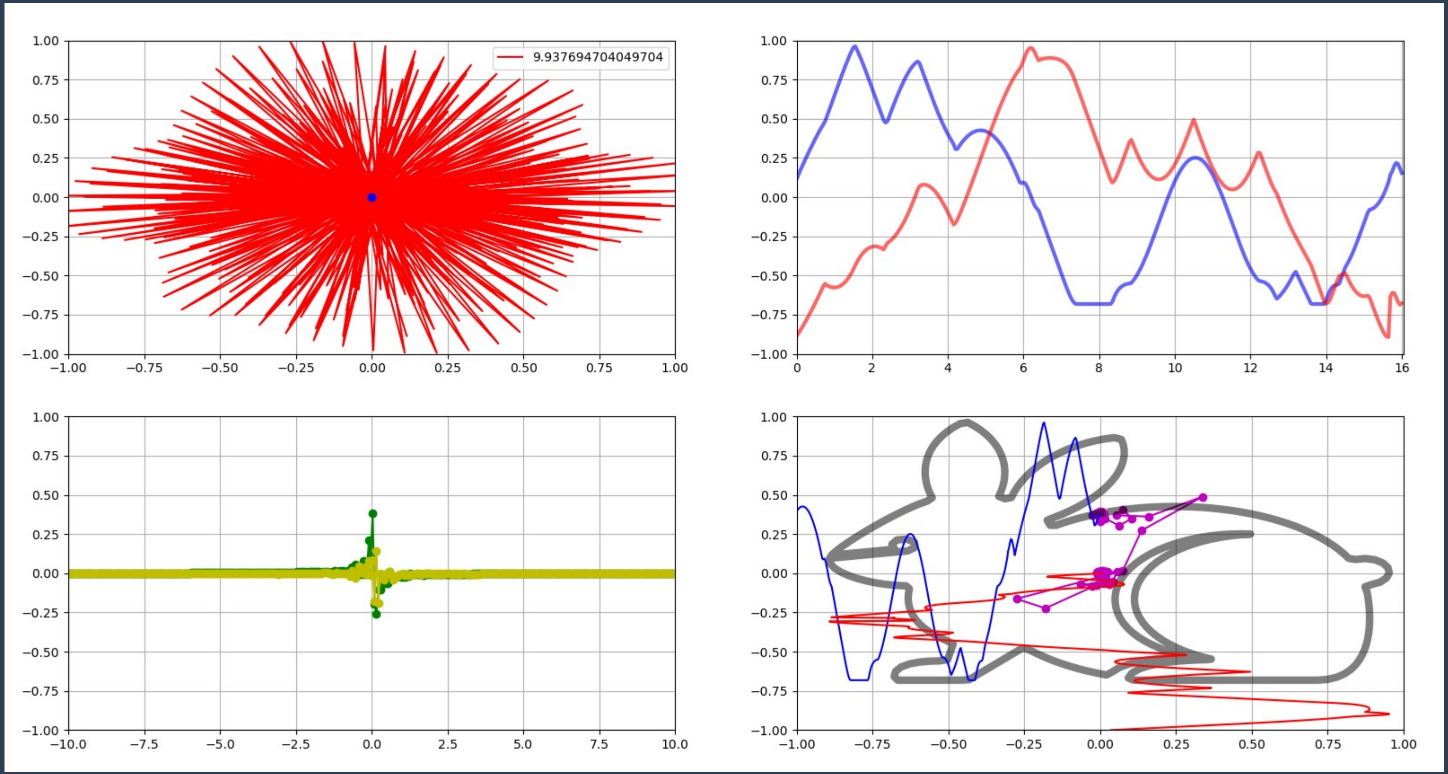
- Y si la entrada es compleja??
- También se puede hacer la DFT.
- El resultado sigue siendo un arreglo de N números complejos.
- La interpretación de los datos de entrada es arbitraria
- Se pueden desacoplar al reconstruir



- Ver código: euler6.py

Senales arbitrarias complejas

- Y si la entrada es es un conejo??
- La interpretación de los datos de entrada es arbitraria
- Es necesario todo el espectro en F para reconstruir el conejo?



- Ver código: euler7.py