

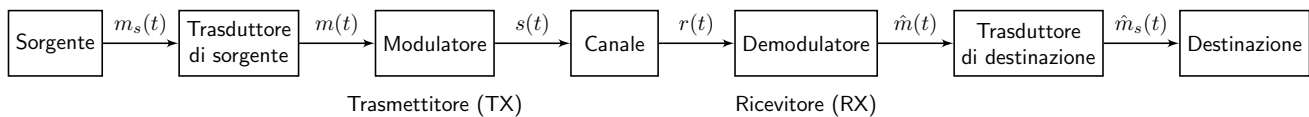
Appunti di sistemi di comunicazione

Leonardo Giovannoni

March 11, 2024

Introduzione ai sistemi di comunicazione

I sistemi di comunicazione sono sistemi che permettono di trasferire informazione da una o più sorgenti ad una o più destinazioni. Il sistema di comunicazione basilare è quello che usa un nodo sorgente ed un nodo destinazione. Tale sistema di comunicazione si denomina come sistema di comunicazione punto-punto.



- $m_s(t)$ segnale fisico prodotto dalla sorgente (es. voce)
- $m(t)$ segnale elettrico ottenuto per trasduzione del segnale di sorgente (es. segnale audio)
- $s(t)$ segnale modulato (trasmesso)
- $r(t)$ segnale ricevuto
- $\hat{m}(t)$ segnale demodulato
- $\hat{m}_s(t)$ segnale trasdotto

1. **Nodo di sorgente:** genera il messaggio (informazione) da comunicare.
2. **Nodo di destinazione:** riceve il messaggio trasmesso.
3. **Trasduttore di sorgente:** può convertire, ove necessario, il supporto fisico del segnale $m_s(t)$ così da generare un segnale elettrico opportuno per la trasmissione.
4. **Trasmittitore:** converte il segnale elettrico $m(t)$ in un nuovo segnale elettrico adatto per la trasmissione attraverso il canale di comunicazione a disposizione. Effettua sostanzialmente le seguenti operazioni:
 - (a) Traslazione in frequenza (modulazione): fa sì che la occupazione di banda del segnale sia attorno a un opportuna frequenza centrale.
 - (b) Sagomatura: garantisce che la occupazione di banda sia quella ottimale e che non disturbi eventuali altre comunicazioni presenti nello stesso canale di comunicazione.
5. **Canale di comunicazione:** permette il trasferimento del segnale $s(t)$ dal nodo sorgente a quello di destinazione. Il canale di comunicazione prevede:
 - (a) Un trasduttore di ingresso: converte il segnale elettrico $s(t)$ in un segnale con supporto fisico compatibile con il mezzo trasmissivo (es. onda elettromagnetica per la trasmissione in aria libera per la trasmissione su fibra ottica, ecc.).
 - (b) Un mezzo trasmissivo: rappresenta il mezzo fisico su cui si propaga il segnale trasmesso (es. onda e vuoto per le onde elettromagnetiche o la fibra ottica per segnali luminosi).
 - (c) Un trasduttore di uscita: converte il segnale ricevuto tramite il mezzo trasmissivo in un segnale elettrico $r(t)$.
6. **Ricevitore:** trasforma il segnale $r(t)$ in un segnale $\hat{m}(t)$ traslando il segnale in frequenza (operazione di demodulazione) e operando un filtraggio. L'operazione di filtraggio si rende necessaria in quanto il segnale è generalmente una versione modificata del segnale $s(t)$ per effetto della presenza di:

- rumore introdotto dal canale di comunicazione e dai dispositivi elettronici che compongono il ricevitore;
- distorsioni introdotte dal canale di comunicazione.

In ogni caso, il ricevitore deve effettuare una operazione di sagomatura inversa per ottenere il segnale $\hat{m}(t)$ in modo che esso sia il più simile possibile al segnale $m(t)$.

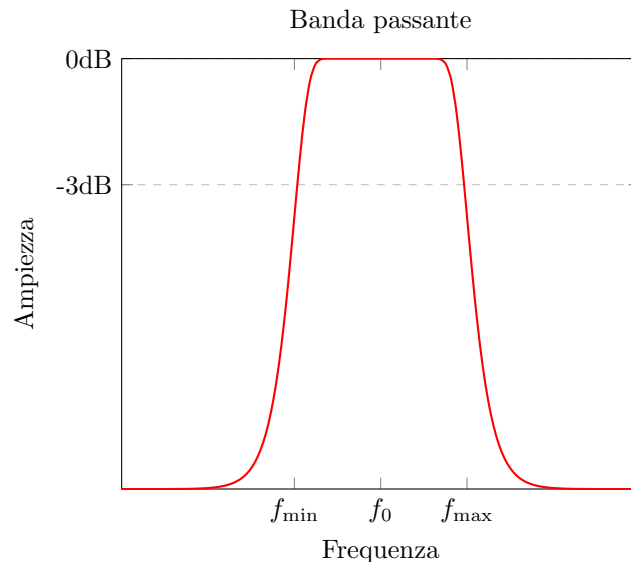
Una condizione necessaria sul ricevitore è la seguente:

$$\text{Se } r(t) = s(t) \text{ allora } \hat{m}(t) = m(t)$$

Questa condizione deve essere interpretata nel seguente modo: se il segnale ricevuto è identico a quello trasmesso (assenza di disturbi introdotti dal canale di comunicazione) allora il segnale demodulato $\hat{m}(t)$ deve essere identico a $m(t)$.

Banda Passante e Larghezza di Banda di un Canale di Comunicazione

Si può applicare il concetto di banda di un filtro.



- Banda passante $\{f | f_{\min} \leq f \leq f_{\max}\}$
- Larghezza di banda: $B = f_{\max} - f_{\min}$
- Frequenza centrale: $f_0 = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}$

Canali a banda larga e a banda stretta

Il concetto di banda larga o stretta è relativo alla frequenza centrale

- **Banda larga:** $f_0 \leq 2B$
- **Banda stretta:** $f_0 > 2B$

Esempi:

1. Doppino telefonico (banda larga):

- $f_0 = 2.45 \text{ KHz}$
- $B = 3.7 \text{ KHz}$

2. Canale radio (DVB-T, banda stretta)

- $f_0 = 400MHz$
- $B = 8MHz$

NB: Nonostante la larghezza di banda nel secondo caso sia maggiore che nel primo caso si ha che nel primo caso la banda è larga e nel secondo caso è stretta.

Il canale radio

Il canale radio merita un po' di attenzione in quanto rappresenta il canale per le comunicazioni "wireless".

Le caratteristiche principali di un canale radio sono:

1. È sempre un canale passa-banda.
2. È tipicamente un canale a banda stretta.
3. I trasduttori di canale sono delle **antenne** e queste devono avere delle dimensioni non inferiori a $\frac{\lambda}{10}$. Questo comporta dei limiti inferiori alle frequenze utilizzabili per la trasmissione radio.

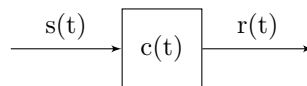
$$\lambda = \frac{c}{f}$$

| | | |
|------------------------|----------------------------------|--|
| LF (Low Frequency) | 30 - 300 kHz (1 - 10 km) | Radiolocalizzazione marittima e aeronautica |
| MF (Medium Frequency) | 300 - 3000 kHz (100 - 1000 m) | Radionavigazione e radiodiffusione |
| HF (High Frequency) | 3 - 30 MHz (10 - 100 m) | Collegamenti a lunga distanza (riflessione ionosferica) |
| VHF (Very High Freq.) | 30 - 300 MHz (1 - 10 m) | Radiodiffusione |
| UHF (Ultra High Freq.) | 300 - 3000 MHz (0.1 - 1 m) | Servizi TV, telefonia mobile |
| SHF (Super High Freq.) | 3 - 30 GHz (1 - 10 cm) | TV satellitare, ponti radio |

Disturbi introdotti dal canale di comunicazione

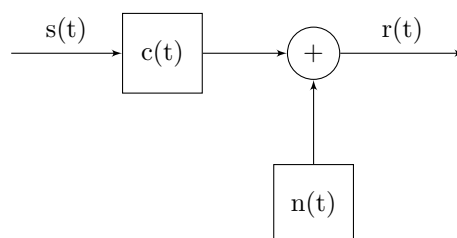
Il canale di comunicazione introduce distorsioni sul segnale trasmesso che possono essere descritte da trasformazioni deterministiche. In prima approssimazione tali distorsioni si possono assumere lineari e stazionarie.

Quindi, sotto questa ipotesi, il canale di comunicazione può essere visto come un filtro lineare e stazionario, che può introdurre quindi distorsioni lineari. La sua modellizzazione può essere a questo punto definita come segue:



dove $c(t)$ è la risposta impulsiva del canale di comunicazione.

Il canale di comunicazione introduce inoltre un disturbo di tipo aleatorio noto come **rumore**. Tale rumore si può quindi modellare come un processo aleatorio di tipo additivo che quindi si somma alla componente utile del segnale ricevuto. Quindi la modellizzazione completa di un canale di comunicazione può essere, in prima approssimazione, definita come segue:



dove

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$$

Canale ideale

$$\begin{aligned} c(t) &= \delta(t) \\ n(t) &= 0 \\ \therefore r(t) &= s(t) \end{aligned}$$

Sistemi di Comunicazione Analogici

Un sistema di comunicazione si dice analogico quando sia $m(t)$ che $\hat{m}(t)$ sono segnali analogici.

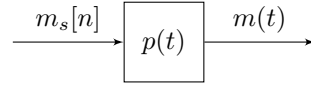
Da notare che:

1. Ovviamente anche $m_s(t)$ e $\hat{m}_s(t)$ sono segnali analogici in quanto differiscono rispettivamente da $m(t)$ e $\hat{m}(t)$ per un cambio del supporto fisico.
2. $s(t)$ e $r(t)$ sono sempre segnali analogici in quanto il primo deve essere trasdotto in un segnale fisico e immesso nel mezzo trasmissivo ed il secondo si ottiene per trasduzione di un segnale fisico.

Sistemi di Comunicazione Numerici

Per definizione un sistema di comunicazione numerico è tale quando $m_s(t)$ e $\hat{m}_s(t)$ sono sequenze numeriche ($m_s[n]$ e $m_r[n]$) e $m(t)$ e $\hat{m}(t)$ sono segnali numerici.

N.B. $s(t)$ e $r(t)$ continuano ad essere segnali analogici.



Dove T_s è il periodo di segnalazione della sorgente e $m_s[n]$ è la sequenza generata dalla sorgente con periodo di sequenza T_s , Ogni simbolo di $m_s[n]$ appartiene ad un alfabeto predefinito

$$m_s[n] \in A_s, A_s = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M, M \geq 2$$

La sequenza $m_s[n]$ può essere vista come il risultato (realizzazione) del campionamento di un processo aleatorio.

$M(t)$ è un processo aleatorio e $M_s[n]$ è una V.A. estratta dal processo.

Si definisce la sequenza aleatoria di sorgente come

$$\{M_s[n] \in A_s, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

N.B. $m_s[n]$ è una realizzazione di $M[n]$.

Alla destinazione si definisce in maniera analoga la sequenza di destinazione

$$\{\hat{M}_s[n] \in A_s, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Il segnale $m(t)$ è ottenuto dalla sequenza aleatoria di sorgente tramite una operazione di modulazione che è del tutto equivalente alla operazione di interpolazione

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_s[n] \cdot p(t - nT_s)$$

dove $p(t)$ è l'impulso in trasmissione.

Ad esempio $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$.

Il tasso di erogazione della sorgente è definito come

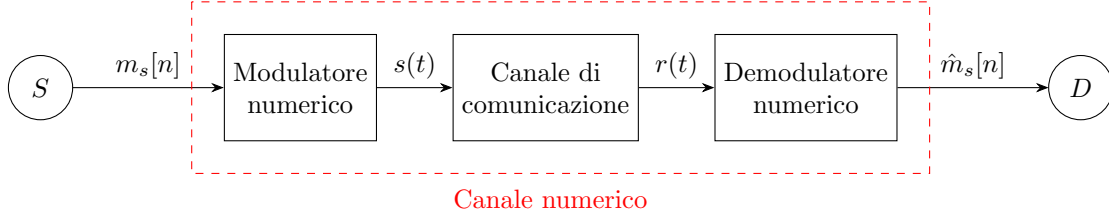
$$R_s := \frac{1}{T_s}$$

che è il rate con cui escono i simboli apparentemente dall'alfabeto A_s .

Se è presente una codifica binaria per rappresentare un simbolo dell'alfabeto A_s occorrono $\log_2 M$ simboli binari, per cui si definisce il tasso di errore binario come:

$$R_b := \frac{\log_2 M}{T_s}$$

Schema funzionale di un sistema di comunicazione numerico



- La coppia modulatore/demodulatore numerico può essere interpretata come un livello di trasduzione. Questo ci permette di vedere il sistema di comunicazione come un canale numerico tra S e D .
- La sorgente genera una sequenza di simboli appartenenti all'alfabeto A_s , che vogliamo trasferire al nodo di destinazione.
- Il modulatore numerico può essere visto come l'insieme del trasduttore di sorgente e del modulatore. Questo genera quindi il segnale $s(t)$ analogico che può essere di tipo passa-basso (in banda base) o di tipo passa-banda (in banda passante).
- Il canale di comunicazione è sempre lo stesso (per segnali numerici e analogici).
- Il demodulatore numerico può essere visto come l'insieme del demodulatore e del trasformatore di destinazione. Esso produce la sequenza $\hat{m}_s[n]$ dal segnale $v(t)$.

Un canale numerico ideale produce:

$$\hat{m}_s[n] = m_s[n] \quad \forall n \quad (1)$$

In casi pratici un canale numerico non è mai ideale e per cui ha senso definire il suo comportamento e quindi le sue prestazioni.

Probabilità di transizione

$$P\{i|j\} := P\{\hat{m}_s[n] = \alpha_i \mid m_s[n] = \alpha_j\} \quad (2)$$

Un canale numerico è statisticamente caratterizzato quando sono note le $P\{i|j\} \forall i, j$

Se le $P\{i|j\}$ non dipendono da n allora il canale numerico si dice **stazionario**.

L'insieme delle $P\{i|j\}$ è parte di M^2 dove M è la cardinalità dell'alfabeto A_s .

Per un canale ideale quindi:

$$P\{i|j\} = 1 \quad \text{se } i = j \quad (3)$$

$$P\{i|j\} = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (4)$$

N.B. Le $P\{i|j\}$ non dipendono solo dai disturbi introdotti dal canale di comunicazione, ma anche dalla modulazione impiegata, per cui esse legano contro delle prestazioni di tutto il sistema numerico.

Misure delle prestazioni di un sistema di comunicazione numerico

Le prestazioni di un sistema di comunicazione numerico sono associabili alla probabilità di errore di simbolo M -ario

$$P_E(M) := P\{\hat{m}_s[n] \neq m_s[n]\}$$

Se la $P_E(M)$ non dipende da n , allora il sistema di comunicazione è stazionario.

Quality of Service (QoS)

La qualità del servizio per un sistema di comunicazione numerico è associabile alla probabilità di errore $P_E(M)$. È ragionevole quindi pensare che si debba fissare una $P_E(M)$ massima al di là della quale la QoS non è accettabile.

$$P_E(M) \leq P_{\max}$$

Esempio: per i servizi voce $P_{\max} = 10^{-3}$, mentre per i servizi dati $P_{\max} = 10^{-7}$.

Dualismo banda e potenza

Aumentando la potenza del segnale in trasmissione si può fare in modo che la componente utile del segnale prevalga sulla componente di rumore. Questo intuitivamente tende a migliorare le prestazioni del sistema. La potenza però costa e comunque esistono dei limiti fisici o imposti che la limitano.

Lo stesso si può dire per la banda, si può dimostrare che all'aumentare della banda del segnale trasmesso si migliorano le prestazioni del sistema. Anche la banda però è una risorsa limitata.

Efficienza di potenza e efficienza spettrale

Una modulazione si dice:

- **efficiente in potenza:** quando la potenza trasmessa è bassa a fronte di un certo livello di prestazioni;
- **efficiente spettralmente:** quando la banda utilizzata è piccola a fronte di un certo livello di prestazioni.

Sfortunatamente i sistemi efficienti spettralmente non sono anche efficienti in potenza.

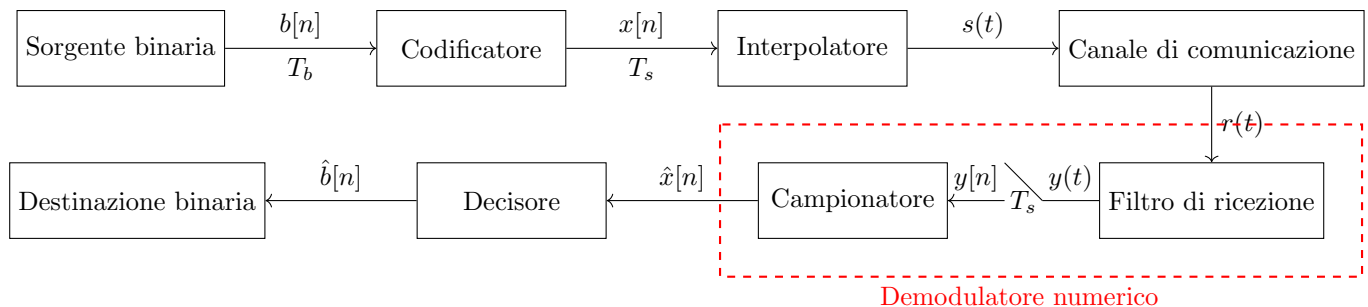
Vantaggi di un sistema di comunicazione rispetto ad un altro:

1. Basso costo
2. Sicurezza nella trasmissione di un messaggio
3. Trasferimento aggregato di messaggi di natura diversa (multiplexing, audio, video, dati)
4. Possibilità di utilizzare modulazioni e codifiche che rendono il sistema efficiente in potenza e/o spettralmente.

Svantaggi:

1. Generalmente la banda occupata da un segnale numerico è maggiore del corrispondente analogico
2. Complessità, soprattutto per la sincronizzazione

Modulazioni numeriche in banda base



La modulazione numerica è necessaria per poter trasmettere sequenze binarie attraverso un mezzo trasmissivo. In particolare, per adesso ci concentreremo su canali trasmissivi in banda base, come ad esempio il doppino telefonico o il cavo coassiale.

1. **Codificatore:** trasforma sequenze di bit in simboli M -ari appartenenti a un alfabeto A_s .

2. **Interpolatore:** modula impulsi tramite i simboli $x[n]$ in ingresso per produrre una sequenza di impulsi $s(t)$.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot p(t - kT_s)$$

3. **Canale di comunicazione:** sono assenti i trasduttori in quanto la propagazione nel mezzo trasmissivo è elettrica.

4. **Filtro di ricezione:** filtra componenti di rumore generate nel canale e compensa eventuali distorsioni.

5. **Campionatore:** preleva campioni dal segnale filtrato $y(t)$.

6. **Decisore:** associa un simbolo dell'alfabeto A_s ad ogni campione.

7. **Decodificatore:** trasforma i simboli in sequenze binarie.

Codificatore

- Deve essere sincrono con la sorgente

$$T_s = T_b \log_2 M$$
$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b \log_2 M}$$

- La sequenza di simboli generati dal codificatore viene considerata come un processo stazionario. Spesso i simboli trasmessi sono considerati equiprobabili:

$$P\{x[n] = \alpha_i\} = \frac{1}{M} \quad \forall i$$

Interpolatore In un sistema di comunicazione numerico in banda base, l'interpolatore da solo svolge il compito di modulatore numerico, in quanto effettua la sagomatura, mentre non è prevista nessuna traslazione in frequenza. Il filtro sagomatore è realizzato tramite la generazione dell'impulso $p(t)$. Infatti, si può pensare a $P(f)$ come allo spettro del singolo impulso.

- B_p : banda dell'impulso $p(t)$:
- E_p : energia dell'impulso $p(t)$:

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df$$

Data l'aleatorietà della sequenza di simboli $x[k]$, $s(t)$ deve essere interpretato come la realizzazione di un processo aleatorio $S(t)$ stazionario.

Il processo $S(t)$ ha una autocorrelazione $R_s(\tau)$ ed una densità spettrale di potenza $S_s(f)$.

Per cui è definita una potenza P_s ed una banda B_T .

L'energia media per bit può essere calcolata come:

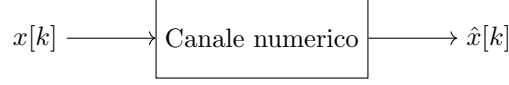
$$E_b = T_s P_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{B_t}$$

E_s — energia media per simbolo

Demodulatore numerico Il demodulatore numerico produce una sequenza $\hat{x}[k]$ in modo tale da minimizzare la probabilità di errore. La probabilità di errore sul simbolo e sul bit sono:

$$P_{E_s} = P\{\hat{x}[k] \neq x[k]\}$$
$$P_{E_b} = P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\} \quad \text{BEP (bit error probability)}$$

Canale numerico e prestazioni



$$x[k] \in A_s$$

$$A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$$

$$P_E(M) := P\{\hat{x}[k] \neq x[k]\} = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_j\} = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\} \cdot P\{x = \alpha_j\}$$

Nel caso di simboli equiprobabili:

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\}$$

Formato di modulazione equienergia

$$E_s(i) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)^2 dt \quad s_i(t) \text{ è il segnale trasmesso in corrispondenza del simbolo } \alpha_i$$

Il formato di modulazione è equienergetico se

$$E_s(i) = E_s \quad \forall i$$

Ortogonalità Il formato di modulazione è detto ortogonale se

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) s_j(t) dt = 0 \quad \forall i \neq j$$

Efficienza energetica Fissata una P_{E_b} , l'efficienza energetica è definita come il valore

$$\eta_P := \frac{1}{SNR}, \quad SNR := \frac{P_s}{P_n}$$

che permette di ottenere tale *BEP*.

Quando tanto maggiore è η_P , tanto minore deve essere il *SNR* che garantisce una data *BEP*.

Efficienza spettrale L'efficienza spettrale è definita con il rapporto tra il tasso di erogazione binario e la banda di trasmissione

$$\eta_b := \frac{R_b}{B_T} \quad [\text{bit/s/Hz}]$$

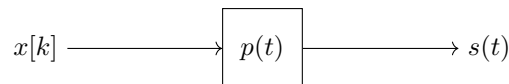
Quindi l'efficienza cresce quando a parità tasso di erogazione la banda utilizzata in trasmissione si riduce.

In termini di T_s e M :

$$\eta_b = \frac{\log_2 M}{B_T T_s}$$

Pulse-amplitude modulation (PAM)

La PAM nel caso generico è detta anche *M*-PAM o PAM *M*-aria dove con *M* si indica il numero di simboli presenti nell'alfabeto A_s .



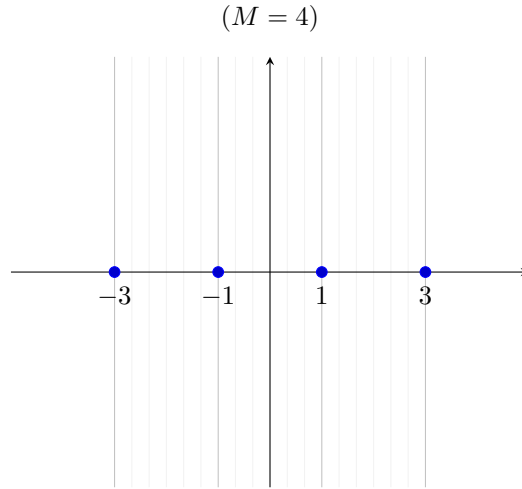
Proprietà che definiscono una M -PAM:

1. $s(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot p(t - kT_s)$
2. Gli M valori ($M \geq 2$) che costituiscono l'alfabeto $A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ sono definiti come:

$$\alpha_i = 2i - 1 - M, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Esempio:

$$M = 4 \Rightarrow \alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 3$$



$$E_s(i) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 \cdot p^2(t - kT_s) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (2i - 1 - M)^2 p^2(t) dt = (2i - 1 - M)^2 E_p$$

Per M pari si ha $A_s = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

Per M dispari si ha $A_s = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm(M-1)\}$

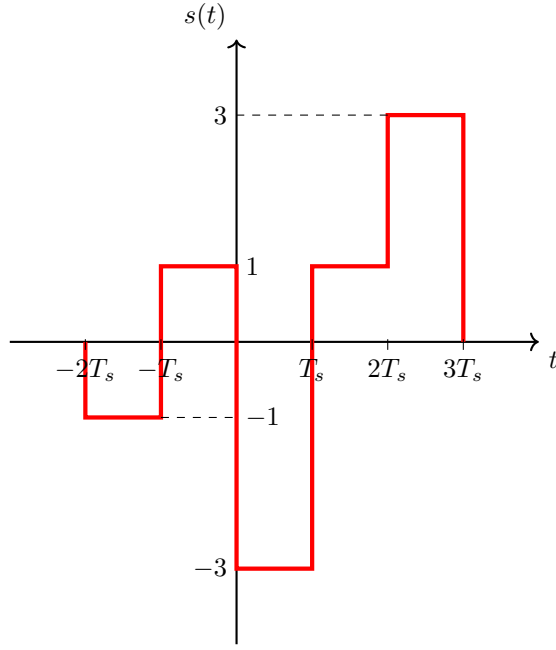
I formati M-PAM di più largo impiego sono quelli dove M è una potenza di 2.

Esempio:

4-PAM

$$\text{sequenza} = \begin{cases} x[-2] = -1, \\ x[-1] = 1, \\ x[0] = -3, \\ x[1] = 1, \\ x[2] = 3 \end{cases}$$

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$



Proprietà derivate della M-PAM

1. Il valor medio di $s(t)$ è zero per ogni t :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[s(t)] &= 0 \quad \forall t \\ \mathbb{E}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] p(t - kT_s)\right] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[x[k]] p(t - kT_s) = 0 \\ \mathbb{E}[x[k]] &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbb{P}\{\alpha_i\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i - 1 - M) \\ &= \frac{2}{M} \sum_{i=1}^M i - 1 - M = \frac{2}{M} \frac{M(M+1)}{2} - (M+1) = 0\end{aligned}$$

2. La densità spettrale di potenza invece è: $S_s(f)$:

$$\begin{aligned}S_s(f) &= \frac{1}{T_s} S_x(f) |P(f)|^2 \\ \text{dove } \sigma_x^2 &= \mathbb{E}[x[k]^2] = \frac{(M-1)(M+1)}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_s(t, \tau) &= \mathbb{E}\{s(t) s^*(t - \tau)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT_s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k] p^*(t - \tau - kT_s)\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{x[n] x^*[k]\} \cdot p(t - nT_s) \cdot p^*(t - \tau - kT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[n - k] \cdot p(t - nT_s) \cdot p^*(t - \tau - kT_s)\end{aligned}$$

Imponendo $n - k = m$ abbiamo che $k = n - m$, quindi:

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT_s) \cdot p^*(t - \tau - nT_s + mT_s)$$

Autocorrelazione media La funzione di autocorrelazione media $\bar{R}_s(\tau)$ è:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_s(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t, \tau) dt \\
\bar{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_s(t, \tau) dt \quad \text{se } R_s(t, \tau) \text{ è periodico in } t \\
\bar{R}_s(\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t - nT_s) p^*(t - \tau - nT_s + mT_s) dt \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_s}{2} + nT_s}^{\frac{T_s}{2} + nT_s} p(t') p^*(t' - \tau + mT_s) dt' \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} p(t') p^*(t' - \tau + mT_s) dt' \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} P(f) [P(f) e^{-j2\pi f \tau} e^{j2\pi f m T_s}]^* df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(f) P^*(f) \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j2\pi f m T_s} e^{j2\pi f \tau} df \\
&= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 S_x(f) e^{j2\pi f \tau} df \\
\bar{R}_s(\tau) &= \frac{1}{T_s} TCF^{-1} [|P(f)|^2 S_x(f)] \\
&\Rightarrow S_s(f) = \frac{1}{T_s} S_x(f) |P(f)|^2
\end{aligned}$$

Nel caso in cui:

1. $\mathbb{E}\{x[n]\} = 0$
2. $R_x[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$

Si ha che:

$$S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2$$

In questo caso la B_T coincide con quella del sagomatore $P(f)$.

Calcolo di σ_x^2 :

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \mathbb{E}[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \\
&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i - 1 - M)^2 \\
&= \frac{1}{M} \left[2 \sum_{i=1}^M i^2 + (1 + M)^2 M - 4(1 + M) \sum_{i=1}^M i \right]
\end{aligned}$$

Sfruttando i seguenti risultati noti:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \frac{M^2 - 1}{3} \\
P_s &= \frac{\sigma_x^2 E_p}{T_s} = \frac{M^2 - 1}{3} \frac{E_p}{T_s}
\end{aligned}$$

Efficienza Spettrale di una M-PAM

$$\beta = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{T_s B_P}$$

essendo $B_T = B_P$,

L'efficienza spettrale aumenta con l'aumentare del numero di livelli. Sfortunatamente, come verrà dimostrato più avanti, l'efficienza in potenza diminuisce all'aumentare di M .

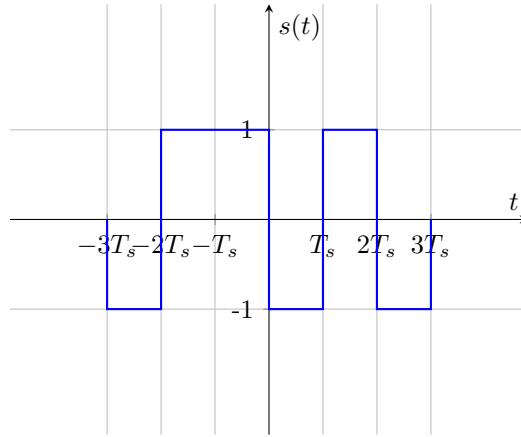
PAM Binaria o BPSK (Binary Phase Shift Keying)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]p(t - kT_s)$$

con $x[n] \in A_s = \{\pm 1\}$ ($M = 2$)

$$\Rightarrow T_B = T_s \quad (\log_2 2 = 1)$$

Esempio con $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$



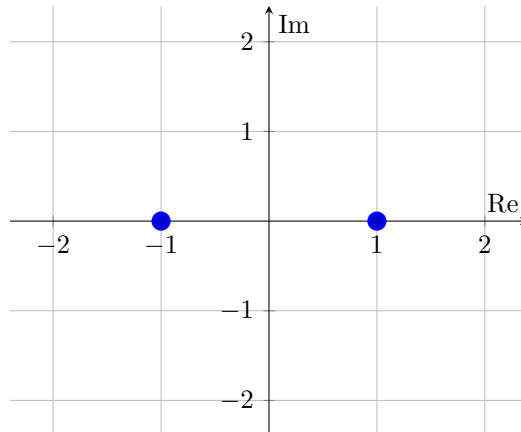
Segnale PAM binario (o BPSK)

Il PAM Binario è un formato equiprobabile

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (+1)^2 p^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^2 p^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = E_{s_2}$$

$$E_{s_1} = E_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = E_p$$

Simboli antipodali



1. $E[s(t)] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[x_k] p(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) \right) p(t-kT_s) = 0$ se i simboli sono equiprobabili
2. $S_s(t) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2$ Densità spettrale di potenza
3. $P_s = \frac{E_p}{T_b}$ Potenza media
4. $B_T = B_P$ Banda
5. $M_P = \frac{1}{T_b B_p}$

Segnalazione ON-OFF È un tipo di PAM binaria con simboli appartenenti ad $A_s = \{0, 1\}$

e impulsi rettangolari $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2 - kT_b}{T_b}\right)$$

$$\begin{cases} S_1(t) = 0 & \Rightarrow E_{S_1} = 0 \\ S_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right) & \Rightarrow E_{S_2} = T_b \end{cases}$$

- $E[S(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[x[k]] p(t - kT_b) = \frac{1}{2}$
- $E_s = \frac{1}{2} E_{S_1} + \frac{1}{2} E_{S_2} = \frac{T_b}{2}$
- $P_s = \frac{E_s}{T_b} = \frac{1}{2}$
- $R_x[m] = C_x[m] + \eta_x^2 = \frac{1}{4} \delta[m] + \frac{1}{4}$
- $S_x(f) = TFS[R_x[m]] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_b}\right)$
- $S_s(f) = \frac{1}{T_b} S_x(f) |P(f)|^2 = \frac{1}{T_b} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b} \delta(f) \right) T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f) = \frac{T_b}{4} \left(1 + \frac{\delta(f)}{T_b} \right) \text{sinc}^2(T_b f)$
- $\eta_b = \frac{\log_2 2}{T_b B_p} = 2$ e $B_p = \frac{1}{2T_b}$ per la sinc

Considerazioni

1. L'efficienza spettrale della modulazione on-off è unitaria come nel caso della 2-PAM.
2. Essendo la modulazione on-off di tipo unipolare (solo a valori positivi) questa può essere utilizzata su canali di comunicazione che, per loro natura, non possono sovrapporre segnali bipolari.
3. La densità spettrale della on-off presenta un impulso di dirac nell'origine delle frequenze (alla continua) per cui il canale di trasmissione deve avere una risposta in frequenza che non sia nulla nell'origine.

Prestazioni dei Sistemi di Comunicazione Numerici in Banda Base

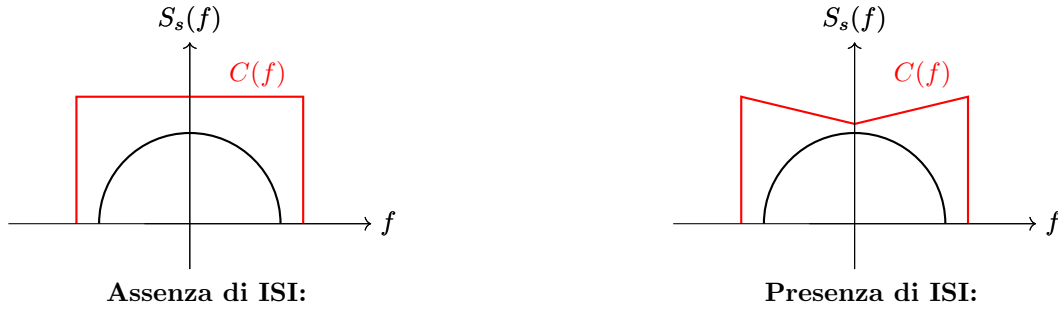
Nel valutare le prestazioni dei sistemi di comunicazioni numerici in banda base considereremo due fenomeni peggiorativi:

1. Interferenza intersimbolo (ISI)
2. Presenza di rumore

Per il momento ignoriamo il rumore e ci concentriamo sul primo problema.

Interferenza intersimbolica (ISI)

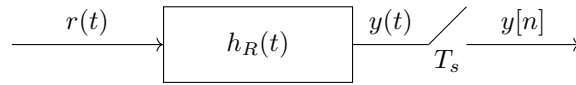
Il primo fenomeno è causato dalla non perfetta risposta in frequenza del canale di trasmissione e quindi dalle distorsioni lineari introdotte da questo.



$$y[k] = f(x[k])$$

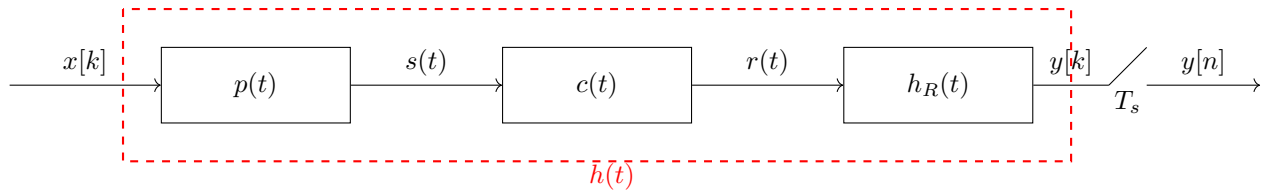
$$y[k] = f(\dots, x[k-1], x[k], x[k+1], \dots)$$

Il risultato è che il campione estratto al ricevitore dal segnale ricevuto al k-esimo istante non dipende solo dal k-esimo simbolo.



Per ridurre gli effetti dell'ISI si devono considerare:

1. il sagomatore in trasmissione $p(t)$
2. la risposta impulsiva del canale $c(t)$
3. il filtro in ricezione



$$h(t) = p(t) * c(t) * h_R(t)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} Y(f) &= R(f) \cdot H_R(f) = S(f) \cdot C(f) \cdot H_R(f) = \overline{X}(f) \cdot P(f) \cdot C(f) \cdot H_R(f) \\ &= \overline{X}(f) \cdot H(f) \quad \text{dove} \quad H(f) = P(f) \cdot C(f) \cdot H_R(f) \end{aligned}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot h(t - nT_s)$$

$$\begin{aligned} y[k] &= y(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot h((k - n) \cdot T_s) \\ &= x[k] \cdot h(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} x[n] \cdot h((k - n) \cdot T_s) \end{aligned}$$

Il secondo termine rappresenta la componente ISI.

Canale con ISI

Un canale con banda B_c in generale introduce ISI. Ci sono due aspetti di cui ci occuperemo:

1. Determinazione del T_s minimo che può essere adottato al fine di ottenere una sequenza campionata priva di ISI.
2. Determinare le condizioni sotto le quali è possibile trasmettere un segnale M-PAM attraverso un canale non ideale in modo che non vi sia ISI nella sequenza campionata.

Nel risolvere i due problemi riterremo $c(t)$ fissata, e $p(t)$ e $h_R(t)$ variabili, in quanto determinabili dal progettista.

Un approccio non perseguibile consiste nel trasmettere impulsi di durata finita e quindi con banda illimitata. Questo è in contrasto con la limitatezza messa a disposizione dal canale di trasmissione ($B_c < \infty$).

⇒ Gli impulsi $p(t)$ devono avere durata infinita.

Primo criterio di Nyquist per la trasmissione priva di ISI

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{Dominio del tempo})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s \quad \forall f \quad (\text{Dominio della frequenza})$$

Dimostrazione Il primo criterio di Nyquist nel dominio del tempo garantisce l'assenza di ISI in quanto

$$y[k] = x[k] \cdot h(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} x[n] \cdot h((n-k)T_s) = x[k] \cdot h(0)$$

dove il secondo termine è nullo e non vi è ISI se $h[n] = \delta[n]$.

La relazione in frequenza si ottiene come trasformazione

$$h[k] = \delta[k] \iff \overline{H}(f) = 1 \quad \forall f$$

$$\overline{H}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1 \quad \forall f$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s \quad \forall f$$

Trasmissione priva di ISI

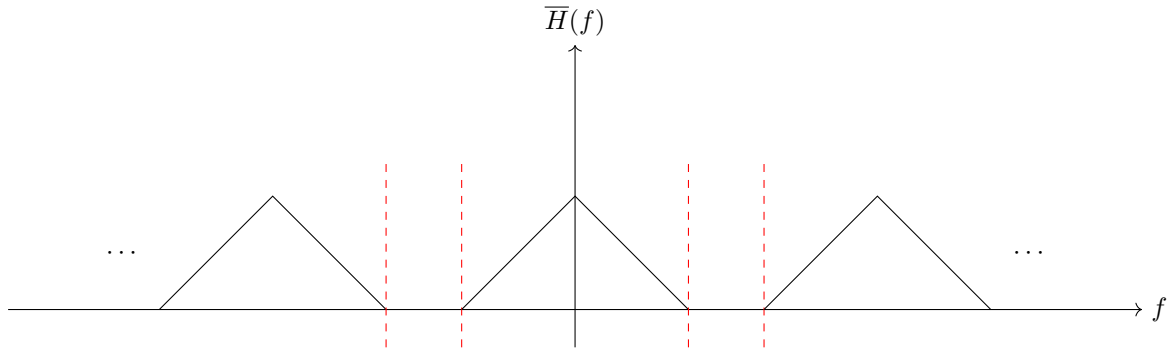
Supponiamo sia assegnato un canale a banda rigorosamente limitata con banda B_c .

$$C(f) = 0 \quad \text{per} \quad |f| > B_c$$

e supponiamo che $B_T = B_c$, ovvero che il segnale trasmesso occupa tutta la banda messa a disposizione dal canale. Allora si verificano le seguenti:

1. Non è possibile in alcun modo eliminare l'ISI quando $T_s < \frac{1}{2B_c}$.

Dimostrazione: Quando $T_s < \frac{1}{2B_c}$

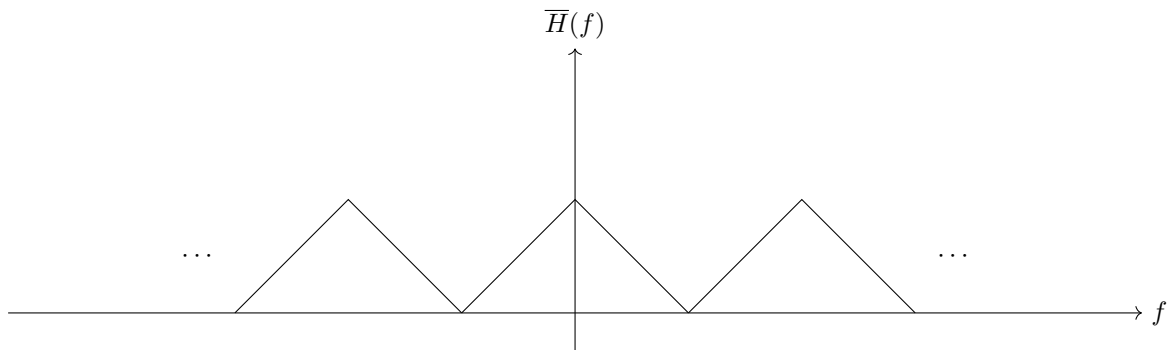


Esistono degli intervalli di frequenza dove $\bar{H}(f) = 0$ per cui non può mai accadere che $\bar{H}(f) = 1 \forall f$

2. Il più piccolo valore di T_s che permette di eliminare l'ISI è

$$T_s^{(min)} = \frac{1}{2B_c}$$

$$f_s^{(max)} = \frac{1}{T_s^{(min)}} = 2B_c = f_N \quad (\text{frequenza di Nyquist})$$

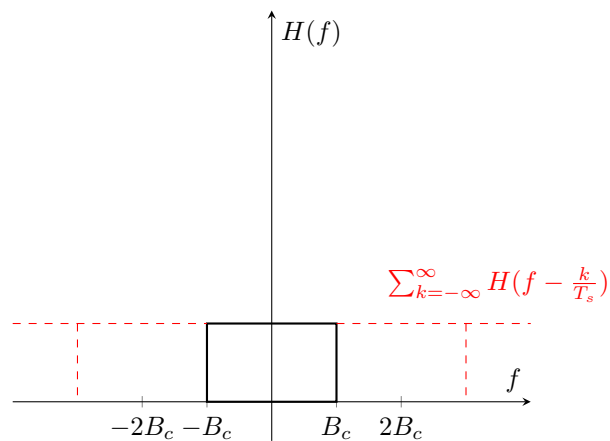


Non esistono intervalli di frequenza dove $\bar{H}(f) = 0$

3. Nel caso valga la condizione $T_s = \frac{1}{2B_c}$, allora l'unica funzione di trasferimento che permette di eliminare completamente l'ISI è

$$H(f) = \frac{1}{2B_c} \text{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right) \Leftrightarrow h(t) = \text{sinc}(2B_c t)$$

Dimostrazione:



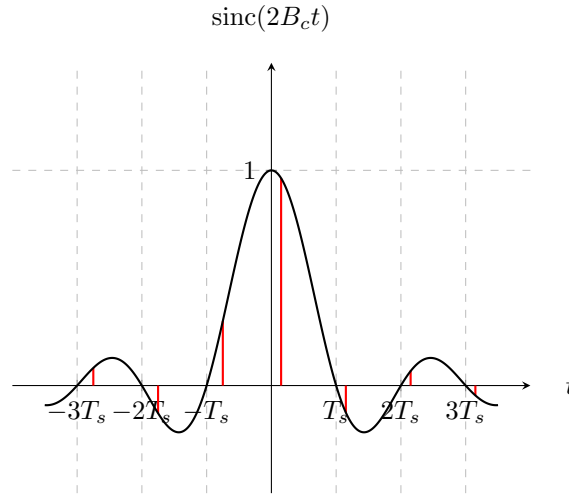
Si nota anche che la funzione $\text{sinc}(2Bt)$ si annulla quando $t = \frac{k}{2B}$ con $k \neq 0$ per cui

$$h[kT_s] = \text{sinc}\left(2B_c \cdot \frac{k}{2B_c}\right) = \text{sinc}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Limiti di applicabilità della funzione di trasferimento rettangolare:

1. Realizzabilità di una funzione di trasferimento rettangolare: risposte in frequenza ideali come quella rettangolare non sono fisicamente realizzabili (Criterio di Paley-Wiener).
2. Piccoli errori di campionamento provocano un ISI molto grande poiché la funzione $\text{sinc}(2B_c t)$ decresce molto lentamente.

Un errore nel campionatore induce un ISI grande in quanto si sommano molte contributi!

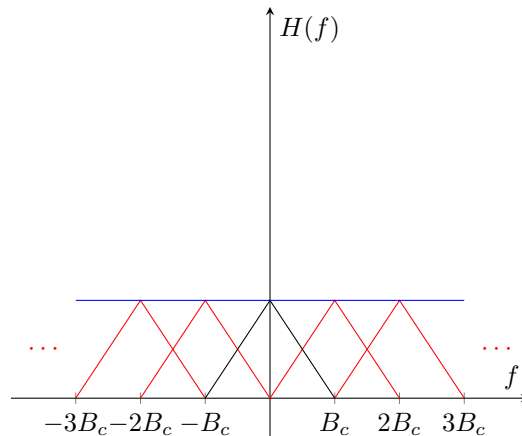


Un errore ϵ nel campionatore induce un ISI grande in quanto si sommano molti contributi. In rosso l'errore ϵ del campionatore.

Rilassando la condizione $T_s > \frac{1}{2B_c}$, ovvero ammettendo

$$T_s > \frac{1}{2B_c}$$

si ottiene il seguente effetto:



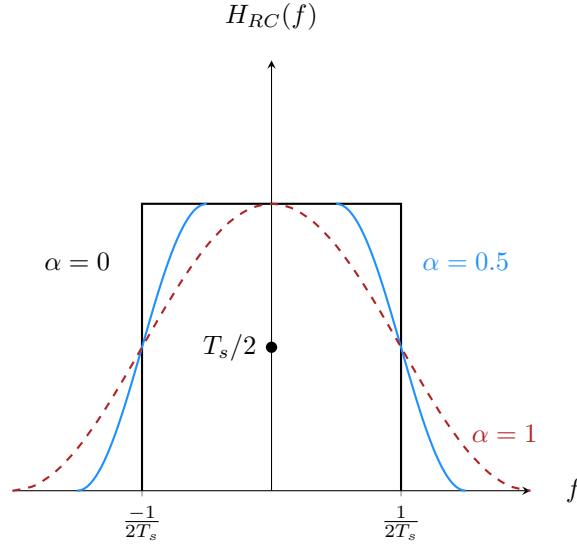
La sovrapposizione permette di definire una classe di infinite funzioni di trasferimento che soddisfano il primo criterio di Nyquist.

In questo caso però $B_c > \frac{1}{2T_s}$, per cui al punto di T_s c'è bisogno di una banda disponibile nel canale che è maggiore di quella che occorre con la funzione di trasferimento rettangolare.

Filtro a coseno rialzato

$$H_{rc}(f) = \begin{cases} T_s & \text{if } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right] & \text{if } \frac{1-\alpha}{2T_s} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{if } |f| > \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}$$

con $0 < \alpha < 1$.



Proprietà

1. Quando $\alpha = 0$ il coseno rialzato coincide con la funzione di trasferimento rettangolare
2. La banda B_H è direttamente ottenibile da $B_H = \frac{1+\alpha}{2T_s}$

La $h_{RC}(t)$ è calcolabile in forma chiusa:

$$h_{RC}(t) = \sin \left(\frac{t}{T_s} \right) \frac{\cos \left(\frac{\alpha \pi t}{T_s} \right)}{\left(1 - \frac{2\alpha t}{T_s} \right)^2}$$

$$h_{RC}(kT_s) = \delta[k]$$

- Soddisfa il criterio di Nyquist nel tempo, per cui garantisce l'assenza di ISI
- Decresce per $t \rightarrow \infty$ come $\frac{1}{|t|^3}$ per $\alpha > 0$ quindi molto più velocemente del caso $\alpha = 0$ (rettangolare)

Eccesso di banda e efficienza spettrale dei sistemi $M - PAM$ con coseno rialzato

Dato:

$$p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t) = h_{RC}(t)$$

dove \otimes indica la convoluzione, $p(t)$ il sagomatore in trasmissione, $c(t)$ la risposta impulsiva del canale, $h_R(t)$ il filtro in ricezione e $h_{RC}(t)$ la risposta impulsiva del filtro a coseno rialzato, l'efficienza spettrale del canale di comunicazione numerico è:

$$\eta_B = \frac{\log_2 M}{B_T T_s} = \frac{\log_2 M}{B_H T_s} = \frac{\log_2 M}{T_s} \frac{2T_s}{1+\alpha} = \frac{2 \log_2 M}{1+\alpha}$$

Considerazioni:

- L'efficienza spettrale, a parità di M , decresce al crescere del coefficiente di roll-off (α).

- La robustezza del sistema di comunicazione numerico all'ISI aumenta al crescere di α .

C'è quindi un trade-off tra robustezza all'ISI e efficienza spettrale, e i valori ottimali si trovano in corrispondenza di $\alpha \simeq 0.4$.

Eccesso di banda richiesto dall'adozione del coseno rialzato:

$$\Delta B_H = B_H - \frac{1}{2T_s} = \frac{\alpha}{2T_s}$$

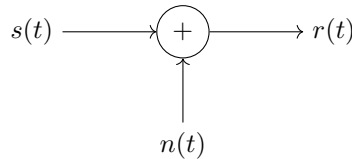
Prestazioni di un sistema di comunicazione numerico in banda base in presenza di rumore

Capacità di canale La capacità C di un canale di comunicazione è definita come il massimo valore che può assumere il tasso binario di segnalazione $R_b = \frac{1}{T_b}$ al variare di tutte le possibili coppie modulatore/demodulatore, sotto il vincolo che la probabilità di errore sia esattamente nulla.

$$\begin{cases} C := \max_{\{R_b\}} \\ P_E(b) = P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\} = 0 \end{cases}$$

La capacità di canale C si misura in bit/s ed è un numero non-negativo. Ovviamente, più è grande la capacità del canale e migliori sono le sue prestazioni.

Capacità di canale con rumore gaussiano bianco additivo (AWGN)



$n(t)$ Gaussiano Bianco

In questo caso la capacità di canale può essere espressa in forma chiusa ed è in dipendenza dei parametri caratteristici del segnale trasmesso e del rumore.

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{N_0 B_T} \right) \quad (\text{Shannon})$$

Dove:

- B_T = banda del segnale $s(t)$
- P_s = potenza media di $s(t)$
- $\frac{N_0}{2}$ = DSP del rumore $n(t)$ (costante essendo bianco)

Considerazioni:

1. Fissato B_T

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{P_s}{N_0} \rightarrow \infty} C &= 0 \\ \lim_{\frac{P_s}{N_0} \rightarrow \infty} C &= +\infty \end{aligned}$$

2. Fissato $\frac{P_s}{N_0}$

$$\begin{aligned} \lim_{B_T \rightarrow \infty} C &= 0 \\ \lim_{B_T \rightarrow \infty} C &= \log_2 e \cdot \frac{P_s}{N_0} \end{aligned}$$

3. Riscrivendo la formula di Shannon utilizzando $P_s = E_b R_b$

$$\frac{C}{B_T} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{R_b}{B_T} \right)$$

Dove:

- E_b = energia per bit
- $R_b \leq C$ (data la definizione di C come valore massimo di R_b)

Sistema di comunicazione numerico ideale Un sistema di comunicazione numerico è detto ideale se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $R_b = C$
2. $P_E(b) = 0$

In queste condizioni è possibile mettere in relazione l'efficienza spettrale con il rapporto $\frac{E_b}{N_0}$ (legato all'efficienza in potenza)

$$\eta_B = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \eta_B \right) \quad \text{soggetto a} \quad \eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{C}{B_T}$$

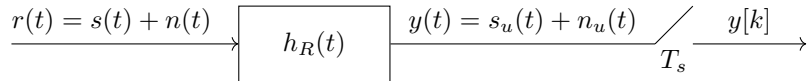
$$\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B} \quad \text{con} \quad \eta_B \geq 0$$

Considerazioni

1. $\lim_{\eta_B \rightarrow +\infty} \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B} = +\infty$
2. $\lim_{\eta_B \rightarrow +\infty} \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B} = \ln 2 \quad (-1.6 \text{ dB})$

Ricezione ottima in presenza di rumore bianco

Per il momento consideriamo solo gli effetti relativi al rumore.



Dove $s(t)$ è un segnale di forma nota e $n(t)$ è un rumore additivo bianco

$$s_u(t) = s(t) * h_R(t), \quad n_u(t) = n(t) * h_R(t)$$

$$y(T_s) = s_u(T_s) + n_u(T_s)$$

Si definisce il rapporto segnale-rumore in uscita al filtro $h_R(t)$ all'istante $t = T_s$ come

$$SNR := \frac{s_u^2(T_s)}{E[n_u^2(T_s)]}$$

Si definisce ricevitore ottimo il filtro $h_R(t)$ che massimizza l'SNR in uscita al filtro.

Nel caso di rumore bianco in ingresso il filtro ottimo prende il nome di **filtro adattato**

Problema:

1. Derivare il filtro $h_R(t)$ che massimizza l'SNR all'uscita.
2. Determinare il valore massimo dell'SNR all'uscita.

Derivazione del filtro adattato L'SNR viene espressa come:

$$\text{SNR} = \frac{s_u^2(T_s)}{E[n_u^2(T_s)]}$$

Calcoliamo i termini al numeratore e al denominatore della SNR.

$$s_u^2(T_s) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h_R(T_s - \tau) d\tau \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f T_s} df \right)^2$$

E l'energia del rumore all'uscita del filtro ricevitore sarà:

$$E[n_u^2(T_s)] = R_{n_u}(0)$$

Dove:

$$R_{n_u}(\tau) = R_n(\tau) * h_R(\tau) * h_R(-\tau)$$

E quindi per la potenza del rumore:

$$S_{n_u}(f) = S_n(f) |H_r(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$$

$$R_{n_u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_u}(f) df$$

Sostituendo otteniamo l'SNR in funzione della risposta in frequenza del filtro ricevitore $h_R(f)$:

$$\text{SNR} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f T_s} df \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{2}{N_0 E_{h_R}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f T_s} df \right)^2$$

Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz si può dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f T_s} df$ raggiunge il massimo valore quando:

$$H_R(f) e^{j2\pi f T_s} = S^*(f)$$

Quindi:

$$H_R(f) = S^*(f) e^{-j2\pi f T_s}$$

$$\boxed{h_R(t) = s(T_s - t)}$$

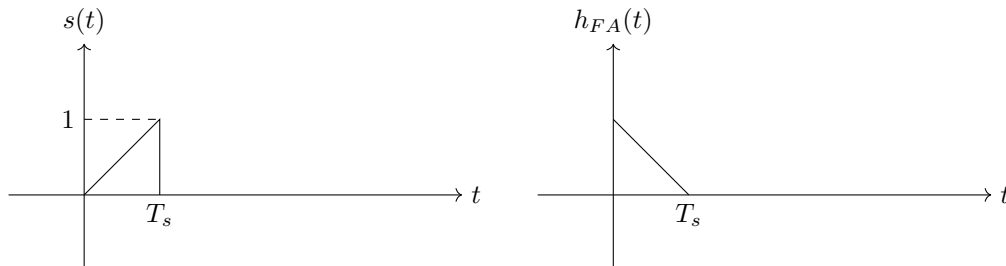
Dalla espressione della risposta impulsiva $h_R(t)$ si deduce il nome di **filtro adattato**, in quanto la sua risposta impulsiva è adattata al segnale in ingresso al filtro stesso.

Studiando il modulo della risposta in frequenza $H_R(f)$ si deduce che il filtro tende ad amplificare le componenti frequenziali dove è presente il segnale e ad attenuare (o eliminare) le componenti frequenziali dove il contributo di segnale è scarso (o addirittura assente).

$$|H_R(f)| = |S(f)|$$

La simbologia per indicare un filtro adattato è $h_{FA}(t)$ o $H_{FA}(f)$.

Esempio:



Calcolo del SNR_{max}

Il valore del SNR_{max} si ottiene per definizione quando si utilizza il FA.

$$SNR = \frac{2}{N_0 E_s} \cdot E_s^2 = \frac{2E_s}{N_0}$$

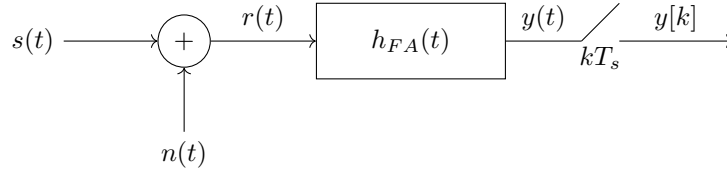
Da notare che:

- Il SNR non dipende dalla forma del segnale, ma solo dalla sua energia. Questo dà spazio alla progettazione della forma del segnale indipendentemente dai risultati in termini di SNR .
- Il massimo del SNR si ottiene per qualunque $h_{FA}(t) = k \cdot s(T_s - t)$ con $k \in \mathbb{R}$, infatti basta calcolare il SNR :

$$SNR = \frac{2}{N_0 K^2 E_s} \cdot K^2 E_s^2 = \frac{2E_s}{N_0}$$

Quindi, fattori di amplificazione e/o attenuazione non cambiano il risultato. Questo è abbastanza intuitivo in quanto un fattore costante di amplificazione opera allo stesso modo sul segnale utile e sul rumore per cui nel rapporto i contributi si elidono.

Schema del ricevitore con filtro adattato Consideriamo la trasmissione di un simbolo:



$$s(t) = \alpha \cdot p(t - nT_s)$$

$$h_{FA}(t) = k \cdot p(T_s - t)$$

$$y(t) = s_u(t) + n_u(t)$$

Caratteristiche di $s_u(t)$ e $n_u(t)$:

$$s_u(t) = s_u(t) * h_{FA}(t) = k \cdot \alpha \cdot p(t) * p(T_s - t)$$

$$= k \cdot \alpha \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) p(\tau - (t - T_s)) d\tau = k \cdot \alpha \cdot C_p(t - T_s)$$

$$C_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) P(\tau - t) d\tau \quad (\text{Autocorrelazione dell'impulso sagomatore})$$

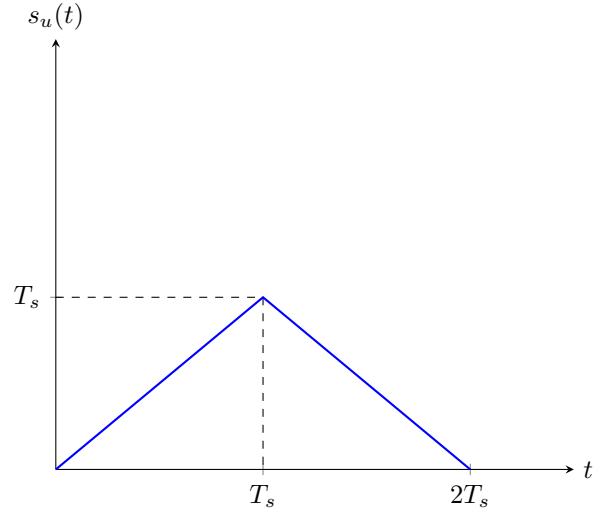
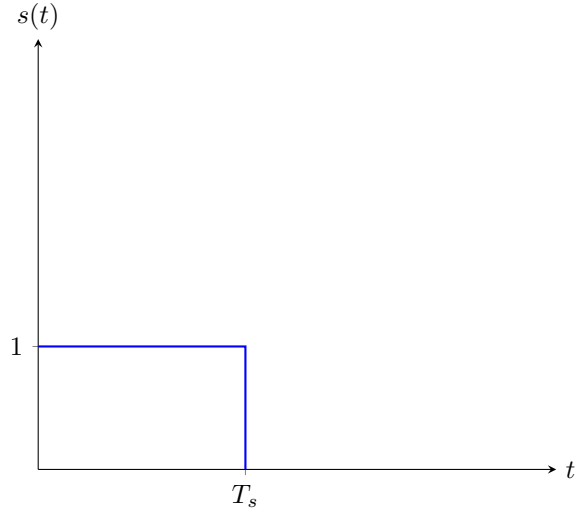
Esempio:

La funzione rettangolare:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$$

La risposta unitaria:

$$s_u(t) = C_s(t - T_s) = T_s \cdot \left(1 - \frac{|t - T_s|}{T_s}\right) \text{rect}\left(\frac{t - T_s}{2T_s}\right)$$



$$n_u(t) = n(t) * h_{FA}(t)$$

$n(t)$ = rumore bianco Gaussiano additivo (AWGN)

$$E[n(t)] = 0$$

$$R_n(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$n(\bar{t}) = \text{variabile aleatoria con densità di probabilità } f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}}$$

Essendo il filtro in ricezione un filtro lineare e stazionario, $n_u(t)$ è un rumore Gaussiano, additivo e stazionario.

$$E[n_u(t)] = 0$$

$$R_{n_u}(\tau) = R_n(\tau) * h_{FA}(\tau) * h_{FA}(-\tau) = \frac{N_0}{2} C_{h_{FA}}(\tau)$$

$C_{h_{FA}}(\tau)$ = autocorrelazione di $h_{FA}(t)$

$$S_{n_u}(f) = \frac{N_0}{2} |H_{FA}(f)|^2$$

$$P_{n_u} = \frac{N_0}{2} E_{H_{FA}} = \frac{N_0}{2} E_p k^2$$

È importante capire se i campioni di rumore sono tutti loro correlati o meno.

$$E[n_u[k]n_u[n]] = 0 \quad \forall k \neq n \quad (\text{incorrelazione})$$

N.B. la si può scrivere così poiché $E[n_u[k]] = 0$

Questo vuol dire che

$$R_{n_u}[kT_s] = 0 \quad \forall k \neq 0$$

$$R_{n_u}[nT_s] = \frac{N_0}{2} C_p[kT_s] = 0 \Rightarrow C_p[kT_s] = 0$$

Dobbiamo ricordare che il segnale utile in ingresso al filtro adattato è ottenuto tramite il modulatore in trasmissione per cui è la funzione $p(t)$ che determina la sagoma (forma) del segnale $s(t)$.

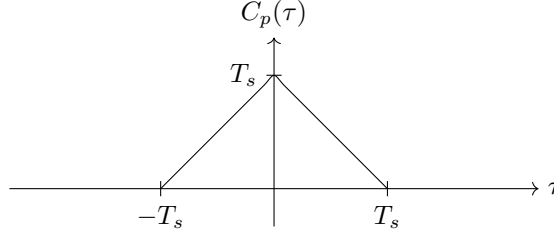
1. Impulso rettangolare

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$C_p(\tau) = T_s \left(1 - \frac{|\tau|}{T_s}\right) \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T_s}\right)$$

$$R_{n_u}(\tau) = k \frac{N_0}{2} C_p(\tau)$$

$$R_{n_u}(nT_s) = \begin{cases} \frac{k^2 N_0 T_s}{2} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{campioni di rumore incorrelati} \Rightarrow \text{indipendenti (Gaussiani)}$$



2. Impulso a radice di coseno rialzato

$$P(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$$

$$S_{n_u}(f) = k^2 \frac{N_0}{2} |P(f)|^2 = k^2 \frac{N_0}{2} H_{RC}(f)$$

$$R_{n_u}(\tau) = k^2 \frac{N_0}{2} h_{RC}(\tau)$$

$$R_{n_u}(nT_s) = \begin{cases} \frac{k}{2} N_0, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{N.B. la } h_{RC}(\tau) \text{ ha la sinc che si annulla in multipli di } T_s.$$

SNR per bit all'ingresso del ricevitore Il SNR per bit è un parametro utile per determinare le prestazioni di una ricevitore in quanto tiene in considerazione quantità energetiche sia del segnale utile che del rumore

$$SNR_b = \frac{E_b}{N_0}$$

$$E_b := P_s T_b = E[x^2[k]] T_b \quad \text{Energia per bit}$$

$$\frac{N_0}{2} = S_n(f) \Rightarrow SNR_b = \frac{E[x[k]]}{N_0 R_b}, \quad R_b = \frac{1}{T_b}$$

Decisore ottimo e criterio della massimo verosimiglianza Il decisore deve mappare i campioni $y[k]$ in simboli dell'alfabeto. I campioni $y[k]$ sono statisticamente indipendenti l'uno dall'altro. Questo è dimostrato dal fatto che:

$$y[k] = s_u[k] + n_u[k] \quad \text{dove } s_u(k) \text{ e } n_u(k) \text{ sono indipendenti}$$



Quindi si può concludere che $\hat{x}[k] \in A_s$ può essere deciso in base alla sola conoscenza di $y[k]$. Questa decisione si dice di tipo "ad un sol colpo" (one-shot detector).

Decisione a minima probabilità di errore

- Probabilità di errore sul simbolo $P_E(M) := P\{\hat{x}[k] \neq x[k]\}$
- Criterio di ottimalità: minimizzazione della $P_E(M)$

Derivazione del decisore ottimo:

$$x := \hat{x}[k], \quad y := y[k], \quad n_u := n_u[k], \quad \hat{x} = \hat{x}[k]$$

Criterio a massima probabilità a posteriori e minima probabilità di errore Con MAP si intende l'acronimo di Maximum A-posteriori Probability

$$\hat{x} = \arg \max_{i=1, \dots, M} P(x = \alpha_i | y)$$

Viene associato ad un osservato y il simbolo dell'alfabeto \hat{x} tale che sia massima la probabilità a posteriori (condizionata) che quel simbolo sia stato trasmesso.

Se il decisore adotta il criterio MAP allora la probabilità di errore sul simbolo è minima.

Dimostrazione Definiamo $R(i) := \{y \in \mathbb{R} : \hat{x} = \alpha_i\}$, $i = 1, \dots, M$ come la "zona di decisione" del simbolo α_i , ovvero l'insieme dei valori di y per cui si decide per il simbolo α_i .

$$P\{x = \alpha_i | y\} = \frac{f_Y(y | \hat{x} = \alpha_i) P\{x = \alpha_i\}}{f_Y(y)} \quad (\text{Bayes})$$

$$\begin{aligned} P_E(M) &= P\{\hat{x} \neq x\} = 1 - P\{\hat{x} = x\} = 1 - \sum_{i=1}^M P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_i\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P\{\hat{x} = \alpha_i | x = \alpha_i\} P\{x = \alpha_i\} = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P\{x = \alpha_i\} P\{y \in R(i) | x = \alpha_i\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P\{x = \alpha_i\} \int_{y \in R(i)} f_Y(y | x = \alpha_i) dy \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M \int_{y \in R(i)} P\{x = \alpha_i\} f_Y(y | x = \alpha_i) dy \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M \int_{y \in R(i)} f_Y(y) P\{x = \alpha_i | y\} dy \end{aligned}$$

Per minimizzare la $P_E(M)$ devo scegliere le $R(i)$ in modo tale che osservato y sia massima la probabilità a posteriori relativa al simbolo i -esimo.

Si osserva che se le probabilità a priori sono identiche

$$P\{x = \alpha_i\} = \frac{1}{M}, \quad i = 1, \dots, M$$

allora, dato che $f_Y(y)$ non dipende da i :

$$\hat{x} = \arg \max_{i=1, \dots, M} \left\{ \frac{1}{M} \frac{f_Y(y | x = \alpha_i)}{f_Y(y)} \right\} = \arg \max_{i=1, \dots, M} f_Y(y | x = \alpha_i)$$

La funzione $f_Y(y | x = \alpha_i)$ viene detta anche **funzione di verosimiglianza**

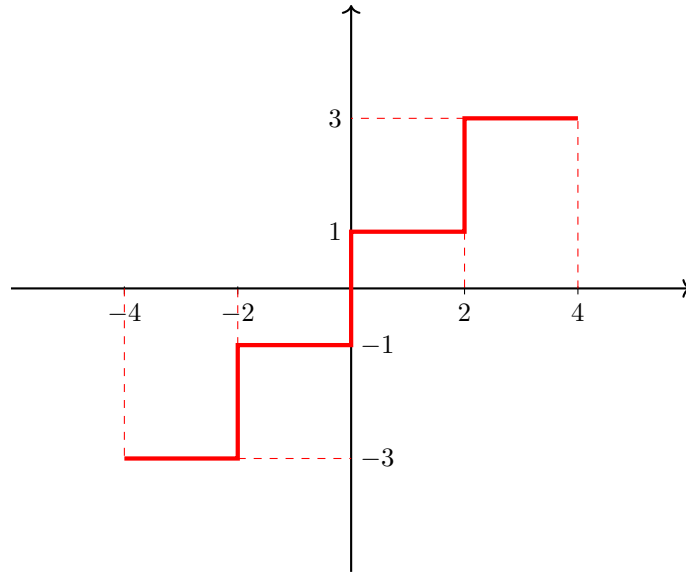
In pratica il criterio di minima probabilità di errore (o massima probabilità a posteriori) coincide con il criterio di massima verosimiglianza quando le probabilità a priori $P\{x = \alpha_i\}$ sono identiche. Nel caso di AGWN

$$y = s_u + n_u = \alpha_i + n_u, \quad n_u \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_u}^2)$$

$$f_Y(y | x = \alpha_i) = f_{n_u}(y - \alpha_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{(y - \alpha_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}}$$

$$\hat{x} = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, M} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{(y - \alpha_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} = \operatorname{argmin}_{i=1, \dots, M} (y - \alpha_i)^2$$



Esempio di una 4-Pam, con quantizzatore uniforme a 4 livelli

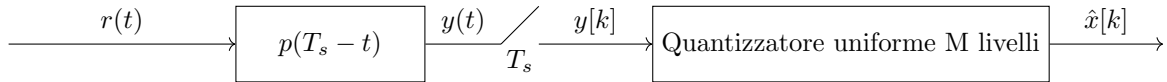
$$\hat{x} = \underset{i=1,\dots,M}{\operatorname{argmin}} \{ |y - \alpha_i| \} \quad (\text{minimo della distanza euclidea})$$

Il decisore ottimo coincide con la scelta del simbolo a distanza euclidea minima dall'osservato.

Le zone di decisione sono quindi stabilite dalla regola di quantizzazione uniforme.

Questo significa che il decisore può essere realizzato con un quantizzatore uniforme.

Ricevitore ottimo per un sistema di comunicazione PAM Per un sistema di comunicazione PAM con simboli equiprobabili, il ricevitore ottimo secondo il criterio a minima probabilità di errore è il seguente:



Probabilità di errore di bit e di simbolo

$$P_E(b) = P\{\hat{b}[k] \neq b[k]\} \quad \text{bit}$$

$$P_E(M) = P\{\hat{x}[k] \neq x[k]\} \quad \text{simbolo}$$

$$P_E(M) = P_E(b) \quad \text{solo quando l'alfabeto } A_s \text{ è composto da soli due simboli}$$

Vale però sempre che:

$$\frac{P_E(M)}{\log_2 M} \leq P_E(b) \leq \frac{M/2}{M-1} P_E(M)$$

Codifica di Gray Sia $A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ dove

$$\alpha_i = 2i - M - 1 \quad i = 1, \dots, M$$

La codifica di Gray associa stringhe di bit ai simboli dell'alfabeto in modo che le stringhe di bit relative a due simboli consecutivi differiscano al più per un bit.

Nel caso di SNR sufficientemente elevato ($> 10dB$), l'evento errore consiste generalmente nel decidere per uno dei simboli dell'alfabeto adiacenti a quello trasmesso.

Utilizzando quindi la codifica di Gray e in condizioni di SNR elevato, un errore su un simbolo M -ario ogni N simboli M -ari si traduce in un errore su una sola cifra binaria ogni N simboli M -ari, cioè ogni $N \log_2 M$ cifre binarie, quindi:

$$P_E(b) \approx \frac{P_E(M)}{\log_2 M}$$

Esempi:

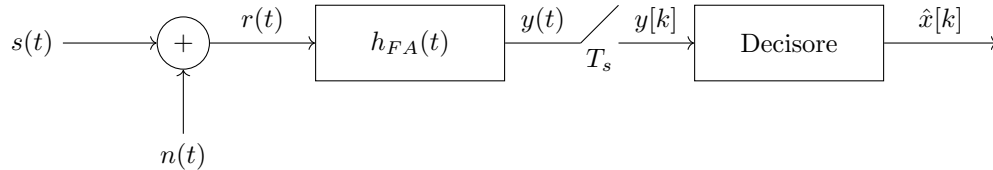
1. 4-PAM

- $-3 \rightarrow 00$
- $-1 \rightarrow 01$
- $+1 \rightarrow 11$
- $+3 \rightarrow 10$

2. 8-PAM

- $-7 \rightarrow 000$
- $-5 \rightarrow 001$
- $-3 \rightarrow 011$
- $-1 \rightarrow 010$
- $+1 \rightarrow 110$
- $+3 \rightarrow 111$
- $+5 \rightarrow 101$
- $+7 \rightarrow 100$

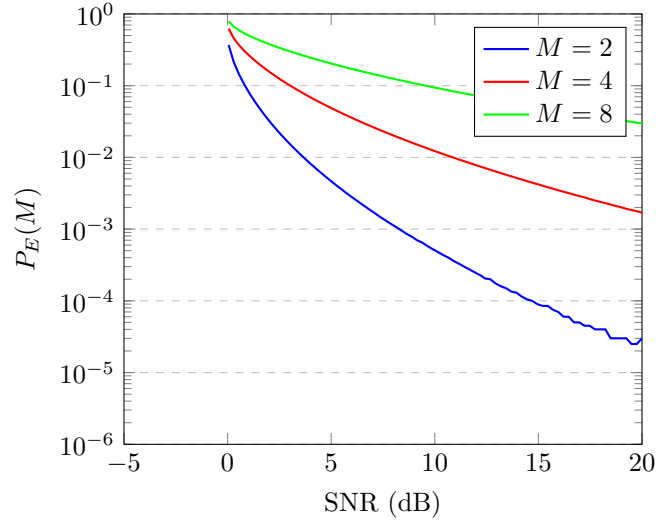
Prestazioni di un M-PAM in presenza di rumore:



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]P(t - kT_s)$$

$$P_E(M) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \text{SNR} \cdot \log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$

Errore di probabilità $P_E(M)$ vs SNR (dB)



Per $\text{SNR} > 10$ dB, utilizzando la codifica di Gray

$$P_E(b) \approx \frac{P_E(M)}{\log_2 M}$$

Per una BPSK (2-PAM)

$$P_E(M) = P_E(b) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\text{SNR}})$$

Dimostrazione Considerando le densità di probabilità $f_Y(y|x=1)$ e $f_Y(y|x=-1)$:

La probabilità di errore binario $P_E(b)$ è data dalla somma delle aree sotto le curve di $f_Y(y|x=1)$ e $f_Y(y|x=-1)$ dove queste si sovrappongono.

La densità di probabilità condizionata dato x è:

$$P\{\hat{x} = -1|x = 1\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|x=1) dy$$

$$f_Y(y|x=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} \exp\left(-\frac{(y-h(0)x)^2}{2\sigma_{n_u}^2}\right) \quad \text{per } x = 1$$

Dopo il campionatore:

$$y[k] = x[k] \cdot h(0) + n_u[k]$$

Dove la varianza del rumore è data da:

$$\sigma_{n_u}^2 = \frac{N_0}{2} E_{h_R} = \frac{N_0}{2} h(0)$$

La densità spettrale di potenza del rumore bianco è:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \text{DSP sul processo del rumore in ingresso è uguale in distribuzione } h_R(t)$$

Il rapporto segnale-rumore (SNR) è:

$$\text{SNR} = \frac{h(0)^2}{\frac{N_0}{2} h(0)} = \frac{2h(0)}{N_0}$$

La probabilità condizionata dato x è:

$$P\{\hat{x} = -1|x = 1\} = 1 - Q\left(\frac{0 - h(0)}{\sqrt{\frac{N_0}{2} h(0)}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2h(0)}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

Si può dimostrare per simmetria che:

$$P\{\hat{x} = 1|x = -1\} = P\{\hat{x} = -1|x = 1\} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

Quindi:

$$P_E(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{SNR}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{SNR}}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{SNR}}{2}\right)$$

Presenza di ISI e rumore Il segnale ricevuto è:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h(t - kT_s) + n_u(t)$$

Dove:

$$h(t) = p(t) * c(t) * h_R(t)$$

$$n_u(t) = n(t) * h_R(t)$$

E il segnale al campionato è:

$$y[k] = x[k] \cdot h(0) + I[k] + n_u[k]$$

Dove il termine di interferenza è dato da:

$$I[k] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} x[n]h((k - n)T_s)$$

L'approccio da seguire è il seguente: il filtro $h_R(t)$ deve essere allo stesso tempo quello che elimina l'ISI e che massimizza l' SNR . Questo problema può essere risolto progettando opportunamente $p(t)$ e $h_R(t)$.

Equalizzatore zero forcing Massimizza il SNR vincolando $I[k] = 0$ per ogni k . È un problema di massimizzazione vincolata per cui la soluzione non porta alla realizzazione del filtro adattato.

- $I[k] = 0$ quando $h(t) = h_{RC}(t)$, allora

$$P(f)C(f)H_R(f) = H(f) = H_{RC}(f)e^{-j2\pi fT_s}$$

per la causalità.

Si pone quindi il problema di massimizzare il SNR con il vincolo

$$P(f)C(f)H_R(f) = H_{RC}(f)e^{-j2\pi fT_s}$$

Si può scrivere:

$$|P(f)| = |H_R(f)| = \sqrt{\frac{|H_{RC}(f)|}{|C(f)|}}$$

$$\angle P(f) = \angle H_R(f) = -\pi fT_s - \frac{\angle C(f)}{2}$$

N.B. Se $C(f) = 1$ (canale ideale) allora

$$P(f) = H_R(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}e^{-j2\pi fT_s}$$

Il valore di SNR in tal caso è:

$$SNR = \frac{E \left\{ |X[k]|^2 \right\} h^2(0)}{\frac{N_0}{2} \int_{-B_c}^{B_c} \frac{H_{RC}(f)}{C(f)} df}$$

dove B_c è la banda del canale $C(f)$, $h(t)$ è la risposta all'impulso del canale ideale e $h(0)$ può essere visto come $\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) df$.

$$E_s = P_s T_s = T_s \frac{M^2 - 1}{3}$$

Se $C(f) = 1$ allora $SNR = \frac{2E_s}{N_0}$ e il filtro è adattato.

Il segnale ricevuto è:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]p(t - kT_s) + n(t)$$

dove $n(t)$ è il rumore bianco additivo gaussiano (AWGN).

La funzione di trasferimento del filtro ricevitore è:

$$h_R(f) = p(T_s - t)$$

$$H_R(f) = P(f)e^{-j2\pi f T_s}$$

$$H(f) = P^2(f)e^{-j2\pi f T_s} = H_{RC}(f)e^{-j2\pi f T_s}$$

Riassumendo, il problema di eliminare l'ISI e massimizzare il SNR si risolve utilizzando il filtro sagomatore $p(t)$ e quello di ricezione, $h_R(t)$, realizzati con la radice di coseno rialzato.

Nel caso di canale ideale, la soluzione coincide con il filtro adattato.

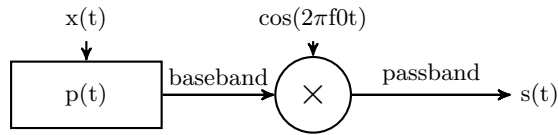
Modulazione Numerica in Banda Passante

Segnale Passa Banda

Il segnale passa banda può essere espresso come:

$$s(t) = a(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

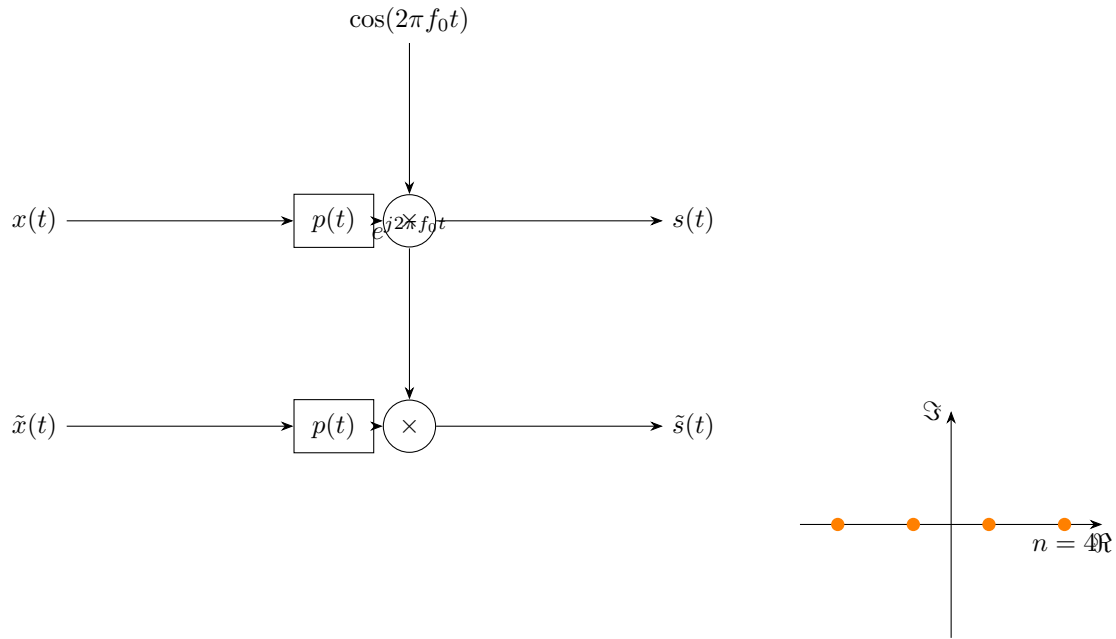
dove $a(t)$ è l'involuppo reale di $s(t)$ (segnale passa-basso) e $\phi(t)$ la fase di $s(t)$.



Espandendo l'involuppo complesso di $s(t)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} s(t) &= \Re \left\{ a(t) e^{j[2\pi f_0 t + \phi(t)]} \right\} \\ &= \Re \{ a(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] + j \cdot a(t) \sin[2\pi f_0 t + \phi(t)] \} \\ &= a(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] = \Re \{ \tilde{a}(t) e^{j2\pi f_0 t} \} \end{aligned}$$

dove $\tilde{a}(t)$ è l'involuppo complesso di $s(t)$.



$$M - PAM \Rightarrow \text{simboli: } A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$$

$$\alpha = 2c - 1 - M$$

$p(t)$ = impulso in TX

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t)$$

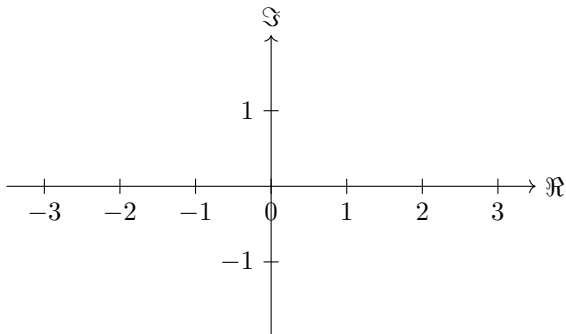
$$x(n) \longrightarrow p(t) \xrightarrow[\cos(2\pi f_c t)]{\times} s(t)$$

$$\tilde{S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t - nT_s)$$

$$\tilde{s}(t) = \Re\{\tilde{S}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$$

$$= \Re\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t - nT_s)e^{j2\pi f_c t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)$$



Modulazione di fase PSK (Phase Shift Keying):

$$s_c(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i) \quad (\text{simbolo } i\text{-esimo}) \quad (5)$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{M}(i-1) \quad \text{per } i = 1, \dots, M \quad (6)$$

Espansione del segnale $s(t)$ come sommatoria:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i(n)) \quad (7)$$

$$\theta_i(n) \in A_s = \{\theta_1, \dots, \theta_M\} \quad (8)$$

Definizione del segnale modulato in fase $\tilde{s}_c(t)$:

$$\tilde{s}_c(t) = p(t)e^{j\theta_i} \quad (9)$$

$$\tilde{s}_c(t) = \Re\{p(t)e^{j\theta_i}e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (10)$$

$$= \Re\{p(t)e^{j(2\pi f_0 t + \theta_i)}\} \quad (11)$$

$$= p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i) \quad (12)$$

Definizione di $x(n)$ basata su θ_n :

$$x(n) = e^{j\theta_n} \quad (13)$$

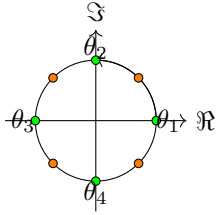
$$s(t) = \Re\{s(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\Omega_n}$$

$$\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t + nT_s) \cos(2\pi f_0 t + \Theta_n)$$

$$s(t) = \Re\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s)e^{j(2\pi f_0 t + \Omega_n)}\right\}$$

$$S_i(t) = A_{I_i}p(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_{Q_i}p(t) \sin(2\pi f_0 t)$$



$$\frac{A_{I_i}}{A_{Q_i}} - \text{verso e ampiezza della modulazione}$$

$$i - \text{indice del simbolo } x(t)$$

$$A_i^c = \text{componente in fase di } x(t)$$

$$A_i^s = \text{componente in quadratura di } x(t)$$

$$s_i^c(t) = (A_i^c + jA_i^s)p(t)$$

$$\Re\{s_i^c(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(A_i^c + A_i^s)p(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$= \Re\{A_i^c p(t)e^{j2\pi f_0 t} + jA_i^s p(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$= \Re\{A_i^c p(t) \cos(2\pi f_0 t) + jA_i^c p(t) \sin(2\pi f_0 t) + A_i^s p(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_i^s p(t) \sin(2\pi f_0 t)\}$$

$$= A_i^c p(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_i^s p(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) - x_s p(t - nT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$s(t) = \Re\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p(t - nT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

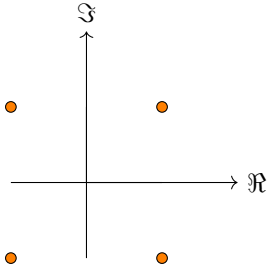
$$x[n] = x_c[n] + jx_s[n]$$

Modulation QAM

$$x(t) = x_c(t) + j \cdot x_s(t)$$

$$x_c(t) = \Re\{p(t)\} \quad x_s(t) = \Im\{p(t)\}$$

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$



$$\Gamma = \Gamma_c \cap \Gamma_s$$

$$A^\Gamma = \{\alpha_c^\Gamma, \overline{\alpha_c^\Gamma}\}$$

$$A^\Gamma = \{\alpha_s^\Gamma, \overline{\alpha_s^\Gamma}\}$$

$$A^c \rightarrow \alpha^c = 2c - 1 - \Gamma_c \quad A^s \rightarrow \alpha^s = 2c - 1 - \Gamma_s$$