Laboratorio di Architetture degli Elaboratori I
Corso di Laurea in Informatica, A.A. 2021-2022
Università degli Studi di Milano

SOP, POS, cammino critico
Semplificazione: mappe di Karnaugh

Forme canoniche e cammino critico

- Prima forma canonica (SOP: Sum Of Products)

$$\sum_{i=1}^{Q} m_i,\ Q \leq 2^n$$

- m_i mintermine
- Q numero di mintermini

- Seconda forma canonica (POS: Product Of Sums)

$$\prod_{i=1}^{W} M_i,\ W \leq 2^n$$

- M_i maxtermine
- W numero di maxtermini

- Cammino critico: massimo numero di porte (escluso l'inverter) da attraversare da un qualsiasi ingresso a una qualsiasi uscita

Esercizio 1

1. Si ricavi la SOP per la porta XNOR e si simuli in Logisim il circuito equivalente

2. Se ne derivi il cammino critico

3. Si dica se ricavandone la POS cambia il cammino critico

Esercizio 1

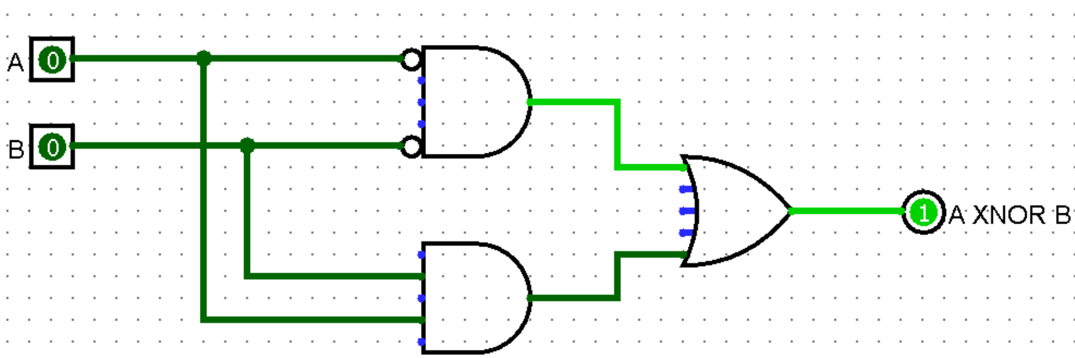
Tabella di verità

A	B	A XNOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mintermini $(\neg A \neg B), (AB)$

SOP $(\neg A \neg B) + (AB)$

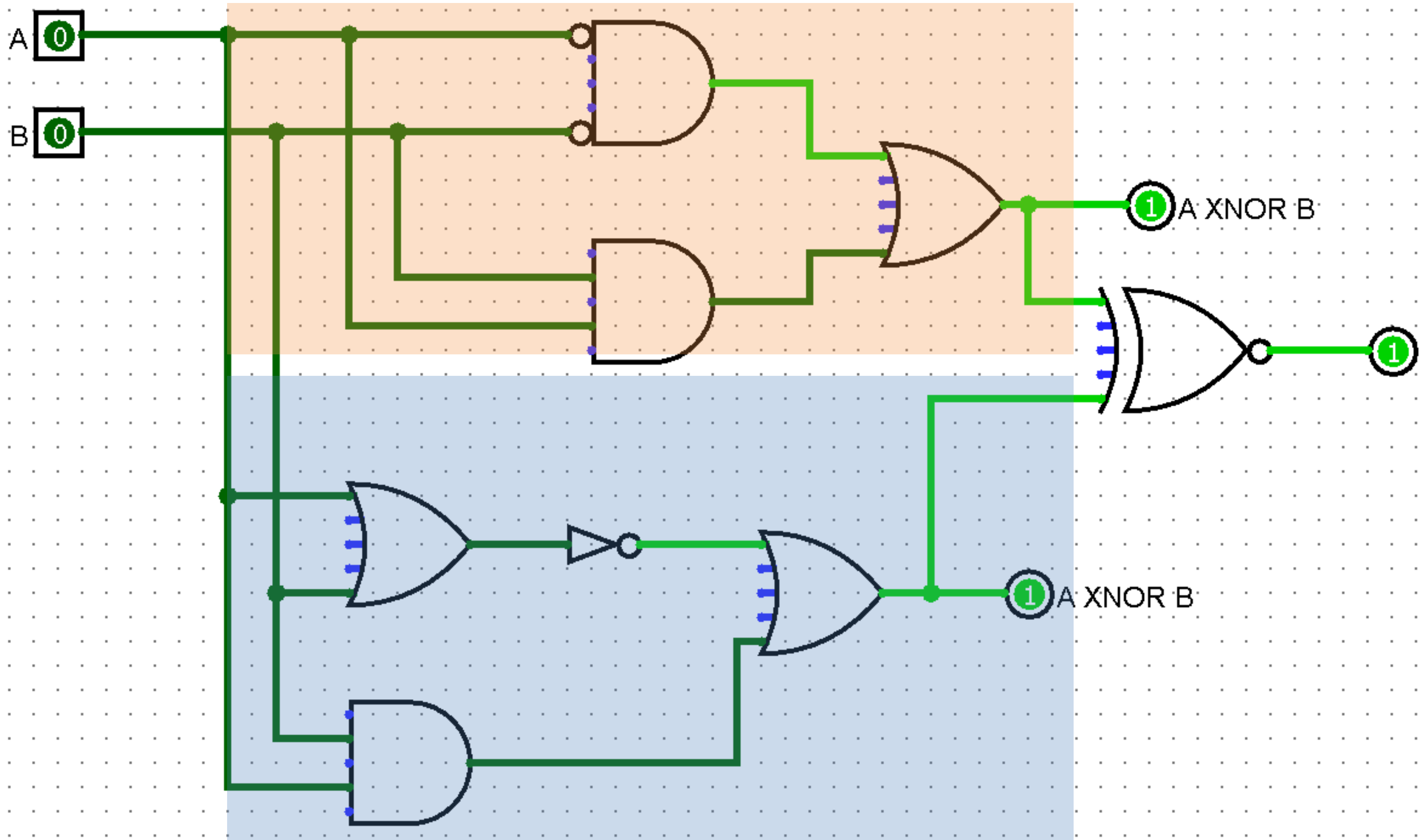
Circuito in Logisim



Il **cammino critico** è pari a 2

Esercizio 1

SOP Porta XNOR



XNOR - esercizio 3, laboratorio 2

Ci sono diversi modi per implementare la stessa espressione logica

Esercizio 1

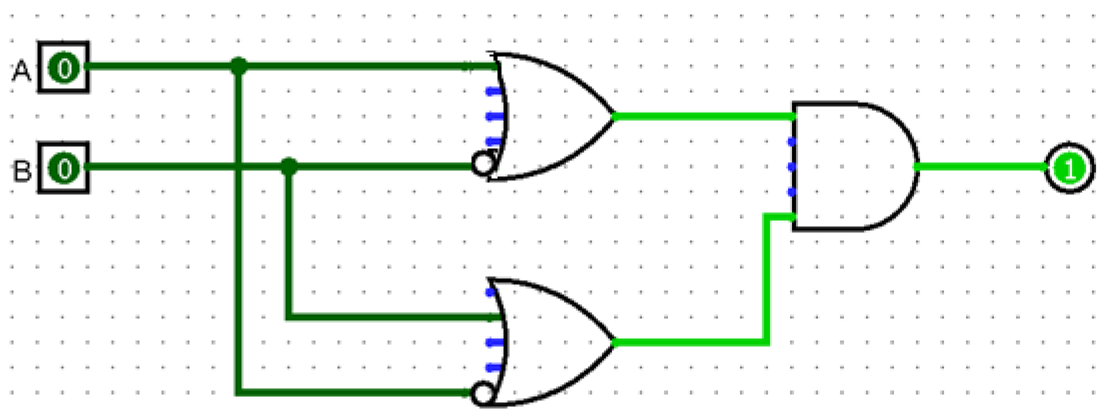
Tabella di verità

A	B	A XNOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Maxtermini $(A + \neg B), (\neg A + B)$

POS $(A + \neg B)(\neg A + B)$

Circuito in Logisim



Il **cammino critico** anche in questo caso è pari a 2

Esercizio 2

Sia data la seguente espressione logica

$$X = A(A + \neg B)(B + C) + \neg BD$$

1. Si derivi la tabella di verità (si indichino anche alcune sotto-espressioni)

2. Si derivi la SOP

3. Si implementino in Logisim il circuito associato alla formula originale ed il circuito associato alla SOP e li si confrontino

4. Si proceda poi alla semplificazione algebrica della SOP, si implementi il circuito corrispondente e lo si confronti con gli altri due circuiti implementati

Esercizio 2

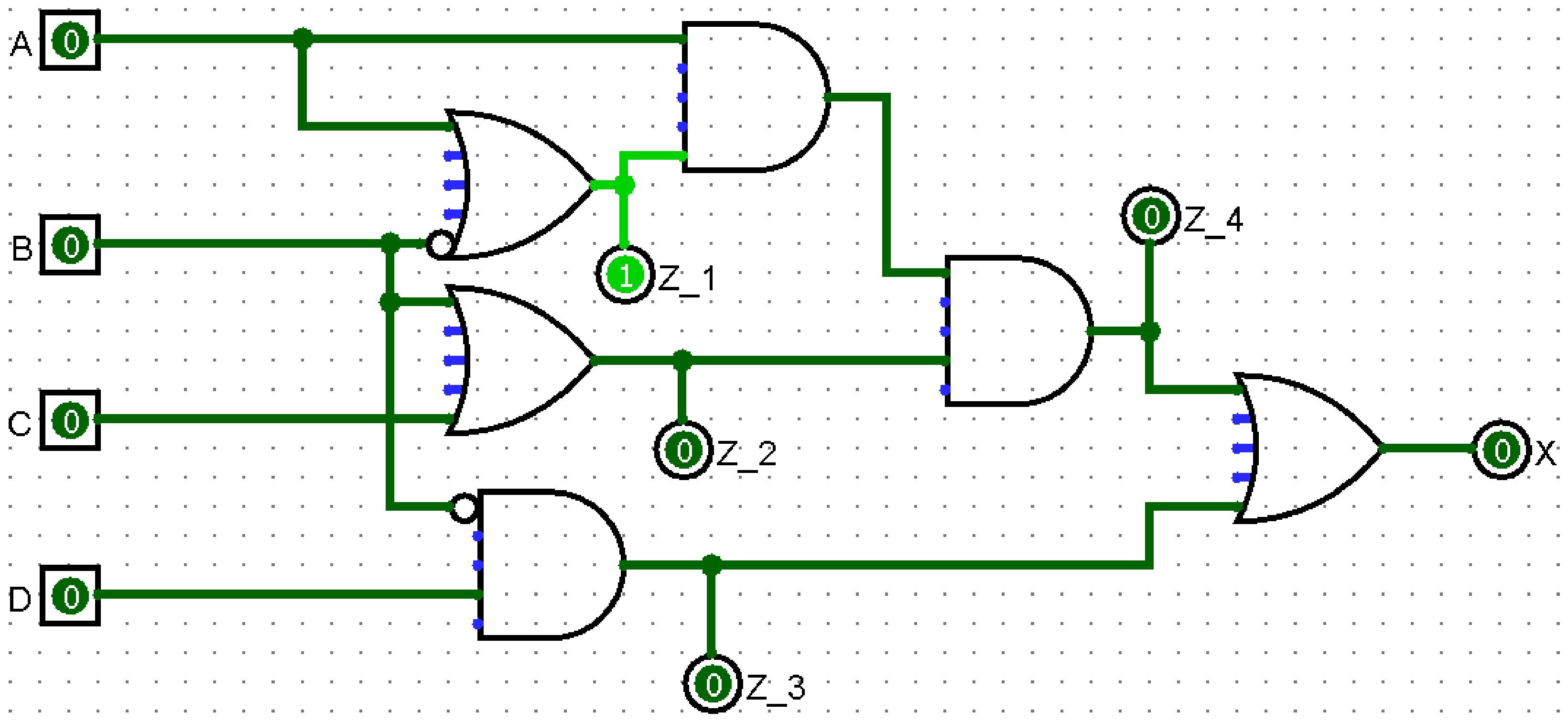
Tabella di verità

A	B	C	D	$\neg B$	$Z_1 = A + \neg B$	$Z_2 = B + C$	$Z_3 = \neg BD$	$Z_4 = AZ_1Z_2$	$X = Z_4 + Z_3$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

$$X = (\neg A \neg B \neg C D) + (\neg A \neg B C D) + (A \neg B \neg C D) + (A \neg B C \neg D) + (A \neg B C D) + (A B \neg C \neg D) + (A B \neg C D) + (A B C \neg D) + (A B C D)$$

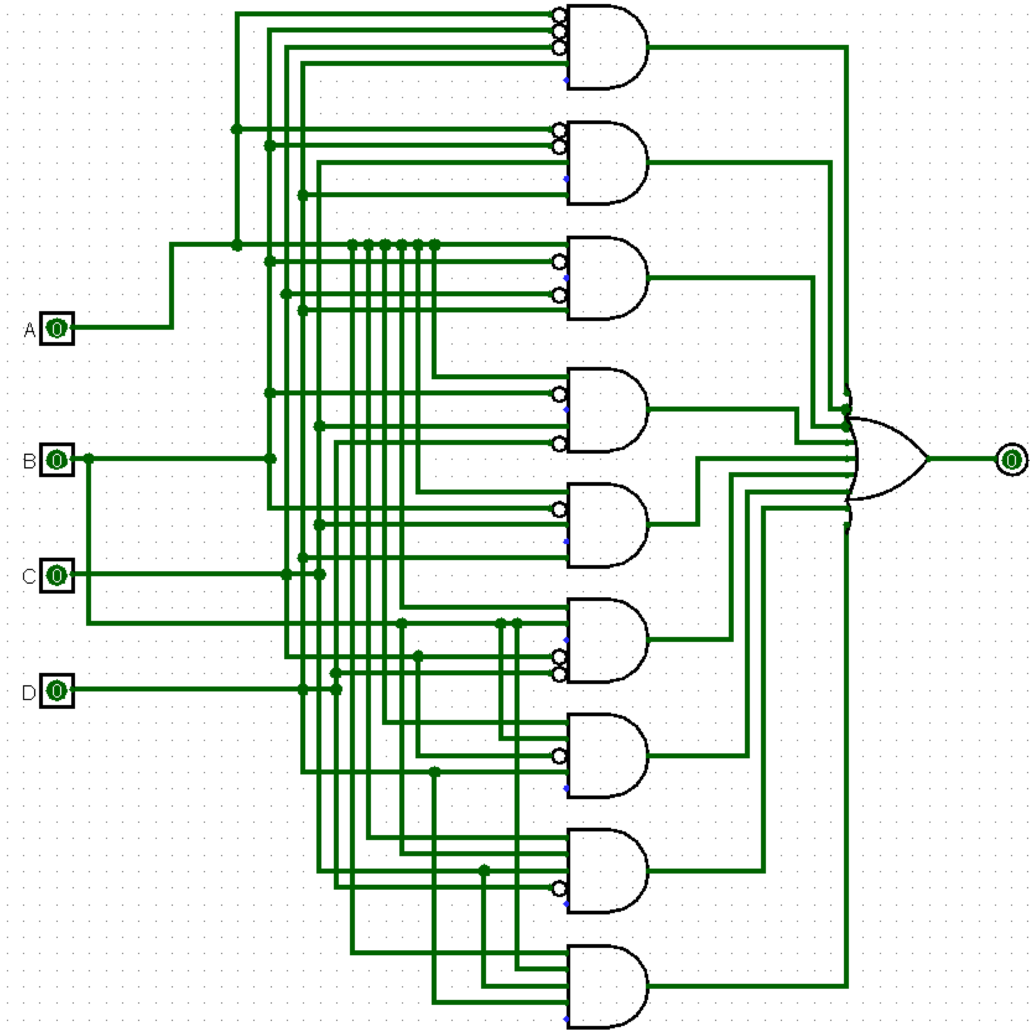
Esercizio 2

Circuito originale



Esercizio 2

Circuito SOP



$$X = (\neg A \neg B \neg C D) + (\neg A \neg B C D) + (A \neg B \neg C D) + (A \neg B C \neg D) + (A \neg B C D) + (A B \neg C \neg D) + (A B \neg C D) + (A B C \neg D) + (A B C D)$$

Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
X = \quad & (\neg A \neg B \neg C D) + (\neg A \neg B C D) + (A \neg B \neg C D) + \\
& (A \neg B C \neg D) + (A \neg B C D) + (A B \neg C \neg D) + \\
& (A B \neg C D) + (A B C \neg D) + (A B C D) \\
= \quad & (\neg B \neg C D)(\neg A + A) + (\neg B C D)(A + \neg A) + & \text{(Raccoglimento)} \\
& (A C \neg D)(\neg B + B) + (A B \neg C)(D + \neg D) + \\
& (A B C D) \\
= \quad & (\neg B \neg C D) + (\neg B C D) + & \text{(Inverso)} \\
& (A C \neg D) + (A B \neg C) + (A B C D) \\
= \quad & (\neg B D)(\neg C + C) + & \text{(Raccoglimento)} \\
& (A C \neg D) + (A B)(\neg C + (C D)) \\
= \quad & (\neg B D) + & \text{(Inverso)} \\
& (A C \neg D) + (A B)(\neg C + (C D)) \\
= \quad & (\neg B D) + & \text{(Assorbimento II)} \\
& (A C \neg D) + (A B)(\neg C + D) \\
= \quad & (\neg B D) + (A C \neg D) + & \text{(Distributiva)} \\
& (A B \neg C) + (A B D) \\
= \quad & D(\neg B + (A B)) + & \text{(Raccoglimento)} \\
& (A C \neg D) + (A B \neg C) \\
= \quad & D(\neg B + A) + & \text{(Assorbimento II)} \\
& (A C \neg D) + (A B \neg C)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
&= \quad D(\neg B + A) + (AC\neg D) + (AB\neg C) && \\
&= \quad (D\neg B) + (DA) + (AC\neg D) + (AB\neg C) && \text{(Distributiva)} \\
&= \quad (D\neg B) + A(D + (C\neg D)) + (AB\neg C) && \text{(Raccoglimento)} \\
&= \quad (D\neg B) + A(D + C) + (AB\neg C) && \text{(Assorbimento II)} \\
&= \quad (D\neg B) + (AD) + (AC) + (AB\neg C) && \text{(Distributiva)} \\
&= \quad D(A + \neg B) + A(C + (B\neg C)) && \text{(Raccoglimento)} \\
&= \quad D(A + \neg B) + A(C + B) && \text{(Assorbimento II)}
\end{aligned}
$$

Mintermini adiacenti

- Si parte dall'espressione in forma canonica SOP

- Due **mintermini** sono detti **adiacenti** se differiscono su una sola variabile

$$x_4 \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} \qquad x_4 \overline{x_3} x_2 x_1$$

- Un'espressione che contiene due mintermini adiacenti può essere minimizzata nel seguente modo

$$x_4 \overline{x_3} x_2 x_1 + x_4 \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} = x_4 \overline{x_3} x_2 (x_1 + \overline{x_1}) = x_4 \overline{x_3} x_2$$

  - Da 2 prodotti e 8 occorrenze di letterali siamo passati a 1 prodotto e 3 letterali

- Abbiamo bisogno di un metodo che ci permetta di individuare velocemente i **mintermini adiacenti**

Mintermini adiacenti

L'adiacenza fisica non è rispettata se scriviamo le tabelle come abbiamo fatto finora

- Ogni riga riguarda una configurazione di bit anche molto diversa dalla riga precedente
- Qui:
  in rosso i bit di input che cambiano valore rispetto alla riga precedente

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Mintermini adiacenti

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	1	**1**
1	0	**0**

Mappe di Karnaugh

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Tabella di verità classica

nota l'ordine

B C \ A	0	1
0 0	**0**	**0**
0 1	**1**	**0**
1 1	**0**	**0**
1 0	**1**	**1**

Mappa di Karnaugh (corrispondente)

- Sono tabelle a due dimensioni che rappresentano la tavola di verità della funzione in un modo diverso.
- Hanno 2^n quadrati se n è il numero di variabili
- Ogni quadrato contiene il valore f_i di un mintermine m_i

Mappe di Karnaugh: copertura

- Data la rappresentazione di una funzione sulla Mappa di Karnaugh possiamo “ricoprirla” con una serie di cubi tali che
  - Ogni cubo contenga solo celle con valore 1
  - Ogni 1 della tavola di verità sia ricoperto da almeno un cubo

x_1 \ $x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

- Ogni cubo rappresenta un prodotto di letterali
- L’unione dei cubi è un’espressione normale in forma SOP

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} + x_3\overline{x_2} + \overline{x_3}x_2$$

Copertura minimale

- Tra tutti gli insiemi di cubi che ricoprono una funzione quelli minimali sono gli insiemi che:
  - Contengono il minor numero possibile di cubi/termini prodotto e, a parità di numero, quelli più grandi

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

Insieme di cubi minimale

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} + x_3\overline{x_2} + \overline{x_3}x_2$$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

Insieme di cubi non minimale

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} + \overline{x_3}x_2\overline{x_1} + \overline{x_3}x_2x_1 + x_3\overline{x_2}$$

Copertura minimale

1. Per ogni 1 nella mappa determiniamo i cubi massimali, cioè non contenuti in altri cubi, che lo contengono e che ricoprono solo celle contenenti 1

2. Individuiamo i cubi massimali essenziali
   - Cubi che ricoprono 1 coperti solo da quel cubo massimale

3. Scegliamo un insieme minimale di cubi massimali che ricoprono gli 1 lasciati scoperti dai cubi essenziali

Passo 1

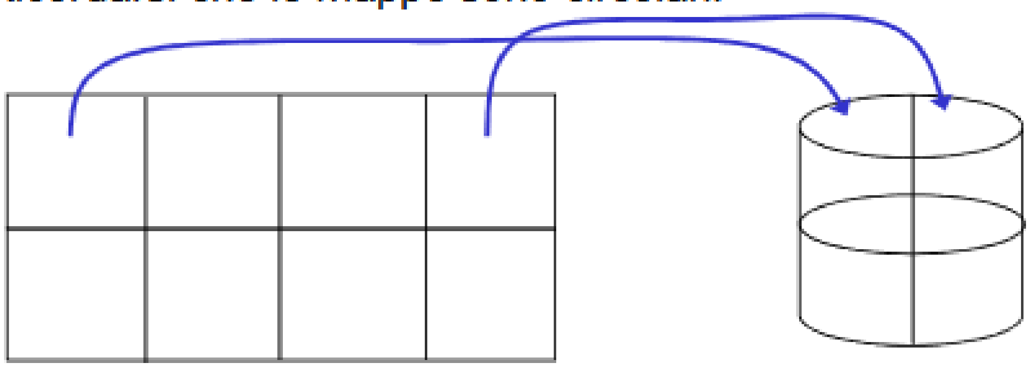
Riscrivere tabella delle verità data come mappa di Karnaugh

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Passo 2

- Identificare un insieme di gruppi adiacenti ***di 2^n celle***
  di tutti 1 in modo che tutti gli 1 appartengano ad almeno un gruppo (SP)
- oppure, di tutti 0 in modo che tutti gli 0 appartengano… (PS)
- Criteri per trovare i gruppi:
  - I gruppi devono essere rettangolari (o quadrati)
  - Più i gruppi sono grandi e più letterali verranno eliminati
  - Meno gruppi danno luogo a meno termini
  - Lo stesso 1 o 0 può essere incluso in più gruppi
  - Ricordarsi che le mappe sono circolari:



Passo 3

- Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

- BC + AC + AB

Mappe di Karnaugh: esempi

AB C	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

indipendente da a:
b~c

indipendente da c:
ab

AB C	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

F = ab + b~c

Mappe di Karnaugh: esempi

- Rappresentazione piana, utilizzabile per: **$2 \leq N \leq 4$**

B \ A	0	1
0	1	0
1	1	0

F = ~a

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

F = ab + cd + b~c~d

Mappe di Karnaugh: esempi

Mappa di Karnaugh: rappresentazione piana e ciclica

AB / CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	1	0

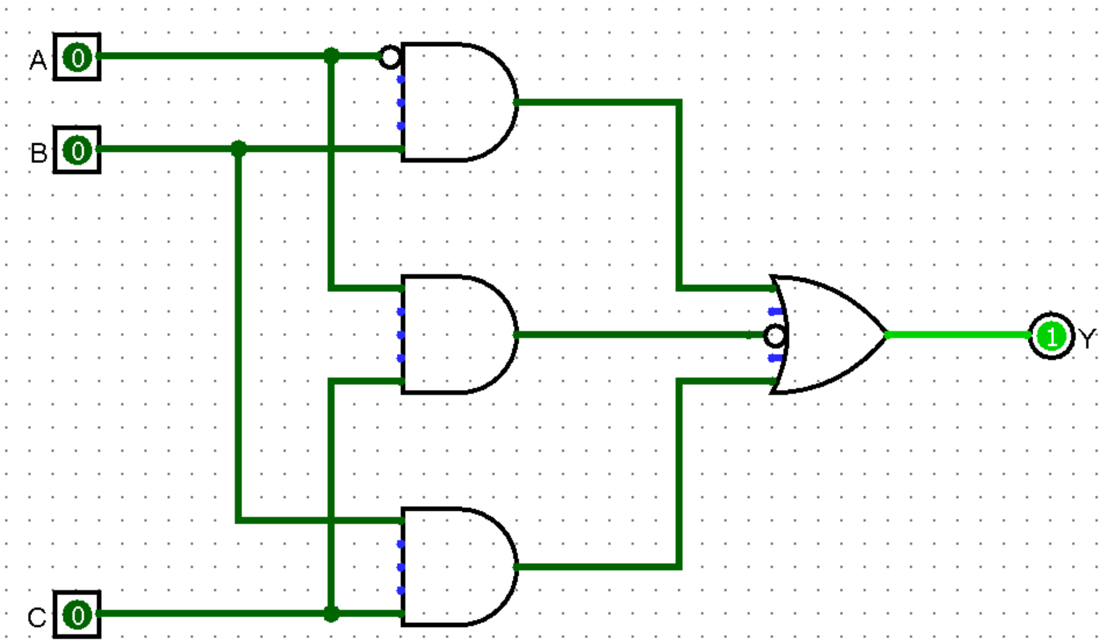
F = ab + b~c~d + ~bcd

Mappe di Karnaugh: esercizio

Minimizzare il circuito dell’esercizio 2 usando le mappe di Karnaugh

Esercizio 3

Sia dato il seguente circuito



Si determinino:

- La tabella di verità
- La forma canonica più conveniente

Esercizio 3

Tabella di verità

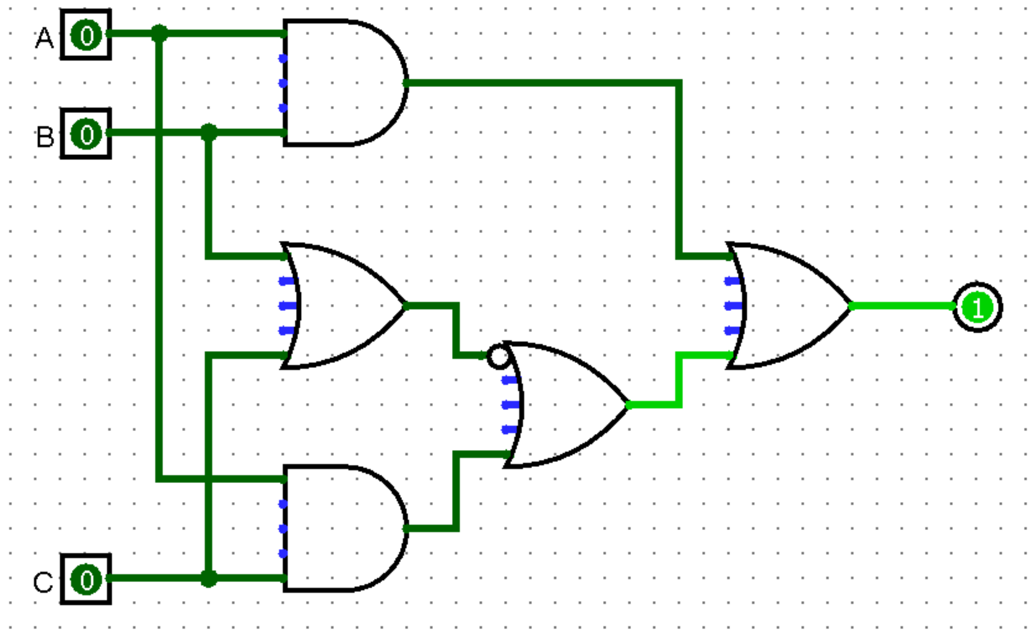
A	B	C	$\neg A$	$Z_1 = \neg AB$	AC	BC	$\neg Z_2$	$Z = Z_1 + \neg Z_2 + Z_3$
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Forma canonica POS (un solo maxtermine)

$$Z = \neg A \vee B \vee \neg C = \neg(A \wedge \neg B \wedge C)$$

Esercizio 4

Sia dato il seguente circuito



Si determinino:

- La tabella di verità
- La forma canonica SOP e POS
- La forma algebrica del circuito, semplificando a partire dalla SOP

Esercizio 4

Tabella di verità

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

SOP

$$Y = (\neg A \neg B \neg C) + (A \neg B \neg C) + (A \neg B C) + (AB \neg C) + (ABC)$$

POS

$$Y = (A + B + \neg C)(A + \neg B + C)(A + \neg B + \neg C)$$

Forma algebrica semplificata

$$Y = \neg B \neg C + A$$

Esercizio 5

Sia data la seguente tabella di verità

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Si determinino:

- La forma canonica SOP
- La forma algebrica, semplificando a partire dalla SOP
- I cammini critici dei circuiti corrispondenti alle due forme
- Avrebbe senso utilizzare la POS invece della SOP? Perché?

Esercizio 5

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0

A	B	C	D	Y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

SOP

$$(\neg A \neg B \neg C \neg D)+(\neg A \neg B C D)+(\neg A B C \neg D)+(A \neg B \neg C D)+(A B \neg C \neg D)+(A B C D)$$

Cammino critico: (4-1) + (6-1) = 8

Semplificando

$$(\neg A \neg B + AB)(\neg C \neg D + CD) + (\neg A B C \neg D + A \neg B \neg C D)$$

Cammino critico: 1 + 1 + (4-1) = 5

L’uso della POS non è ottimale (ci sono più 0 che 1)