

Lógica para Computação

Exercícios de Dedução Natural

Gerado pelo Nadia

1. $\vdash (A \vee (A \wedge B)) \rightarrow A$

```
# \vdash (A\vee (A\wedge B)) \rightarrow A
1. {   A | (A & B) hip
2.     {   A hip
3.         A copie 2
4.     }
5.     {   A & B hip
6.         A &e 4
7.     }
8.     A |e 1, 2-3, 4-5
9. }
10. (A | (A & B)) -> A ->i 1-6
```

$$\frac{\frac{[A \vee (A \wedge B)]^1 \quad [A]^2 \quad \frac{[A \wedge B]^3}{A} \wedge e}{A} \vee e^{2,3}}{(A \vee (A \wedge B)) \rightarrow A} \rightarrow i^1$$

1.	$A \vee (A \wedge B)$	hipótese
2.	A	hipótese
3.	A	copie 2
4.	$A \wedge B$	hipótese
5.	A	$\wedge e$ 4
6.	A	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5
7.	$(A \vee (A \wedge B)) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-6

2. $\vdash (A \wedge (A \vee B)) \rightarrow A$

```
# \vdash (A\wedge (A\vee B)) \rightarrow A
1. {   A & (A | B) hip
2.     A &e 1
3. }
4. (A & (A | B)) -> A ->i 1-2
```

$$\frac{\frac{[A \wedge (A \vee B)]^1}{A} \wedge e}{(A \wedge (A \vee B)) \rightarrow A} \rightarrow i^1$$

1.	$A \wedge (A \vee B)$	hipótese
2.	A	$\wedge e$ 1
3.	$(A \wedge (A \vee B)) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-2

3. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

```
# \vdash (A\rightarrow (B\rightarrow C)) \rightarrow (B\rightarrow (A\rightarrow C))
1. {   A -> (B-> C) hip
2.     {   B hip
3.         {   A hip
4.             B->C ->e 3,1
5.             C ->e 2,4
6.         }
7.         A->C ->i 3-5
8.     }
9.     B -> (A -> C) ->i 2-6
10. }
11. (A -> (B-> C)) -> (B -> (A -> C)) ->i 1-7
```

$$\frac{\frac{[B]^2 \quad \frac{[A]^3 \quad [A \rightarrow (B \rightarrow C)]^1}{B \rightarrow C} \rightarrow e}{C} \rightarrow e}{\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow (A \rightarrow C)} \rightarrow i^3} \rightarrow i^2$$

$$\frac{B \rightarrow (A \rightarrow C)}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))} \rightarrow i^1$$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	hipótese
2.	B	hipótese
3.	A	hipótese
4.	$B \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	C	$\rightarrow e$ 2, 4
6.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-6
8.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	$\rightarrow i$ 1-7

4. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

```
# \vdash (A\rightarrow (A\rightarrow B))\rightarrow (A\rightarrow B)
1. {   A -> (A -> B) hip
2.     {   A hip
3.         A -> B ->e 2,1
4.         B ->e 2,3
5.     }
6.     A -> B ->i 2-4
7. }
8. (A -> (A-> B)) -> (A -> B) ->i 1-5
```

$$\frac{\frac{[A]^2}{A \rightarrow B} \rightarrow e}{\frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow i^2} \rightarrow e$$

$$\frac{[A]^2}{(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow i^1$$

1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	hipótese
2.	A	hipótese
3.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow e$ 2, 1
4.	B	$\rightarrow e$ 2, 3
5.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-4
6.	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	$\rightarrow i$ 1-5

5. $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

```
# \vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)
1. {   ~A -> B hip
2.     {   ~A -> ~B hip
3.         {   ~A hip
4.             B ->e 3,1
5.             ~B ->e 3,2
6.             @ ~e 4,5
7.         }
8.         A raa 3-6
9.     }
10.    (~A -> ~B) -> A ->i 2-7
11. }
12. (~A -> B) -> ((~A -> ~B) -> A) ->i 1-8
```

$$\frac{[\neg A]^3}{B} \rightarrow e$$

$$\frac{[\neg A]^3}{\neg B} \rightarrow e$$

$$\frac{\perp}{A} \text{raa}^3$$

$$\frac{(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A}{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)} \rightarrow i^1$$

1.	$\neg A \rightarrow B$	hipótese
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	B	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$\neg B$	$\rightarrow e$ 3, 2
6.	\perp	$\neg e$ 4, 5
7.	A	raa 3-6
8.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 2-7
9.	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$	$\rightarrow i$ 1-8

6. $\vdash A \vee \neg A$

```
# \vdash A \vee \neg A
1. {   ~(A | ~A) hip
2.     {   ~A hip
3.         A | ~A |i 2
4.         @ ~e 3,1
5.     }
6.     A raa 2-4
7.     A | ~A |i 5
8.     @ ~e 6, 1
9. }
10. A | ~A raa 1-7
```

$$\frac{[\neg A]^2}{A \vee \neg A} \vee i$$

$$\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^1}{A \vee \neg A} \neg e$$

$$\frac{\perp}{A \vee \neg A} \text{raa}^2$$

$$\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^1}{A \vee \neg A} \neg e$$

$$\frac{\perp}{A \vee \neg A} \text{raa}^1$$

1.	$\neg(A \vee \neg A)$	hipótese
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$A \vee \neg A$	$\vee i$ 2
4.	\perp	$\neg e$ 3, 1
5.	A	raa 2-4
6.	$A \vee \neg A$	$\vee i$ 5
7.	\perp	$\neg e$ 6, 1
8.	$A \vee \neg A$	raa 1-7

7. $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

```
#\vdash (A\rightarrow B)\vee (B\rightarrow A)
1. {  ~((A -> B) | (B -> A)) hip
2.    {  A hip
3.      {  B hip
4.        A copie 2
5.      }
6.    }
7.    B -> A ->i 3-4
8.    (A -> B) | (B -> A) |i 5
9.    @ ~e 6, 1
10.   B @e 7
11.  }
12. (A -> B) | (B -> A) raa 1-11
```

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2}{B \rightarrow A} \rightarrow i^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee i \quad [\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))]^1}{\frac{\frac{\frac{\perp}{B} \perp e}{A \rightarrow B} \rightarrow i^2}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee i \quad [\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))]^1}{\frac{\perp}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \text{raa}^1} \neg e$$

1.	$\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	hipótese
2.	A	hipótese
3.	B	hipótese
4.	A	copie 2
5.	$B \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 3-4
6.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee i$ 5
7.	\perp	$\neg e$ 6, 1
8.	B	$\perp e$ 7
9.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-8
10.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee i$ 9
11.	\perp	$\neg e$ 10, 1
12.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	raa 1-11

8. $\vdash A \rightarrow A$

```
# \vdash A\rightarrow A
1. {  A hip
2.  A copie 1
3. }
4. A -> A ->i 1-2
```

$$\frac{[A]^1}{A \rightarrow A} \rightarrow i^1$$

1.	A	hipótese
2.	A	copie 1
3.	$A \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-2

9. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))$

```
# \vdash (A \rightarrow B)\rightarrow ((C\rightarrow A)\rightarrow (C\rightarrow A))
1. {  (A -> B) hip
2.    {  (C -> A) hip
3.      (C -> A) copie 2
4.    }
5.  (C -> A)->(C -> A) ->i 2-3
6. }
7. (A -> B) -> ((C -> A)->(C -> A)) ->i 1-4
```

$$\frac{\frac{[C \rightarrow A]^2}{(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)} \rightarrow i^2}{(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))} \rightarrow i^1$$

1.	$A \rightarrow B$	hipótese
2.	$C \rightarrow A$	hipótese
3.	$C \rightarrow A$	copie 2
4.	$(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)$	$\rightarrow i$ 2-3
5.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))$	$\rightarrow i$ 1-4

10. $A \wedge B \rightarrow C \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

```

# A \land B \rightarrow C \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)
1. A & B -> C pre
2. { B hip
3. { A hip
4. A & B &i 3,2
5. C ->e 4,1
}
6. A->C ->i 3-5
}
7. B->(A->C) ->i 2-6

```

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2 \quad [B]^1}{A \wedge B} \wedge i \quad (A \wedge B) \rightarrow C}{C} \rightarrow e}{\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow (A \rightarrow C)} \rightarrow i^1} \rightarrow i^1$$

1.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	premissa
2.	B	hipótese
3.	A	hipótese
4.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 3,2
5.	C	$\rightarrow e$ 4, 1
6.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-6

11. $B \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$

```

# B \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C
1. B->(A->C) pre
2. { A & B hip
3. B &e 2
4. A->C ->e 3,1
5. A &e 2
6. C ->e 5,4
}
7. A & B -> C ->i 2-6

```

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge e \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge e \quad B \rightarrow (A \rightarrow C)}{A \rightarrow C} \rightarrow e}{C} \rightarrow e}{(A \wedge B) \rightarrow C \rightarrow i^1} \rightarrow e$$

1.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	B	$\wedge e$ 2
4.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	A	$\wedge e$ 2
6.	C	$\rightarrow e$ 5, 4
7.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 2-6

12. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

```

# \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))
1. { A -> (B -> C) hip
2. { A -> B hip
3. { A hip
4. B ->e 3, 2
5. B -> C ->e 3, 1
6. C ->e 4, 5
}
7. A -> C ->i 3-6
}
8. (A -> B) -> (A -> C) ->i 2-7
}
9. (A -> (B -> C)) -> ((A -> B) -> (A -> C)) ->i 1-8

```

$$\frac{\frac{\frac{[A]^3 \quad [A \rightarrow B]^2}{B} \rightarrow e \quad \frac{[A]^3 \quad [A \rightarrow (B \rightarrow C)]^1}{B \rightarrow C} \rightarrow e}{C} \rightarrow e}{\frac{A \rightarrow C}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)} \rightarrow i^3} \rightarrow i^2$$

$$\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))} \rightarrow i^1$$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	hipótese
2.	$A \rightarrow B$	hipótese
3.	A	hipótese
4.	B	$\rightarrow e$ 3, 2
5.	$B \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
6.	C	$\rightarrow e$ 4, 5
7.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-6
8.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-7
9.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$\rightarrow i$ 1-8

13. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

```
# \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)
1. {   A hip
2.     {   B hip
3.         A copie 1
         }
4.     B -> A ->i 2-3
   }
5. A -> (B -> A) ->i 1-4
```

$$\frac{\frac{[A]^1}{B \rightarrow A} \rightarrow i^2}{A \rightarrow (B \rightarrow A)} \rightarrow i^1$$

1.	<table><tr><td>A</td><td>hipótese</td></tr></table>	A	hipótese
A	hipótese		
2.	<table><tr><td>B</td><td>hipótese</td></tr></table>	B	hipótese
B	hipótese		
3.	<table><tr><td>A</td><td>copie 1</td></tr></table>	A	copie 1
A	copie 1		
4.	$B \rightarrow A \rightarrow i\ 2-3$		
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow i\ 1-4$		

14. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

```
# \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A
1. {   (A -> B) -> A hip
2.     {   ~A hip
3.         {   A hip
4.             @ ~e 3,2
5.             B @e 4
         }
6.     A -> B ->i 3-5
7.     A ->e 6,1
8.     @ ~e 7,2
   }
9. A raa 2-8
}
10. ((A -> B) -> A) -> A ->i 1-9
```

$$\frac{\frac{\frac{[A]^3 \quad [\neg A]^2}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{B} \perp e}{A \rightarrow B} \rightarrow i^3 \quad \frac{[(A \rightarrow B) \rightarrow A]^1}{A} \rightarrow e \quad [\neg A]^2 \neg e}{\frac{\perp}{A} raa^2} \neg e \quad \frac{}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow i^1$$

1.	<table><tr><td>$(A \rightarrow B) \rightarrow A$</td><td>hipótese</td></tr></table>	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	hipótese
$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	hipótese		
2.	<table><tr><td>$\neg A$</td><td>hipótese</td></tr></table>	$\neg A$	hipótese
$\neg A$	hipótese		
3.	<table><tr><td>A</td><td>hipótese</td></tr></table>	A	hipótese
A	hipótese		
4.	<table><tr><td>\perp</td><td>$\neg e\ 3, 2$</td></tr></table>	\perp	$\neg e\ 3, 2$
\perp	$\neg e\ 3, 2$		
5.	<table><tr><td>B</td><td>$\perp e\ 4$</td></tr></table>	B	$\perp e\ 4$
B	$\perp e\ 4$		
6.	$A \rightarrow B \rightarrow i\ 3-5$		
7.	$A \rightarrow e\ 6, 1$		
8.	<table><tr><td>\perp</td><td>$\neg e\ 7, 2$</td></tr></table>	\perp	$\neg e\ 7, 2$
\perp	$\neg e\ 7, 2$		
9.	$A \text{ raa } 2-8$		
10.	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow i\ 1-9$		

15. $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C$

```
# A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C
1. A -> C pre
2. B -> C pre
3. A | B pre
4. {   A hip
5.     C ->e 4, 1
   }
6. {   B hip
7.     C ->e 6, 2
   }
8. C |e 3, 4-5, 6-7
```

$$\frac{A \vee B \quad \frac{[A]^1 \quad A \rightarrow C}{C} \rightarrow e \quad \frac{[B]^2 \quad B \rightarrow C}{C} \rightarrow e}{C} \vee e^{1,2}$$

1.	$A \rightarrow C$	premissa	
2.	$B \rightarrow C$	premissa	
3.	$A \vee B$	premissa	
4.	<table><tr><td>A</td><td>hipótese</td></tr></table>	A	hipótese
A	hipótese		
5.	<table><tr><td>C</td><td>$\rightarrow e\ 4, 1$</td></tr></table>	C	$\rightarrow e\ 4, 1$
C	$\rightarrow e\ 4, 1$		
6.	<table><tr><td>B</td><td>hipótese</td></tr></table>	B	hipótese
B	hipótese		
7.	<table><tr><td>C</td><td>$\rightarrow e\ 6, 2$</td></tr></table>	C	$\rightarrow e\ 6, 2$
C	$\rightarrow e\ 6, 2$		
8.	C	$\vee e\ 3, 4-5, 6-7$	

16. $A \vdash \neg\neg A$

```
# A \vdash \lnot \lnot A
1. A pre
2. {   ~A hip
3.   @ ~e 1, 2
   }
4. ~~A ~i 2-3
```

	$\frac{A \quad [\neg A]^1}{\perp} \neg e$ $\frac{\perp}{\neg\neg A} \neg i^1$	
1.	A	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	\perp	$\neg e$ 1, 2
4.	$\neg\neg A$	$\neg i$ 2-3

17. $\neg\neg A \vdash A$

```
# \lnot \lnot A \vdash A
1. ~~A pre
2. {   ~A hip
3.   @ ~e 2, 1
   }
4. A raa 2-3
```

	$\frac{[\neg A]^1 \quad \neg\neg A}{\perp} \neg e$ $\frac{\perp}{A} raa^1$	
1.	$\neg\neg A$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	\perp	$\neg e$ 2, 1
4.	A	raa 2-3

18. $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

```
# A \rightarrow B, \lnot B \vdash \lnot A
1. A -> B pre
2. ~B pre
3. {   A hip
4.     B ->e 1,3
5.     @ ~e 4,2
   }
6. ~A ~i 3-5
```

	$\frac{A \rightarrow B \quad [A]^1}{B} \rightarrow e$ $\frac{\perp}{\neg A} \neg i^1$	
1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg B$	premissa
3.	A	hipótese
4.	B	$\rightarrow e$ 1, 3
5.	\perp	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5

19. $\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$

```
# \lnot B \rightarrow \lnot A \vdash A \rightarrow B
1. ~B->~A pre
2. { A hip
3.   { ~B hip
4.     ~A ->e 3,1
5.     @ ~e 2,4
   }
6.   B raa 3-5
   }
7. A->B ->i 2-6
```

	$\frac{[\neg B]^2 \quad \neg B \rightarrow \neg A}{\neg A} \rightarrow e$ $\frac{\perp}{B} raa^2$ $\frac{[A]^1}{A \rightarrow B} \rightarrow i^1$	
1.	$\neg B \rightarrow \neg A$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	$\neg A$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	\perp	$\neg e$ 2, 4
6.	B	raa 3-5
7.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-6

20. $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

```
# A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A
1.  A -> B pre
2.  {   ~B hip
3.      {   A hip
4.          B ->e 3, 1
5.          @ ~e 4, 2
        }
6.      ~A ~i 3-5
    }
7.  ~B -> ~A ->i 2-6
```

$$\frac{\frac{[A]^2 \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow e \quad [\neg B]^1}{\frac{\perp}{\neg A} \neg i^2} \neg e$$

$$\frac{\perp}{\neg B \rightarrow \neg A} \rightarrow i^1$$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg B$	hipótese
3.	A	hipótese
4.	B	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	\perp	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5
7.	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\rightarrow i$ 2-6

21. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

```
# \neg (A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B
1.  ~(A | B) pre
2.  {   A hip
3.      A | B |i 2
4.      @ ~e 3, 1
    }
5.  ~A ~i 2-4
6.  {   B hip
7.      A | B |i 6
8.      @ ~e 7, 1
    }
9.  ~B ~i 6-8
10. ~A & ~B &i 5, 9
```

$$\frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee i \quad \neg(A \vee B)}{\frac{\perp}{\neg A} \neg i^1} \neg e$$

$$\frac{\frac{[B]^2}{A \vee B} \vee i \quad \neg(A \vee B)}{\frac{\perp}{\neg B} \neg i^2} \neg e$$

$$\frac{\frac{\perp}{\neg A} \neg i^1 \quad \frac{\perp}{\neg B} \neg i^2}{\neg A \wedge \neg B} \wedge i$$

1.	$\neg(A \vee B)$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$A \vee B$	$\vee i$ 2
4.	\perp	$\neg e$ 3, 1
5.	$\neg A$	$\neg i$ 2-4
6.	B	hipótese
7.	$A \vee B$	$\vee i$ 6
8.	\perp	$\neg e$ 7, 1
9.	$\neg B$	$\neg i$ 6-8
10.	$\neg A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 5,9

22. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

```
# \neg A \wedge \neg B \vdash \neg (A \vee B)
1.  ~A & ~B pre
2.  ~A &e 1
3.  ~B &e 1
4.  {   A | B hip
5.      {   A hip
6.          @ ~e 5, 2
        }
7.      {   B hip
8.          @ ~e 7, 3
        }
9.      @ |e 4, 5-6, 7-8
    }
10. ~(A | B) ~i 4-9
```

$$\frac{[A \vee B]^1 \quad \frac{[A]^2 \quad \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg A} \wedge e}{\perp} \neg e \quad \frac{[B]^3 \quad \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg B} \wedge e}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{\neg(A \vee B)} \neg i^1} \vee e^{2,3}$$

1.	$\neg A \wedge \neg B$	premissa
2.	$\neg A$	$\wedge e$ 1
3.	$\neg B$	$\wedge e$ 1
4.	$A \vee B$	hipótese
5.	A	hipótese
6.	\perp	$\neg e$ 5, 2
7.	B	hipótese
8.	\perp	$\neg e$ 7, 3
9.	\perp	$\vee e$ 4, 5-6, 7-8
10.	$\neg(A \vee B)$	$\neg i$ 4-9

23. $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

```
# \lnot (A\wedge B) \vdash \lnot A \vee \lnot B
1.  ~(A & B) pre
2.  {  ~(~A | ~B) hip
3.    {  ~A hip
4.      ~A | ~B |i 3
5.      @ ~e 4, 2
6.    }
7.    A raa 3-5
8.    {  ~B hip
9.      ~A | ~B |i 7
10.     @ ~e 8, 2
11.   }
12.   B raa 7-9
13.   A & B &i 6, 10
14.   @ ~e 11, 1
15. }
16. ~A | ~B raa 2-12
```

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg A]^2}{\neg A \vee \neg B} \vee i \quad \frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^1}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{A} raa^2} \neg e \quad \frac{\frac{[\neg B]^3}{\neg A \vee \neg B} \vee i \quad \frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^1}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{B} raa^3} \neg e \\
 \frac{\frac{\perp}{A \wedge B} \wedge i \quad \frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg e}{\frac{\perp}{\neg A \vee \neg B} raa^1} \neg e
 \end{array}$$

1.	$\neg(A \wedge B)$	premissa
2.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 3
5.	\perp	$\neg e$ 4, 2
6.	A	raa 3-5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 7
9.	\perp	$\neg e$ 8, 2
10.	B	raa 7-9
11.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 6,10
12.	\perp	$\neg e$ 11, 1
13.	$\neg A \vee \neg B$	raa 2-12

24. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

```
# \lnot A \vee \lnot B \vdash \lnot (A\wedge B)
1.  ~A | ~B pre
2.  {  A & B hip
3.    A &e 2
4.    B &e 2
5.    {  ~A hip
6.      @ ~e 3, 5
7.    }
8.    {  ~B hip
9.      @ ~e 4, 7
10.   }
11.   @ |e 1, 5-6, 7-8
12. }
13. ~(A & B) ~i 2-9
```

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge e \quad \frac{[\neg A]^2}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg i^1} \neg e \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge e \quad \frac{[\neg B]^3}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg i^1} \neg e \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg i^1 \quad \frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} \neg i^1}{\neg(A \wedge B)} \neg i^1
 \end{array}$$

1.	$\neg A \vee \neg B$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	A	$\wedge e$ 2
4.	B	$\wedge e$ 2
5.	$\neg A$	hipótese
6.	\perp	$\neg e$ 3, 5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	\perp	$\neg e$ 4, 7
9.	\perp	$\vee e$ 1, 5-6, 7-8
10.	$\neg(A \wedge B)$	$\neg i$ 2-9

25. $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

```
# A\vee (B\wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)
1. A | (B&C) pre
2. { A hip
3. A|B |i 2
4. A|C |i 2
5. (A|B)&(A|C) &i 3,4
}
6. { B&C hip
7. B &e 6
8. A|B |i 7
9. C &e 6
10. A|C |i 9
11. (A|B)&(A|C) &i 8,10
}
12. (A|B)&(A|C) |e 1, 2-5, 6-11
```

$$\frac{A \vee (B \wedge C) \quad \frac{\frac{[A]^1}{A \vee B} \vee i \quad \frac{[A]^1}{A \vee C} \vee i}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \wedge i \quad \frac{\frac{[B \wedge C]^2}{B} \wedge e \quad \frac{[B \wedge C]^2}{C} \wedge e}{A \vee B \vee i \quad A \vee C \vee i} \vee i}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \wedge i}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \vee e^{1,2}$$

1.	$A \vee (B \wedge C)$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$A \vee B$	$\vee i$ 2
4.	$A \vee C$	$\vee i$ 2
5.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge i$ 3,4
6.	$B \wedge C$	hipótese
7.	B	$\wedge e$ 6
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	C	$\wedge e$ 6
10.	$A \vee C$	$\vee i$ 9
11.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge i$ 8,10
12.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\vee e$ 1, 2-5, 6-11

26. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

```
# (A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)
1. (A | B) & (A | C) pre
2. (A | B) &e 1
3. (A | C) &e 1
4. { A hip
5. A | (B&C) |i 4
}
6. { B hip
7. { A hip
8. A| (B&C) |i 7
}
9. { C hip
10. B&C &i 6,9
11. A | (B&C) |i 10
}
12. A | (B&C) |e 3, 7-8, 9-11
}
13. A | (B&C) |e 2, 4-5, 6-12
```

$$\frac{\frac{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}{A \vee B} \wedge e \quad \frac{[A]^1}{A \vee (B \wedge C)} \vee i \quad \frac{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}{A \vee C} \wedge e \quad \frac{[A]^3}{A \vee (B \wedge C)} \vee i \quad \frac{\frac{[B]^2}{B \wedge C} \wedge i \quad \frac{[C]^4}{A \vee (B \wedge C)} \vee i}{A \vee (B \wedge C)} \vee e^{3,4}}{A \vee (B \wedge C)} \vee e^{1,2}$$

1.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	premissa
2.	$A \vee B$	$\wedge e$ 1
3.	$A \vee C$	$\wedge e$ 1
4.	A	hipótese
5.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 4
6.	B	hipótese
7.	A	hipótese
8.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 7
9.	C	hipótese
10.	$B \wedge C$	$\wedge i$ 6,9
11.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 10
12.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee e$ 3, 7-8, 9-11
13.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee e$ 2, 4-5, 6-12

27. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

```
# A\wedge (B \vee C) \vdash (A\wedge B)\vee (A\wedge C)
1.  A & (B | C)      pre
2.  A                &e 1
3.  B | C            &e 1
4.  { B              hip
5.    A&B            &i 2,4
6.    (A&B) | (A&C) |i 5
   }
7.  { C              hip
8.    A&C            &i 2,7
9.    (A&B) | (A&C) |i 8
   }
10. (A&B) | (A&C)    |e 3, 4-6, 7-9
```

$$\frac{\frac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \wedge e \quad \frac{\frac{\frac{A \wedge (B \vee C)}{A} \wedge e \quad [B]^1}{A \wedge B} \wedge i \quad \frac{[B]^1}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \vee i}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \vee i \quad \frac{\frac{\frac{A \wedge (B \vee C)}{A} \wedge e \quad [C]^2}{A \wedge C} \wedge i \quad \frac{[C]^2}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \vee i}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \vee e^{1,2}$$

1.	$A \wedge (B \vee C)$	premissa
2.	A	$\wedge e$ 1
3.	$B \vee C$	$\wedge e$ 1
4.	B	hipótese
5.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 2,4
6.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee i$ 5
7.	C	hipótese
8.	$A \wedge C$	$\wedge i$ 2,7
9.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee i$ 8
10.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

28. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$

```
# (A\wedge B)\vee (A\wedge C) \vdash A\wedge (B \vee C)
1.  (A & B) | (A & C) pre
2.  { A & B hip
3.    A &e 2
4.    B &e 2
5.    B | C |i 4
6.    A & (B | C) &i 3, 5
   }
7.  { A & C hip
8.    A &e 7
9.    C &e 7
10.   B | C |i 9
11.   A & (B | C) &i 8, 10
   }
12. A & (B | C) |e 1, 2-6, 7-11
```

$$\frac{\frac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{A \wedge (B \vee C)} \wedge i \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge e \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge e \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B \vee C} \vee i}{A \wedge (B \vee C)} \wedge i \quad \frac{\frac{[A \wedge C]^2}{A} \wedge e \quad \frac{[A \wedge C]^2}{C} \wedge e \quad \frac{[A \wedge C]^2}{B \vee C} \vee i}{A \wedge (B \vee C)} \wedge i}{A \wedge (B \vee C)} \vee e^{1,2}$$

1.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	A	$\wedge e$ 2
4.	B	$\wedge e$ 2
5.	$B \vee C$	$\vee i$ 4
6.	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge i$ 3,5
7.	$A \wedge C$	hipótese
8.	A	$\wedge e$ 7
9.	C	$\wedge e$ 7
10.	$B \vee C$	$\vee i$ 9
11.	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge i$ 8,10
12.	$A \wedge (B \vee C)$	$\vee e$ 1, 2-6, 7-11

29. $A \vee B, \neg B \vdash A$

```
# A \vee B, \not B \vdash A
1.  A | B pre
2.  ~B pre
3.  {   A hip
4.      A copie 3
    }
5.  {   B hip
6.      @ ~e 5, 2
7.      A @e 6
    }
8.  A |e 1, 3-4, 5-7
```

$$\frac{A \vee B \quad [A]^1}{A} \quad \frac{\frac{[B]^2 \quad \neg B}{\perp} \neg e \quad \frac{\perp}{A} \perp e}{\vee e^{1,2}}$$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$\neg B$	premissa
3.	A	hipótese
4.	A	copie 3
5.	B	hipótese
6.	\perp	$\neg e$ 5, 2
7.	A	$\perp e$ 6
8.	A	$\vee e$ 1, 3-4, 5-7

30. $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$

```
# A \vee B \vdash \not A \rightarrow B
1.  A | B pre
2.  {   A hip
3.      {   ~A hip
4.          @ ~e 2, 3
5.          B @e 4
        }
6.      ~A -> B ->i 3-5
    }
7.  {   B hip
8.      {   ~A hip
9.          B copie 7
        }
10.     ~A -> B ->i 8-9
    }
11. ~A -> B |e 1, 2-6, 7-10
```

$$\frac{A \vee B \quad \frac{[A]^1 \quad [\neg A]^3}{\perp} \neg e \quad \frac{\perp}{B} \perp e}{\neg A \rightarrow B} \rightarrow i^3 \quad \frac{[B]^2}{\neg A \rightarrow B} \rightarrow i^4 \quad \vee e^{1,2}$$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	\perp	$\neg e$ 2, 3
5.	B	$\perp e$ 4
6.	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	B	hipótese
8.	$\neg A$	hipótese
9.	B	copie 7
10.	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 8-9
11.	$\neg A \rightarrow B$	$\vee e$ 1, 2-6, 7-10

31. $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$

```
# \not A \rightarrow B \vdash A \vee B
1. ~ A -> B pre
2. { ~ (A | B) hip
3.   { ~ A hip
4.       B ->e 3, 1
5.       A | B |i 4
6.       @ ~e 5, 2
   }
7. A raa 3-6
8. A | B |i 7
9. @ ~e 2,8
}
10. A | B raa 2-9
```

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg A]^2 \quad \neg A \rightarrow B}{\frac{B}{A \vee B} \vee i} \rightarrow e \\
\frac{\quad \quad \quad [\neg(A \vee B)]^1}{\frac{\perp}{A \vee B} \text{raa}^2} \neg e \\
\frac{[\neg(A \vee B)]^1 \quad \frac{\frac{\perp}{A \vee B} \text{raa}^2}{A \vee B} \vee i}{\frac{\perp}{A \vee B} \text{raa}^1} \neg e
\end{array}$$

1.	$\neg A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg(A \vee B)$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	B	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$A \vee B$	$\vee i$ 4
6.	\perp	$\neg e$ 5, 2
7.	A	raa 3-6
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	\perp	$\neg e$ 2, 8
10.	$A \vee B$	raa 2-9

32. $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

```

# A \wedge B \vdash \neg (A \rightarrow \neg B)
1. A & B pre
2. A &e 1
3. B &e 1
4. {   A -> ~B hip
5.     ~ B ->e 4, 2
6.     @ ~e 5, 3
7.   }
7. ~ (A -> ~ B) ~i 4-6

```

$$\begin{array}{c}
\frac{[A \rightarrow \neg B]^1 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge e}{\neg B} \rightarrow e \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge e \\
\frac{\quad \quad \quad \perp}{\neg(A \rightarrow \neg B)} \neg i^1
\end{array}$$

1.	$A \wedge B$	premissa
2.	A	$\wedge e$ 1
3.	B	$\wedge e$ 1
4.	$A \rightarrow \neg B$	hipótese
5.	$\neg B$	$\rightarrow e$ 4, 2
6.	\perp	$\neg e$ 5, 3
7.	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	$\neg i$ 4-6

33. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B$

```

# \neg (A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B
1. ~ (A -> ~ B) pre
2. {   ~ A hip
3.     { A hip
4.       @ ~e 2,3
5.       ~B @e 4
6.     }
7.     A->~B ->i 3-5
8.     @ ~e 6,1
9.   }
8. A raa 2-7
9. {   ~ B hip
10.    { A hip
11.      ~ B copie 9
12.    }
13.    (A -> ~ B) ->i 10-11
14.    @ ~e 12, 1
15.  }
14. B raa 9-13
15. A & B &i 8, 14

```

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg A]^1 \quad [A]^2}{\neg B} \neg e \\
\frac{\frac{\perp}{\neg B} \neg e}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow i^2 \quad \neg(A \rightarrow \neg B) \quad \frac{[\neg B]^3}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow i^4 \quad \neg(A \rightarrow \neg B) \neg e \\
\frac{\frac{\perp}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow i^2 \quad \neg(A \rightarrow \neg B) \quad \frac{[\neg B]^3}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow i^4 \quad \neg(A \rightarrow \neg B) \neg e}{\frac{\perp}{A} \text{raa}^1 \quad \frac{\perp}{B} \text{raa}^3} \neg e \\
\frac{\quad \quad \quad \perp}{A \wedge B} \wedge i
\end{array}$$

1.	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	A	hipótese
4.	\perp	$\neg e$ 2, 3
5.	$\neg B$	$\perp e$ 4
6.	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	\perp	$\neg e$ 6, 1
8.	A	raa 2-7
9.	$\neg B$	hipótese
10.	A	hipótese
11.	$\neg B$	copie 9
12.	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow i$ 10-11
13.	\perp	$\neg e$ 12, 1
14.	B	raa 9-13
15.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 8,14

34. $A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

```
# A\vee B \vdash \neg (\neg A \wedge \neg B)
1. A | B      pre
2. {   ~A & ~B  hip
3.   ~A      &e 2
4.   ~B      &e 2
5.   {  A      hip
6.   @      ~e 5,3
7.   }
8.   {  B      hip
9.   @      ~e 7,4
10.  }
11. @      |e 1, 5-6, 7-8
12. }
13. ~(\neg A & \neg B)  ~i 2-9
```

$$\frac{A \vee B \quad \frac{\frac{[A]^2 \quad \frac{[\neg A \wedge \neg B]^1}{\neg A} \wedge e}{\perp} \neg e \quad \frac{[B]^3 \quad \frac{[\neg A \wedge \neg B]^1}{\neg B} \wedge e}{\perp} \neg e}{\perp} \vee e^{2,3}}{\frac{\perp}{\neg(\neg A \wedge \neg B)} \neg i^1}$$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$\neg A \wedge \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	$\wedge e$ 2
4.	$\neg B$	$\wedge e$ 2
5.	A	hipótese
6.	\perp	$\neg e$ 5, 3
7.	B	hipótese
8.	\perp	$\neg e$ 7, 4
9.	\perp	$\vee e$ 1, 5-6, 7-8
10.	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg i$ 2-9

35. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$

```
# \neg (\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B
1. ~ (\neg A & \neg B) pre
2. {   ~(A|B)  hip
3.   { A      hip
4.   A|B      |i 3
5.   @      ~e 4,2
6.   }
7.   ~A      ~i 3-5
8.   { B      hip
9.   A|B      |i 7
10.  @      ~e 8,2
11.  }
12. ~B      ~i 7-9
13. ~A & ~B  &i 6,10
14. @      ~e 11, 1
15. }
16. A | B raa 2-12
```

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2}{A \vee B} \vee i \quad \frac{[\neg(A \vee B)]^1}{\neg A} \neg e}{\frac{\perp}{\neg A} \neg i^2} \quad \frac{\frac{\frac{[B]^3}{A \vee B} \vee i \quad \frac{[\neg(A \vee B)]^1}{\neg B} \neg e}{\frac{\perp}{\neg B} \neg i^3} \wedge i}{\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(\neg A \wedge \neg B)} \neg e} \frac{\perp}{A \vee B} raa^1$$

1.	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	premissa
2.	$\neg(A \vee B)$	hipótese
3.	A	hipótese
4.	$A \vee B$	$\vee i$ 3
5.	\perp	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5
7.	B	hipótese
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	\perp	$\neg e$ 8, 2
10.	$\neg B$	$\neg i$ 7-9
11.	$\neg A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 6,10
12.	\perp	$\neg e$ 11, 1
13.	$A \vee B$	raa 2-12

36. $A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

```
# A\rightarrow B \vdash \neg (A\wedge \neg B)
1. A -> B pre
2. {   (A & ~ B) hip
3.     A -> B copie 1
4.     A &e 2
5.     B ->e 3, 4
6.     ~ B &e 2
7.     @ ~e 5, 6
   }
8. ~ (A & ~ B) ~i 2-7
```

$$\frac{\frac{A \rightarrow B}{B} \quad \frac{\frac{[A \wedge \neg B]^1}{A \rightarrow e} \wedge e}{\neg B} \wedge e}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge \neg B)} \neg i^1} \neg e$$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$A \wedge \neg B$	hipótese
3.	$A \rightarrow B$	copie 1
4.	A	$\wedge e$ 2
5.	B	$\rightarrow e$ 3, 4
6.	$\neg B$	$\wedge e$ 2
7.	\perp	$\neg e$ 5, 6
8.	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg i$ 2-7

37. $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \rightarrow B$

```
# \neg (A \wedge \neg B) \vdash A\rightarrow B
1. ~ (A & ~ B) pre
2. {   A hip
3.     {   ~ B hip
4.         A copie 2
5.         (A & ~ B) &i 4, 3
6.         ~ (A & ~ B) copie 1
7.         @ ~e 5, 6
       }
8.     B raa 3-7
   }
9. A -> B ->i 2-8
```

$$\frac{\frac{[A]^1}{A \wedge \neg B} \quad \frac{[\neg B]^2}{\neg(A \wedge \neg B)} \wedge i}{\frac{\perp}{A \rightarrow B} \text{raa}^2} \neg e \rightarrow i^1$$

1.	$\neg(A \wedge \neg B)$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	A	copie 2
5.	$A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 4,3
6.	$\neg(A \wedge \neg B)$	copie 1
7.	\perp	$\neg e$ 5, 6
8.	B	raa 3-7
9.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-8

38. $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

```
# A\wedge B \vdash \neg (\neg A \vee \neg B)
1. A & B pre
2. {   (~ A | ~ B) hip
3. { ~A hip
4. A &e 1
5. @ ~e 3,4
```

```

}
6.      { ~B hip
7. B &e 1
8. @ ~e 6,7
}
9. @ |e 2, 3-5, 6-8
}
10. ~ (~ A | ~ B) ~i 2-9

```

$$\frac{\frac{[\neg A]^2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge e}{\perp} \neg e \quad \frac{[\neg B]^3 \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge e}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{\neg(\neg A \vee \neg B)} \neg i^1} \vee e^{2,3}$$

1.	$A \wedge B$	premissa
2.	$\neg A \vee \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	A	$\wedge e$ 1
5.	\perp	$\neg e$ 3, 4
6.	$\neg B$	hipótese
7.	B	$\wedge e$ 1
8.	\perp	$\neg e$ 6, 7
9.	\perp	$\vee e$ 2, 3-5, 6-8
10.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg i$ 2-9

39. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$

```

# \lnot (\lnot A \vee \lnot B) \vdash A \wedge B
1. ~ (~ A | ~ B) pre
2. {   ~ A hip
3.     (~ A | ~ B) |i 2
4.     ~ (~ A | ~ B) copie 1
5.     @ ~e 3, 4
}
6. A raa 2-5
7. {   ~ B hip
8.     (~ A | ~ B) |i 7
9.     ~ (~ A | ~ B) copie 1
10.    @ ~e 8, 9
}
11. B raa 7-10
12. A & B &i 6, 11

```

$$\frac{\frac{[\neg A]^1}{\neg A \vee \neg B} \vee i \quad \neg(\neg A \vee \neg B) \neg e \quad \frac{[\neg B]^2}{\neg A \vee \neg B} \vee i \quad \neg(\neg A \vee \neg B) \neg e}{\frac{\frac{\perp}{A} raa^1 \quad \frac{\perp}{B} raa^2}{A \wedge B} \wedge i}$$

1.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 2
4.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	copie 1
5.	\perp	$\neg e$ 3, 4
6.	A	raa 2-5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 7
9.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	copie 1
10.	\perp	$\neg e$ 8, 9
11.	B	raa 7-10
12.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 6,11

40. $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

```

# A \rightarrow B \vdash \lnot A \vee B
1. A -> B pre
2. {   ~ (~ A | B) hip
3.     {   A hip
4.         A -> B copie 1
5.         B ->e 3, 4
6.         ~ A | B |i 5
7.         ~ (~ A | B) copie 2
8.         @ ~e 6, 7
}
9. ~ A ~i 3-8
10. ~ A | B |i 9
11. @ ~e 2, 10
}
12. ~ A | B raa 2-11

```

$$\begin{array}{c}
\frac{[A]^2 \quad A \rightarrow B}{\frac{B}{\neg A \vee B} \vee i} \rightarrow e \\
\frac{\frac{B}{\neg A \vee B} \vee i \quad [\neg(\neg A \vee B)]^1}{\frac{\perp}{\neg A} \neg i^2} \neg e \\
\frac{[\neg(\neg A \vee B)]^1 \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg i^2}{\frac{\perp}{\neg A \vee B} \vee i} \neg e \\
\frac{\perp}{\neg A \vee B} raa^1
\end{array}$$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg(\neg A \vee B)$	hipótese
3.	A	hipótese
4.	$A \rightarrow B$	copie 1
5.	B	$\rightarrow e$ 3, 4
6.	$\neg A \vee B$	$\vee i$ 5
7.	$\neg(\neg A \vee B)$	copie 2
8.	\perp	$\neg e$ 6, 7
9.	$\neg A$	$\neg i$ 3-8
10.	$\neg A \vee B$	$\vee i$ 9
11.	\perp	$\neg e$ 2, 10
12.	$\neg A \vee B$	raa 2-11

41. $\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B$

```

# \lnot A \vee B \vdash A \rightarrow B
1. ~ A | B pre
2. {   A hip
3.   {   ~ B hip
4.     ~ A | B copie 1
5.     {   ~ A hip
6.       A copie 2
7.       @ ~e 5, 6
8.   }
9.   {   B hip
10.    ~ B copie 3
11.    @ ~e 8, 9
12.  }
13. @ |e 4, 5-7, 8-10
14. }
15. B raa 3-11
16. }
17. A -> B ->i 2-12

```

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg A \vee B \quad \frac{[\neg A]^3 \quad [A]^1}{\perp} \neg e \quad \frac{[B]^4 \quad [\neg B]^2}{\perp} \neg e}{\frac{\perp}{B} raa^2} \vee e^{3,4} \\
\frac{\frac{\perp}{B} raa^2}{A \rightarrow B} \rightarrow i^1
\end{array}$$

1.	$\neg A \vee B$	premissa
2.	A	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	$\neg A \vee B$	copie 1
5.	$\neg A$	hipótese
6.	A	copie 2
7.	\perp	$\neg e$ 5, 6
8.	B	hipótese
9.	$\neg B$	copie 3
10.	\perp	$\neg e$ 8, 9
11.	\perp	$\vee e$ 4, 5-7, 8-10
12.	B	raa 3-11
13.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-12