

Lógica para Computação

Exercícios de Dedução Natural em Lógica de Predicados

BD3 - Exercicios de Logica de Primeira Ordem

1 Questões:

1. $\forall xP(x) \vdash \neg\exists x\neg P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall xP(x)$	premissa
2.	$\exists x\neg P(x)$	hipótese
3.	$a \quad \neg P(a)$	hipótese
4.	$P(a)$	$\forall e$ 1
5.	\perp	$\neg e$ 3, 4
6.	\perp	$\exists e$ 2,3-5
7.	$\neg\exists x\neg P(x)$	$\neg i$ 2-6

2. $\neg\exists x\neg P(x) \vdash \forall xP(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\neg\exists x\neg P(x)$	premissa
2.	a	
3.	$\neg P(a)$	hipótese
4.	$\exists x\neg P(x)$	$\exists i$ 3
5.	\perp	$\neg e$ 1, 4
6.	$P(a)$	raa 3-5
7.	$\forall xP(x)$	$\forall i$ 2-6

3. $\exists xP(x) \vdash \neg\forall x\neg P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists xP(x)$	premissa
2.	$\forall x\neg P(x)$	hipótese
3.	$a \quad P(a)$	hipótese
4.	$\neg P(a)$	$\forall e$ 2
5.	\perp	$\neg e$ 3, 4
6.	\perp	$\exists e$ 1,3-5
7.	$\neg\forall x\neg P(x)$	$\neg i$ 2-6

4. $\neg\forall x\neg P(x) \vdash \exists xP(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\neg\forall x\neg P(x)$	premissa
2.	$\neg\exists xP(x)$	hipótese
3.	a	
4.	$P(a)$	hipótese
5.	$\exists xP(x)$	$\exists i$ 4
6.	\perp	$\neg e$ 2, 5
7.	$\neg P(a)$	$\neg i$ 4-6
8.	$\forall x\neg P(x)$	$\forall i$ 3-7
9.	\perp	$\neg e$ 1, 8
10.	$\exists xP(x)$	raa 2-9

5. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x))$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	premissa
2.	a	
3.	$P(a) \wedge Q(a)$	$\forall e$ 1
4.	$P(a)$	$\wedge e$ 3
5.	$\forall xP(x)$	$\forall i$ 2-4
6.	a	
7.	$P(a) \wedge Q(a)$	$\forall e$ 1
8.	$Q(a)$	$\wedge e$ 7
9.	$\forall xQ(x)$	$\forall i$ 6-8
10.	$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$	$\wedge i$ 5,9

6. $\forall x\forall yP(x, y) \vdash \forall y\forall xP(x, y)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x \forall y P(x, y)$	premissa
2.	b	
3.	a	
4.	$\forall y P(a, y)$	$\forall e$ 1
5.	$P(a, b)$	$\forall e$ 4
6.	$\forall x P(x, b)$	$\forall i$ 3-5
7.	$\forall y \forall x P(x, y)$	$\forall i$ 2-6

7. $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \forall x Q(x))$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x(P \rightarrow Q(x))$	premissa
2.	P	hipótese
3.	a	
4.	$P \rightarrow Q(a)$	$\forall e$ 1
5.	$Q(a)$	$\rightarrow e$ 2, 4
6.	$\forall x Q(x)$	$\forall i$ 3-5
7.	$P \rightarrow \forall x Q(x)$	$\rightarrow i$ 2-6

8. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	premissa
2.	$a \quad P(a) \vee Q(a)$	hipótese
3.	$P(a)$	hipótese
4.	$\exists x P(x)$	$\exists i$ 3
5.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee i$ 4
6.	$Q(a)$	hipótese
7.	$\exists x Q(x)$	$\exists i$ 6
8.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee i$ 7
9.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee e$ 2, 3-5, 6-8
10.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\exists e$ 1,2-9

9. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\neg \forall x P(x)$	premissa
2.	$\neg \exists x \neg P(x)$	hipótese
3.	a	
4.	$\neg P(a)$	hipótese
5.	$\exists x \neg P(x)$	$\exists i$ 4
6.	\perp	$\neg e$ 5, 2
7.	$P(a)$	raa 4-6
8.	$\forall x P(x)$	$\forall i$ 3-7
9.	\perp	$\neg e$ 1, 8
10.	$\exists x \neg P(x)$	raa 2-9

10. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x \neg P(x)$	premissa
2.	$\forall x P(x)$	hipótese
3.	$a \quad \neg P(a)$	hipótese
4.	$P(a)$	$\forall e$ 2
5.	\perp	$\neg e$ 3, 4
6.	\perp	$\exists e$ 1,3-5
7.	$\neg \forall x P(x)$	$\neg i$ 2-6

11. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\neg \exists x P(x)$	premissa
2.	a	
3.	$P(a)$	hipótese
4.	$\exists x P(x)$	$\exists i$ 3
5.	\perp	$\neg e$ 4, 1
6.	$\neg P(a)$	$\neg i$ 3-5
7.	$\forall x \neg P(x)$	$\forall i$ 2-6

12. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x \neg P(x)$	premissa
2.	$\exists x P(x)$	hipótese
3.	$a \quad P(a)$	hipótese
4.	$\neg P(a)$	$\forall e \ 1$
5.	\perp	$\neg e \ 3, 4$
6.	\perp	$\exists e \ 2, 3-5$
7.	$\neg \exists x P(x)$	$\neg i \ 2-6$

13. $\exists x(P(x) \wedge Q) \vdash (\exists x P(x) \wedge Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q)$	premissa
2.	$a \quad P(a) \wedge Q$	hipótese
3.	$P(a)$	$\wedge e \ 2$
4.	$\exists x P(x)$	$\exists i \ 3$
5.	$\exists x P(x)$	$\exists e \ 1, 2-4$
6.	$a \quad P(a) \wedge Q$	hipótese
7.	Q	$\wedge e \ 6$
8.	Q	$\exists e \ 1, 6-7$
9.	$\exists x P(x) \wedge Q$	$\wedge i \ 5, 8$

14. $(\exists x P(x) \wedge Q) \vdash \exists x(P(x) \wedge Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x P(x) \wedge Q$	premissa
2.	$\exists x P(x)$	$\wedge e \ 1$
3.	Q	$\wedge e \ 1$
4.	$a \quad P(a)$	hipótese
5.	$P(a) \wedge Q$	$\wedge i \ 4, 3$
6.	$\exists x(P(x) \wedge Q)$	$\exists i \ 5$
7.	$\exists x(P(x) \wedge Q)$	$\exists e \ 2, 4-6$

15. $\forall x(P(x) \vee Q) \vdash (\forall x P(x) \vee Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x(P(x) \vee Q)$	premissa
2.	$\neg(\forall x P(x) \vee Q)$	hipótese
3.	a	
4.	$P(a) \vee Q$	$\forall e \ 1$
5.	$P(a)$	hipótese
6.	Q	hipótese
7.	$\forall x P(x) \vee Q$	$\vee i \ 6$
8.	\perp	$\neg e \ 7, 2$
9.	$P(a)$	$\perp e \ 8$
10.	$P(a)$	$\vee e \ 4, 5-5, 6-9$
11.	$\forall x P(x)$	$\forall i \ 3-10$
12.	$\forall x P(x) \vee Q$	$\vee i \ 11$
13.	\perp	$\neg e \ 2, 12$
14.	$\forall x P(x) \vee Q$	raa 2-13

16. $(\forall x P(x) \vee Q) \vdash \forall x(P(x) \vee Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall x P(x) \vee Q$	premissa
2.	$\forall x P(x)$	hipótese
3.	a	
4.	$P(a)$	$\forall e \ 2$
5.	$P(a) \vee Q$	$\vee i \ 4$
6.	$\forall x(P(x) \vee Q)$	$\forall i \ 3-5$
7.	Q	hipótese
8.	a	
9.	$P(a) \vee Q$	$\vee i \ 7$
10.	$\forall x(P(x) \vee Q)$	$\forall i \ 8-9$
11.	$\forall x(P(x) \vee Q)$	$\vee e \ 1, 2-6, 7-10$

17. $\exists x(P(x) \rightarrow Q) \vdash (\forall x P(x) \rightarrow Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q)$	premissa
2.	$\forall x P(x)$	hipótese
3.	$a \quad P(a) \rightarrow Q$	hipótese
4.	$P(a)$	$\forall e \ 2$
5.	Q	$\rightarrow e \ 3, 4$
6.	Q	$\exists e \ 1, 3-5$
7.	$\forall x P(x) \rightarrow Q$	$\rightarrow i \ 2-6$

18. $(\forall xP(x) \rightarrow Q) \vdash \exists x(P(x) \rightarrow Q)$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\forall xP(x) \rightarrow Q$	premissa
2.	$\neg \exists x(P(x) \rightarrow Q)$	hipótese
3.	a	
4.	$\neg P(a)$	hipótese
5.	$P(a)$	hipótese
6.	\perp	$\neg e$ 4, 5
7.	Q	$\perp e$ 6
8.	$P(a) \rightarrow Q$	$\rightarrow i$ 5-7
9.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q)$	$\exists i$ 8
10.	\perp	$\neg e$ 2, 9
11.	$P(a)$	raa 4-10
12.	$\forall xP(x)$	$\forall i$ 3-11
13.	Q	$\rightarrow e$ 1, 12
14.	$P(a)$	hipótese
15.	Q	copie 13
16.	$P(a) \rightarrow Q$	$\rightarrow i$ 14-15
17.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q)$	$\exists i$ 16
18.	\perp	$\neg e$ 2, 17
19.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q)$	raa 2-18

19. $\exists x(P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \exists xQ(x))$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$\exists x(P \rightarrow Q(x))$	premissa
2.	P	hipótese
3.	$a \quad P \rightarrow Q(a)$	hipótese
4.	$Q(a)$	$\rightarrow e$ 2, 3
5.	$\exists xQ(x)$	$\exists i$ 4
6.	$\exists xQ(x)$	$\exists e$ 1,3-5
7.	$P \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow i$ 2-6

20. $(P \rightarrow \exists xQ(x)) \vdash \exists x(P \rightarrow Q(x))$

Demonstração no estilo Fitch em Latex:

1.	$P \rightarrow \exists xQ(x)$	premissa
2.	$\neg(\neg P \vee \exists xQ(x))$	hipótese
3.	P	hipótese
4.	$\exists xQ(x)$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$\neg P \vee \exists xQ(x)$	$\vee i$ 4
6.	\perp	$\neg e$ 5, 2
7.	$\neg P$	$\neg i$ 3-6
8.	$\neg P \vee \exists xQ(x)$	$\vee i$ 7
9.	\perp	$\neg e$ 8, 2
10.	$\neg P \vee \exists xQ(x)$	raa 2-9
11.	$\neg P$	hipótese
12.	P	hipótese
13.	\perp	$\neg e$ 11, 12
14.	$Q(a)$	$\perp e$ 13
15.	$P \rightarrow Q(a)$	$\rightarrow i$ 12-14
16.	$\exists x(P \rightarrow Q(x))$	$\exists i$ 15
17.	$\exists xQ(x)$	hipótese
18.	$a \quad Q(a)$	hipótese
19.	P	hipótese
20.	$Q(a)$	copie 18
21.	$P \rightarrow Q(a)$	$\rightarrow i$ 19-20
22.	$\exists x(P \rightarrow Q(x))$	$\exists i$ 21
23.	$\exists x(P \rightarrow Q(x))$	$\exists e$ 17,18-22
24.	$\exists x(P \rightarrow Q(x))$	$\vee e$ 10, 11-16, 17-23