

# Lógica para Computação

## Exercícios de Dedução Natural

### Exemplos de Respostas

1.  $\vdash (A \vee (A \wedge B)) \rightarrow A$

1.	$A \vee (A \wedge B)$	hipótese
2.	$A$	hipótese
3.	$A$	copie 2
4.	$A \wedge B$	hipótese
5.	$A$	$\wedge e$ 4
6.	$A$	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5
7.	$(A \vee (A \wedge B)) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-6

2.  $\vdash (A \wedge (A \vee B)) \rightarrow A$

1.	$A \wedge (A \vee B)$	hipótese
2.	$A$	$\wedge e$ 1
3.	$(A \wedge (A \vee B)) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-2

3.  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	hipótese
2.	$B$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$B \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$C$	$\rightarrow e$ 2, 4
6.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-6
8.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	$\rightarrow i$ 1-7

4.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	hipótese
2.	$A$	hipótese
3.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow e$ 2, 1
4.	$B$	$\rightarrow e$ 2, 3
5.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-4
6.	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	$\rightarrow i$ 1-5

5.  $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

1.	$\neg A \rightarrow B$	hipótese
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$\neg B$	$\rightarrow e$ 3, 2
6.	$\perp$	$\neg e$ 4, 5
7.	$A$	raa 3-6
8.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 2-7
9.	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$	$\rightarrow i$ 1-8

6.  $\vdash A \vee \neg A$

1.	$\neg(A \vee \neg A)$	hipótese
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$A \vee \neg A$	$\vee i$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 3, 1
5.	$A$	raa 2-4
6.	$A \vee \neg A$	$\vee i$ 5
7.	$\perp$	$\neg e$ 6, 1
8.	$A \vee \neg A$	raa 1-7

7.  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

1.	$\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	hipótese
2.	$A$	hipótese
3.	$B$	hipótese
4.	$A$	copie 2
5.	$B \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 3-4
6.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee i$ 5
7.	$\perp$	$\neg e$ 6, 1
8.	$B$	$\perp e$ 7
9.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-8
10.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee i$ 9
11.	$\perp$	$\neg e$ 10, 1
12.	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	raa 1-11

8.  $\vdash A \rightarrow A$

1.	$A$	hipótese
2.	$A$	copie 1
3.	$A \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-2

9.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))$

1.	$A \rightarrow B$	hipótese
2.	$C \rightarrow A$	hipótese
3.	$C \rightarrow A$	copie 2
4.	$(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)$	$\rightarrow i$ 2-3
5.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))$	$\rightarrow i$ 1-4

10.  $A \wedge B \rightarrow C \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	premissa
2.	$B$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 3,2
5.	$C$	$\rightarrow e$ 4, 1
6.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-6

11.  $B \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$

1.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	$B$	$\wedge e$ 2
4.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$A$	$\wedge e$ 2
6.	$C$	$\rightarrow e$ 5, 4
7.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 2-6

12.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	hipótese
2.	$A \rightarrow B$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 2
5.	$B \rightarrow C$	$\rightarrow e$ 3, 1
6.	$C$	$\rightarrow e$ 4, 5
7.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow i$ 3-6
8.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow i$ 2-7
9.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$\rightarrow i$ 1-8

13.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.	$A$	hipótese
2.	$B$	hipótese
3.	$A$	copie 1
4.	$B \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 2-3
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\rightarrow i$ 1-4

14.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	hipótese
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$\perp$	$\neg e$ 3, 2
5.	$B$	$\perp e$ 4
6.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$A$	$\rightarrow e$ 6, 1
8.	$\perp$	$\neg e$ 7, 2
9.	$A$	raa 2-8
10.	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	$\rightarrow i$ 1-9

15.  $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C$

1.	$A \rightarrow C$	premissa
2.	$B \rightarrow C$	premissa
3.	$A \vee B$	premissa
4.	$A$	hipótese
5.	$C$	$\rightarrow e$ 4, 1
6.	$B$	hipótese
7.	$C$	$\rightarrow e$ 6, 2
8.	$C$	$\vee e$ 3, 4-5, 6-7

16.  $A \vdash \neg \neg A$

1.	$A$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$\perp$	$\neg e$ 1, 2
4.	$\neg\neg A$	$\neg i$ 2-3

17.  $\neg\neg A \vdash A$

1.	$\neg\neg A$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$\perp$	$\neg e$ 2, 1
4.	$A$	raa 2-3

18.  $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg B$	premissa
3.	$A$	hipótese
4.	$B$	$\rightarrow e$ 1, 3
5.	$\perp$	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5

19.  $\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$

1.	$\neg B \rightarrow \neg A$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	$\neg A$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$\perp$	$\neg e$ 2, 4
6.	$B$	raa 3-5
7.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-6

20.  $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg B$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$\perp$	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5
7.	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\rightarrow i$ 2-6

21.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

1.	$\neg(A \vee B)$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$A \vee B$	$\vee i$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 3, 1
5.	$\neg A$	$\neg i$ 2-4
6.	$B$	hipótese
7.	$A \vee B$	$\vee i$ 6
8.	$\perp$	$\neg e$ 7, 1
9.	$\neg B$	$\neg i$ 6-8
10.	$\neg A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 5,9

22.  $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1.	$\neg A \wedge \neg B$	premissa
2.	$\neg A$	$\wedge e$ 1
3.	$\neg B$	$\wedge e$ 1
4.	$A \vee B$	hipótese
5.	$A$	hipótese
6.	$\perp$	$\neg e$ 5, 2
7.	$B$	hipótese
8.	$\perp$	$\neg e$ 7, 3
9.	$\perp$	$\vee e$ 4, 5-6, 7-8
10.	$\neg(A \vee B)$	$\neg i$ 4-9

23.  $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

1.	$\neg(A \wedge B)$	premissa
2.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 3
5.	$\perp$	$\neg e$ 4, 2
6.	$A$	raa 3-5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 7
9.	$\perp$	$\neg e$ 8, 2
10.	$B$	raa 7-9
11.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 6,10
12.	$\perp$	$\neg e$ 11, 1
13.	$\neg A \vee \neg B$	raa 2-12

24.  $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

1.	$\neg A \vee \neg B$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	$A$	$\wedge e$ 2
4.	$B$	$\wedge e$ 2
5.	$\neg A$	hipótese
6.	$\perp$	$\neg e$ 3, 5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	$\perp$	$\neg e$ 4, 7
9.	$\perp$	$\vee e$ 1, 5-6, 7-8
10.	$\neg(A \wedge B)$	$\neg i$ 2-9

25.  $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

1.	$A \vee (B \wedge C)$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$A \vee B$	$\vee i$ 2
4.	$A \vee C$	$\vee i$ 2
5.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge i$ 3,4
6.	$B \wedge C$	hipótese
7.	$B$	$\wedge e$ 6
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	$C$	$\wedge e$ 6
10.	$A \vee C$	$\vee i$ 9
11.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge i$ 8,10
12.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\vee e$ 1, 2-5, 6-11

26.  $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

1.	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	premissa
2.	$A \vee B$	$\wedge e$ 1
3.	$A \vee C$	$\wedge e$ 1
4.	$A$	hipótese
5.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 4
6.	$B$	hipótese
7.	$A$	hipótese
8.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 7
9.	$C$	hipótese
10.	$B \wedge C$	$\wedge i$ 6,9
11.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee i$ 10
12.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee e$ 3, 7-8, 9-11
13.	$A \vee (B \wedge C)$	$\vee e$ 2, 4-5, 6-12

27.  $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1.	$A \wedge (B \vee C)$	premissa
2.	$A$	$\wedge e$ 1
3.	$B \vee C$	$\wedge e$ 1
4.	$B$	hipótese
5.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 2,4
6.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee i$ 5
7.	$C$	hipótese
8.	$A \wedge C$	$\wedge i$ 2,7
9.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee i$ 8
10.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

28.  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$

1.	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	premissa
2.	$A \wedge B$	hipótese
3.	$A$	$\wedge e$ 2
4.	$B$	$\wedge e$ 2
5.	$B \vee C$	$\vee i$ 4
6.	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge i$ 3,5
7.	$A \wedge C$	hipótese
8.	$A$	$\wedge e$ 7
9.	$C$	$\wedge e$ 7
10.	$B \vee C$	$\vee i$ 9
11.	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge i$ 8,10
12.	$A \wedge (B \vee C)$	$\vee e$ 1, 2-6, 7-11

29.  $A \vee B, \neg B \vdash A$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$\neg B$	premissa
3.	$A$	hipótese
4.	$A$	copie 3
5.	$B$	hipótese
6.	$\perp$	$\neg e$ 5, 2
7.	$A$	$\perp e$ 6
8.	$A$	$\vee e$ 1, 3-4, 5-7

30.  $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$\perp$	$\neg e$ 2, 3
5.	$B$	$\perp e$ 4
6.	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$B$	hipótese
8.	$\neg A$	hipótese
9.	$B$	copie 7
10.	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 8-9
11.	$\neg A \rightarrow B$	$\vee e$ 1, 2-6, 7-10

31.  $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$

1.	$\neg A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg(A \vee B)$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 1
5.	$A \vee B$	$\vee i$ 4
6.	$\perp$	$\neg e$ 5, 2
7.	$A$	raa 3-6
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	$\perp$	$\neg e$ 2, 8
10.	$A \vee B$	raa 2-9

32.  $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

1.	$A \wedge B$	premissa
2.	$A$	$\wedge e$ 1
3.	$B$	$\wedge e$ 1
4.	$A \rightarrow \neg B$	hipótese
5.	$\neg B$	$\rightarrow e$ 4, 2
6.	$\perp$	$\neg e$ 5, 3
7.	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	$\neg i$ 4-6

33.  $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B$

1.	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$\perp$	$\neg e$ 2, 3
5.	$\neg B$	$\perp e$ 4
6.	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow i$ 3-5
7.	$\perp$	$\neg e$ 6, 1
8.	$A$	raa 2-7
9.	$\neg B$	hipótese
10.	$A$	hipótese
11.	$\neg B$	copie 9
12.	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow i$ 10-11
13.	$\perp$	$\neg e$ 12, 1
14.	$B$	raa 9-13
15.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 8, 14

34.  $A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$\neg A \wedge \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	$\wedge e$ 2
4.	$\neg B$	$\wedge e$ 2
5.	$A$	hipótese
6.	$\perp$	$\neg e$ 5, 3
7.	$B$	hipótese
8.	$\perp$	$\neg e$ 7, 4
9.	$\perp$	$\vee e$ 1, 5-6, 7-8
10.	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg i$ 2-9

35.  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$

1.	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	premissa
2.	$\neg(A \vee B)$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$A \vee B$	$\vee i$ 3
5.	$\perp$	$\neg e$ 4, 2
6.	$\neg A$	$\neg i$ 3-5
7.	$B$	hipótese
8.	$A \vee B$	$\vee i$ 7
9.	$\perp$	$\neg e$ 8, 2
10.	$\neg B$	$\neg i$ 7-9
11.	$\neg A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 6,10
12.	$\perp$	$\neg e$ 11, 1
13.	$A \vee B$	raa 2-12

36.  $A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$A \wedge \neg B$	hipótese
3.	$A \rightarrow B$	copie 1
4.	$A$	$\wedge e$ 2
5.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 4
6.	$\neg B$	$\wedge e$ 2
7.	$\perp$	$\neg e$ 5, 6
8.	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg i$ 2-7

37.  $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \rightarrow B$

1.	$\neg(A \wedge \neg B)$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	$A$	copie 2
5.	$A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 4,3
6.	$\neg(A \wedge \neg B)$	copie 1
7.	$\perp$	$\neg e$ 5, 6
8.	$B$	raa 3-7
9.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-8

38.  $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

1.	$A \wedge B$	premissa
2.	$\neg A \vee \neg B$	hipótese
3.	$\neg A$	hipótese
4.	$A$	$\wedge e$ 1
5.	$\perp$	$\neg e$ 3, 4
6.	$\neg B$	hipótese
7.	$B$	$\wedge e$ 1
8.	$\perp$	$\neg e$ 6, 7
9.	$\perp$	$\vee e$ 2, 3-5, 6-8
10.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg i$ 2-9

39.  $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$

1.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	premissa
2.	$\neg A$	hipótese
3.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 2
4.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	copie 1
5.	$\perp$	$\neg e$ 3, 4
6.	$A$	raa 2-5
7.	$\neg B$	hipótese
8.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee i$ 7
9.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	copie 1
10.	$\perp$	$\neg e$ 8, 9
11.	$B$	raa 7-10
12.	$A \wedge B$	$\wedge i$ 6,11

40.  $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

1.	$A \rightarrow B$	premissa
2.	$\neg(\neg A \vee B)$	hipótese
3.	$A$	hipótese
4.	$A \rightarrow B$	copie 1
5.	$B$	$\rightarrow e$ 3, 4
6.	$\neg A \vee B$	$\vee i$ 5
7.	$\neg(\neg A \vee B)$	copie 2
8.	$\perp$	$\neg e$ 6, 7
9.	$\neg A$	$\neg i$ 3-8
10.	$\neg A \vee B$	$\vee i$ 9
11.	$\perp$	$\neg e$ 2, 10
12.	$\neg A \vee B$	raa 2-11

41.  $\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B$

1.	$\neg A \vee B$	premissa
2.	$A$	hipótese
3.	$\neg B$	hipótese
4.	$\neg A \vee B$	copie 1
5.	$\neg A$	hipótese
6.	$A$	copie 2
7.	$\perp$	$\neg e$ 5, 6
8.	$B$	hipótese
9.	$\neg B$	copie 3
10.	$\perp$	$\neg e$ 8, 9
11.	$\perp$	$\vee e$ 4, 5-7, 8-10
12.	$B$	raa 3-11
13.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow i$ 2-12