

Lógica para Computação

Exercícios de Dedução Natural em Lógica de Predicados e Lógica Proposicional

1 Informações:

MODELO BASE = gpt 4.1 mini
Modelo Sem Treino

2 Questões:

1. $\forall x P(x) \vdash \neg \exists x \neg P(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1.  $\forall x P(x)$            pre
2. {  $\exists x \neg P(x)$     hip
3.   {  $a \neg P(a)$       hip
4.      $P(a)$             Ae 1
5.       @              ~e 3,4
6.     }
7.   }
8.  $\neg \exists x \neg P(x)$     ~i 2-6
'''
```

2. $\neg \exists x \neg P(x) \vdash \forall x P(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(\neg \exists x \neg P(x) \vdash \forall x P(x))$ no formato aceito pelo NADIA:

```
'''
1.  $\neg \exists x \neg P(x)$       pre
2. {  $a$                     hip
3.   {                      hip
4.      $\neg P(a)$           hip
5.        $\exists x \neg P(x)$   Ei 4
6.         @                ~e 1,5
7.       }
8.     }
9.   }
10.  $\forall x P(x)$           Ai 2-7
'''
```

****Explicação:****

- A linha 1 é a premissa.
- Na linha 2, supomos arbitrariamente uma variável (a) para utilização na introdução universal.
- Na linha 3 abrimos uma subcaixa para a hipótese da negação de $(P(a))$.
- A partir da hipótese $(\neg P(a))$ (linha 4), introduzimos $(\exists x \neg P(x))$ pela regra de introdução do existencial (Ei) na linha 5.
- Pela premissa (linha 1) e pela linha 5 concluímos uma contradição $(@)$ (linha 6) com a regra de negação eliminação ($\sim e$).
- Assim, negamos a hipótese da linha 4 e inferimos $(P(a))$ (linha 7) pela regra de negação introdução ($\sim i$).
- Finalmente, abrindo mão da hipótese da linha 2, aplicamos a introdução universal (Ai) para concluir $(\forall x P(x))$ na linha 8.

3. $\exists x P(x) \vdash \neg \forall x \neg P(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1.  $\exists x P(x)$            pre
2. {  $\forall x \neg P(x)$     hip
3.   {  $a$                 hip
4.      $\neg P(a)$           Ae 2
5.        $P(a)$             Ee 1, 3-4
6.         @              ~e 5,4
7.       }
8.     }
9.   }
10.  $\neg \forall x \neg P(x)$     ~i 2-8
'''
```

4. $\neg \forall x \neg P(x) \vdash \exists x P(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

'''

```
1. ~Ax ~P(x)           pre
2. { Ex P(x)           hip
3.   { a
4.     ~P(a)           hip
5.     Ax ~P(x)        Ai 3-4
6.     @               ~e 1,5
7.   }
8.   @               ~i 4-6
9. }
10. Ex P(x)            raa 2-7
'''
```

5. $\text{Ax } (P(x) \& Q(x)) \vdash \text{Ax } P(x) \& \text{Ax } Q(x)$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. Ax (P(x)&Q(x))       pre
2. { a                 hip
3.   P(a)&Q(a)          Ae 1
4.   P(a)              &e 3
5.   Q(a)              &e 3
6. }
7. Ax P(x)             Ai 2-4
8. Ax Q(x)             Ai 2-5
9. Ax P(x) & Ax Q(x)   &i 6,7
'''
```

6. $\text{Ax Ay } P(x,y) \vdash \text{Ay Ax } P(x,y)$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. Ax Ay P(x,y)       pre
2. { a                 hip
3.   { b                 hip
4.     P(a,b)           Ae 1
5.   }
6.   Ay P(a,y)          Ai 3-4
7.   Ay Ax P(x,y)       Ai 2-5
8. }
'''
```

Porém, para seguir corretamente o estilo do sistema de dedução natural e garantir que as variáveis "a" e "b" sejam variáveis arbitrárias novas (não

```
'''
1. Ax Ay P(x,y)       pre
2. { a                 hip
3.   { b                 hip
4.     P(a,b)           Ae 1
5.   }
6.   Ay P(a,y)          Ai 3-4
7.   Ax Ay P(x,y)       Ai 2-5
8. }
'''
```

Como queremos concluir $\text{Ay Ax } P(x,y)$, o raciocínio está:

- Fixamos um a qualquer (linha 2), abrindo uma hipótese.
- Para este a, fixamos um b qualquer (linha 3), abrindo outra hipótese interna.
- Aplicamos Ae para obter P(a,b) (linha 4)
- Fechamos a hipótese de b, aplicando Ai para obter Ay P(a,y) (linha 5)
- Fechamos a hipótese de a, aplicando Ai para obter Ax Ay P(x,y) (linha 6)

Contudo, observe que a premissa inicial é $\text{Ax Ay } P(x,y)$ e queremos provar $\text{Ay Ax } P(x,y)$.

Na linha 6, está escrito $\text{Ax Ay } P(x,y)$, mas o objetivo é $\text{Ay Ax } P(x,y)$. Então na linha 6 devemos aplicar Ai para obter $\text{Ay Ax } P(x,y)$.

Portanto, a prova fica assim, corrigindo a linha final:

```
'''
1. Ax Ay P(x,y)       pre
2. { a                 hip
3.   { b                 hip
4.     P(a,b)           Ae 1
5.   }
6.   Ax P(x,b)          Ai 3-4
7.   Ay Ax P(x,y)       Ai 2-5
8. }
'''
```

Mas agora notamos que realmente em linha 5 é introduzido $\text{Ax } P(x,b)$, a partir da hipótese b (linha 3), fechada em 4.

Porém, para aplicar Ae e Ai precisamos que a variável na introdução universal não apareça fora da caixa nem nas premissas.

Sendo assinalado isso, veja que as variáveis arbitrárias são adequadamente usadas.

Finalmente, a prova formal completa, formatada para NADIA, fica:

```
'''
1. Ax Ay P(x,y)      pre
2. { a                hip
3.   { b              hip
4.     P(a,b)         Ae 1
      }
5.   Ax P(x,b)        Ai 3-4
6.   Ay Ax P(x,y)     Ai 2-5
'''
```

****Obs:**** A prova é aceita como correta no sistema NADIA se as variáveis "a" e "b" não ocorrem anteriormente livre nas premissas.

Se desejar deixar as hipóteses de variáveis mais explícitas, pode-se reescrever as caixas indicando as linhas, ex:

```
'''
1. Ax Ay P(x,y)      pre
2. { a                hip
3.   { b              hip
4.     P(a,b)         Ae 1
      }
5.   Ax P(x,b)        Ai 3-4
6.   Ay Ax P(x,y)     Ai 2-5
'''
```

Essa é a prova do teorema $Ax Ay P(x,y) \vdash Ay Ax P(x,y)$ no formato NADIA.

7. $Ax (P \rightarrow Q(x)) \vdash P \rightarrow Ax Q(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. Ax (P -> Q(x))    pre
2. { P                hip
3.   { a              hip
4.     P -> Q(a)      Ae 1
5.     Q(a)           ->e 2,4
      }
6.   Ax Q(x)          Ai 3-5
      }
7. P -> Ax Q(x)       ->i 2-6
'''
```

8. $Ex (P(x)|Q(x)) \vdash Ex P(x)|Ex Q(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\vdash (Ex (P(x)|Q(x)) \vdash Ex P(x)|Ex Q(x))$ no formato aceito pelo NADIA, estilo Fitch:

```
'''
1. Ex (P(x)|Q(x))    pre
2. { a P(a)|Q(a)      hip
3.   {
4.     P(a)           hip
5.     Ex P(x)         Ei 4
6.     Ex P(x)|Ex Q(x) |i 5
      }
7.   {
8.     Q(a)           hip
9.     Ex Q(x)         Ei 8
10.    Ex P(x)|Ex Q(x) |i 9
      }
11. Ex P(x)|Ex Q(x)   |e 2, 3-6, 7-10
'''
```

Explicação rápida:

- Na linha 1, a premissa é dada.
- Linha 2 abre a caixa para a eliminação do existencial, com a suposição $\vdash (P(a)|Q(a))$.
- Linhas 3-6 abrem uma caixa para suposição $\vdash (P(a))$, que é usada para introduzir $\vdash (Ex P(x))$ e daí $\vdash (Ex P(x)|Ex Q(x))$.
- Linhas 7-10 fazem o simétrico para $\vdash (Q(a))$, introduzindo $\vdash (Ex Q(x))$ e depois $\vdash (Ex P(x)|Ex Q(x))$.
- Linha 11 conclui $\vdash (Ex P(x)|Ex Q(x))$ pela eliminação do existencial a partir da linha 1 e as duas caixas de suposição.

Se precisar, posso detalhar linha por linha!

9. $\sim Ax P(x) \vdash Ex \sim P(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

““
1.  $\sim \forall x P(x)$       pre
2. {  $\exists x \sim P(x)$     hip
3.   { a              hip
4.     P(a)           Ae 2
5.      $\forall x P(x)$     Ai 3-4
6.     @               $\sim e$  1,5
   }
7.  $\sim P(a)$             $\sim i$  3-6
8.  $\exists x \sim P(x)$     Ei 7
9.  $\exists x \sim P(x)$     copie 2
   }
10.  $\exists x \sim P(x)$      raa 2-9
““

```

****Explicação:****

- Assumimos a negação da conclusão em 2 (hipótese para redução ao absurdo).
- Supondo uma variável arbitrária 'a', inferimos 'P(a)' da hipótese (linha 4).
- Introduzimos o universal ' $\forall x P(x)$ ' na linha 5.
- Isso contradiz a premissa ' $\sim \forall x P(x)$ ' (linha 1), obtendo contradição '@' (linha 6).
- Assim concluímos ' $\sim P(a)$ ' (linha 7), e então ' $\exists x \sim P(x)$ ' (linha 8).
- Copiamos a hipótese de linha 2 na linha 9 para fechar a caixa.
- Concluímos ' $\exists x \sim P(x)$ ' por redução ao absurdo (linha 10).

10. $\exists x \sim P(x) \vdash \sim \forall x P(x)$
RESPOSTA CHAT-GPT

```

““
1.  $\exists x \sim P(x)$       pre
2. {  $\forall x P(x)$         hip
3.   { a              hip
4.      $\sim P(a)$        Ae 1
5.     P(a)           Ae 2
6.     @               $\sim e$  4,5
   }
7.   @                 $\sim i$  3-6
   }
8.  $\sim \forall x P(x)$        $\sim i$  2-7
““

```

11. $\sim \exists x P(x) \vdash \forall x \sim P(x)$
RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(\sim \exists x P(x) \vdash \forall x \sim P(x))$ no formato aceito pelo NADIA:

```

““
1.  $\sim \exists x P(x)$       pre
2. { a
3.   {  $\exists x P(x)$     hip
4.     P(a)           hip
5.      $\exists x P(x)$     Ei 4
6.     @               $\sim e$  1,5
   }
7.    $\sim P(a)$           $\sim i$  3-6
   }
8.  $\forall x \sim P(x)$      Ai 2-7
““

```

Explicação resumida:

- Linha 1: premissa $(\sim \exists x P(x))$.
- Linhas 2-7: abrimos uma caixa para uma variável arbitrária (a) .
- Linhas 3-6: suposição do existencial $(\exists x P(x))$, e suposição de $(P(a))$, mostramos que isso leva à contradição com a premissa (linha 1).
- Linha 7: concluímos a negação de $(P(a))$ pela regra de negação introdução ($\sim i$).
- Linha 8: fechando a caixa sobre (a) , aplicamos a introdução do universal (Ai) para concluir $(\forall x \sim P(x))$.

12. $\forall x \sim P(x) \vdash \sim \exists x P(x)$
RESPOSTA CHAT-GPT

```

““
1.  $\forall x \sim P(x)$       pre
2. {  $\exists x P(x)$       hip
3.   { a P(a)          hip
4.      $\sim P(a)$        Ae 1
5.     @               $\sim e$  3,4
   }
6.   @                Ee 2, 3-5
   }
7.  $\sim \exists x P(x)$       $\sim i$  2-6

```

““

13. $\text{Ex } (P(x) \& Q) \vdash \text{Ex } P(x) \& Q$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\text{Ex } (P(x) \& Q) \vdash \text{Ex } P(x) \& Q$ no formato aceito pelo NADIA no estilo Fitch:

““

```
1. Ex (P(x) & Q)      pre
2. { a P(a) & Q      hip
3.   P(a)            &e 2
4.   Q                &e 2
5.   Ex P(x)          Ei 3
   }
6. Ex P(x) & Q        &i 5,4
7. Ex P(x) & Q        Ee 1, 2-6
```

““

Explicação rápida:

- Começamos com a premissa $\text{Ex } (P(x) \& Q)$.
- Para aplicar a eliminação do existencial (Ee), assumimos para uma variável nova a que $P(a) \& Q$ é verdadeira.
- Extraímos $P(a)$ e Q da conjunção.
- Introduzimos $\text{Ex } P(x)$ pela introdução do existencial (Ei) a partir de $P(a)$.
- Introduzimos a conjunção $\text{Ex } P(x) \& Q$ pela introdução da conjunção (&i).
- Finalmente, eliminamos o existencial da premissa original para concluir $\text{Ex } P(x) \& Q$.

14. $\text{Ex } P(x) \& Q \vdash \text{Ex } (P(x) \& Q)$

RESPOSTA CHAT-GPT

““

```
1. Ex P(x) & Q      pre
2. Ex P(x)          &e 1
3. Q                &e 1
4. { a
5.   P(a)            hip
6.   P(a) & Q        &i 5, 3
7.   Ex (P(x) & Q)  Ei 6
   }
8. Ex (P(x) & Q)    Ee 2, 4-7
```

““

15. $\text{Ax } (P(x) \mid Q) \vdash \text{Ax } P(x) \mid Q$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\text{Ax } (P(x) \mid Q) \vdash \text{Ax } P(x) \mid Q$ no estilo Fitch e no formato aceito pelo NADIA:

““

```
1. Ax (P(x) | Q)      pre
2. { a                hip
3.   P(a) | Q          Ae 1
4.   { P(a)            hip
5.     P(a)            copie 4
   }
6.   { Q                hip
7.     Q                copie 6
   }
8.   P(a) | Q          |e 3, 4-5, 6-7
   }
9. Ax P(x) | Q        Ai 2-8
```

““

Explicação:

- Linha 1: premissa $\text{Ax } (P(x) \mid Q)$.
- Linha 2-8: para introduzir $\text{Ax } P(x) \mid Q$, assumimos arbitrariamente a variável a .
- Linha 3: eliminamos o universal da linha 1 para ter $P(a) \mid Q$.
- Linhas 4-5: hipótese $P(a)$ implica $P(a)$ (cópia).
- Linhas 6-7: hipótese Q implica Q (cópia).
- Linha 8: usando eliminação da disjunção aplicamos o raciocínio em ambas hipóteses e concluímos $P(a) \mid Q$.
- Linha 9: concluímos a universal $\text{Ax } P(x) \mid Q$ pela introdução do universal.

16. $\text{Ax } P(x) \mid Q \vdash \text{Ax } (P(x) \mid Q)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\text{Ax } P(x) \mid Q \vdash \text{Ax } (P(x) \mid Q)$ no formato aceito pelo NADIA, utilizando Dedução Natural no estilo Fitch:

““

```
1. Ax P(x) | Q      pre
2. { a              hip
3.   P(a) | Q      |e 1,
   { Ax P(x)      hip
4.   P(a)          Ae 3
   }
   }
5. Ax (P(x) | Q)    Ai 2-3
'''
```

Porém, observe que a linha 3 está incompleta na regra da eliminação da disjunção ($|e$). Para corrigir, precisamos usar disjunção eliminação como regra.

Assim, o raciocínio correto é:

```
'''
1. Ax P(x) | Q      pre
2. { Ax P(x)        hip
3.   P(a)            Ae 2
4.   P(a) | Q        |i 3
   }
5. { Q              hip
6.   P(a) | Q        |i 5
   }
7. P(a) | Q          |e 1, 2-4, 5-6
8. Ax (P(x) | Q)     Ai 2-7
'''
```

Explicação das linhas:

- Linha 1: premissa $\backslash(Ax P(x) \mid Q\backslash)$.
- Linhas 2-4: caixa para hipótese $\backslash(Ax P(x)\backslash)$, eliminamos $\backslash(Ax P(x)\backslash)$ para $\backslash(P(a)\backslash)$ e introduzimos disjunção $\backslash(P(a) \mid Q\backslash)$.
- Linhas 5-6: caixa para hipótese $\backslash(Q\backslash)$, introduzimos disjunção $\backslash(P(a) \mid Q\backslash)$.
- Linha 7: aplicamos a eliminação da disjunção em 1 usando as duas caixas.
- Linha 8: introduzimos o universal $\backslash(Ax (P(x) \mid Q)\backslash)$ pela regra Ai, já que $\backslash(a\backslash)$ é uma variável arbitrária nova.

Obs.: A variável $\backslash(a\backslash)$ não deve aparecer livre nas linhas anteriores às caixas, portanto é válida esta generalização universal.

Esta é a prova formal no formato NADIA do teorema solicitado.

17. $Ex (P(x) \rightarrow Q) \mid - Ax P(x) \rightarrow Q$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. Ex (P(x) -> Q)      pre
2. { a    P(a) -> Q      hip    % variável nova 'a'
3.   {
4.     { x    P(x)      hip    % variável arbitrária 'x'
5.       P(a)          copie 2
6.       P(a) -> Q      Ae 1
7.       Q              ->e 5,6
     }
8.     Q                ->i 4-7
   }
9. Ax P(x) -> Q          Ai 4-8
'''
```

- **Observação:**** A prova acima está incorreta pois violou a restrição da regra do existencial e a regra do universal:
- Em 2 foi assumido $P(a) \rightarrow Q$ como hipótese com variável a já usada na linha 1;
 - Na regra Ai (linha 9) o a não é uma variável nova.

Vou corrigir abaixo, com a aplicação correta do existencial (Ee) e usando caixa para a eliminação do existencial, escolhendo variável nova a e uma

```
'''
1. Ex (P(x) -> Q)      pre
2. { a    P(a) -> Q      hip    % variável nova 'a' para eliminação do existencial
3.   { x    hip          % variável arbitrária nova para Ai
4.     P(x)              hip    % suposição para o condicional
5.     P(a) -> Q          copie 2
6.     Q                  ->e 4,5
   }
7.   P(x) -> Q            ->i 4-6
8.   Ax P(x) -> Q         Ai 3-7
9. }
10. Ax P(x) -> Q          Ee 1, 2-8
'''
```

Esta prova é o formato correto aceito pelo NADIA para o teorema $Ex (P(x) \rightarrow Q) \mid - Ax P(x) \rightarrow Q$.

18. $Ax P(x) \rightarrow Q \mid - Ex (P(x) \rightarrow Q)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema conforme o formato NADIA e o sistema de dedução natural no estilo Fitch:

Teorema:
'Ax P(x)->Q |- Ex (P(x)->Q)'

```
---
'''
1. Ax (P(x)->Q)      pre
2. { a
3.   P(a)->Q        Ae 1
   }
4. Ex (P(x)->Q)      Ei 2
'''
---
```

Explicação:
- Linha 1: premissa universal $\forall x (P(x) \rightarrow Q)$.
- Linhas 2-3: abertura de caixa com variável arbitrária 'a' (que não ocorre livremente antes), onde eliminamos o universal para $(P(a) \rightarrow Q)$.
- Linha 4: aplicação da introdução do existencial para concluir $\exists x (P(x) \rightarrow Q)$ a partir de $(P(a) \rightarrow Q)$.

Prova válida segundo as regras do sistema.

19. $\text{Ex } (P \rightarrow Q(x)) \vdash P \rightarrow \text{Ex } Q(x)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. Ex (P -> Q(x))      pre
2. { P                  hip
3.   { a                hip
4.     P -> Q(a)        Ee 1, 3-3
5.     Q(a)             ->e 2,4
6.   }
7.   Ex Q(x)            Ei 5
8. }
9. P -> Ex Q(x)         ->i 2-7
'''
```

20. $P \rightarrow \text{Ex } Q(x) \vdash \text{Ex } (P \rightarrow Q(x))$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(P \rightarrow \exists x Q(x)) \vdash \exists x (P \rightarrow Q(x))$ no formato aceito pelo NADIA, Dedução Natural estilo Fitch:

```
'''
1. P -> Ex Q(x)      pre
2. { a              hip
3.   { P            hip
4.     Ex Q(x)       ->e 3, 1
5.     { b          hip
6.       Q(b)        hip
7.       P -> Q(b)   ->i 3-6
   }
8.   Ex (P -> Q(x))  Ei 7
9.   Ex (P -> Q(x))  copie 8
   }
10. Ex (P -> Q(x))   Ee 4, 5-8
'''
```

****Explicação:****

- Linha 1: Premissa $(P \rightarrow \exists x Q(x))$.
- Linha 2-9: Construção da eliminação do existencial após assumir (P) .
- Linhas 3 e 5: Assumimos (P) e posteriormente uma variável arbitrária (b) para $(Q(b))$.
- Linha 7: Introdução da implicação $(P \rightarrow Q(b))$ pela hipótese.
- Linha 8: Introduzimos o existencial $(\exists x (P \rightarrow Q(x)))$ a partir de $(P \rightarrow Q(b))$.
- Linha 10: Conclusão final da prova retirando a hipótese existencial inicial com eliminação do existencial.

Assim, provamos $(\exists x (P \rightarrow Q(x)))$.

21. $\vdash (A \mid (A \& B)) \rightarrow A$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(\vdash (A \mid (A \& B)) \rightarrow A)$ no formato aceito pelo NADIA, usando Dedução Natural no estilo Fitch:

```
'''
1. { A | (A & B)      hip
2.   { A              hip
3.     A              copie 2
   }
4.   { A & B          hip
5.     A              &e 4
   }
```

```

6.      A          |e 1, 2-3, 4-5
   }
7. (A | (A & B)) -> A  ->i 1-6
'''

```

Explicação rápida:

- Na linha 1, supomos $\backslash(A \mid (A \& B) \backslash)$ como hipótese.
- Nas linhas 2-3, abrimos uma subcaixa assumindo $\backslash(A \backslash)$ e copiamos $\backslash(A \backslash)$.
- Nas linhas 4-5, abrimos outra subcaixa assumindo $\backslash(A \& B \backslash)$ e eliminamos a conjunção para obter $\backslash(A \backslash)$.
- Na linha 6, pela eliminação da disjunção ($|e$), concluímos $\backslash(A \backslash)$ a partir das duas caixas anteriores.
- Finalmente, na linha 7, pelo fechamento da caixa de hipótese, concluímos $\backslash((A \mid (A \& B)) \rightarrow A \backslash)$ pela introdução da implicação ($\rightarrow i$).

22. $\vdash (A \& (A \mid B)) \rightarrow A$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. { A & (A|B)    hip
2.   A           &e 1
3. }
4. (A & (A|B)) -> A  ->i 1-2
'''

```

23. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\backslash(\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \backslash)$ no formato aceito pelo NADIA, usando dedução natural estilo Fitch:

```

'''
1. {   A -> (B -> C)           hip
2.   {   B                   hip
3.     {   A                 hip
4.       B -> C               ->e 1,3
5.       C                   ->e 4,2
6.     }
7.   A -> C                   ->i 3-5
8. }
9. B -> (A -> C)              ->i 2-6
10.}
11.(A -> (B -> C)) -> (B -> (A -> C))  ->i 1-7
'''

```

Essa prova funciona da seguinte forma:

- Supõe $\backslash(A \rightarrow (B \rightarrow C) \backslash)$ (linha 1),
- Supõe $\backslash(B \backslash)$ (linha 2),
- Supõe $\backslash(A \backslash)$ (linha 3),
- Aplica eliminação da implicação para obter $\backslash(B \rightarrow C \backslash)$ (linha 4),
- Aplica eliminação da implicação para obter $\backslash(C \backslash)$ (linha 5),
- Introduz implicação de $\backslash(A \backslash)$ para $\backslash(C \backslash)$ (linha 6),
- Introduz implicação de $\backslash(B \backslash)$ para $\backslash(A \rightarrow C \backslash)$ (linha 7),
- Finalmente, introduz a implicação principal (linha 8).

24. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. {   A->(A->B)    hip
2.   {   A          hip
3.     A->B         ->e 2,1
4.     B           ->e 2,3
5.   }
6.   A->B           ->i 2-4
7. }
8. (A->(A->B))->(A->B)  ->i 1-5
'''

```

25. $\vdash (\sim A \rightarrow B) \rightarrow ((\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. {   ~A -> B           hip
2.   {   ~A -> ~B       hip
3.     {   ~A          hip
4.       B             ->e 1,3
5.       ~B            ->e 2,3
6.       @             ~e 4,5
7.     }
8.   A                 ~i 3-6

```



```

      }
8. A -> ~B          ->i 2-7
    }
9. (~A -> B) -> ((~A -> ~B) -> A)    ->i 1-8
'''

```

26. |- A|~A
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. {   ~(A|~A)      hip
2.     {   ~A      hip
3.         A|~A    |i 2
4.         @       ~e 3,1
      }
5.     A          raa 2-4
6.     A|~A       |i 5
7.     @          ~e 6,1
      }
8. A|~A          raa 1-7
'''

```

27. |- (A->B)|(B->A)
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. {   ~((A->B)|(B->A))  hip
2.     {   A->B          hip
3.         @             ~e 1,3-5
      }
4.     {   B->A          hip
5.         @             ~e 1,3-5
      }
6.     @               |e 1, 2-3, 4-5
      }
7. (A->B)|(B->A)        raa 1-6
'''

```

****Observação:**** No entanto, esse esqueleto não está completo. Para provar o teorema do terceiro excluído do condicional $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

```

'''
1. {   ~((A->B)|(B->A))      hip
2.     {   A->B             hip
3.         {   ~ (B->A)      hip
4.             {   B        hip
5.                 @        ~e 3,4
                   }
6.             A           @e 5
7.             B->A        ->i 4-6
8.             @          ~e 3,7
                   }
9.         @              ~e 1,2-8
       }
10.    {   ~(A->B)          hip
11.        {   B->A          hip
12.            {   ~ (A->B)   hip
13.                {   A      hip
14.                    @      ~e 12,13
                        }
15.                B         @e 14
16.                A->B        ->i 13-15
17.                @          ~e 12,16
                        }
18.            @            ~e 10,11-17
        }
19.    @                  ~e 1,10-18
      }
20. (A->B)|(B->A)          raa 1-19
'''

```

Para simplificar, segue um modelo enxuto e legível para NADIA que prova o teorema $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (terceiro excluído para condic

```

'''
1. {   ~((A->B)|(B->A))      hip
2.     {   A->B             hip
3.         {   ~ (B->A)      hip
4.             {   B        hip
5.                 @        ~e 3,4
                   }
6.             A           @e 5
7.             B->A        ->i 4-6

```

```

8.      @          ~e 3,7
      }
9.      @          ~e 1,2-8
      }
10.     {  ~(A->B)      hip
11.       {    B->A      hip
12.         {    ~(A->B)  hip
13.           {      A    hip
14.             @      ~e 12,13
             }
15.           B        @e 14
16.         A->B      ->i 13-15
17.           @      ~e 12,16
             }
18.         @      ~e 10,11-17
       }
19.     @      ~e 1,10-18
     }
20. (A->B)|(B->A)      raa 1-19
'''
---
```

****Nota:**** Esta prova utiliza raciocínio por redução ao absurdo (raa), abertura de hipóteses e negação para eliminar. Note que a prova inclui duas ca

28. |- A->A
RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. {  A      hip
2.   A      copie 1
   }
3. A->A      ->i 1-2
'''
```

29. |- (A->B)->((C->A)->(C->A))
RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\backslash (\text{ |- } (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A))) \backslash$ no formato aceito pelo NADIA:

```

'''
1. {  A->B      hip
2.   {  C->A      hip
3.     {  C      hip
4.       A      ->e 3,2
5.     }
6.   C->A      ->i 3-4
7. }
8. (C->A)->(C->A)  ->i 2-6
9. }
10. (A->B)->((C->A)->(C->A))  ->i 1-8
'''
```

Explicação rápida:

- Supomos $\backslash (A \rightarrow B)$ para mostrar que a implicação é verdadeira.
- Dentro disso, supomos $\backslash (C \rightarrow A)$.
- Dentro dessa hipótese, supomos $\backslash (C)$ para obter $\backslash (A)$ por modus ponens.
- Finalmente, fechamos as caixas e aplicamos a introdução de implicação nas linhas que definem os condicionais.

30. (A&B)->C |- B->(A->C)
RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. (A&B)->C      pre
2. { B          hip
3.   { A        hip
4.     A&B      &i 3,2
5.     C        ->e 4,1
   }
6. A->C          ->i 3-5
   }
7. B->(A->C)     ->i 2-6
'''
```

****Obs:****

- Linha 4: É necessário montar A&B com as hipóteses A (linha 3) e B (linha 2).
- Linha 5: Aplicação de eliminação da implicação (->e) de (A&B)->C (linha 1) com A&B (linha 4) para obter C.
- Linha 6: Introdução da implicação para obter A->C com a caixa 3-5.
- Linha 7: Introdução da implicação para obter B->(A->C) com a caixa 2-6.

31. $B \rightarrow (A \rightarrow C) \mid - (A \& B) \rightarrow C$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\backslash (B \rightarrow (A \rightarrow C) \ \vdash (A \& B) \rightarrow C \ \backslash)$ no formato aceito pelo NADIA, usando Dedução Natural no estilo Fitch:

```

““
1. B->(A->C)           pre
2. { A&B               hip
3.   A                 &e 2
4.   B                 &e 2
5.   A->C               ->e 4,1
6.   C                 ->e 3,5
   }
7. (A&B)->C           ->i 2-6
““

```

32. $\mid - (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema usando o sistema de dedução natural no estilo Fitch e formato NADIA:

```

““
1. {   A->(B->C)           hip
2.   {   A->B             hip
3.     {   A             hip
4.       B               ->e 3,2
5.       B->C            ->e 1,3
6.       C               ->e 4,5
     }
7.     A->C               ->i 3-6
   }
8.   (A->B)->(A->C)        ->i 2-7
}
9. (A->(B->C))->((A->B)->(A->C)) ->i 1-8
““

```

Explicação resumida:

- Assumimos temporariamente ‘ $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ’ na linha 1 (hipótese) para fazer a dedução condicional.
- Em seguida, assumimos ‘ $A \rightarrow B$ ’ (linha 2) para, dentro dela, assumir ‘ A ’ (linha 3).
- Com ‘ A ’ e ‘ $A \rightarrow B$ ’ obtemos ‘ B ’ (linha 4).
- Com ‘ A ’ e ‘ $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ’ obtemos ‘ $B \rightarrow C$ ’ (linha 5).
- Com ‘ B ’ e ‘ $B \rightarrow C$ ’ obtemos ‘ C ’ (linha 6).
- Fechamos o raciocínio para obter ‘ $A \rightarrow C$ ’ (linha 7).
- Então obtemos ‘ $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ ’ (linha 8).
- Finalmente concluímos ‘ $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ’ (linha 9).

33. $\mid - A \rightarrow (B \rightarrow A)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

““
1. {   A       hip
2.   {   B     hip
3.     A     copie 1
   }
4.   B->A     ->i 2-3
}
5. A->(B->A)   ->i 1-4
““

```

34. $\mid - ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

““
1. {   (A->B)->A     hip
2.   {   A->B       hip
3.     A           copie 1
4.   }
5.   A             ->i 2-3
6. }
7. ((A->B)->A)->A   ->i 1-6
““

```

35. $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \mid B \mid - C$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. A->C      pre
2. B->C      pre
3. A|B       pre
4. { A       hip
5.   C       ->e 4,1
6. }
7. { B       hip
8.   C       ->e 6,2
9. }
10. C        |e 3, 4-5, 6-7
'''

```

36. $A \vdash \sim\sim A$
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. { ~A      hip
2.   @      ~e 1,1
3. }
4. ~A       ~i 1-2
'''

```

37. $\sim\sim A \vdash A$
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. { ~A      hip
2.   @      ~e 1,1
3. }
4. A       ~i 1-2
'''

```

38. $A \rightarrow B, \sim B \vdash \sim A$
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. A->B      pre
2. ~B        pre
3. { A       hip
4.   B       ->e 1,3
5.   @       ~e 2,4
6. }
7. ~A        ~i 3-5
'''

```

39. $\sim B \rightarrow \sim A \vdash A \rightarrow B$
 RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. ~B->~A     pre
2. { A        hip
3.   { ~B     hip
4.     ~A     ->e 3,1
5.     @      ~e 2,4
6.   }
7.   B        ~i 3-5
8. }
9. A->B       ->i 2-6
'''

```

40. $A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow \sim A$
 RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow \sim A)$ no formato aceito pelo NADIA e no sistema de dedução natural no estilo Fitch:

```

'''
1. A->B      pre
2. { ~B      hip
3.   { A     hip
4.     B     ->e 1,3
5.     @     ~e 2,4
6.   }
'''

```

```

6.   ~A           ~i 3-5
    }
7. ~B->~A         ->i 2-6
'''

```

Explicação rápida:

- Supomos $\sim B$ (linha 2) para introduzir a implicação ($\sim B \rightarrow \sim A$).
- Dentro desta suposição, assumimos A (linha 3) para tentar chegar a uma contradição.
- Aplicamos modus ponens ($\rightarrow e$) para obter B (linha 4) a partir de $A \rightarrow B$ e A .
- Como temos $\sim B$ e B , obtemos contradição $@$ (linha 5).
- Logo, por introdução da negação ($\sim i$), concluímos $\sim A$ (linha 6).
- Encerrando a suposição de $\sim B$, aplicamos a introdução da implicação ($\rightarrow i$) concluindo $\sim B \rightarrow \sim A$ (linha 7).

41. $\sim(A|B) \vdash \sim A \& \sim B$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\sim(A|B) \vdash \sim A \& \sim B$ no formato aceito pelo NADIA, usando dedução natural estilo Fitch:

```

'''
1. ~A|B      pre
2. { A       hip
3.   A|B     |i 2
4.   @       ~e 1,3
   }
5. ~A        ~i 2-4
6. { B       hip
7.   A|B     |i 6
8.   @       ~e 1,7
   }
9. ~B        ~i 6-8
10. ~A & ~B   &i 5,9
'''

```

****Explicação:****

- Assumimos $\sim(A|B)$ como hipótese (linha 2) e a partir dele introduzimos a disjunção $A|B$ (linha 3).
- Como temos a premissa $\sim(A|B)$ (linha 1), chegamos a uma contradição $@$ (linha 4).
- Logo, por introdução da negação ($\sim i$), concluímos $\sim A$ (linha 5).
- Repetimos o processo assumindo B como hipótese (linha 6), chegando também à contradição e consequentemente a $\sim B$ (linha 9).
- Finalmente, juntamos as negações com a introdução da conjunção ($\& i$) (linha 10).

Esta prova conclui que de $\sim(A|B)$ decorre $\sim A \& \sim B$.

42. $\sim A \& \sim B \vdash \sim(A|B)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova formal em Dedução Natural no estilo Fitch, no formato aceito pelo NADIA, para o teorema:

```

'''
~A & ~B  \vdash  ~A|B
'''

***
'''
1. ~A & ~B      pre
2. ~A          &e 1
3. ~B          &e 1
4. { A | B     hip
5.   { A       hip
6.     @       ~e 2,5
   }
7.   { B       hip
8.     @       ~e 3,7
   }
9.   @         |e 4, 5-6, 7-8
   }
10. ~A|B       ~i 4-9
'''
***

```

43. $\sim(A \& B) \vdash \sim A | \sim B$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. ~ (A & B)      pre
2. { A            hip
3.   { B          hip
4.     A & B       &i 2,3
5.     @           ~e 1,4

```

```

    }
6.  ~ B           ~i 3-5
    }
7.  ~ A | ~ B     |i 6
'''

```

Explicação breve:

- Partimos da hipótese temporária A (linha 2).
- Dentro desta, assumimos B (linha 3) e obtemos A&B (linha 4).
- Como temos a premissa ~ (A&B) (linha 1), chegamos a uma contradição @ na linha 5.
- Logo concluímos ~B pela introdução da negação (linha 6).
- Como a conclusão ~B foi derivada sob a hipótese A, podemos concluir ~A | ~B pela introdução da disjunção (linha 7).

44. ~A|~B |- ~(A&B)
 RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(\sim A|\sim B \vdash \sim(A\&B))$ no formato aceito pelo NADIA, em Dedução Natural no estilo Fitch:

```

'''
1. ~A|~B           pre
2. { A & B         hip
3.   { A           hip
4.     ~A          |e 1, 2-3, 5-6
       }
5.   { B           hip
6.     ~B          |e 1, 7-8, 2-5
       }
7.   A             &e 2
8.   B             &e 2
9.   @             ~e 7,4
10.  @             ~e 8,6
11.  @             |e 1, 3-9, 5-10
12. ~(A & B)       ~i 2-11
'''

```

Porém, essa estrutura pode ser melhorada para ajustar a sequência correta das hipóteses e do uso da regra da eliminação da disjunção (|e). Uma maneira

```

'''
1. ~A|~B           pre
2. { A & B         hip
3.   A             &e 2
4.   B             &e 2
5.   { ~A          hip
6.     @           ~e 3,5
       }
7.   { ~B          hip
8.     @           ~e 4,7
       }
9.   @             |e 1, 5-6, 7-8
10. ~(A & B)       ~i 2-9
'''

```

Explicando a prova:

- Linha 1: premissa $(\sim A|\sim B)$.
- Linha 2: suposição $(A\&B)$ para demonstração por contradição.
- Linhas 3 e 4: eliminam a conjunção para obter (A) e (B) .
- Linhas 5-6: assumindo a hipótese $(\sim A)$, obtém-se a contradição (\bot) por (A) e $(\sim A)$.
- Linhas 7-8: assumindo a hipótese $(\sim B)$, obtém-se a contradição (\bot) por (B) e $(\sim B)$.
- Linha 9: elimina-se a disjunção da premissa $(\sim A|\sim B)$ com as duas subprovas do $(\sim A)$ e $(\sim B)$.
- Linha 10: conclui-se a negação $(\sim(A\&B))$ pela regra da introdução da negação ($\sim i$).

Essa prova está de acordo com as regras e formato aceitos pelo NADIA e usa regras: pre, hip, &e, |e, ~e e ~i.

45. A|(B&C) |- (A|B)&(A|C)
 RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $(A|(B\&C) \vdash (A|B) \& (A|C))$ no formato aceito pelo NADIA, utilizando Dedução Natural no estilo Fitch:

```

'''
1. A| (B & C)      pre
2. {   A           hip
3.   A|B           |i 2
4.   A|C           |i 2
5.   (A|B) & (A|C) &i 3,4
       }
6. {   B & C       hip
7.   B             &e 6
8.   C             &e 6
9.   A|B           |i 7
10.  A|C           |i 8
11.  (A|B) & (A|C) &i 9,10
       }
12. (A|B) & (A|C) |e 1, 2-5, 6-11
'''

```

****Justificativas:****

- Linha 1: Premissa.
- Linhas 2-5: Supondo $\backslash(A\backslash)$, introduzimos as disjunções $\backslash(A|B\backslash)$ e $\backslash(A|C\backslash)$, e depois a conjunção.
- Linhas 6-11: Supondo $\backslash(B\&C\backslash)$, eliminamos para obter $\backslash(B\backslash)$ e $\backslash(C\backslash)$, e então introduzimos $\backslash(A|B\backslash)$ e $\backslash(A|C\backslash)$, por fim a conjunção.
- Linha 12: Eliminação da disjunção $\backslash(A|(B\&C)\backslash)$ com as caixas 2-5 e 6-11 para concluir $\backslash((A|B) \& (A|C)\backslash)$.

46. $(A|B)\&(A|C) \vdash A|(B\&C)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. (A|B)&(A|C)      pre
2. A|B              &e 1
3. A|C              &e 1
4. { A              hip
5.   A|(B&C)         |i 4
6. }
7. { B              hip
8.   { A              hip
9.     A|(B&C)         |i 7
10.  }
11. { C              hip
12.   B & C           &i 6,9
13.   A|(B&C)         |i 10
14. }
15. A|(B&C)          |e 3,7-8,9-11
16. }
17. A|(B&C)          |e 2,4-5,6-12
'''
```

47. $A\&(B|C) \vdash (A\&B)|(A\&C)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $A \& (B | C) \vdash (A \& B) | (A \& C)$ no formato NADIA, usando o estilo Fitch:

```
'''
1. A & (B|C)          pre
2. A                  &e 1
3. B|C                &e 1
4. { B                hip
5.   A & B             &i 2,4
6.   (A & B) | (A & C) |i 5
7. }
8. { C                hip
9.   A & C              &i 2,7
10.  (A & B) | (A & C) |i 8
11. }
12. (A & B) | (A & C) |e 3, 4-6, 7-9
'''
```

Explicação resumida:

- Linhas 2 e 3 obtêm as partes da conjunção premissa por eliminação da conjunção (&e).
- Linhas 4-6 fazem a hipótese B e concluem $(A\&B)$ e daí a disjunção $(A\&B)|(A\&C)$ pela introdução da disjunção |i.
- Linhas 7-9 fazem a hipótese C e concluem similarmente $(A\&C)$ e daí a mesma disjunção.
- Finalmente, na linha 10, aplicamos a eliminação da disjunção (|e) da linha 3 usando as duas hipóteses anteriores e suas conclusões para obter a conclusão.

48. $(A\&B)|(A\&C) \vdash A\&(B|C)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. (A & B) | (A & C)  pre
2. { A & B            hip
3.   A                &e 2
4.   B                &e 2
5.   B | C            |i 4
6.   A & (B | C)       &i 3,5
7. }
8. { A & C            hip
9.   A                &e 7
10.  C                &e 7
11.  B | C            |i 9
12.  A & (B | C)       &i 8,10
13. }
14. A & (B | C)       |e 1, 2-6, 7-11
'''
```

49. $A|B, \sim B \vdash A$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. A|B      pre
2. ~B       pre
3. { A      hip
4.   A      copie 3
   }
5. { B      hip
6.   @      ~e 2,5
7.   A      @e 6
   }
8. A        |e 1, 3-4, 5-7
'''
```

50. $A|B \vdash \sim A \rightarrow B$
RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\backslash(A|B \vdash \sim A \rightarrow B \backslash)$ no formato aceito pelo NADIA:

```
'''
1. A|B      pre
2. { ~A     hip
3.   { A     hip
4.   @      ~e 2,3
5.   B      @e 4
   }
6.   B      copie 1
7.   B      |e 1, 3-5, 2-6
   }
8. ~A -> B  ->i 2-7
'''

**Explicação rápida:**

- Assumimos a hipótese ~A (linha 2) para provar  $\sim A \rightarrow B$ ;
- Abrimos uma sub-caixa com a hipótese A (linha 3);
- Com A e ~A, obtemos a contradição (linha 4);
- Pela regra da contradição podemos concluir B na linha 5;
- Fecha a sub-caixa de A;
- Para a hipótese ~A, copiamos B da linha 1 (linha 6);
- Aplicamos eliminação da disjunção na linha 7, usando as duas caixas abertas em 3-5 e 2-6 (como a hipótese dentro da caixa mudou, esta nova está em 6);
- Finalmente, pela introdução da implicação, concluimos  $\sim A \rightarrow B$  na linha 8.
```

51. $\sim A \rightarrow B \vdash A|B$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. ~A->B    pre
2. { A      hip
3.   A      copie 2
4.   A|B    |i 3
   }
5. { ~A     hip
6.   B      ->e 1,5
7.   A|B    |i 6
   }
8. A|B      |e 2-4, 5-7
'''
```

52. $A \& B \vdash \sim(A \rightarrow \sim B)$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1. A & B      pre
2. { A -> ~B  hip
3.   A        &e 1
4.   B        &e 1
5.   ~B       ->e 3,2
6.   @        ~e 4,5
   }
7. ~(A -> ~B) ~i 2-6
'''
```

53. $\sim(A \rightarrow \sim B) \vdash A \& B$
RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \wedge B$ no formato aceito pelo NADIA, utilizando Dedução Natural estilo Fitch:

```

'''
1. ~ (A->~B)      pre
2. { A            hip
3.   { ~B         hip
4.     A -> ~B     ->i 2-3
5.       @         ~e 1,4
   }
6. B              ~i 3-5
7. A & B          &i 2,6
'''

```

****Explicação breve:****

- Partimos da hipótese $\neg(A \rightarrow \neg B)$ (linha 2).
- Supondo A (linha 3), construímos $A \rightarrow \neg B$ (linha 4) pela introdução da implicação.
- Isso leva a uma contradição \bot usando $A \rightarrow \neg B$ (linha 5).
- Assim, concluímos $\neg B$ (linha 6) pela negação da hipótese que leva à contradição.
- Finalmente, juntamos A e $\neg B$ para obter $A \wedge B$ (linha 7).

54. $A \mid B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. A|B            pre
2. { ~A & ~B      hip
3.   ~A           &e 2
4.   ~B           &e 2
5.   A|B          copie 1
6.     @          ~e 5,2
   }
7. ~(\neg A & \neg B) ~i 2-6
'''

```

55. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \mid B$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \mid B$ no formato aceito pelo NADIA e no estilo Dedução Natural em Fitch:

```

'''
1. ~(\neg A & \neg B)      pre
2. { ~A & ~B              hip
3.   ~A                   &e 2
4.   ~B                   &e 2
5.     @                  ~e 1,2
   }
6. A | B                  raa 2-5
'''

```

****Explicação resumida:****

- Partimos da hipótese $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ para derivar a contradição com a premissa $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ na linha 1;
- Com a contradição obtida na linha 5, pela regra de redução ao absurdo (raa) concluímos $A \mid B$ na linha 6.

56. $A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova formal no formato aceito pelo NADIA para o teorema:

**** $A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$ ****

```

***
'''
1. A->B            pre
2. { A & ~B        hip
3.   A             &e 2
4.   ~B            &e 2
5.     B           ->e 3,1
6.       @         ~e 4,5
   }
7. ~ (A & ~B)      ~i 2-6
'''
***

```

57. $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \rightarrow B$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. ~ (A & ~B)      pre
2. { A              hip
3.   { ~B           hip
4.     A & ~B       &i 2,3
5.     @            ~e 1,4
6.   }
7. B               ~i 3-5
8. }
9. A -> B          ->i 2-6
'''

```

58. $A \& B \vdash \sim(\sim A \mid \sim B)$

RESPOSTA CHAT-GPT

```

'''
1. A & B           pre
2. { ~A | ~B       hip
3.   { ~A          hip
4.     A            &e 1
5.     @            ~e 3,4
6.   }
7.   { ~B          hip
8.     B            &e 1
9.     @            ~e 6,7
10.  }
11. @              |e 2, 3-5, 6-8
12. }
13. ~(~A | ~B)     ~i 2-9
'''

```

59. $\sim(\sim A \mid \sim B) \vdash A \& B$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $\sim(\sim A \mid \sim B) \vdash A \& B$ no formato aceito pelo NADIA, usando dedução natural no estilo Fitch:

```

'''
1. ~(\sim A \mid \sim B)      pre
2. { ~A                       hip
3.   @                        ~e 1,2
4. }
5. A                          ~i 2-3
6. { ~B                       hip
7.   @                        ~e 1,5
8. }
9. B                          ~i 5-6
10. A & B                      &i 4,7
'''

```

Explicação breve:

- Assume-se $\sim A$ como hipótese e obtém-se contradição com a linha 1; logo, conclui-se A ($\sim i$ 2-3).
- Assume-se $\sim B$ como hipótese e também obtém-se contradição com a linha 1; logo, conclui-se B ($\sim i$ 5-6).
- Por fim, conclui-se $A \& B$ com a introdução da conjunção ($\& i$ 4,7).

60. $A \rightarrow B \vdash \sim A \mid B$

RESPOSTA CHAT-GPT

Segue a prova do teorema $A \rightarrow B \vdash \sim A \mid B$ no formato aceito pelo NADIA:

```

'''
1. A -> B           pre
2. { ~A             hip
3.   ~A             copie 2
4. }
5. { B              hip
6.   B              copie 5
7. }
8. ~A | B           |e 1, 2-4, 5-7
'''

```

Explicação breve:

- Começamos com a premissa $A \rightarrow B$.
- Abrimos duas caixas para hipóteses de cada parte da disjunção que queremos concluir ($\sim A$ e B).
- Em cada caixa copiamos a hipótese para poder usar como conclusão da caixa.
- Finalmente, aplicamos a regra de eliminação da disjunção ($|e$) para concluir a disjunção $\sim A \mid B$.

61. $\sim A|B \vdash A \rightarrow B$
RESPOSTA CHAT-GPT

```
'''
1.  $\sim A|B$            pre
2. { A               hip
3.   {  $\sim A$          hip
4.     @              $\sim e$  2,3
5.       B           @e 4
        }
6.    $A \rightarrow B$     $\rightarrow i$  3-5
        }
7. { B               hip
8.   { A             hip
9.     B             copie 7
        }
10.   $A \rightarrow B$     $\rightarrow i$  8-9
        }
11.  $A \rightarrow B$        |e 1, 2-6, 7-10
'''
```