Aprendizado de Máquina e Reconhecimento de Padrões (UTFPR/CPGEI) - Lista de Exercícios 1

Tópicos: Introdução à análise de padrões.

Parte 1 – Exercícios Teóricos:

1) Considerar uma família com duas crianças. Assumir que existe a mesma chance de cada criança ser menino ou menina. Qual a probabilidade de ambas serem meninos, dado que:

    a) a mais velha é menino;
    b) pelo menos um deles é menino.

2) Considere duas urnas: Urna I contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Urna II contém 3 bolas brancas e 7 bolas pretas. Uma urna é escolhida aleatoriamente e uma bola é tirada dela. Qual a probabilidade da bola ser branca, supondo P(C1) = P(C2) = 1/2 as probabilidades de escolher uma das urnas.

3) O médico informa que ele tem uma boa e uma má notícia.

    a) A má notícia é que você recebeu o resultado positivo de um teste para uma doença grave.
    b) O teste tem um desempenho de 99% de acerto. Isso significa que a probabilidade de receber um resultado positivo, dado que você tem a doença é de 0,98. Isso também é válido quando você recebe um resultado negativo, dado que você não tem a doença.
    c) A boa notícia é que a doença é bastante rara e somente uma em 12.000 pessoas sofre dessa doença.

Quais as chances de você realmente ter a doença?

Parte 2 – Exercícios Práticos:

1) Em um problema com três classes (bidimensional), os vetores de característica em cada classe são normalmente distribuídos de acordo com a seguinte matriz de covariância:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Os vetores de média de cada classe são $[0.1, 0.1]^T$, $[2.1, 1.9]^T$, $[1.5, 2.0]^T$.

    a) Escreva uma função para plotar as três classes (usando cores diferentes), com um número de exemplos por classe a sua escolha.
    b) Como você faria para construir um classificador capaz de separar essas classes (intuitivamente)?
    c) Qual a relação dos parâmetros (média e covariância) com o desempenho desse classificador?

2) Gere N = 500 dados bidimensionais distribuídos seguindo uma pdf Gaussiana $N(m,S)$, com médias m_1=[0, 0]^T; m_2=[-1, -2]^T; m_3=[-3, -3]^T. Para cada vetor de média, gere as distribuições, considere as seguintes combinações para a matriz de covariância:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \sigma_{12} = 0$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.2, \sigma_{12} = 0$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2, \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_1^2 = 0.2, \sigma_2^2 = 2, \sigma_{12} = 0$$
$$\sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 0.2, \sigma_{12} = 0$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \sigma_{12} = 0.5$$
$$\sigma_1^2 = 0.3, \sigma_2^2 = 2, \sigma_{12} = 0.5$$
$$\sigma_1^2 = 0.3, \sigma_2^2 = 2, \sigma_{12} = -0.5$$

3) Calcule o valor de uma pdf Gaussiana $N(m,S)$, em x_1=[0.2,1.3]^T e x_2=[2.2, -1.3]^T, sendo

$$m = [0,\ 1]^T,\ \ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O que significa este valor?