# Lista 1 - Sistemas Baseados em Conhecimento (MAC0444)

Leonardo Heidi Almeida Murakami
NUSP: 11260186

9 de setembro de 2025

## 1. Exercicio 1

Para cada caso, definimos uma interpretação $I = (D, \pi)$, onde $D$ é o domínio e $\pi$ é a função de interpretação que mapeia o predicado $P$ e as constantes $a, b$.

### (i) (a) falso, (b) e (c) verdadeiros

Neste caso, precisamos de uma relação que falhe na transitividade mas seja anti-simétrica e satisfaça a terceira condição.

- **Domínio** $D$: $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$
- **Interpretação** $\pi$:
  - $\pi(a) = c_1$
  - $\pi(b) = c_2$
  - $\pi(P) = \{(c_2, c_3), (c_3, c_4)\}$

**Verificação**:

- **(a)** $\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$ **é FALSA.**
  Para $x = c_2, y = c_3, z = c_4$, temos que $P(c_2, c_3)$ é verdadeiro e $P(c_3, c_4)$ é verdadeiro, mas $P(c_2, c_4)$ é falso. Portanto, a implicação é falsa e a sentença é falsa.
- **(b)** $\forall x \forall y((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y)$ **é VERDADEIRA.**
  A relação é anti-simétrica. Não existe nenhum par $(x, y)$ em $\pi(P)$ tal que $(y, x)$ também esteja em $\pi(P)$ para $x \neq y$. O antecedente da implicação é sempre falso, tornando-a verdadeira.
- **(c)** $\forall x \forall y(P(a, y) \rightarrow P(x, b))$ **é VERDADEIRA.**
  Substituindo as constantes, a sentença se torna $\forall x \forall y(P(c_1, y) \rightarrow P(x, c_2))$. O antecedente $P(c_1, y)$ é sempre falso para qualquer $y \in D$, pois não há pares em $\pi(P)$ que comecem com $c_1$. Portanto, a implicação é vacuamente verdadeira para todos $x, y$.

### (ii) (b) falso, (a) e (c) verdadeiros

Queremos que $P$ não seja anti-simétrica, mas seja transitiva e satisfaça a condição (c).

- **Domínio** $D$: $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$
- **Interpretação** $\pi$:
  - $\pi(a) = c_1$
  - $\pi(b) = c_2$
  - $\pi(P) = \{(c_3, c_4), (c_4, c_3), (c_2, c_2), (c_3, c_3), (c_4, c_4), (c_1, c_2), (c_3, c_2), (c_4, c_2)\}$

**Verificação**:

- **(b)** $\forall x \forall y((P(x,y) \land P(y,x)) \to x = y)$ **é FALSA.**
  Para $x = c_3, y = c_4$, temos que $P(c_3, c_4)$ é verdadeiro e $P(c_4, c_3)$ é verdadeiro, mas $c_3 \neq c_4$. Portanto, a implicação é falsa e a sentença é falsa.

- **(a)** $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(y,z)) \to P(x,z))$ **é VERDADEIRA.**
  A relação é transitiva. Por exemplo, $P(c_3, c_4)$ e $P(c_4, c_3)$ implicam $P(c_3, c_3)$, que é verdadeiro. $P(c_4, c_3)$ e $P(c_3, c_4)$ implicam $P(c_4, c_4)$, que é verdadeiro. $P(c_4, c_3)$ e $P(c_3, c_2)$ implicam $P(c_4, c_2)$, que é verdadeiro. A transitividade se mantém para todas as combinações.

- **(c)** $\forall x \forall y(P(a,y) \to P(x,b))$ **é VERDADEIRA.**
  Substituindo, $\forall x \forall y(P(c_1, y) \to P(x, c_2))$. O único valor de $y$ que torna $P(c_1, y)$ verdadeiro é $y = c_2$. Assim, a sentença exige que, se $P(c_1, c_2)$ for verdadeiro (o que é), então $P(x, c_2)$ deve ser verdadeiro para todo $x \in D$. De fato, os pares $(c_1, c_2), (c_2, c_2), (c_3, c_2), (c_4, c_2)$ estão na relação. Com a definição de $\pi(P)$ incluindo $(c_1, c_2), (c_2, c_2), (c_3, c_2), (c_4, c_2)$, a condição é satisfeita.

## (iii) (c) falso, (a) e (b) verdadeiros

Queremos que $P$ seja transitiva e anti-simétrica, mas que a condição (c) seja falsa. A relação “$(\leq)$” sobre números parece um bom candidato.

- **Domínio** $D$: $\{1, 2, 3, 4\}$
- **Interpretação** $\pi$:
  - $\pi(a) = 1$
  - $\pi(b) = 3$
  - $\pi(P) = \{(x, y) \in D \times D \mid x \leq y\}$

**Verificação**:

- **(c)** $\forall x \forall y(P(a,y) \to P(x,b))$ **é FALSA.**
  Substituindo, $\forall x \forall y(1 \leq y \to x \leq 3)$. Para mostrar que esta sentença universal é falsa, precisamos encontrar um contra-exemplo, ou seja, valores para $x$ e $y$ que tornem a implicação falsa. Seja $y = 2$ e $x = 4$. O antecedente $1 \leq 2$ é verdadeiro, mas o consequente $4 \leq 3$ é falso. Como a implicação é falsa para esta instância, a sentença universal é falsa.

- **(a)** $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \land P(y,z)) \to P(x,z))$ **é VERDADEIRA.**
  A relação $\leq$ é transitiva. Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

- **(b)** $\forall x \forall y((P(x,y) \land P(y,x)) \to x = y)$ **é VERDADEIRA.**
  A relação $\leq$ é anti-simétrica. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então necessariamente $x = y$.

# 2. Exercicio 2

## (a) Representação do Conhecimento

Definimos os seguintes predicados e constantes:

- **Constantes**: $A$ (Antônio), $M$ (Maria), $J$ (João), $Chuva$, $Neve$.
- **Predicados**:
  - $Membro(x)$: $x$ é membro do Clube Alpino.
  - $Esquiador(x)$: $x$ é esquiador.
  - $Alpinista(x)$: $x$ é alpinista.
  - $Gosta(x, y)$: $x$ gosta de $y$.

As sentenças são representadas em lógica de primeira ordem da seguinte forma:

1. $Membro(A) \wedge Membro(M) \wedge Membro(J)$
2. $\forall x((Membro(x) \wedge \neg Esquiador(x)) \rightarrow Alpinista(x))$
3. $\forall x(Alpinista(x) \rightarrow \neg Gosta(x, Chuva))$
4. $\forall x(\neg Gosta(x, Neve) \rightarrow \neg Esquiador(x))$
5. $\forall y(Gosta(A, y) \rightarrow \neg Gosta(M, y))$
6. $\forall y(\neg Gosta(A, y) \rightarrow Gosta(M, y))$
7. $Gosta(A, Chuva) \wedge Gosta(A, Neve)$

## (b) Prova Semântica

Queremos provar que $\exists x(Membro(x) \wedge Alpinista(x))$ é uma consequência lógica do conhecimento (KB). Uma prova semântica demonstra que qualquer modelo que satisfaça o KB também deve satisfazer a conclusão.

1. De (7), sabemos $Gosta(A, Neve)$.
2. De (5), instanciando $y = Neve$, temos $Gosta(A, Neve) \rightarrow \neg Gosta(M, Neve)$.
3. Aplicando Modus Ponens com (1) e (2), obtemos $\neg Gosta(M, Neve)$.
4. De (4), instanciando $x = M$, temos $\neg Gosta(M, Neve) \rightarrow \neg Esquiador(M)$.
5. Por Modus Ponens em (3) e (4), concluímos $\neg Esquiador(M)$.
6. De (1), sabemos $Membro(M)$.
7. Agora temos a conjunção $Membro(M) \wedge \neg Esquiador(M)$.
8. De (2), instanciando $x = M$, temos $(Membro(M) \wedge \neg Esquiador(M)) \rightarrow Alpinista(M)$.
9. Novamente utilizando Modus Ponens em (7) e (8), concluímos $Alpinista(M)$.
10. Como temos $Membro(M)$ (de 6) e $Alpinista(M)$ (de 9), temos $Membro(M) \wedge Alpinista(M)$.
11. Portanto, demonstramos que $Membro(M) \wedge Alpinista(M)$ é verdadeiro, o que nos permite concluir $\exists x(Membro(x) \wedge Alpinista(x))$, já que Maria é uma instância concreta de membro e também é alpinista.

Assim, a existência de um membro alpinista é uma consequência lógica do KB.

## (c) Contra-exemplo

Se a sentença (5) for removida, a prova anterior não é mais válida. Para mostrar isso, construímos um modelo (um contra-exemplo) no qual o KB modificado é verdadeiro, mas a conclusão $\exists x(Membro(x) \wedge Alpinista(x))$ é falsa. A falsidade da conclusão é equivalente a $\forall x(Membro(x) \rightarrow \neg Alpinista(x))$.

**Modelo de Contra-exemplo**:

- **Domínio**: $\{A, M, J, Chuva, Neve\}$
- **Extensão dos Predicados**:
  - $Membro = \{A, M, J\}$
  - $Alpinista = \emptyset$ (para tornar a conclusão falsa)
  - $Esquiador = \{A, M, J\}$
  - $Gosta = \{(A, Chuva), (A, Neve), (M, Neve), (J, Neve)\}$

**Verificação do Modelo**:

- (1) $Membro(A), Membro(M), Membro(J)$: Verdadeiro.
- (2) $\forall x((Membro(x) \wedge \neg Esquiador(x)) \rightarrow Alpinista(x))$: Verdadeiro, pois para todos os membros, $\neg Esquiador(x)$ é falso, tornando o antecedente falso.
- (3) $\forall x(Alpinista(x) \rightarrow \neg Gosta(x, Chuva))$: Verdadeiro, pois *Alpinista* é um conjunto vazio, tornando o antecedente sempre falso.
- (4) $\forall x(\neg Gosta(x, Neve) \rightarrow \neg Esquiador(x))$: Verdadeiro, pois todos os membros gostam de neve, então o antecedente é sempre falso para eles.
- (6) $\forall y(\neg Gosta(A, y) \rightarrow Gosta(M, y))$: Verdadeiro. Antônio gosta de Chuva e Neve. Para $y = Chuva$ e $y = Neve$, o antecedente $\neg Gosta(A, y)$ é falso.
- (7) $Gosta(A, Chuva) \wedge Gosta(A, Neve)$: Verdadeiro.

O KB modificado é satisfeito neste modelo, mas a conclusão $\exists x(Membro(x) \wedge Alpinista(x))$ é falsa, pois não há alpinistas. Portanto, a prova não é mais possível.

## (d) Resolução com Extração de Resposta

O objetivo é responder à pergunta: "Quem é o membro do Clube Alpino que é alpinista mas não esquiador?". A consulta é $\exists k(Membro(k) \wedge Alpinista(k) \wedge \neg Esquiador(k))$.

**Passo 1: Convertemos a KB para CNF**

C1: $Membro(A)$

C2: $Membro(M)$

C3: $Membro(J)$

C4: $\neg Membro(x) \vee Esquiador(x) \vee Alpinista(x)$

C5: $\neg Alpinista(y) \vee \neg Gosta(y, Chuva)$

C6: $Gosta(z, Neve) \vee \neg Esquiador(z)$

C7: $\neg Gosta(A, w) \vee \neg Gosta(M, w)$

C8: $Gosta(A, w') \vee Gosta(M, w')$

C9: $Gosta(A, Chuva)$

C10: $Gosta(A, Neve)$

**Passo 2: Negar a consulta e adicionar o literal de resposta** A negação da consulta é $\forall k \neg(Membro(k) \wedge Alpinista(k) \wedge \neg Esquiador(k))$, que em forma clausal com o literal de resposta $Ans(k)$ é:

CQ: $\neg Membro(k) \vee \neg Alpinista(k) \vee Esquiador(k) \vee Ans(k)$

**Passo 3: Provar por Resolução**

1. $[C7, C10$ com $\{w/Neve\}] \rightarrow R1 : \neg Gosta(M, Neve)$
2. $[R1, C6$ com $\{z/M\}] \rightarrow R2 : \neg Esquiador(M)$
3. $[R2, CQ$ com $\{k/M\}] \rightarrow R3 : \neg Membro(M) \vee \neg Alpinista(M) \vee Ans(M)$
4. $[R3, C2] \rightarrow R4 : \neg Alpinista(M) \vee Ans(M)$
5. $[R2, C4$ com $\{x/M\}] \rightarrow R5 : \neg Membro(M) \vee Alpinista(M)$
6. $[R5, C2] \rightarrow R6 : Alpinista(M)$
7. $[R6, R4] \rightarrow R7 : Ans(M)$

A resolução deriva a cláusula $Ans(M)$, o que significa que **Maria** é o membro do Clube Alpino que é alpinista mas não esquiadora.