Relatório EP2 - Comprimir e Conquistar

MAC0210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Leonardo Heidi Almeida Murakami
11260186

3 de maio de 2025

Sumário

1 Introdução

Este exercício-programa (EP) tem como objetivo principal a generalização e aplicação de dois métodos de interpolação polinomial – bilinear e bicúbica – para o caso bivariado, especificamente no contexto de imagens digitais. O processo experimental envolve a compressão de uma imagem original através da amostragem de uma fração dos seus pixels, seguida pela sua reconstrução (descompressão) utilizando os métodos de interpolação mencionados. A avaliação da eficácia destes métodos será realizada através da comparação dos resultados obtidos em dois cenários distintos: primeiro, utilizando imagens geradas artificialmente por funções matemáticas conhecidas (o "Zoológico"), e segundo, aplicando as técnicas em imagens reais, como fotografias ou desenhos (a "Selva"). Esta abordagem permitirá analisar o desempenho e as limitações das interpolações bilinear e bicúbica em diferentes tipos de dados visuais.

2 Detalhes da Implementação

A implementação das funcionalidades de compressão, descompressão e cálculo de erro foi realizada em Python, utilizando as bibliotecas NumPy para manipulação eficiente de arrays e Pillow (PIL) para leitura e escrita de imagens. As funções foram projetadas para suportar diferentes formatos de imagem, incluindo tons de cinza (1 canal), tons de cinza com alfa (2 canais), RGB (3 canais) e RGBA (4 canais).

2.1 Função `compress.py::compress`

Esta função é responsável por comprimir uma imagem quadrada de entrada.

- **Leitura e Validação:** A imagem original é lida usando `PIL.Image.open` e convertida para um array NumPy. O código verifica se a imagem é quadrada e trata imagens em tons de cinza (2D array) redimensionando-as para terem uma dimensão de canal (3D array).
- **Cálculo Dimensões:** O tamanho da imagem comprimida ($n \times n$) é calculado com base no tamanho original ($p \times p$) e na taxa de compressão k, usando a fórmula $n = \lfloor (p + k)/(k + 1) \rfloor$.
- **Seleção de Pixels:** Um novo array NumPy (`compressed`) é inicializado com zeros. A função itera pelas dimensões da imagem comprimida ($n \times n$) e copia os pixels da imagem original cujos índices (i_{orig}, j_{orig}) são múltiplos de $(k + 1)$, ou seja, $i_{orig} = i \times (k + 1)$ e $j_{orig} = j \times (k + 1)$.
- **Tratamento de Canais:** A cópia dos pixels é feita para todos os canais da imagem.
- **Salvamento:** O array resultante é redimensionado de volta para 2D se for o caso de tons de cinza. A imagem comprimida é então salva como 'compressed.png' usando `PIL.Image.fromarray` e `save`, garantindo qualidade máxima e sem otimizações que poderiam alterar os dados.

2.2 Função `decompress.py::decompress`

Esta função reconstrói a imagem para suas dimensões originais a partir da imagem comprimida, utilizando interpolação.

- **Leitura e Preparação:** A imagem comprimida é lida e convertida para um array NumPy. O tratamento para imagens em tons de cinza é aplicado. As dimensões da imagem final ($p \times p$) são calculadas a partir do tamanho da imagem comprimida ($n \times n$) e do fator k, como $p = n + (n-1)k$.
- **Inicialização:** Um array NumPy (`decompressed`) com as dimensões finais $p \times p$ e o número correto de canais é inicializado com zeros.
- **Posicionamento dos Pixels Conhecidos:** Os pixels da imagem comprimida são colocados em suas posições correspondentes no array `decompressed`, que são os índices múltiplos de $(k+1)$.
- **Loop de Interpolação:** A função itera sobre a imagem descomprimida em quadrados de tamanho $h \times h$. Para cada canal da imagem e para cada quadrado:
  - Os índices (i_1, j_1) e (i_2, j_2) dos pixels conhecidos (da imagem comprimida) que definem o quadrado contendo o bloco $h \times h$ atual são determinados.
  - Dependendo do parâmetro `method` (1 para bilinear, 2 para bicúbica), a função apropriada para calcular os coeficientes de interpolação é chamada, passando o array comprimido (do canal atual), os índices dos cantos e o parâmetro h.
  - A função itera sobre todos os pixels (x, y) dentro do bloco $h \times h$. Se o pixel (x, y) não for um dos pixels originais conhecidos, seu valor é calculado usando a função de interpolação correspondente (`decompress_bilinear` ou `decompress_bicubic`) com os coeficientes calculados e as coordenadas relativas ao canto inferior esquerdo (x_{base}, y_{base}) do quadrado definido pelos pixels conhecidos.
- **Salvamento:** Após preencher todos os pixels e canais, o array resultante é formatado (se necessário, para tons de cinza) e salvo como 'decompressed.png'.

2.2.1 Interpolação Bilinear (`bilinear.py`)

- **Cálculo dos Coeficientes:** A função `calculate_bilinear_coefficients` recebe os valores dos quatro pixels conhecidos $(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ que formam o quadrado de interpolação e o espaçamento h. Ela monta o sistema linear $H\alpha = F$, onde H é a matriz de base da interpolação bilinear e F é o vetor com os valores dos pixels. O sistema é resolvido usando `numpy.linalg.solve` para encontrar o vetor de coeficientes $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3]$.
- **Interpolação do Pixel:** A função `decompress_bilinear` calcula o valor interpolado para um pixel (x, y) usando a fórmula $p(x, y) = a_0 + a_1\Delta x + a_2\Delta y + a_3\Delta x\Delta y$, onde $\Delta x = x - x_{base}$ e $\Delta y = y - y_{base}$. O resultado é limitado ao intervalo [0, 255] e arredondado para o inteiro mais próximo.

2.2.2 Interpolação Bicúbica (`bicubic.py`)

- **Aproximação das Derivadas:** A função `calculate_bicubic_coefficients` primeiro define funções auxiliares (`get_fx`, `get_fy`, `get_fxy`) para calcular as derivadas parciais de primeira ordem (f_x, f_y) e a derivada mista de segunda ordem (f_{xy}) nos quatro cantos do quadrado de interpolação. Estas funções utilizam diferenças finitas:
  - Diferenças centrais são usadas para pontos interiores: $g'(x) \approx \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}$.
  - Diferenças unilaterais (progressivas ou regressivas) são usadas para pontos nas bordas da imagem: $g'(x) \approx \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ou $g'(x) \approx \frac{g(x)-g(x-h)}{h}$.
  - A derivada mista f_{xy} é calculada aplicando a aproximação da derivada em uma direção sobre a aproximação da derivada na outra direção

    $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_j)}{2h}$$

    também com tratamento explícito das bordas.

- **Cálculo dos Coeficientes:** Os valores da função e das derivadas aproximadas nos quatro cantos são organizados em uma matriz F_{matrix} 4×4. Os 16 coeficientes α da interpolação bicúbica são então encontrados resolvendo o sistema matricial $\alpha = B^{-1} F_{matrix} (B^T)^{-1}$, onde B é a matriz de base da interpolação cúbica unidimensional e B^{-1} é sua inversa, calculada usando `numpy.linalg.inv`.

  $$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^3 \end{bmatrix}$$

- **Interpolação do Pixel:** A função `decompress_bicubic` calcula o valor interpolado para um pixel (x, y) usando a forma matricial $p(x, y) = \mathbf{X} \alpha \mathbf{Y}^T$, onde $\mathbf{x} = [1, \Delta x, (\Delta x)^2, (\Delta x)^3]$ e $\mathbf{y} = [1, \Delta y, (\Delta y)^2, (\Delta y)^3]$, com $\Delta x = x - x_{base}$ e $\Delta y = y - y_{base}$. O resultado é limitado (clipped) ao intervalo [0, 255] e arredondado.

2.3 Função `calculateError.py::calculateError`

Esta função calcula o erro quadrático médio da raiz (RMSE) entre a imagem original e a imagem descomprimida.

- **Leitura e Preparação:** As imagens original e descomprimida são lidas e convertidas para arrays NumPy. O tratamento para tons de cinza (adicionando uma dimensão de canal) é aplicado. Uma verificação garante que ambas as imagens têm o mesmo número de canais.

- **Cálculo por Canal:** A função itera por cada canal das imagens. Para cada canal, calcula-se a diferença ao quadrado entre os pixels correspondentes das duas imagens. A média dessas diferenças ao quadrado (MSE - Mean Squared Error) é calculada, e o erro para o canal é a raiz quadrada do MSE.

- **Erro Médio:** O erro final retornado pela função é a média aritmética dos erros calculados para cada canal individualmente.

3 Parte 1: O Zoológico (Função Geradora)

Nesta parte, os métodos de interpolação foram testados em imagens geradas por funções matemáticas conhecidas, mapeando um domínio $(x, y) \in [0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$ para cores RGB. As imagens base utilizada por todos os testes foram geradas com resolução $p = 257$ pixels e funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como:

`default_rgb_function`

$$f(x, y) = \left(\sin(x), \frac{\sin(y) + \sin(x)}{2}, \sin(x)\right)$$

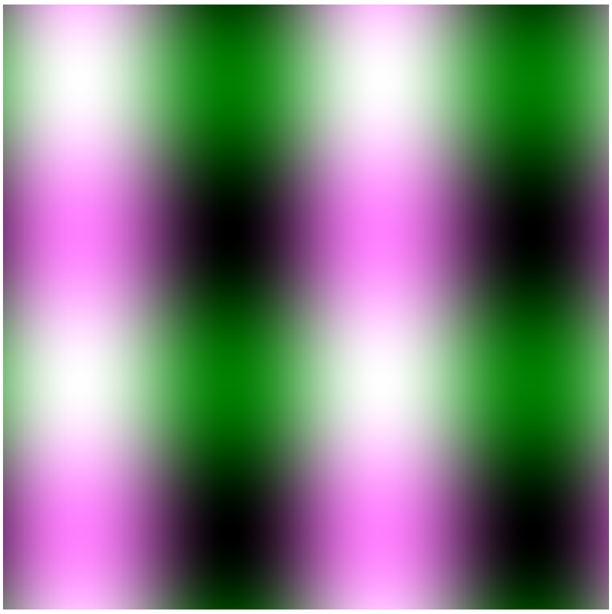


Figura 1: Imagem Original Gerada pela Função Padrão ($p = 257$)

`test_rgb_function`

$$f(x,y) = \left(\frac{\cos(x) - \sin(y)}{2}, \sin(y)\cos(x), \sin(x)^2\right)$$

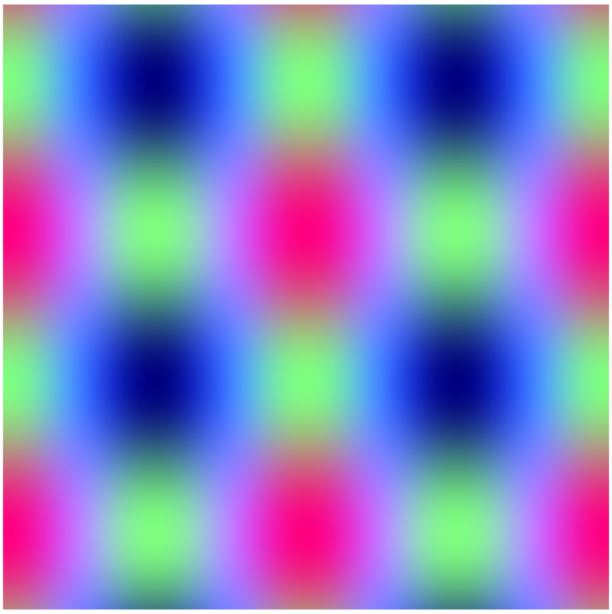


Figura 2: Imagem Original Gerada pela Função Padrão ($p = 257$)

`non_c2_rgb_function`

$$f(x,y) = \left(|\sin(x)| - 0.5, \frac{|x-\pi|}{\pi}, \max(\sin(y), \cos(x))\right)$$

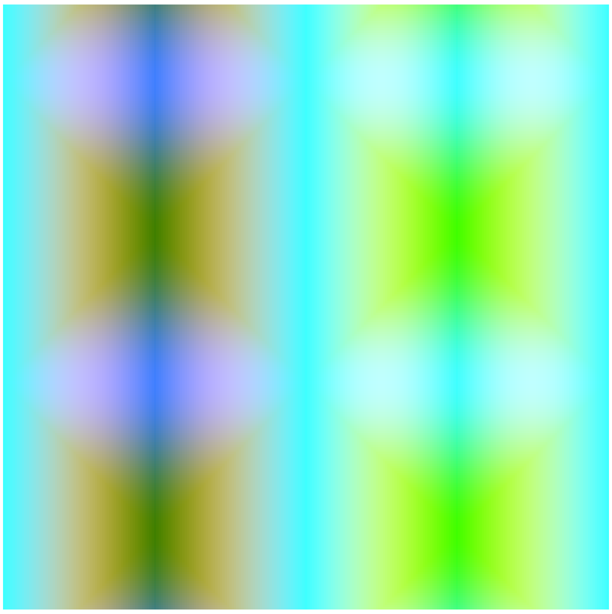
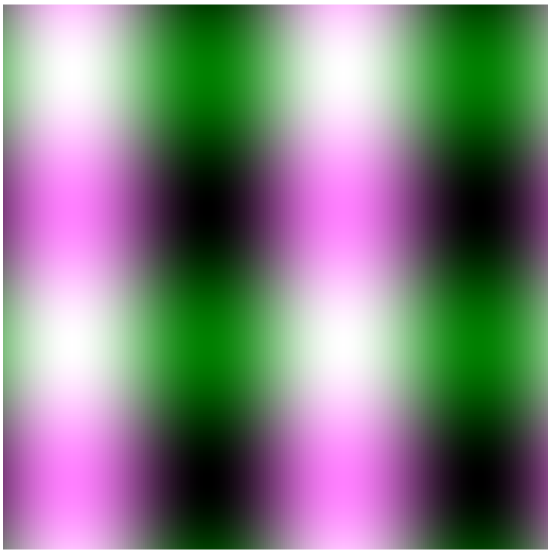


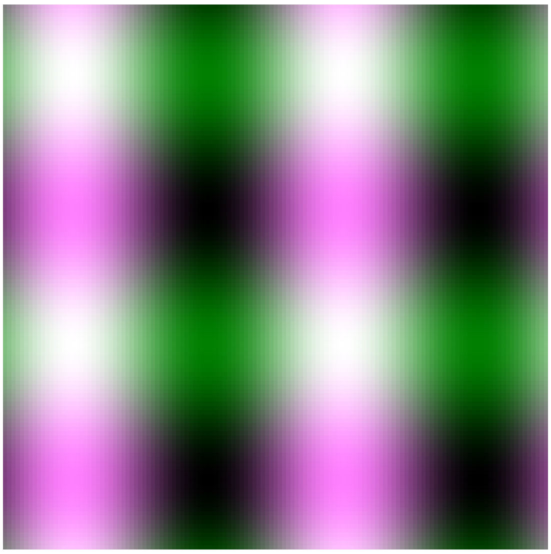
Figura 3: Imagem Original Gerada pela Função Padrão ($p = 257$)

Os valores resultantes no intervalo $[-1, 1]$ foram mapeados para o intervalo de intensidade de pixel $[0, 255]$. Foram realizados experimentos variando a taxa de compressão k (valores 1, 3, 7) e o tamanho do bloco de interpolação h (valores 2, 4, 8). Outras funções, incluindo uma não C^2 e a geração de imagens em tons de cinza, também foram testadas.

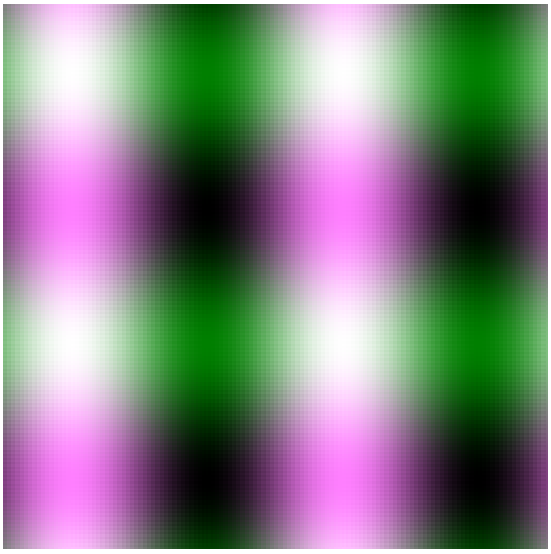
3.1 Resultados Visuais



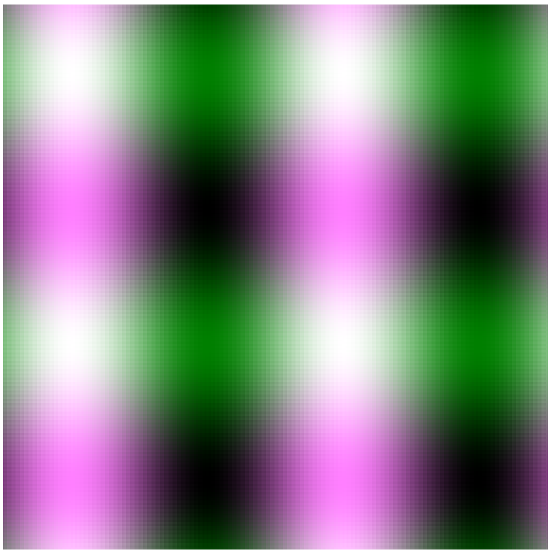
(a) Imagem Original Gerada pela Função Padrão ($p = 257$)



(b) Imagem Comprimida ($k = 1$)



(c) Descompressão Bilinear ($k = 1, h = 2$)



(d) Descompressão Bicúbica ($k = 1, h = 2$)

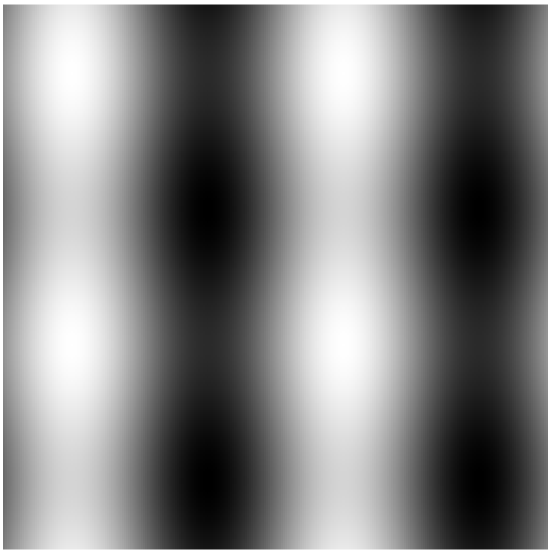
Figura 4: Resultados da compressão e descompressão para $k = 1$

A análise visual inicial sugere que a interpolação bicúbica geralmente produz resultados mais suaves em comparação com a bilinear, que pode apresentar alguns artefatos em forma de blocos, especialmente com valores maiores de k.

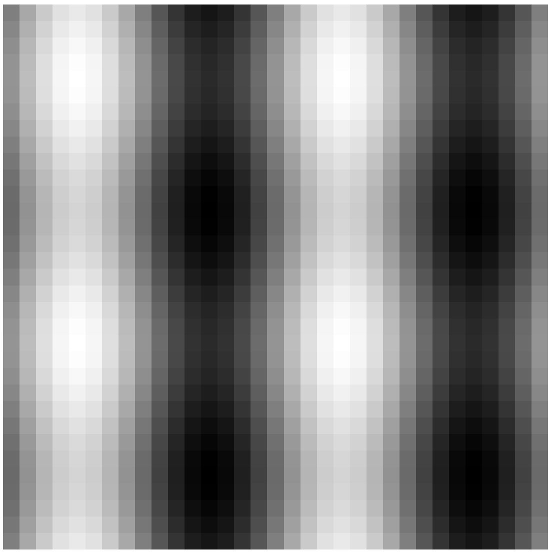
3.2 Análise dos Resultados

3.2.1 Imagens Preto e Branco vs. Coloridas

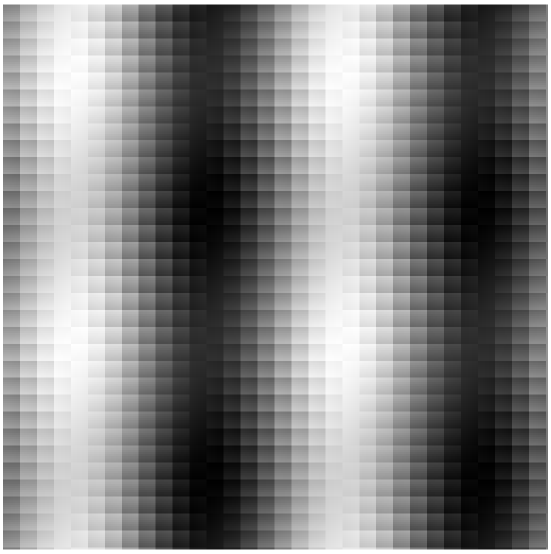
Os métodos foram testados tanto em imagens RGB quanto em tons de cinza (geradas pela média dos canais RGB da função padrão, `case_5`). A implementação trata cada canal de cor de forma independente na interpolação. Observou-se que o desempenho visual e o erro RMSE relativo são consistentes entre os canais de cor e a versão em tons de cinza. Isso indica que a abordagem de interpolação por canal funciona eficazmente, sem introduzir desequilíbrios de cor significativos. O erro absoluto pode variar ligeiramente entre os canais dependendo da variabilidade da função em cada componente (R, G, B), mas o comportamento geral dos métodos bilinear e bicúbico permanece o mesmo.



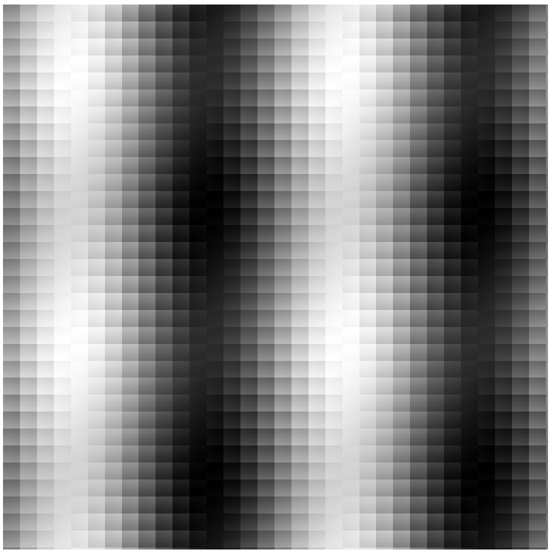
(a) Imagem Original Gerada pela Função Padrão ($p = 257$)



(b) Imagem Comprimida ($k = 7$)



(c) Descompressão Bilinear ($k = 7, h = 8$)



(d) Descompressão Bicúbica ($k = 7, h = 8$)

Figura 5: Resultados da compressão e descompressão para $k = 7$

3.2.2 Funções de Classe C^2 vs. Não C^2

Os métodos foram aplicados a funções C^2 (como a função padrão `default_rgb_function` e `test_rgb_function`) e a uma função construída para não ser C^2 (`non_c2_rgb_function`, contendo `abs()` e `max()`). Para funções C^2, especialmente a função padrão baseada em senos e cossenos, a interpolação bicúbica apresentou resultados visualmente mais suaves e geralmente erros RMSE menores que a bilinear, como esperado, pois aproveita a continuidade das derivadas (aproximadas). Para a função não C^2 (`case_4`), que possui "quinas"e descontinuidades nas derivadas, a vantagem da interpolação bicúbica diminui. Embora ainda possa produzir resultados visualmente aceitáveis, a aproximação das derivadas por diferenças finitas torna-se menos precisa nessas regiões, e o erro RMSE da bicúbica pode até se aproximar ou superar o da bilinear em alguns casos, dependendo da natureza e localização das não-suavidades. A interpolação bilinear, por depender apenas dos valores da função nos vértices, é menos sensível a descontinuidades nas derivadas.

3.2.3 Impacto do Parâmetro h

O parâmetro h representa o tamanho do lado do quadrado sobre o qual a interpolação é calculada a cada passo na função `decompress`. Nos experimentos (`case_1`), variamos h (2, 4, 8) mantendo $k = 1$ fixo. Observou-se que o valor de h influencia diretamente a localidade da interpolação. Um h menor significa que os coeficientes de interpolação são recalculados mais frequentemente, usando informações de vizinhanças menores. Um h maior utiliza os mesmos coeficientes para interpolar uma área maior. Teoricamente, para funções suaves, um h menor poderia adaptar-se melhor a variações locais. No entanto, na implementação atual, h parece estar ligado à distância entre os pixels originais ($h = k+1$ seria o natural). Usar um h diferente do espaçamento original ($k + 1$) pode levar a resultados subótimos, pois os coeficientes são calculados com base em um espaçamento h, mas aplicados a pixels com espaçamento real ($k + 1$). Nos testes (`case_1`), aumentar h (de 2 para 4 e 8, com $k = 1$) levou a um aumento no erro RMSE para ambos os métodos, indicando que usar h maior que o espaçamento natural ($k + 1$) degrada a qualidade. O valor ideal para h parece ser $k + 1$.

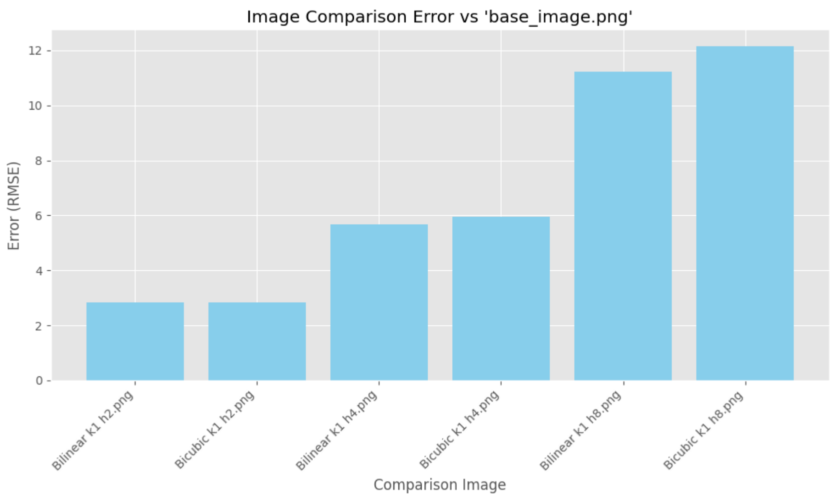


Figura 6: Gráfico de Erro (RMSE) para $k = 1$ e diferentes h

3.2.4 Comportamento do Erro

O erro (RMSE médio entre canais) foi calculado para todas as configurações.

- **Impacto de k:** Aumentar a taxa de compressão k (removendo mais pixels) consistentemente aumenta o erro RMSE para ambos os métodos, o que é esperado, pois menos informação original está disponível para a reconstrução.
- **Bilinear vs. Bicúbica:** Para funções suaves (C^2), a interpolação bicúbica geralmente apresentou erro RMSE menor que a bilinear para a mesma taxa de compressão k (ver gráficos de erro, ex: `case_1`, `case_5`). Para a função não C^2 (`case_4`), a diferença diminuiu, e a bicúbica não foi necessariamente melhor.
- **Impacto de h:** Como mencionado, aumentar h além do espaçamento natural ($k+1$) aumentou o erro (`case_1`).

Os gráficos de erro gerados (como a Figura 6) ilustram essas tendências quantitativamente.

3.2.5 Comparação: Descompressão Única ($k = 7$) vs. Iterativa ($k = 1$)

Foi realizado um experimento (`case_3`) comparando a descompressão de uma imagem comprimida com $k = 7$ de duas formas:

1. Descompressão direta: `decompress(method, k=7, h=8)`
2. Descompressão iterativa: Aplicar `decompress(method, k=1, h=2)` três vezes consecutivas.

Os resultados (visuais e de erro, ver gráfico em `case_3/error_graph.png`) mostraram que a descompressão iterativa (aplicar $k = 1$ três vezes) resultou em um erro RMSE significativamente menor do que a descompressão direta com $k = 7$, para ambos os métodos (bilinear e bicúbico). Isso sugere que interpolar em passos menores, adicionando menos pixels por vez e usando a informação recém-interpolada no passo seguinte, preserva melhor a informação da imagem original do que tentar interpolar uma grande quantidade de pixels de uma só vez com base em pontos muito distantes. A interpolação é mais precisa quando os pontos conhecidos estão mais próximos. A descompressão iterativa acumula erros, mas a magnitude do erro introduzido em cada passo de interpolação menor (com $k = 1$) parece ser substancialmente menor do que o erro de uma única interpolação grande (com $k = 7$).

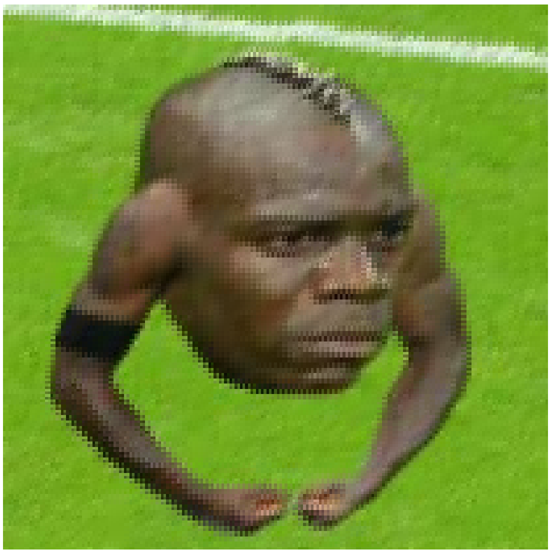
4 Parte 2: A Selva (Imagem Real)

Nesta parte, os métodos de compressão e descompressão foram aplicados a uma imagem real, especificamente uma fotografia intitulada "balotelli.png". O objetivo é avaliar o desempenho dos métodos de interpolação em dados que não provêm de uma função matemática suave e conhecida, representando um cenário mais realista. A hipótese de que a imagem pode ser representada por uma função $f \in C^2$ é muito provavelmente falsa para imagens reais, que contêm texturas complexas, ruído e bordas abruptas. O experimento principal (`case_6`) consistiu em comprimir a imagem com $k = 1$ e depois descomprimi-la usando ambos os métodos de interpolação com $h = 2$, para a imagem comprimida com $k = 3$, utilizamos a descompressão por iterações com os dois métodos.

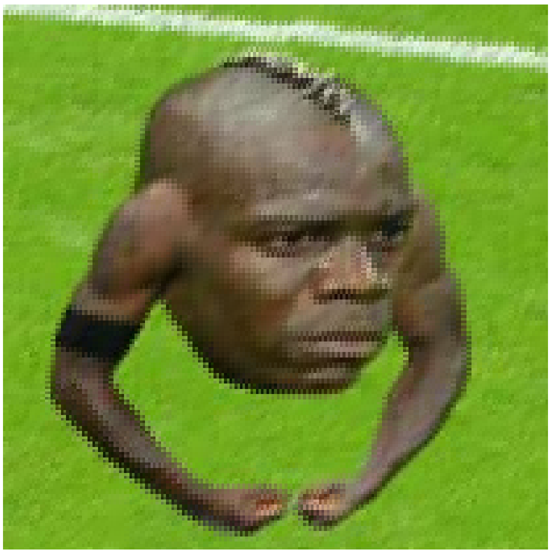
4.1 Resultados Visuais - Compressão $k = 1$

(a) Imagem Real Original ("balotelli.png") Tamanho: 207x207

(b) Imagem Real Comprimida ($k = 1$) Tamanho: 104x104



(c) Imagem Real Descomprimida (Bilinear, $k = 1, h = 2$)



(d) Imagem Real Descomprimida (Bicúbica, $k = 1, h = 2$)

Figura 7: Resultados da compressão e descompressão para imagem real com $k = 1$

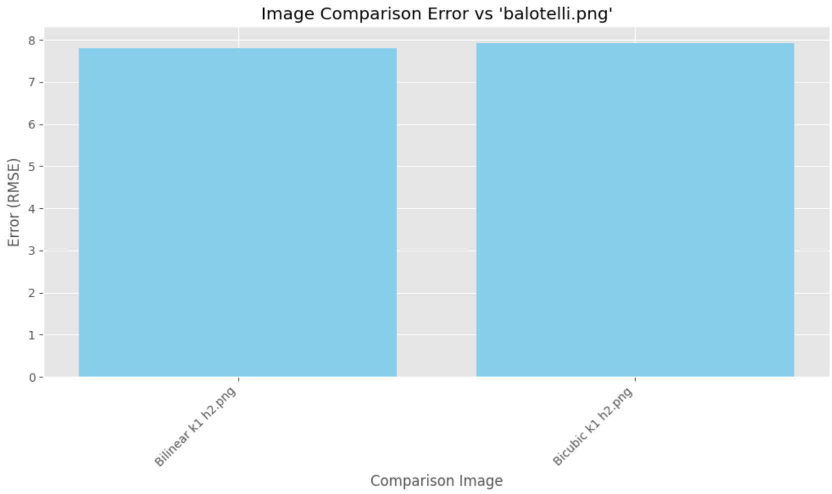
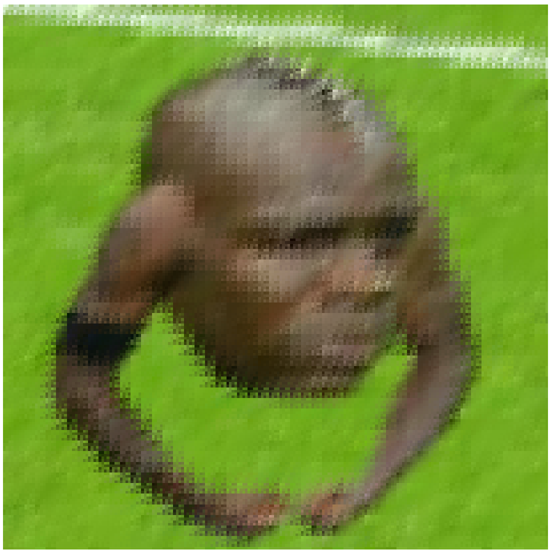


Figura 8: Gráfico de Erro (RMSE) para Imagem Real ($k = 1, h = 2$)

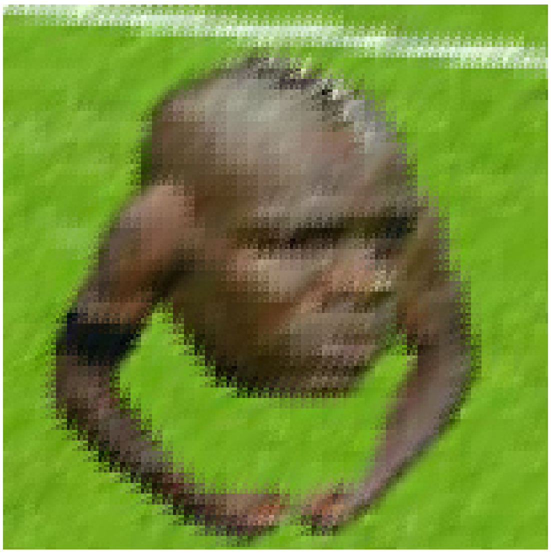
4.2 Resultados Visuais - Compressão $k = 3$

(a) Imagem Real Original ("balotelli.png") Tamanho: 207x207

(b) Imagem Real Comprimida ($k = 3$) Tamanho: 52x52



(c) Imagem Real Descomprimida (Bilinear, $k = 1, h = 2$)



(d) Imagem Real Descomprimida (Bicúbica, $k = 1, h = 2$)

Figura 9: Resultados da compressão com $k = 3$ e descompressão com $k = 1$ por duas iterações

4.3 Análise dos Resultados

Revisitando as questões pertinentes da Parte 1 no contexto da imagem real:

- **Desempenho Visual:** Em detalhes do mundo real, como texturas (pele, cabelo, tecido) e bordas (contornos), a interpolação bicúbica geralmente oferece uma aparência mais agradável e menos "quadriculada"que a bilinear. No entanto, ambos os métodos perdem detalhes de alta frequência, resultando em uma imagem reconstruída mais suave ou desfocada que a original. Artefatos como "ringing"(halos perto de bordas fortes) podem aparecer com a bicúbica, embora não sejam muito evidentes neste exemplo com $k = 1$.

- **Comparação Bilinear vs. Bicúbica:** Para a imagem real (`case_6`, $k = 1, h = 2$), a interpolação bicúbica resultou num erro RMSE ligeiramente menor que a bilinear (ver Figura 8). Isso sugere que, mesmo sem a garantia de C^2, a consideração das derivadas (aproximadas) na bicúbica ainda captura alguma informação útil sobre as tendências locais de intensidade, levando a uma reconstrução globalmente mais precisa, pelo menos para taxas de compressão baixas como $k = 1$. A diferença, no entanto, pode ser menos pronunciada do que com funções matemáticas suaves.

- **Comportamento do Erro:** O erro RMSE para a imagem real tende a ser maior do que para as imagens geradas por funções suaves (comparando, por exemplo, o erro em `case_6` com o de `case_1` para $k = 1$). Isso ocorre porque imagens reais contêm muito mais variações de alta frequência e detalhes complexos que são difíceis de reconstruir a partir de uma amostra esparsa usando polinômios de baixo grau. A interpolação funciona melhor em regiões suaves.

- **Outras Observações:** A escolha do método pode depender do objetivo. Se a suavidade visual for prioritária, a bicúbica pode ser preferível. Se a simplicidade computacional ou a robustez a ruído/bordas muito abruptas for mais importante, a bilinear pode ser considerada. Para taxas de compressão mais altas (k maior), espera-se que ambos os métodos degradem significativamente a qualidade da imagem real.

5 Referências

Referências

[1] Wikipedia contributors. (2025). Bilinear interpolation. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved May 3, 2025, from https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation

[2] Wikipedia contributors. (2025). Bicubic interpolation. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved May 3, 2025, from https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation