Relatorio Exercicio Computacional 1

Leonardo Heidi Almeida Murakami - NUSP: 11260186
leonardo.murakami@usp.br
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

Neste trabalho utilizaremos o método de Monte Carlo, que consiste em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, para estimarmos o valor de π (Pi), foi estudado nesse trabalho o erro variando-se o valor de n.

I. Introdução e Conceitos

Os métodos de Monte Carlo são uma classe ampla de algoritmos computacionais que dependem de uma amostragem aleatória para obter resultados numéricos.

A ideia para obtermos o valor de π será gerarmos pontos aleatórios (x, y) num plano 2-D com domínio pertencente a um quadrado de 1 unidade de lado.

Após gerarmos os n pontos aleatórios, calculamos a área do circulo como a proporção

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) \tag{1}$$

$$T(x) = Ind(||x||_2 \leq 1) \tag{2}$$

ou seja, a proporção de pontos que caíram dentro do círculo, sobre a quantidade de pontos totais, conseguimos então uma estimativa da areá do circulo.

Como sabemos que o raio do círculo será de meia unidade, teremos que

$$p \approx \frac{area\ do\ circulo}{area\ do\ quadrado} = \frac{\pi * (\frac{1}{2})^2}{1} \tag{3}$$

$$\pi \approx 4p \tag{4}$$

Para calcularmos um erro que não dependesse do próprio π utilizei o desvio padrão calculado após m simulações sob o mesmo n. O Pi retornado será a média de m simulações (logo, o número real de números aleatórios gerados será de $n * m$)

II. Implementação e testes

O algoritmo foi implementado na linguagem Python, organizado em 1 arquivo: monte-carlo-pi.py. Os gráficos foram gerados usando a biblioteca *matplotlib* do Python. As partes relevantes dos códigos podem ser conferidos no próprio arquivo enviado junto com este PDF/Tex.

A. Arquivos do projeto

Abaixo segue um breve resumo do conteúdo dos códigos fonte e interfaces.

monte-carlo-pi.py: Implementa todo o algoritmo. Um pedaço de sua interface é apresentado a seguir:

```
def get_point() -> Tuple(float, float):

def vector_module(vector_components: Tuple(
    float, float) -> float:

def calculate_pi(n_samples: int) -> float:

def early_stopping(target_error: float,
    iteration_m: int = 300) -> float:

def main() -> float
```

A função early stopping, que possui o nome menos direto, aumenta o numero de n até que o desvio padrão percentual calculado seja menor que o erro passado como parâmetro, para cada tentativa esta função aumentará em 10 vezes o valor anterior de n. Como indicado na enunciação do problema, utilizaremos na **main()** um valor de 0.05% de erro para calcularmos pi.

B. Algoritmo

A implementação do algoritmo em questão é apresentado abaixo. A função calculate_pi recebe como argumento n_samples, que condiz com o n anteriormente citado. A função early_stopping utiliza-se desta função e recebe o valor de erro que deseja-se atingir, assim como recebe m, a quantidade de valores estimados de pi que devem ser calculados com aquele valor de n.

Afim de evitar um consumo muito grande de memória (que possibilitaria testes com valores muito grandes de n) atualizamos o valor de T conforme geramos os pontos, dessa maneira, evitamos guardar os pontos numa lista.

```
def calculate_pi(n_samples):
  sum_T = 0
  for i in range(n_samples):
      if vector_module(get_point()) <=
          CIRCLE_RADIUS:
          sum_T+=1
  #calculate proportion given in the exercise
  proportion = (1/n_samples)*sum_T
  #return
  return proportion*4

def early_stopping(target_error, iteration_m
    =300):
    n_samples = 1
    percentage_error = 1
    while percentage_error > target_error:
      calculated_pis = [calculate_pi(n_samples
          ) for i in range(iteration_m)]
      std_error = pstdev(calculated_pis)/sqrt(
          iteration_m)
```

```
        percentage_error = (std_error/mean(
            calculated_pis))*100
        n_samples*=10

        print("---------------------------")
        print(f"NUM SAMPLES:\t{n_samples}")
        print(f"STD ERROR:\t{std_error}")
        print(f"PERCENTAGE ERROR:\t{
            percentage_error}")
        print(f"ESTIMATED AVERAGE PI:\t{mean(
            calculated_pis)}")
        print("---------------------------")

    return mean(calculated_pis)
```

A função early_stopping possui diversos comandos de *print* afim de possibilitar ver o progresso de cada *batch* de proporções calculadas, rodamos este algoritmo até atingir um valor de percentage_error menor que o erro alvo, podemos então retornar a média dos m πs calculados

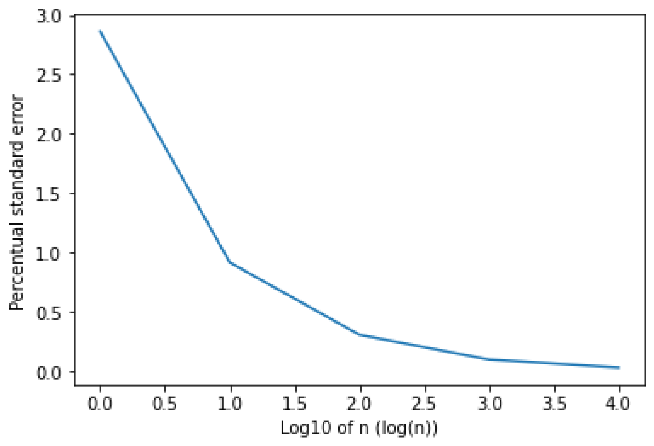
C. Testes

Para validar o código numericamente, fiz alguns testes manuais que mostravam valores muito próximos do valor real de π.

D. Valor ideal de N

Existe uma relação inversa entre o peso computacional e a precisão de π calculada por este algoritmo. Embora para valores muito grandes de n possuamos uma precisão maior, estes podem demorar muito tempo para serem executados, de tal modo que possa ser mais vantajoso utilizar um n menor.

Embora a função early_stopping calcule esse n ideal dado a precisão necessária, é possível visualizar a diminuição do erro saturar ao aumentar de números aleatórios gerados



Para fins de melhor entendimento, considere $N = m*n$, para a faixa de precisão dada pelo enunciado do problema, podemos utilizar $N = 3000000$