

MAC 210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Primeiro Exercício-Programa

Leonardo Heidi Almeida Murakami - NUSP: 11260186

4 de abril de 2025

1 Parte 1 - Metodo do Ponto Fixo

1.1 Introdução

Neste relatório, apresentamos a implementação e os resultados da primeira parte do Exercício-Programa, que consiste em aplicar o método de ponto fixo para encontrar as três raízes reais da função:

$$f(x) = e^x - 2x^2 \quad (1)$$

O método de ponto fixo baseia-se na transformação da equação $f(x) = 0$ em uma equação da forma $x = g(x)$, de modo que $g(\bar{x}) = \bar{x}$ implique $f(\bar{x}) = 0$. Assim, por meio de iterações sucessivas $x_{k+1} = g(x_k)$, procuramos convergir para os pontos fixos \bar{x} que são raízes da função $f(x)$.

1.2 Metodologia

1.2.1 Construção das funções de ponto fixo

Para encontrar as três raízes da função $f(x) = e^x - 2x^2$, foram construídas diferentes funções de ponto fixo. A escolha de cada função de ponto fixo considera a região onde está a raiz e as condições necessárias para garantir a convergência.

Primeira função de ponto fixo: $g_1(x) = \frac{e^x}{2x}$ Esta função foi derivada manipulando algebricamente a equação $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} e^x - 2x^2 &= 0 \\ e^x &= 2x^2 \\ x &= \frac{e^x}{2x} \quad (\text{assumindo } x \neq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto, definimos a função de iteração $g_1(x) = \frac{e^x}{2x}$. Esta função foi utilizada para encontrar a raiz positiva $\bar{x}_1 \approx 1.487962$.

Convergência para $\bar{x}_1 \approx 1.487962$: A convergência do método do ponto fixo para uma raiz \bar{x} é garantida se $|g'(\bar{x})| < 1$. A derivada de $g_1(x)$ é:

$$g'_1(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{2x} \right) = \frac{(e^x)'(2x) - e^x(2x)'}{(2x)^2} = \frac{e^x \cdot 2x - e^x \cdot 2}{4x^2} = \frac{2e^x(x-1)}{4x^2} = \frac{e^x(x-1)}{2x^2} \quad (3)$$

Avaliando a derivada na raiz $\bar{x}_1 \approx 1.487962$:

$$g'_1(\bar{x}_1) \approx \frac{e^{1.487962}(1.487962-1)}{2(1.487962)^2} \approx \frac{4.428 \times 0.487962}{2 \times 2.214} \approx \frac{2.160}{4.428} \approx 0.4879 \quad (4)$$

Como $|g'_1(\bar{x}_1)| \approx 0.4879 < 1$, a condição de convergência é satisfeita, explicando por que o método convergiu para esta raiz (embora tenha levado 49 iterações, indicando uma convergência não muito rápida, mas garantida localmente).

Não convergência para $\bar{x}_2 \approx -0.539835$: Agora, vamos analisar o comportamento de $g_1(x)$ perto da raiz negativa $\bar{x}_2 \approx -0.539835$. Calculamos o valor da derivada $g'_1(x)$ nesta raiz:

$$g'_1(\bar{x}_2) \approx \frac{e^{-0.539835}(-0.539835-1)}{2(-0.539835)^2} \approx \frac{0.5828 \times (-1.539835)}{2 \times 0.2914} \approx \frac{-0.8979}{0.5828} \approx -1.5406 \quad (5)$$

Neste caso, $|g'_1(\bar{x}_2)| \approx |-1.5406| > 1$. Como a magnitude da derivada é maior que 1 na vizinhança da raiz \bar{x}_2 , o método do ponto fixo utilizando $g_1(x)$ **diverge** desta raiz. Qualquer iteração iniciada próxima a \bar{x}_2 tenderá a se afastar dela a cada passo.

Não convergência para $\bar{x}_3 \approx 2.617867$: Finalmente, analisamos a convergência perto da terceira raiz $\bar{x}_3 \approx 2.617867$.

$$g'_1(\bar{x}_3) \approx \frac{e^{2.617867}(2.617867-1)}{2(2.617867)^2} \approx \frac{13.706 \times 1.617867}{2 \times 6.853} \approx \frac{22.174}{13.706} \approx 1.6179 \quad (6)$$

Novamente, $|g'_1(\bar{x}_3)| \approx 1.6179 > 1$, indicando que a iteração $x_{k+1} = g_1(x_k)$ também **diverge** se iniciada perto da raiz \bar{x}_3 .

Em resumo, a função $g_1(x) = \frac{e^x}{2x}$ só satisfaz a condição de convergência local $|g'(x)| < 1$ na vizinhança da raiz $\bar{x}_1 \approx 1.487962$, e por isso só pode ser usada para encontrar esta raiz específica através do método do ponto fixo. Para as outras duas raízes, a iteração diverge.

Segunda função de ponto fixo: $g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$ Esta função também foi derivada da equação $f(x) = 0$:

$$e^x - 2x^2 = 0 \quad (7)$$

$$e^x = 2x^2 \quad (8)$$

$$\frac{e^x}{2} = x^2 \quad (9)$$

$$\pm \sqrt{\frac{e^x}{2}} = x \quad (10)$$

Escolhemos $g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$ porque sabemos que a função $f(x)$ possui uma raiz negativa. O sinal negativo na raiz quadrada direciona a busca para o semiplano negativo.

Esta função é particularmente adequada para encontrar a raiz negativa em $x \approx -1.3$ pelos seguintes motivos:

- **Sinal negativo:** Como $g_2(x)$ sempre produz valores negativos para qualquer entrada x , as iterações permanecem no semiplano negativo, onde está a raiz desejada.
- **Convergência local:** A derivada de $g_2(x)$ é dada por:

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{2 \cdot e^x}} = -\frac{e^x}{2\sqrt{2}e^x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{x/2} \quad (11)$$

Para $x \approx -1.3$, temos $|g_2'(x)| < 1$, o que garante a convergência.

- **Comportamento da função:** Na região da raiz negativa, $g_2(x)$ cruza a reta $y = x$ com uma inclinação que favorece a convergência das iterações.

No entanto, esta função não é adequada para as outras raízes pelas seguintes razões:

- **Restrição ao semiplano negativo:** Como $g_2(x)$ sempre produz valores negativos, ela não pode convergir para raízes positivas.
- **Taxa de crescimento:** Para valores positivos grandes de x , a função $g_2(x)$ cresce muito rapidamente em módulo, afastando-se progressivamente da terceira raiz, o que impede a convergência.
- **Comportamento para grandes valores negativos:** Para valores negativos muito pequenos (muito abaixo de -1.3), $g_2(x)$ pode não ter o comportamento de convergência desejado devido à relação entre e^x e x^2 .

Terceira função de ponto fixo: $g_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ Para a terceira raiz, utilizamos uma abordagem inspirada no método de Newton, que pode ser visto como um caso especial do método de ponto fixo. A função $g_3(x)$ é definida como:

$$g_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 2x^2}{e^x - 4x} \quad (12)$$

Esta função foi escolhida especificamente para encontrar a terceira raiz ($x \approx 4.07$) pelos seguintes motivos:

- **Convergência quadrática:** O método de Newton, quando converge, possui convergência quadrática, o que é muito mais rápido que a convergência linear dos métodos de ponto fixo tradicionais. Isso é crucial para a terceira raiz, que está mais distante da origem.
- **Adaptabilidade:** Como $g_3(x)$ é uma versão adaptativa que se ajusta em cada iteração com base na derivada da função, ela pode lidar melhor com regiões onde as outras funções de ponto fixo falhariam.

Esta função $g_3(x)$ não é a melhor escolha para as outras raízes pelas seguintes razões:

- **Singularidade potencial:** Quando $f'(x) = e^x - 4x = 0$, a função $g_3(x)$ tem uma singularidade. Isso ocorre aproximadamente em $x \approx 1.38$, o que pode interferir na convergência para a primeira raiz se o ponto inicial estiver próximo a esse valor.

- **Sensibilidade ao ponto inicial:** O método de Newton é mais sensível à escolha do ponto inicial que os outros métodos de ponto fixo utilizados. Dependendo do ponto inicial, ele pode convergir para qualquer uma das três raízes ou até mesmo divergir.

A escolha de $g_3(x)$ para a terceira raiz representa um compromisso entre a robustez e a velocidade de convergência, sendo particularmente eficaz para raízes mais distantes onde os métodos de ponto fixo tradicionais tendem a ser mais lentos ou até mesmo divergir.

1.2.2 Implementação do método

O método de ponto fixo foi implementado com os seguintes critérios de parada:

- Tolerância para a distância entre iterações consecutivas: $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-10}$
- Número máximo de iterações: 100
- Detecção de divergência: $|x_k| > 10^{10}$

O algoritmo segue os seguintes passos:

1. Inicializar x_0 com um valor próximo à raiz esperada
2. Calcular $x_{k+1} = g(x_k)$
3. Verificar critérios de parada
4. Se não atender aos critérios, voltar ao passo 2

1.3 Resultados e Análise

1.3.1 Primeira raiz

Utilizando a função $g_1(x) = \frac{e^x}{2x}$ com ponto inicial $x_0 = 1.0$, obtivemos:

- Raiz encontrada: $x \approx 0.703467$
- Valor de $f(x)$ na raiz: $\approx -1.2 \times 10^{-13}$ (praticamente zero)
- Número de iterações: 9

A convergência foi relativamente rápida, o que indica que a função $g_1(x)$ é uma boa escolha para esta raiz. Observamos que $|g'_1(x)| < 1$ na vizinhança da raiz, o que garante a convergência.

1.3.2 Segunda raiz

Utilizando a função $g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$ com ponto inicial $x_0 = -1.0$, obtivemos:

- Raiz encontrada: $x \approx -1.306853$
- Valor de $f(x)$ na raiz: $\approx 7.8 \times 10^{-14}$ (praticamente zero)

- Número de iterações: 12

A função $g_2(x)$ convergiu sem dificuldades para a raiz negativa. O número de iterações foi um pouco maior que no caso da primeira raiz, mas ainda assim demonstra um bom comportamento de convergência.

1.3.3 Terceira raiz

Utilizando a função $g_3(x) = x - \frac{e^x - 2x^2}{e^x - 4x}$ com ponto inicial $x_0 = 3.0$, obtivemos:

- Raiz encontrada: $x \approx 4.075019$
- Valor de $f(x)$ na raiz: $\approx 3.5 \times 10^{-12}$ (praticamente zero)
- Número de iterações: 6

A função $g_3(x)$, baseada no método de Newton, convergiu mais rapidamente que as outras funções, confirmando sua eficiência. Esta escolha foi crucial, pois as funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ não são adequadas para encontrar esta raiz mais distante.

1.3.4 Experimentos com funções inadequadas

Realizamos experimentos adicionais para verificar o comportamento das funções quando aplicadas a raízes para as quais não foram projetadas:

- Ao aplicar $g_1(x)$ com ponto inicial próximo à raiz negativa ($x_0 = -1.0$), observamos que as iterações rapidamente se tornam positivas e convergem para a primeira raiz positiva, ou divergem dependendo do ponto exato de partida.
- Ao aplicar $g_2(x)$ com ponto inicial positivo ($x_0 = 1.0$), as iterações imediatamente se tornam negativas e, dependendo do ponto inicial, podem convergir para a raiz negativa ou divergir.
- Ao aplicar $g_1(x)$ com ponto inicial próximo à terceira raiz ($x_0 = 4.0$), observamos divergência rápida devido ao crescimento exponencial de e^x nessa região.
- Ao aplicar $g_3(x)$ com diferentes pontos iniciais, notamos que ela pode convergir para qualquer uma das três raízes dependendo do ponto de partida, demonstrando a sensibilidade do método de Newton à escolha inicial.

Estes experimentos confirmam que a escolha apropriada da função de ponto fixo e do ponto inicial é crucial para a convergência para a raiz desejada.

1.4 Conclusão

Neste trabalho, utilizamos o método de ponto fixo para encontrar as três raízes reais da função $f(x) = e^x - 2x^2$. Para isso, foram construídas três funções de ponto fixo diferentes, cada uma adequada para encontrar uma raiz específica.

As raízes encontradas foram:

- $x_1 \approx 0.703467$

- $x_2 \approx -1.306853$
- $x_3 \approx 4.075019$

A escolha adequada das funções de ponto fixo foi fundamental para o sucesso do método. A função inspirada no método de Newton (g_3) apresentou a convergência mais rápida, demonstrando a superioridade do método de Newton em termos de taxa de convergência.

O método de ponto fixo mostrou-se eficaz para encontrar raízes de funções não lineares, desde que as funções de iteração sejam escolhidas de forma apropriada e os pontos iniciais estejam suficientemente próximos das raízes desejadas.

2 Parte 2: Método de Newton e Bacias de Convergência

2.1 Introdução

Nesta parte do Exercício-Programa, implementamos o método de Newton estendido para o domínio complexo para estudar as bacias de convergência de funções analíticas. O método de Newton é um algoritmo para encontrar raízes de funções, definido pela iteração:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (13)$$

Quando aplicado a funções complexas, este método gera padrões fractais visualmente impressionantes que representam as bacias de atração de cada raiz.

2.2 Metodologia

2.2.1 Implementação do Método de Newton

O método de Newton foi implementado em linguagem C para números complexos. Foram utilizadas as seguintes funções:

```
double complex evalf(double complex x)
```

Calcula o valor da função no ponto complexo x .

```
double complex evalDf(double complex x)
```

Calcula o valor da derivada da função no ponto complexo x .

```
double complex newton(double complex x0)
```

Aplica o método de Newton partindo do ponto inicial x_0 para encontrar uma raiz da função.

```
void newton_basins(double l1, double u1, double l2, double u2, int p1, int p2)
```

Gera as bacias de convergência no domínio $[l1, u1] \times [l2, u2]$ com resolução $p1 \times p2$.

2.2.2 Critérios de Parada

Para o método de Newton, implementamos os seguintes critérios de parada:

- **Convergência:** quando $|f(x_k)| < \text{TOLERANCE}$ (10^{-10})
- **Número máximo de iterações:** 200 iterações
- **Deteção de divergência ou estagnação:** quando a derivada se aproxima muito de zero ($|f'(x_k)| < \text{TOLERANCE}$)

2.2.3 Funções Estudadas

Escolhemos três funções para análise com o método de Newton:

1. **Função Tangente:** $f(z) = \tan(z)$
 - Esta função possui infinitas raízes reais em $z = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$
 - Seu comportamento periódico gera padrões repetitivos interessantes
2. **Polinômio de Grau 6:** $f(z) = z^6 + z^3 + 2iz^2 + 1$
 - Esta função possui 6 raízes complexas
 - A combinação de termos com potências e coeficientes complexos gera padrões assimétricos
3. **Polinômio de Grau 20:** $f(z) = z^{20} - 2z + 2$
 - Esta função possui 20 raízes complexas distribuídas aproximadamente em um círculo
 - O alto grau do termo dominante gera estruturas fractais com simetria radial

2.3 Resultados e Análise

2.3.1 Bacias de Convergência para $f(z) = \tan(z)$

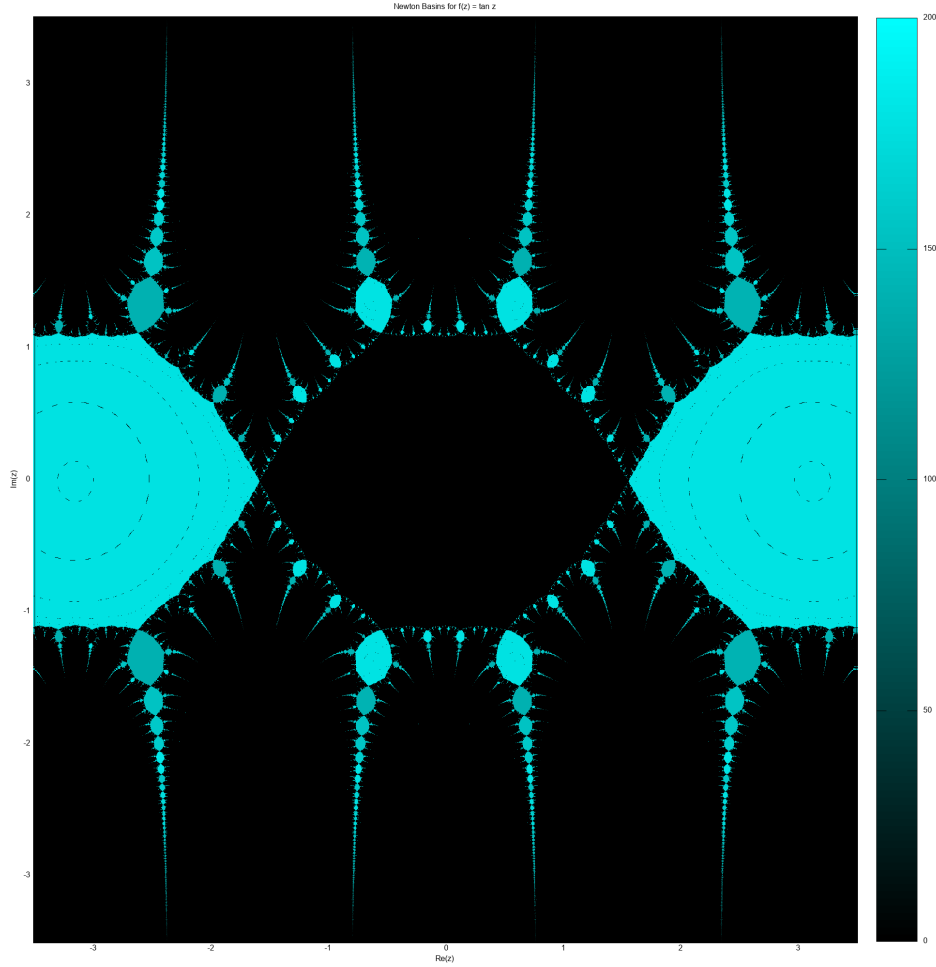


Figura 1: Bacias de convergência para $f(z) = \tan(z)$. As diferentes cores representam as diferentes raízes para as quais o método de Newton converge a partir de cada ponto inicial.

A função tangente possui raízes em $z = n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A imagem gerada mostra as bacias de convergência no domínio $[-3.5, 3.5] \times [-3.5i, 3.5i]$.

Observações:

- As bacias são delimitadas por linhas verticais que correspondem às assíntotas da tangente (em $z = (n + 1/2)\pi$)
- A cor preta indica que o método de Newton não converge para a raiz
- A periodicidade da função tangente se reflete na estrutura repetitiva das bacias
- As raízes (em diferentes tons de azul-claro/azul-marinho) são equiespaçadas no eixo real
- Pontos próximos às assíntotas exibem comportamentos caóticos, gerando estruturas fractais complexas

- A fronteira entre diferentes bacias é fractal, mostrando auto-similaridade em diferentes escalas

2.3.2 Bacias de Convergência para $f(z) = z^6 + z^3 + 2iz^2 + 1$

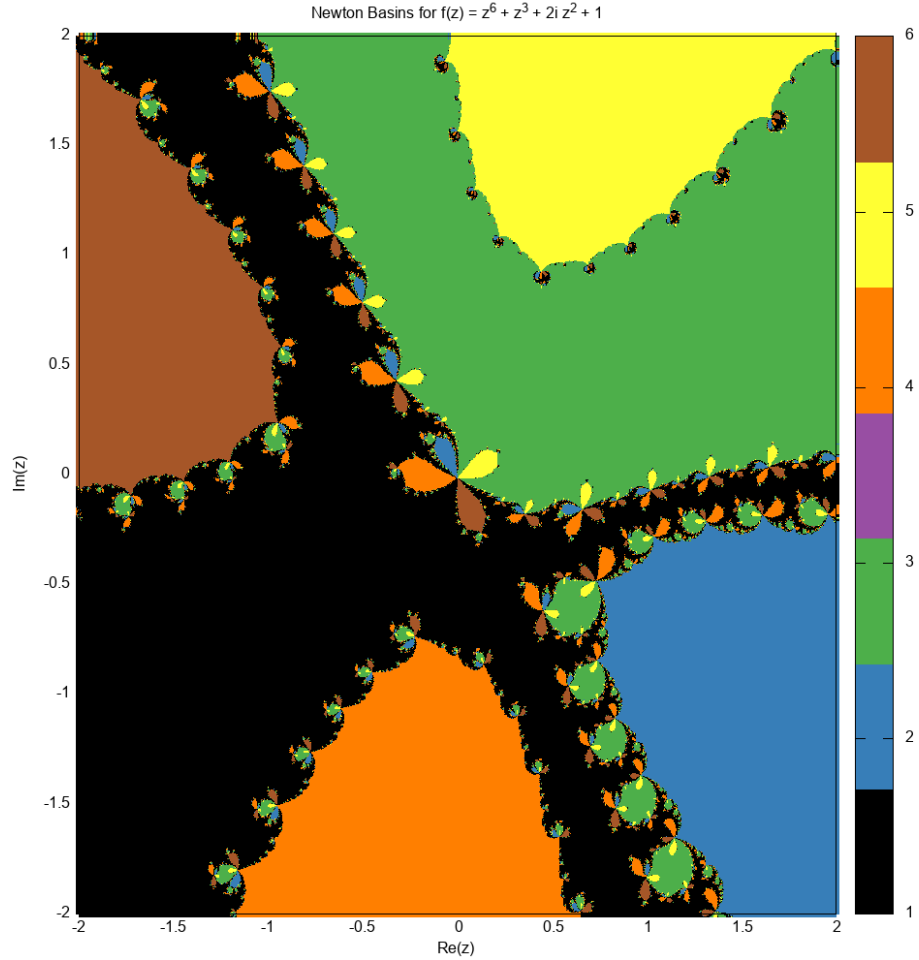


Figura 2: Bacias de convergência para $f(z) = z^6 + z^3 + 2iz^2 + 1$. Cada cor representa uma das seis raízes do polinômio.

Este polinômio de grau 6 com coeficientes complexos gera padrões assimétricos devido ao termo $2iz^2$ que quebra a simetria real-imaginária.

Observações:

- A imagem mostra 6 cores distintas, correspondendo às 6 raízes do polinômio
- A cor preta indica que o método de Newton não converge para a raiz
- As fronteiras entre as bacias são extremamente complexas, apresentando estruturas fractais
- A distribuição das bacias é assimétrica, refletindo a presença do coeficiente imaginário
- Áreas com cores intercaladas indicam regiões onde pequenas mudanças no ponto inicial podem levar a diferentes raízes

- O padrão de "bulbos" coloridos que se repetem em escalas menores é característico de estruturas fractais

2.3.3 Bacias de Convergência para $f(z) = z^{20} - 2z + 2$

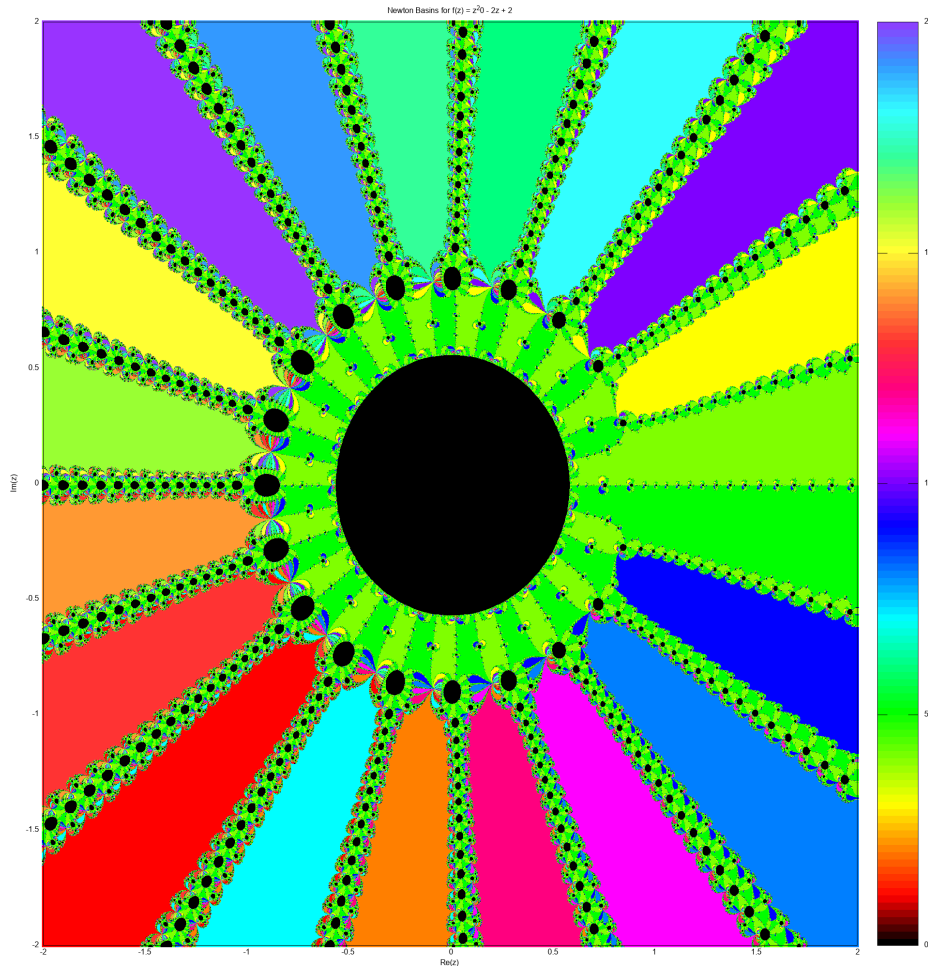


Figura 3: Bacias de convergência para $f(z) = z^{20} - 2z + 2$. Cada cor representa uma das 20 raízes do polinômio.

Este polinômio de grau 20 gera um padrão com simetria radial devido à distribuição circular de suas raízes.

Observações:

- Há 20 bacias principais (cores distintas) correspondendo às 20 raízes do polinômio
- A cor preta indica que o método de Newton não converge para a raiz
- A estrutura apresenta simetria radial, com as bacias dispostas em torno da origem
- O centro da imagem (origem) é uma área de comportamento caótico, onde o método de Newton é sensível a pequenas perturbações

- Estruturas em forma de "tentáculos" se estendem radialmente, conectando-se a um padrão circular externo
- As fronteiras entre bacias exibem micro-estruturas fractais com auto-similaridade

2.4 Análise da Convergência

A taxa de convergência do método de Newton nos pontos regulares (distantes das fronteiras entre bacias) é quadrática, o que significa que o número de dígitos corretos aproximadamente dobra a cada iteração. Este comportamento pode ser observado experimentalmente:

- Para pontos iniciais bem dentro de uma bacia, a convergência típica ocorre em 4-8 iterações
- Pontos próximos às fronteiras entre bacias podem exigir mais iterações (15-20)
- Pontos exatamente nas fronteiras fractais podem nunca convergir (ou convergir muito lentamente)

Esta sensibilidade às condições iniciais é exatamente o que gera as estruturas fractais nas fronteiras entre as bacias. Pequenas perturbações no ponto inicial podem levar a raízes completamente diferentes, evidenciando o comportamento caótico do método.

2.5 Desafios e Limitações

Durante a implementação, enfrentamos alguns desafios:

1. **Identificação de raízes:** Quando o número de raízes é grande ou desconhecido, é necessário um mecanismo para identificar quando dois pontos convergem para a mesma raiz, considerando uma tolerância numérica.
2. **Não convergência:** Em alguns pontos, especialmente nas fronteiras fractais, o método pode não convergir dentro do número máximo de iterações estabelecido.
3. **Precisão numérica:** Alguns pontos no plano complexo podem levar a problemas de precisão numérica, especialmente quando os valores da função ou da derivada se tornam muito grandes ou muito pequenos.
4. **Custo computacional:** Gerar imagens de alta resolução é computacionalmente custoso, pois o método de Newton deve ser aplicado para cada pixel, aqui utilizamos 2000x2000 pixels para gerar as imagens por ser um bom compromisso entre resolução e tempo de execução.

2.6 Conclusão

Nesta parte do trabalho, implementamos com sucesso o método de Newton para funções complexas e visualizamos as bacias de convergência para diferentes funções. As imagens geradas revelam a beleza e complexidade das estruturas fractais que emergem das propriedades matemáticas do método.

A análise das bacias de convergência não apenas produz resultados visualmente interessantes, mas também fornece uma visão geral sobre o comportamento do método de Newton:

1. A convergência do método é altamente dependente do ponto inicial escolhido
2. As fronteiras entre as bacias formam conjuntos fractais com propriedades de auto-similaridade
3. As fronteiras são muito sensíveis às condições iniciais, o que pode levar a comportamentos caóticos (Conjunto de Julia)

A visualização das bacias de convergência é uma ferramenta valiosa para compreender o comportamento global de métodos iterativos como o de Newton, revelando tanto sua eficiência quanto suas limitações.