Exercício 1 (c)

Para provar que $f(n) \in O(g(n))$, precisamos encontrar constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tais que:

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \text{para todo } n \geq n_0 \tag{1}$$

Neste caso, temos:

$$f(n) = \lg n = \log_2 n \tag{2}$$

$$g(n) = \log_{10} n \tag{3}$$

Portanto, precisamos encontrar $c > 0$ e $n_0 > 0$ tais que:

$$\log_2 n \leq c \cdot \log_{10} n \quad \text{para todo } n \geq n_0 \tag{4}$$

Para relacionar $\log_2 n$ e $\log_{10} n$, podemos usar a propriedade de mudança de base dos logaritmos:

$$\log_2 n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} \tag{5}$$

Substituindo na nossa expressão de desigualdade:

$$\frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} \leq c \cdot \log_{10} n \tag{6}$$

Para $n > 1$, o valor de $\log_{10} n$ é positivo. Portanto, podemos dividir ambos os lados da inequação por $\log_{10} n$ sem alterar o sentido da desigualdade:

$$\frac{1}{\log_{10} 2} \leq c \tag{7}$$

Escolhendo $c = \frac{1}{\log_{10} 2}$ e $n_0 = 2$ (ja que $n > 1$ foi condição para descobrir c), verificamos que $\log_2 n \leq c \cdot \log_{10} n$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\lg n \in O(\log_{10} n)$.

Exercício 3 (e)

Para mostrar que a afirmação "Se $f(n) = O(g(n))$, então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$" é falsa, vamos construir um contraexemplo.

Considere as funções:

$$f(n) = 2n \tag{8}$$
$$g(n) = n \tag{9}$$

Primeiro, vamos verificar que $f(n) = O(g(n))$, ou seja, que $2n = O(n)$.

Por definição, precisamos encontrar constantes positivas c e n_0 tais que:

$$2n \leq c \cdot n \quad \text{para todo } n \geq n_0 \tag{10}$$

Escolhendo $c = 2$ e $n_0 = 1$, a desigualdade $2n \leq 2n$ é verdadeira para todo $n \geq 1$. Portanto, $f(n) = O(g(n))$ é satisfeita.

Agora, vamos verificar se $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$, ou seja, se $2^{2n} = O(2^n)$.

Para isso, precisaríamos encontrar constantes c' e n'_0 tais que:

$$2^{2n} \leq c' \cdot 2^n \quad \text{para todo } n \geq n'_0 \tag{11}$$

Podemos reescrever $2^{2n} = (2^2)^n = (2^n)^2$. Assim:

$$(2^n)^2 \leq c' \cdot 2^n \tag{12}$$

Dividindo ambos os lados por 2^n (que é sempre positivo):

$$2^n \leq c' \tag{13}$$

Como a função 2^n cresce exponencialmente e tende ao infinito quando $n \to \infty$, não existe nenhuma constante finita c' que satisfaça esta desigualdade para todos os valores suficientemente grandes de n.

Portanto, $2^{2n} \neq O(2^n)$, o que mostra que a afirmação original é falsa.

Exercício 4 (a)

Para provar que $\sum_{k=1}^{n} k^{10} \in \Theta(n^{11})$, precisamos encontrar constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que:

$$c_1 \cdot n^{11} \leq \sum_{k=1}^{n} k^{10} \leq c_2 \cdot n^{11} \quad \text{para todo } n \geq n_0 \tag{14}$$

Primeiro, vamos encontrar o limite superior. Como $k \leq n$ para todo $k \in [1, n]$, temos $k^{10} \leq n^{10}$. Assim:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} \leq \sum_{k=1}^{n} n^{10} \tag{15}$$

$$= n \cdot n^{10} \tag{16}$$

$$= n^{11} \tag{17}$$

Portanto, podemos escolher $c_2 = 1$.

Agora, vamos encontrar o limite inferior. Consideremos apenas os termos da segunda metade da soma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} \geq \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} k^{10} \tag{18}$$

Para $k \geq \lceil n/2 \rceil \geq n/2$, temos $k^{10} \geq (n/2)^{10}$. O número de termos nesta soma é pelo menos $n/2$ (para $n \geq 2$). Logo:

$$\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} k^{10} \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{10} \tag{19}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{n^{10}}{2^{10}} \tag{20}$$

$$= \frac{n^{11}}{2^{11}} \tag{21}$$

Portanto, podemos escolher $c_1 = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$ e $n_0 = 2$.

Com essas constantes, verificamos que:

$$\frac{1}{2048} n^{11} \leq \sum_{k=1}^{n} k^{10} \leq n^{11} \quad \text{para todo } n \geq 2 \tag{22}$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{n} k^{10} \in \Theta(n^{11})$.