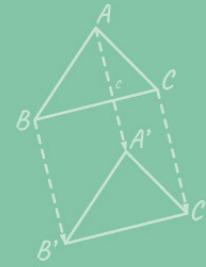


$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \phi$$



P(A)

45°

8



30%

6

7

{123}

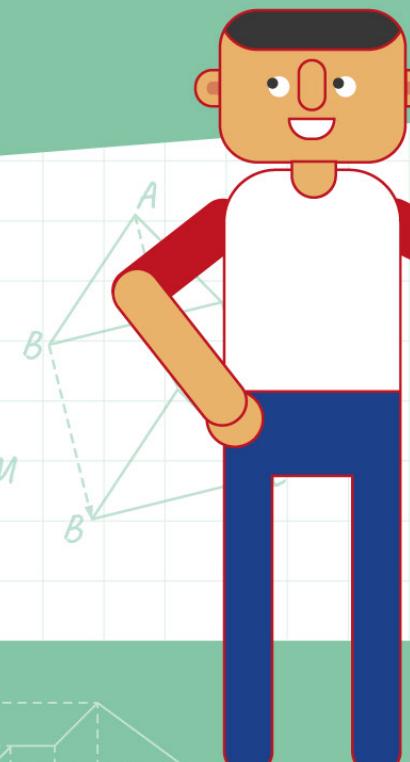
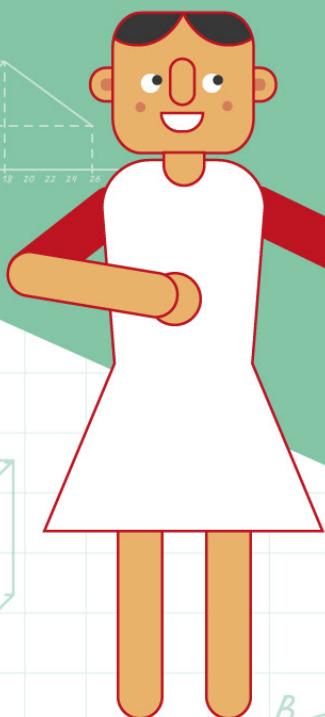
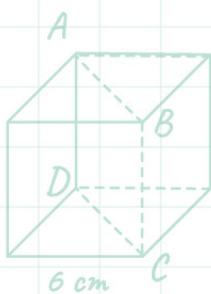
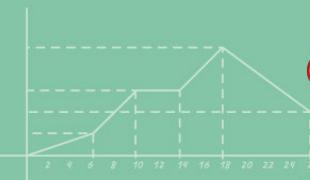
n²

MATEMÁTICA

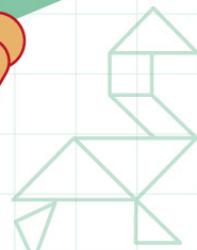
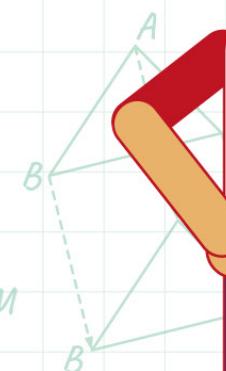
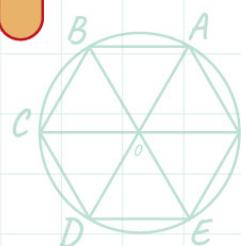
8º Ano

A ∪ B

Manual do (a) aluno (a)



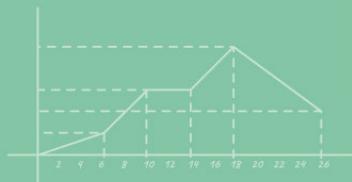
120°



8

90°

A ∪ B



Matemática

8º ANO

MANUAL DO(A) ALUNO(A)

MATEMÁTICA**8º ano****Manual do(a) aluno(a)**MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO**Autores**

João Almeida Duarte
Vanda Duarte Delgado

Linha Gráfica

Oficina de Utopias

Capa, Design Gráfico e Ilustração

Gabinete de Comunicação e Imagem da Uni-CV

Revisão Científico-pedagógica

Paulino Fortes, Luísa Cardoso Monteiro e
Maria de Lourdes Semedo

Revisão Linguística

Adelcise Ramos, Ana Santos e Maria Antónia Varela

Coordenação Geral

Direção Nacional de Educação

Impressão e Acabamento

Tipografia Santos

Edição

2021

Este Livro respeita as regras do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

INTRODUÇÃO

Caro (a) aluno (a),

Este manual é para ti que vais estudar o 8º ano de escolaridade, o último ano do ensino básico obrigatório.

Na sequência dos manuais de matemática dos anos anteriores, apresentamos, agora, este do 8º ano, pois consideramos necessário que disponhas, de um instrumento atualizado, atraente e adequado à tua idade, capaz de aprimorar-te o gosto pela aprendizagem na disciplina de matemática, nesta fase avançada do teu percurso escolar. De acordo com as orientações programáticas, procurámos orientá-lo, tendo em conta os conhecimentos adquiridos bem como a aquisição de novas competências importantes para a próxima etapa – o ensino secundário.

Apresentamos, no início de cada unidade, algumas atividades que te permitem, por um lado, relembrar conceitos matemáticos estudados em anos anteriores e, por outro lado, participar ativamente na construção dos teus próprios conhecimentos, recorrendo, sempre que possível, às novas tecnologias.

Ao longo deste manual, vais encontrar os conteúdos adaptados à tua realidade, atividades de revisão, fazendo sempre a ponte com as aprendizagens anteriores; outras atividades de exercícios e problemas e, também, atividades de consolidação ao longo e no final de cada unidade temática.

À semelhança do manual do 7º ano, tivemos a necessidade de recorrer a softwares, entre os quais o GeoGebra, a fim de tornar as demonstrações e construções mais simples e com maior rigor gráfico.

Elaborámos este manual pensando em ti, querido (a) aluno (a) e esperamos que o mesmo possa contribuir de modo eficaz para o teu processo de ensino/aprendizagem.

Desejamos-te um excelente ano letivo.

Os autores

APRESENTAÇÃO DO MANUAL

Este manual está estruturado em cinco unidades: Probabilidades, Geometria e Medida I, Números e Operações, Álgebra e Geometria e Medida II, dentro dos quatro grandes temas, Números e Operações, Organização, Tratamento de Dados e Probabilidades, Geometria e Medida e Álgebra, que já vens trabalhando desde o 1º ano do ensino básico.

Em cada unidade vais encontrar:

- Atividades de diagnóstico e problemas, através dos quais poderás explorar os conteúdos e descobrir novos conhecimentos, aplicando-os na resolução de problemas do dia-a-dia. Estes podem ser resolvidos individualmente ou em grupo, conforme a tua necessidade.
- Atividades de consolidação que integram questões diversificadas para desenvolveres e consolidares os conhecimentos adquiridos.

ÍNDICE

8 UNIDADE 1 - PROBABILIDADES

- 11 Fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas
- 12 Espaço de resultados de um fenómeno aleatório. Acontecimentos
- 14 Operações com acontecimentos
- 18 Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

26 UNIDADE 2 - GEOMETRIA E MEDIDA I

- 28 Decomposição de figuras planas
- 28 Decomposição de polígonos em triângulos e quadriláteros
- 31 Decomposição de um triângulo por uma mediana
- 31 Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa
- 34 Teorema de Pitágoras
- 34 Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras
- 36 Aplicações do Teorema de Pitágoras

44 UNIDADE 3 - NÚMEROS E OPERAÇÕES

- 46 Números racionais - Revisões
- 47 Números irracionais. Números reais
- 51 Relação de ordem em \mathbb{R}

58 UNIDADE 4 - ÁLGEBRA

- 61 Sequências numéricas
 - 61 Termo geral de uma sequência numérica
 - 67 Produto cartesiano de dois conjuntos
 - 70 Relações binárias entre dois conjuntos
 - 70 Correspondências entre conjuntos
 - 75 Relações binárias definidas num conjunto
 - 76 Propriedades das relações binárias num conjunto
 - 78 Relações de equivalência
 - 79 Relações de ordem
 - 79 Relações inversas

- 80** Relação identidade
- 80** Composição de duas relações
- 81** Relações funcionais
- 84** Conceito de função
- 97** Classificação de funções
- 97** Propriedades de uma função
- 100** Composição de duas funções
- 105** Funções proporcionalidade direta e inversa

132 UNIDADE 5 - GEOMETRIA E MEDIDA II

- 135** Transformações geométricas
 - 135** Orientações da reta
 - 136** Segmentos orientados
 - 137** Vetores no plano
 - 138** Noção de vetor
 - 140** Soma de um ponto com um vetor
 - 141** Translação associada a um vetor
 - 144** Propriedades das translações
 - 145** Composição de translações. Adição de vetores
 - 152** Rotações
 - 154** Propriedades das rotações
 - 155** Isometrias do plano. Propriedades
 - 155** Composição de isometrias
 - 159** Homotetias
 - 162** Teorema de Thales
 - 165** Semelhanças
 - 168** Polígonos semelhantes
 - 170** Semelhança de triângulos
 - 177** Áreas de regiões poligonais
 - 177** Construção de regiões poligonais semelhantes
 - 178** Relação entre os perímetros e entre as áreas de regiões poligonais semelhantes

1

3

5

7

2

4

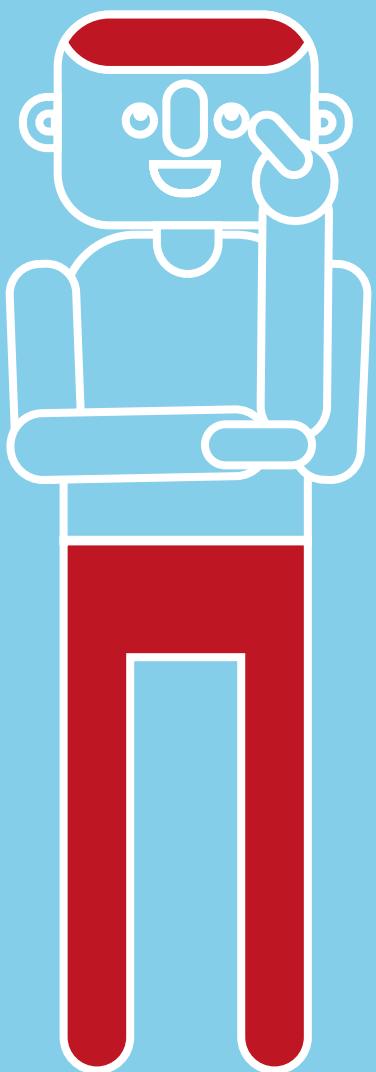
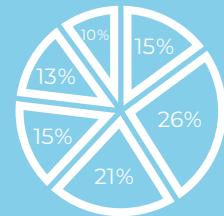
6

8



$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



UNIDADE 1

Probabilidades



UNIDADE 1

PROBABILIDADES

CONTEÚDOS:

- Noção de fenómeno aleatório e de fenómeno determinista.
- Experiência aleatória.
- Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento: espaço, amostra, acontecimento, acontecimento possível, acontecimento certo, acontecimento impossível.
- Definição laplaciana de probabilidade de um acontecimento.
- Estimativa da probabilidade, recorrendo à frequência relativa.

OBJETIVOS:

- Identificar fenómenos aleatórios e deterministas.
- Dar exemplos de fenómenos aleatórios e deterministas, usando o vocabulário adequado.
- Identificar todos os resultados possíveis, quando se realiza determinada experiência aleatória.
- Compreender a noção de probabilidade de um acontecimento e que a sua medida se situa entre 0 e 1.
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela definição de Laplace.
- Usar a frequência relativa para estimar a probabilidade.
- Identificar acontecimentos complementares e compreender que a soma das suas probabilidades é 1.
- Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos e compreender que a probabilidade da sua união é igual à soma das suas probabilidades.
- Resolver e formular problemas, envolvendo a noção de probabilidade.

TEORIA DE CONJUNTOS - REVISÕES

No 7º ano, aprendeste a representar conjuntos de diferentes formas e também a operar com conjuntos, utilizando as suas propriedades. Para uma melhor compreensão do estudo das probabilidades usam-se conhecimentos acerca de conjuntos e as respetivas propriedades. Para isso, propomos as seguintes atividades de revisão.

ATIVIDADES DE REVISÃO

- 1.** Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1.1 Qual é o cardinal de A ?

1.2 Representa um subconjunto B , sendo:

1.2.1 $\#B = 3$

1.2.2 $\#B = 0$

- 2.** Representa em extensão cada um dos seguintes conjuntos:

2.1 $\{1, 2, 3\} \cap \{2\}$ **2.2** $\{1, 3, 2\} \cap \{4, 5, 6\}$ **2.3** $\{1, 3, 2\} \cap \{1, 2\}$

- 3.** Considera o universo, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e nele definidos os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\} \text{ e } C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Representa em extensão:

3.1 $\bar{A}; \bar{B}; \bar{C}$ **3.2** $B \cup C$ **3.3** $B \cap C$

3.4 $\bar{B} \cup \bar{C}$ **3.5** $\bar{B} \cap C$ **3.6** $\bar{B} \cap \bar{C}$

3.7 $\bar{B} \cup \bar{C}$ **3.8** $A - B$ **3.9** $B - C$



FENÓMENOS ALEATÓRIOS E FENÓMENOS DETERMINISTAS

Quando lançamos um dado perfeito não é possível prever o resultado da experiência, isto é, não é possível prever qual a face do dado que vai ficar voltada para cima. Fenómenos como este, cujo resultado é incerto, dizem-se **fenómenos aleatórios**.

Um fenômeno aleatório ou uma experiência aleatória apresenta as seguintes características fundamentais:

- pode repetir-se o número de vezes que se desejar, nas mesmas condições;
- não há conhecimento suficiente para se prever qual será o resultado.

Quando lançamos ao ar uma moeda, não é possível prever o lado que fica voltado para cima, a “cara” ou o “escudo”. Trata-se, portanto, de uma **experiência aleatória**.



São também exemplos de experiências aleatórias:

- extraír ao acaso uma carta de um baralho;
- a extração dos números do totoloto;
- extraír uma bola branca ou preta de um saco não transparente, com 5 bolas brancas e 3 bolas pretas.



Existem outros fenômenos que, pela sua natureza, **não** são considerados fenômenos aleatórios.

Por exemplo:

Ao atirarmos uma pedra a um lago, sabemos, à partida, que ela vai ao fundo.

Ao aquecermos uma certa quantidade de água a 100 °C, sob pressão atmosférica normal, sabemos que ela entra em ebulação.



Fenômenos como estes, que produzem o mesmo resultado, quando são repetidos nas mesmas condições, dizem-se **fenômenos deterministas**.

ESPAÇO DE RESULTADOS DE UM FENÔMENO ALEATÓRIO. ACONTECIMENTOS

Relativamente à experiência aleatória que consiste em observar o resultado do lançamento de um dado, temos as seguintes possibilidades:



- sair face com o número 1 → 
- sair face com o número 2 → 
- sair face com o número 3 → 
- sair face com o número 4 → 
- sair face com o número 5 → 
- sair face com o número 6 → 

O conjunto formado por todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória designa-se por **espaço amostra**, **espaço de acontecimentos** ou **espaço de resultados**. Vamos representá-lo por U .

No caso em apreço, o espaço amostra é:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Espaço de resultados, espaço de acontecimentos ou espaço amostra
 U de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência.

Considerando a experiência aleatória que consiste em lançar um dado e sair um número ímpar, temos:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

Observa que A é um subconjunto do espaço de resultados, ou seja, $A \subset U$, diz-se que A é um acontecimento da experiência aleatória realizada.



Acontecimento de uma experiência aleatória é um subconjunto do espaço de resultados.



Os acontecimentos de uma experiência aleatória são definidos no espaço de resultados através das propriedades das observações que podem ou não ser feitas.

Exemplo: Lançar uma moeda ao ar e observar a face que fica voltada para cima.

Espaço de resultados: $U = \{\text{cara, escudo}\}$

Acontecimento: sair escudo, $\{\text{escudo}\}$

Acontecimento: sair cara, $\{\text{cara}\}$

Classificação dos acontecimentos

Existem diferentes tipos de acontecimentos.

Acontecimento possível

Na experiência que consiste no lançamento de uma moeda ao ar, os acontecimentos correspondentes às observações que podem ser feitas, são: $\{\text{cara}\}$, $\{\text{escudo}\}$ e $\{\text{cara, escudo}\}$.

Se o resultado de uma experiência aleatória corresponde a um conjunto não vazio do espaço de resultados, dizemos que se trata de um **acontecimento possível**.



Os acontecimentos possíveis podem ser classificados de acordo com o seu número de elementos.

No caso da experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado, podemos considerar os seguintes acontecimentos:

Acontecimento elementar

$B = \{\text{face com número 2}\}$, ou seja, $B = \{2\}$

Se o resultado de uma experiência aleatória for constituído por um único elemento do espaço de resultados, dizemos que se trata de um **acontecimento elementar**.



Acontecimento não elementar ou composto

$C = \{\text{face com número par}\}$, ou seja, $C = \{2,4,6\}$



Se o resultado de uma experiência aleatória for constituído por dois ou mais elementos do espaço de resultados, dizemos que se trata de um **acontecimento não elementar ou composto**.

Acontecimento certo

$D = \{\text{face com número menor que 7}\}$, ou seja, $D = \{1,2,3,4,5,6\}$



Se o resultado de uma experiência aleatória for constituído por todos os elementos do espaço de resultados, dizemos que se trata de um **acontecimento certo**.

Também existem os acontecimentos correspondentes ao conjunto vazio.

Acontecimento impossível

$E = \{\text{face com o número 7}\}$, ou seja, $E = \{\}$



Se o resultado de uma experiência aleatória não tiver nenhum elemento do espaço de resultados, dizemos que se trata de um **acontecimento impossível**.

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Os acontecimentos correspondem a conjuntos definidos no **espaço amostra** e as operações com acontecimentos correspondem às operações com conjuntos.



Interseção de acontecimentos

Consideremos, no lançamento de um dado, os seguintes acontecimentos:

- A, “sair um número par”;
- B, “sair um número menor que 3”;
- C, “sair um número par menor que 3”.

Tem-se: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2\}$. É claro que $C = A \cap B$.

Reunião de acontecimentos

Consideremos a mesma experiência e os acontecimentos:

- A, “sair um número par”;
- B, “sair um número menor que 3”;
- C, “sair um número par ou sair um número menor que 3”.

Tem-se: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{1, 2, 4, 6\}$ e $C = A \cup B$.

Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis

Consideremos a mesma experiência e os acontecimentos:

- P, “sair um número ímpar”;
- Q, “sair um número par menor que 3”.

Considerando os acontecimentos P e Q, verificamos que a sua interseção é igual ao conjunto vazio, isto é:

$$P \cap Q = \{1, 3, 5\} \cap \{2\} = \emptyset$$

Neste caso, dizemos que os acontecimentos P e Q são **disjuntos** ou **incompatíveis** ou ainda **mutuamente exclusivos**.

Acontecimentos contrários ou complementares

Na sequência da experiência aleatória considerada anteriormente, os acontecimentos “sair número ímpar” e “sair número par” que correspondem, respectivamente, aos conjuntos $P = \{1, 3, 5\}$ e $A = \{2, 4, 6\}$ são complementares relativamente ao espaço de resultados:

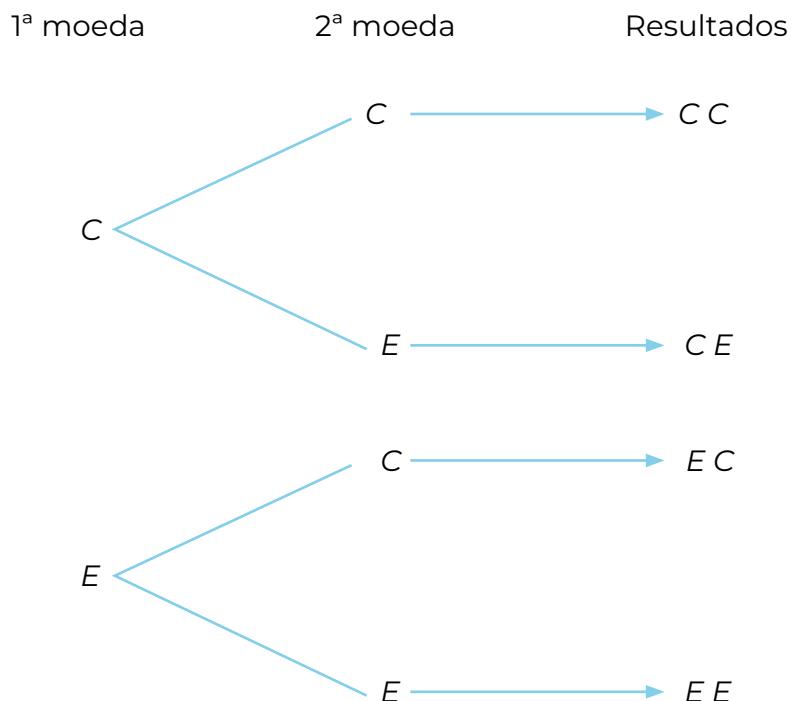
$$A = \bar{P} \text{ ou } P = \bar{A}$$



Dado um acontecimento A , chama-se **acontecimento contrário** ou **complementar** de A , e representa-se por \bar{A} , o acontecimento constituído por todos os elementos do espaço de resultados que não pertencem a A .

Na experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar, qual é o espaço de resultados? E se forem duas moedas?

No caso de uma moeda, temos: $U = \{C, E\}$. No caso de duas moedas, para obtermos o espaço de resultados, podemos fazer um diagrama em árvore, como mostra o exemplo:



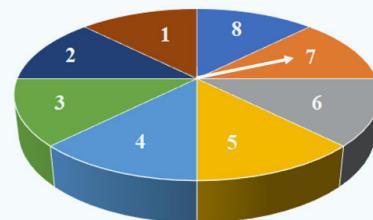


ATIVIDADES

- 1.** Das experiências que a seguir se descrevem, indica as deterministas e as aleatórias:

- 1.1** Extrair uma carta de um baralho e anotar o naipe.
- 1.2** Atirar uma lâmpada ao chão e observar o que acontece.
- 1.3** Extrair uma bola de um saco onde existem bolas amarelas e verdes e anotar a cor.
- 1.4** Deitar um prego numa bacia com água e ver o que acontece.

- 2.** Observa a roleta da sorte representada na figura. Considera a experiência aleatória que consiste em rodar o ponteiro e anota o número que sai.



- 2.1** Representa em extensão o conjunto de resultados.

- 2.2** Classifica cada um dos acontecimentos:

2.2.1 $A = \text{"sair múltiplo de 8";}$

2.2.2 $B = \text{"sair número par";}$

2.2.3 $C = \text{"sair número primo";}$

2.2.4 $D = \text{"sair 9";}$

2.2.5 $E = \text{"não sair 9".}$

- 2.3** Indica:

2.3.1 O acontecimento contrário de A ;

2.3.2 Dois acontecimentos que sejam incompatíveis.

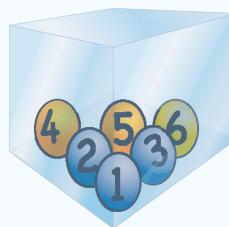
- 3.** Na experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda, indica:

3.1 O espaço de resultados;

3.2 Um acontecimento elementar.

- 4.** Uma caixa contém seis bolas, indistinguíveis ao tato, enumeradas de 1 a 6, sendo três delas azuis, duas vermelhas e uma amarela.

Considera a experiência que consiste em retirar aleatoriamente uma bola da caixa e registar o seu número.



- 4.1** Indica o espaço de resultados.

- 4.2** Considera os seguintes acontecimentos:

- A: “sair um número par”;
- B: “sair um número não superior a 4”;
- C: “sair um número ímpar”;
- D: “sair um múltiplo de 4”.

- 4.2.1** Representa-os na forma de conjuntos (em extensão).

- 4.2.2** Indica um acontecimento elementar e um acontecimento composto.

- 4.3** Relativamente à experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da caixa e registar a sua cor, indica um acontecimento:

- 4.3.1** elementar;

- 4.3.2** impossível;

- 4.3.3** certo.

NOÇÃO E CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO

Como já vimos, quando se lança um dado, há seis resultados possíveis. Pode sair 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Se o dado for um cubo perfeito, não há razão para que um dos números saia mais facilmente que qualquer outro. Dizemos que esses acontecimentos têm todos a mesma probabilidade de se verificar ou que são **acontecimentos equiprováveis**.

Se o Carlos apostar que vai sair o 3 e a Ermelinda que vai sair o 6, nenhum deles está em vantagem, pois ambos têm as mesmas hipóteses de acertar.



Sabendo que há seis resultados possíveis no lançamento do dado e apenas um interessa, consideramos que a probabilidade de acertarem é de 1 em 6, ou seja $\frac{1}{6}$, ou 0,167, ou ainda, 16,7%. O mesmo se passa com qualquer dos outros números: a probabilidade da sua saída é $\frac{1}{6}$.

Qual é a probabilidade de sair um número ímpar?



Dos seis casos possíveis, há três que correspondem a números ímpares: 1, 3 e 5. A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6, ou seja, $\frac{3}{6}$, ou $\frac{1}{2}$, ou 0,50, ou ainda, 50%:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Temos então:

Sendo U o espaço de resultados de uma experiência aleatória e A um acontecimento dessa experiência, a **probabilidade** de A é igual ao quociente entre o número de elementos do acontecimento A e o número de elementos de U .

$$P(A) = \frac{\#A}{\#U}$$



Se designarmos $\#A$ por “número de casos favoráveis” ao acontecimento e $\#U$ por “número de casos possíveis” da experiência, teremos:

A **probabilidade do acontecimento** A é igual ao quociente (razão) entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$



Observemos que a definição só é válida quando todos os acontecimentos elementares são igualmente possíveis, isto é, quando eles são **equiprováveis**.

Esta definição de probabilidade deve-se a Laplace (1749 – 1827), um dos mais conhecidos matemáticos franceses.

Qual é a probabilidade de sair um número maior que 1?



Desta vez há cinco casos favoráveis: 2, 3, 4, 5 e 6.

A probabilidade é $\frac{5}{6}$ ou 0,833.

E a probabilidade de sair o número 7?



Dos resultados possíveis, nenhum é igual a 7, logo não há nenhum caso favorável.

A probabilidade é $\frac{0}{6}$, ou seja, 0.

E qual é a probabilidade de sair um número menor que 7?



Agora, todos os casos são favoráveis e, portanto, a probabilidade é $\frac{6}{6}$, ou seja, 1.

A probabilidade de um acontecimento tem as seguintes propriedades:

- varia de 0 a 1;
- um acontecimento impossível tem probabilidade 0;
- um acontecimento certo tem probabilidade 1.



Na mesma experiência aleatória, que consiste no lançamento de um dado, considera agora os acontecimentos:

- A: “sair número maior que 2”;
- B: “sair número menor ou igual a 2”;
- C: “sair número 1”.

Qual é a probabilidade do acontecimento A? E a probabilidade do acontecimento B?

Como $A = \{3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2\}$, podemos escrever:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Repara que o acontecimento B é o acontecimento contrário ao acontecimento A e que $1 - \frac{2}{3} = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$. O acontecimento contrário ao acontecimento A representa-se por \bar{A} .

A probabilidade do acontecimento contrário ao acontecimento A é dada por $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Dado um acontecimento A com probabilidade $P(A)$, a **probabilidade do seu complementar** obtém-se subtraindo à unidade a probabilidade de A, isto é:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Qual é a probabilidade do acontecimento C?

Facilmente escrevemos:

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

Observando os acontecimentos A e C, verificamos que são **incompatíveis**, pois:

$$A \cap C = \emptyset.$$

A reunião dos dois acontecimentos representa-se por $A \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Assim, a sua probabilidade é $\frac{5}{6}$, isto é,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

E qual é a probabilidade de $B \cup C$?

Repara que $B \cup C = \{1, 2\}$ e que $B \cap C = \{1\}$, isto é, os acontecimentos B e C são **compatíveis**.

Então,

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} = \frac{2}{6} \text{ proposição verdadeira}$$

Se dois acontecimentos, F e G , são incompatíveis, isto é, $F \cap G = \emptyset$, a probabilidade da sua reunião é igual à soma das suas probabilidades.

$$P(F \cup G) = P(F) + P(G)$$



Se dois acontecimentos são compatíveis, isto é, $F \cap G \neq \emptyset$, a probabilidade da sua reunião é igual à soma das suas probabilidades menos a probabilidade da sua intersecção.

$$P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$$

Probabilidade e frequência relativa

Sabemos que uma experiência aleatória pode ser repetida várias vezes.

Considera a seguinte experiência aleatória: lançamento de uma moeda.

Qual é a probabilidade do acontecimento “sair cara”?

Tem-se:

O espaço amostra é {cara, escudo}. Se $A = \{\text{cara}\}$, então $P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Realizada várias vezes a experiência e registadas as frequências do acontecimento “sair cara”, obtiveram-se os resultados constantes da tabela:



Número de experiências realizadas	1	5	10	20	50	100	200	500	1000
Frequência absoluta	1	1	6	10	23	63	105	237	449
Frequência relativa	1	0,2	0,6	0,5	0,46	0,63	0,525	0,474	0,479

Observando a tabela, podemos ver que a frequência relativa do acontecimento “sair cara” tende a aproximar-se do valor 0,5 que é o valor da probabilidade desse acontecimento.

A **frequência relativa de um acontecimento** é um **valor aproximado da probabilidade desse acontecimento** quando o número de repetições da experiência aleatória é consideravelmente grande.

Exemplo:

Numa cidade de 100 000 habitantes fez-se um estudo para se saber qual era a distribuição dos diversos grupos sanguíneos. A experiência aleatória associada ao estudo consiste em escolher ao acaso uma pessoa que ainda não foi testada e determinar o seu grupo sanguíneo. Foram feitas análises a 1000 pessoas e obtiveram-se os seguintes resultados:

Grupo sanguíneo	A	B	AB	O
Nº de pessoas	350	116	22	512

1. Qual é a frequência relativa com que aparece cada um dos tipos de sangue?
2. Com estas informações consegue-se saber qual é a probabilidade exata de uma pessoa com sangue do tipo B? Porquê?
3. Ao escolhermos uma pessoa ao acaso na cidade, quais destas afirmações são verdadeiras?
 - (A): A probabilidade de ter sangue do tipo A é aproximadamente 35%.
 - (B): A probabilidade de ter sangue do tipo A é exatamente 35%.
 - (C): A probabilidade de ter sangue do tipo AB é cerca de 2%.
 - (D): A probabilidade de não ter sangue do tipo O é de 51,2%.

Resolução:

- 1.** Como já sabes calcular a frequência relativa, podes apresentar as respetivas frequências numa tabela.

Tipo de sangue	Número de pessoas	Frequência relativa	Frequência relativa em %
A	350	$350/1000 = 0,35$	35
B	116	$116/1000 = 0,116$	11,6
AB	22	$22/1000 = 0,022$	2,2
O	512	$512/1000 = 0,512$	51,2
Total	1000	1	100

- 2.** Não. Porque a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade do acontecimento considerado.
3. São as afirmações (A) e (C).

ATIVIDADES

- 1.** Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9. Extraí-se, ao acaso, uma bola do saco. Determina a probabilidade de sair:

- 1.1** A: “uma bola com um número par”;
- 1.2** B: “uma bola com um número primo”;
- 1.3** C: “uma bola com um número inferior a 10”;
- 1.4** $A \cap B$
- 1.5** $A \cup B$

- 2.** Numa caixa há 5 bolas azuis, 3 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas.

Retira-se, sem ver, uma bola. Qual a probabilidade de:

- 2.1** A bola ser vermelha?
- 2.2** A bola não ser azul?



- 3.** Na cantina da escola estão 20 alunos. Sabendo que 8 são meninas, indica a probabilidade de, ao escolher uma pessoa ao acaso, escolhermos um rapaz.

(A): 60% (B): 0,4 (C): 12% (D): 12

- 4.** Numa experiência aleatória de um acontecimento A , sabe-se que $P(A) = 0,3$. A probabilidade do acontecimento contrário de A é:

(A): 0,7 (B): 0,4 (C): 30% (D): 0,2

- 5.** O grupo que representa uma escola numa determinada competição é composto por: cinco jogadores de futebol, três jogadores de andebol, dois de basquetebol e um de voleibol. Ao escolher um jogador ao acaso, qual a probabilidade de ele:

5.1 ser jogador de futebol?

5.2 ser jogador de andebol?

5.3 não ser jogador de basquetebol?

- 6.** O gráfico seguinte representa a frequência dos alunos, de uma escola básica, por ano de escolaridade.



Se escolhermos ao acaso um aluno da escola, qual a probabilidade de ele:

6.1 ser do 1º ano?

6.2 ser do 4º ano?

6.3 não ser do 3º ano?

6.4 ser do 2º ciclo do ensino básico?

1

3

5

7

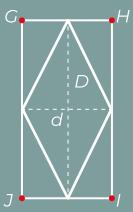
2

4

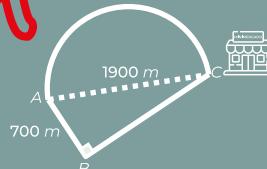
6

8

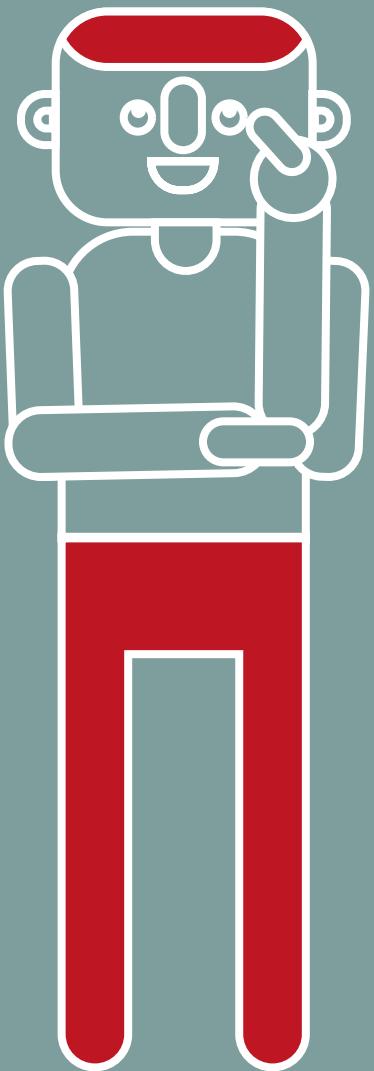
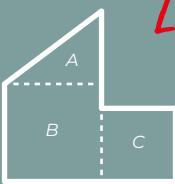
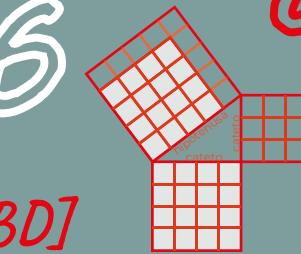
$$\overline{BD} = \overline{DC}$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$



[ABD]



UNIDADE 2

Geometria e Medida I



UNIDADE 2

GEOMETRIA E MEDIDA I

CONTEÚDOS:

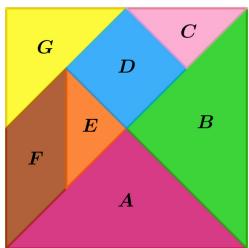
Figuras planas e sólidos geométricos

- Decomposição de polígonos em triângulos e quadriláteros convexos.
- Teorema de Pitágoras e suas demonstrações.
- Aplicações do teorema de Pitágoras.

OBJETIVOS:

- Compor e decompor um polígono em triângulos e quadriláteros e relacionar entre si as figuras obtidas.
- Obter figuras por composição e decomposição de outras.
- Resolver problemas, relacionando entre si propriedades das figuras geométricas.
- Inventar / criar puzzles geométricos.
- Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa.
- Demonstrar o Teorema de Pitágoras.
- Resolver problemas no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável.

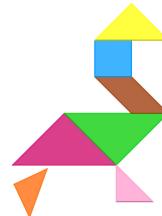
DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PLANAS



DECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS EM TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

O Tangram chinês é um puzzle famoso e muito popular. É um quadrado composto por sete partes, sendo cinco triângulos e dois quadriláteros, todos coloridos, como podes observar.

Com as peças do Tangram podemos construir, por composição e decomposição, várias figuras, como por exemplo, a figura ao lado.

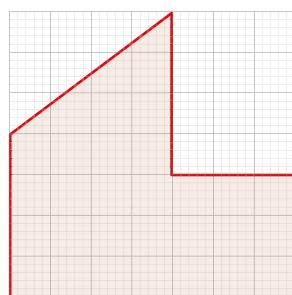


ATIVIDADES

1. Constrói, em cartolina, o teu Tangram e recorta as sete peças.
2. Utiliza a tua imaginação para construíres outras figuras com todas as peças.
3. Que conclusões relativamente às áreas das figuras obtidas?

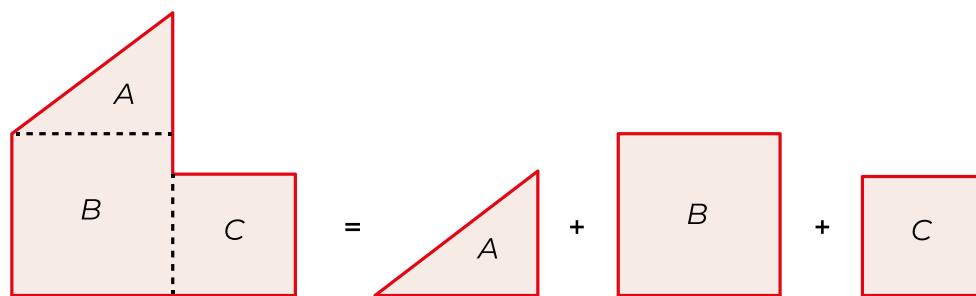
Decomposição de figuras

Suponhamos que queríamos saber qual a área da figura seguinte:





O problema pode ser resolvido decompondo a figura em outras figuras cuja área sabemos calcular rapidamente. Basta repararmos que a figura dada é composta por dois quadrados e um triângulo e, assim, o problema reduz-se ao cálculo das áreas desses polígonos:



A área da figura será a soma das áreas dos três polígonos considerados.

Neste caso, tomando um quadrado da grelha como unidade de área, podemos dizer que a área é:

$$A = 6 + 16 + 9 = 31$$

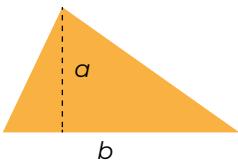
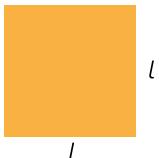
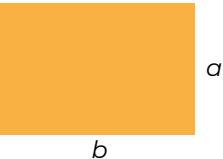
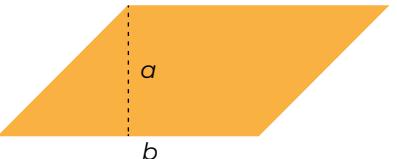
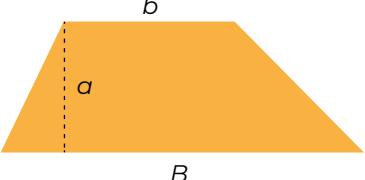
Qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos e quadriláteros.



Áreas de triângulos e quadriláteros

As áreas dos polígonos podem obter-se a partir das áreas de outros polígonos, por composição ou decomposição, utilizando as fórmulas para o cálculo de áreas estudadas anteriormente.

Recorda que:

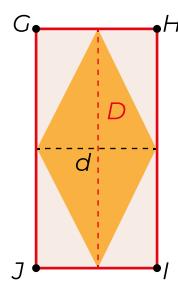
Figuras geométricas	Áreas
Triângulo	$A = \frac{b \times a}{2}$
	
Quadrado	$A = l \times l = l^2$
	
Retângulo	$A = b \times a$
	
Paralelogramo	$A = b \times a$
	
Trapézio	$A = \frac{(B+b) \times a}{2}$
	



Relativamente ao losango, podemos verificar que a sua área é igual à metade da área do retângulo, cujas medidas dos lados são as respectivas diagonais do losango.

Considerando o retângulo $[GHIJ]$ da figura, a sua área é:

$$A = D \times d, \text{ logo, a área do losango é } A = \frac{D \times d}{2}.$$



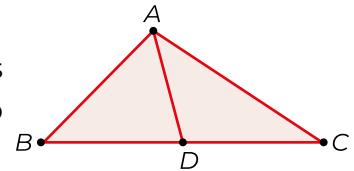
DECOMPOSIÇÃO DE UM TRIÂNGULO POR UMA MEDIANA

Recorda que:

- **Mediana de um triângulo** é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.
- Todo o triângulo tem três medianas e o ponto de interseção dessas medianas chama-se **baricentro** do triângulo.
- **Altura de um triângulo em relação a um lado** é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice oposto a esse lado ou o seu prolongamento.

Considera o triângulo $[ABC]$ e nele definido a mediana $[AD]$.

Repara que o triângulo considerado ficou decomposto em dois triângulos com bases de igual comprimento, isto é, $\overline{BD} = \overline{DC}$ (D é o ponto médio de $[BC]$).



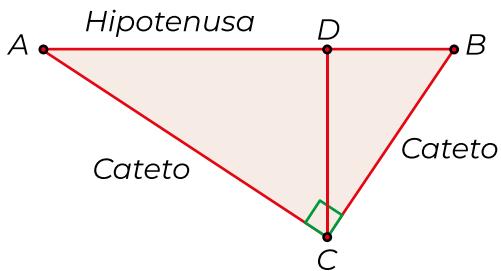
Como, para além disso, os dois triângulos têm a mesma altura em relação a essas bases, resulta que a área do triângulo $[ABD]$ é igual à área do triângulo $[ADC]$.

Então, podemos afirmar que uma mediana divide um triângulo em dois triângulos equivalentes (com a mesma área).

DECOMPOSIÇÃO DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO PELA ALTURA REFERENTE À HIPOTENUSA

Num triângulo retângulo, os lados perpendiculares entre si designam-se por **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto designa-se por **hipotenusa**.

Considera agora o triângulo retângulo $[ABC]$ da figura ao lado.



Por observação, verifica que se traçarmos a altura relativamente à hipotenusa ($[CD]$), o triângulo considerado fica decomposto em dois outros triângulos retângulos. Medindo os comprimentos dos lados dos dois triângulos conclusões que os triângulos $[ABC]$, $[ADC]$ e $[DBC]$ são semelhantes entre si.

Determina as áreas desses três triângulos.

Qual é a sua relação?

Repete o exercício, considerando outros triângulos retângulos.

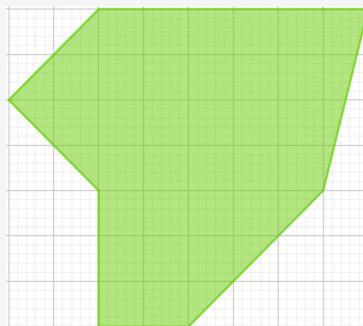
ATIVIDADES

1. Determina a área dos polígonos dados nas figuras seguintes. Começa por decompô-las em polígonos cujas áreas saibas calcular.

1.1

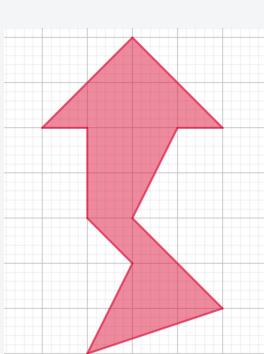


1.2

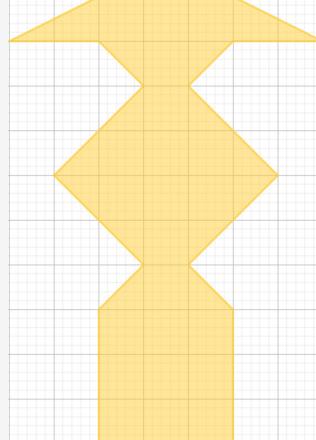


2. Calcula a área de cada uma das figuras seguintes, considerando que cada quadrícula tem 1 cm de lado.

2.1



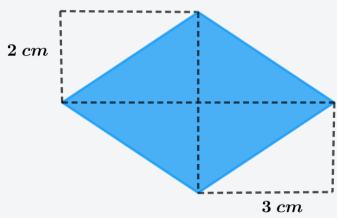
2.2



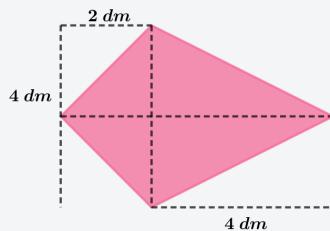


3. Determina a área das figuras seguintes.

3.1



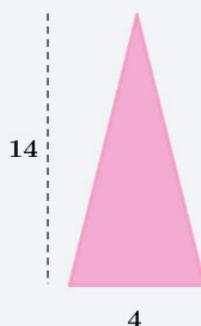
3.2



4. Calcula a área de cada uma das figuras seguintes.

Todas as medidas são expressas em cm.

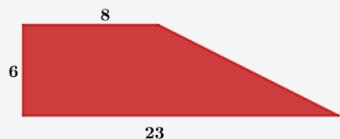
4.1



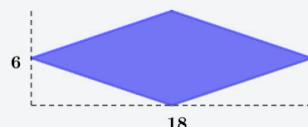
4.2



4.3



4.4

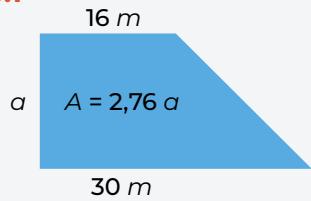


5. Observa as figuras e calcula as dimensões desconhecidas.

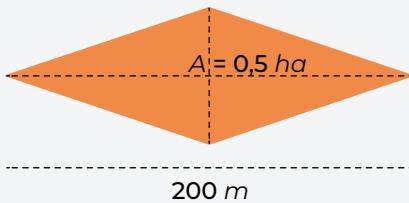
Recorda que: $1\text{a} = 1\text{dam}^2$

$$1\text{ha} = 1\text{hm}^2$$

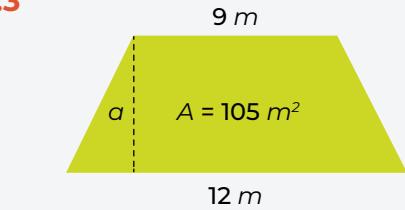
5.1



5.2



5.3



TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras de Samos nasceu na primeira metade do século VI a.C., na ilha Egeia de Samos, situada muito perto de Mileto.

Depois de numerosas viagens (Egito, Babilónia, etc.), regressou à sua ilha natal, tendo-se fixado, posteriormente, na Itália do Sul, mais precisamente em Crotone. Foi aí que fundou uma escola, designada por Escola Pitagórica. Esta escola era uma academia onde estudavam a filosofia, a matemática e as ciências naturais.

Ao nome Pitágoras está ligado um teorema célebre – **Teorema de Pitágoras**.

Um **teorema** é uma afirmação (proposição ou condição) cuja veracidade necessita de ser demonstrada.

É constituído por duas partes, a **hipótese** e a **tese**.

A **hipótese** é o conjunto das condições aceites como verdadeiras e a **tese**, consequência da hipótese, é a conclusão que se quer provar, tendo em conta a hipótese.

Demonstrar um teorema é chegar à conclusão de que a tese é verdadeira, partindo da hipótese e de outras proposições verdadeiras.

DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

ATIVIDADE

Desenha, no teu caderno, dois quadrados, C_1 e C_2 , geometricamente iguais como mostram as figuras 1 e 2.

Em cada um deles, traça quatro triângulos retângulos também geometricamente iguais, sendo **a** a medida do comprimento da hipotenusa, **b** e **c** as medidas dos comprimentos de cada um dos catetos, todas expressas na mesma unidade de medida.

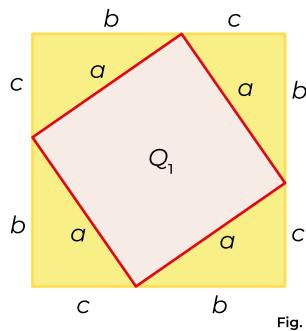


Fig. 1

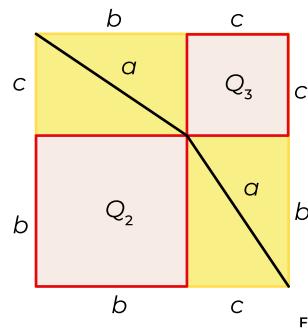
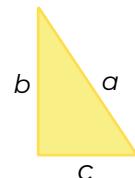


Fig. 2

 C_1 C_2

Certamente, verificaste que os quatro triângulos da figura 1 têm a mesma área que os quatro triângulos da figura 2.

Como os quadrados C_1 e C_2 têm a mesma área e como as somas das áreas dos triângulos são iguais nos quadrados C_1 e C_2 , então, a área do quadrado Q_1 é igual à soma das áreas de Q_2 e Q_3 .



$$\text{Área de } Q_1 = a^2$$

$$\text{Área de } Q_2 = b^2$$

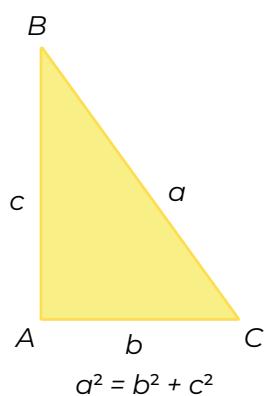
$$\text{Área de } Q_3 = c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

↑
Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

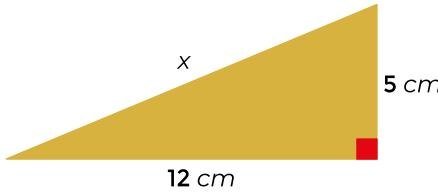
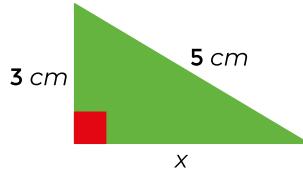
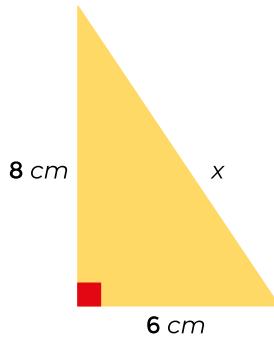
Num triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos.



APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Exemplo 1

Observa as figuras seguintes e determina o valor de x .

1.1**1.2****1.3**

Resolução

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras.

$$\mathbf{1.1} \quad x^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 + 144 \Leftrightarrow x^2 = 169$$

Aplicando a definição de raiz quadrada de um número não negativo, temos:

$$x = \sqrt{169}$$

$$\Leftrightarrow x = 13 \text{ cm}$$

$$\mathbf{1.2} \quad 5^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + x^2 \Leftrightarrow 25 - 9 = x^2 \Leftrightarrow 16 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ cm}$$

$$\mathbf{1.3} \quad x^2 = 9^2 + 6^2 \Leftrightarrow x^2 = 81 + 36 \Leftrightarrow x^2 = 117$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{117}$$

Recorrendo a uma calculadora, e apresentando o resultado com duas casas decimais, temos:

$$x = 10,82 \text{ cm}$$



Exemplo 2

Num triângulo $[ABC]$, sabe-se que:

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm}, \overline{AC} = 7 \text{ cm} \text{ e } \overline{BC} = 5 \text{ cm}.$$

Verifica se o triângulo $[ABC]$ é ou não um triângulo retângulo.

Resolução

Se o triângulo for retângulo, o maior lado é a hipotenusa e verificar-se-á o teorema de Pitágoras.

Então:

$$7^2 = 4^2 + 5^2$$

$$49 = 16 + 25$$

$$49 = 41$$

A proposição é falsa, logo não se verifica o teorema de Pitágoras.

Portanto, o triângulo $[ABC]$ não é retângulo.

Um triângulo, cujas medidas dos comprimentos dos lados sejam a, b e c tais que $a^2 = b^2 + c^2$, é retângulo no vértice oposto ao lado de medida a .



CURIOSIDADE

(x, y, z) é um terno pitagórico se x, y e z são números naturais e verificam a condição:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

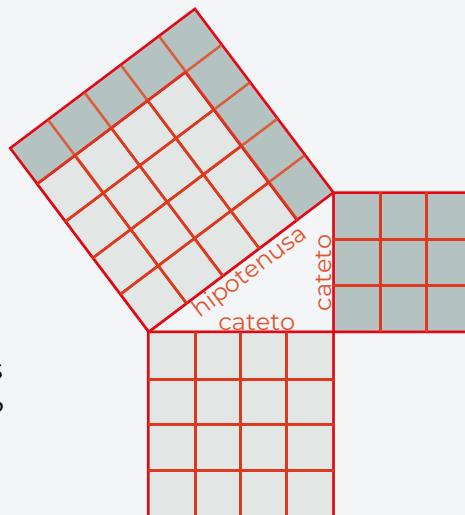


Teorema de Pitágoras e áreas

ATIVIDADE

Observa a figura e indica a área de cada um dos quadrados representados.

Relaciona a área do quadrado maior com as áreas dos dois outros quadrados menores. Que conclusões?



Certamente concluíste que:

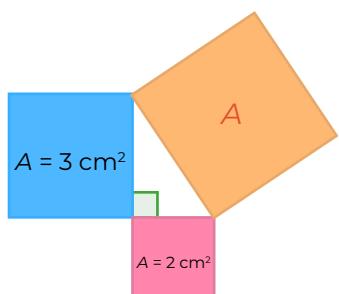


Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

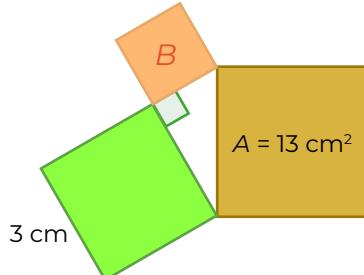
Exemplos

Para cada uma das figuras seguintes, determina a área dos quadrados A, B e C.

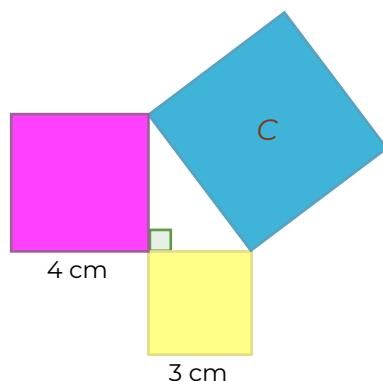
1.1



1.2



1.3



Resolução

$$\text{1.1 Área de } A = (3+2) \text{ cm}^2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\text{1.2 Área de } B = (13 - 3^2) \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{1.3 Área de } C = (4^2 + 3^2) \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$$



O teorema de Pitágoras também pode ser utilizado para resolver problemas de geometria no espaço.

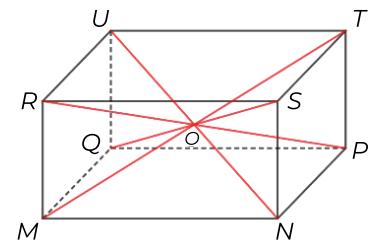
Uma das suas aplicações é no cálculo do comprimento da diagonal de um poliedro.

Diagonal de um poliedro é o segmento de reta definido por dois vértices desse poliedro, não pertencentes à mesma face.

Diagonal de um paralelepípedo retângulo.

Um paralelepípedo retângulo tem quatro diagonais, como se pode ver na figura:

[MT], [NU], [PR] e [QS]

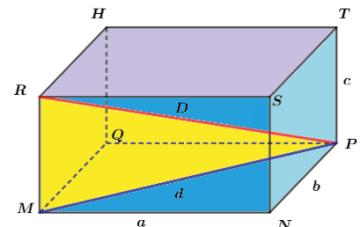


Representando as dimensões do paralelepípedo por a , b e c , sendo D a medida do comprimento de uma diagonal do paralelepípedo e d a medida do comprimento da diagonal de uma face, tem-se que:

- $\triangle [RMP]$ é retângulo em M e, pelo teorema de Pitágoras,

$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (1)$$
- $\triangle [MNP]$ é retângulo em N e, pelo teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2$$



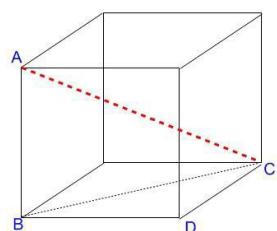
Substituindo na igualdade (1) d^2 por $a^2 + b^2$, temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Num **paralelepípedo retângulo** de dimensões a , b e c , e diagonal D , tem-se que: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

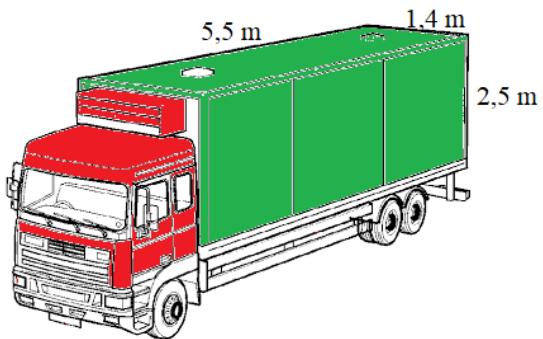


No caso de o paralelepípedo ser um cubo, qual é a relação entre a medida do comprimento da diagonal e a medida do comprimento do lado?



Exemplo

O senhor José é um construtor e tem camiões para transporte de material. Com o camião representado na figura abaixo, qual é o comprimento máximo das vigas que é possível transportar?

**Resolução**

O comprimento máximo que a viga pode ter é o comprimento da diagonal do paralelepípedo.

Como: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, sendo a , b e c as dimensões do paralelepípedo, temos:

$$D^2 = (5,5)^2 + (1,4)^2 + (2,5)^2$$

$$D^2 = 30,25 + 1,96 + 6,25$$

$$D^2 = 38,18$$

$$D = \sqrt{38,18} \text{ com duas casas decimais}$$

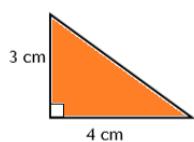
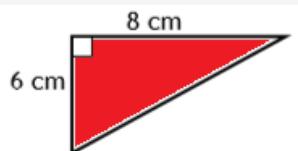
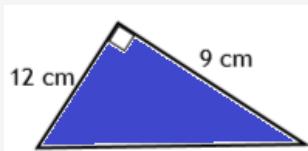
$$D = 6,18 \text{ m}$$

O comprimento máximo da viga que é possível transportar é cerca de 6,18 m.

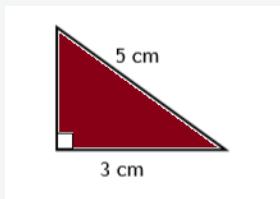
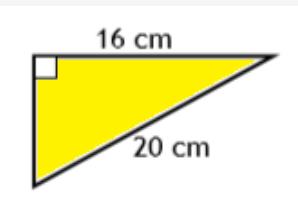
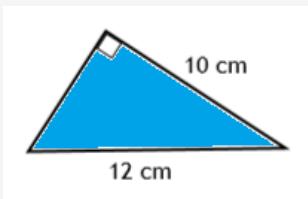


ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

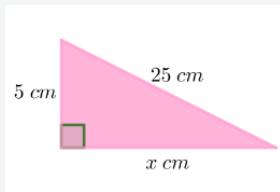
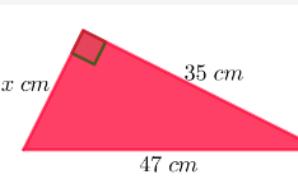
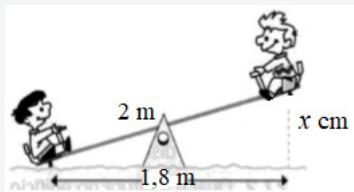
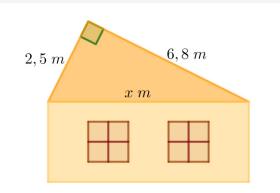
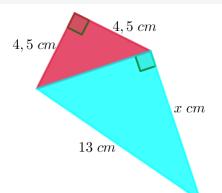
1. Para cada um dos triângulos retângulos seguintes, determina a medida da hipotenusa:

1.1**1.2****1.3**

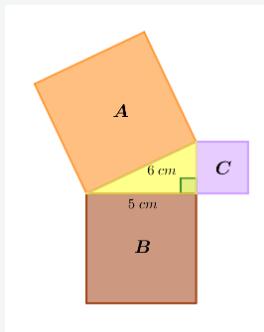
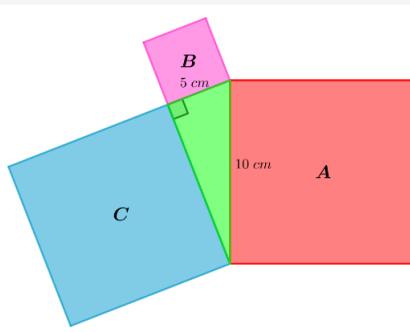
2. Para cada um dos triângulos seguintes, determina a medida desconhecida:

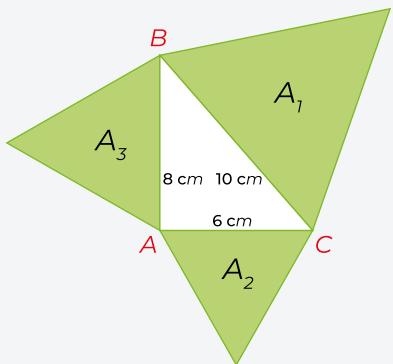
2.1**2.2****2.3**

3. Determina o valor de x em cada uma das figuras:

3.1**3.2****3.3****3.4****3.5**

4. Para cada uma das figuras seguintes, calcula as áreas dos quadrados A , B e C :

4.1**4.2**



- 5.** Na figura está representado um triângulo retângulo $[ABC]$ com um triângulo equilátero sobre cada um dos seus lados.

5.1 Calcula as áreas das superfícies coloridas e verifica a relação que existe entre as áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre cada um dos lados do triângulo $[ABC]$.

5.2 Experimenta construir outros polígonos regulares sobre cada um dos três lados de um triângulo retângulo.

Calcula as áreas dos três polígonos e relaciona-as.

- 6.** Dos seguintes ternos de números, identifica os que podem ser comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

6.1 (3; 4; 6)

6.2 (16; 30; 34)

6.3 (2,5; 1,5; 2)

6.4 (56; 33; 65)

6.5 (50; 21; 13)

6.6 (72; 97; 65)

- 7.** Observa a figura e determina:

7.1 A altura do trapézio.

7.2 A área do trapézio.



- 8.** Determina o comprimento:

8.1 Da diagonal de um quadrado de 5 cm de lado.

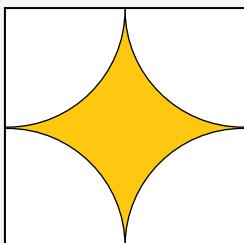
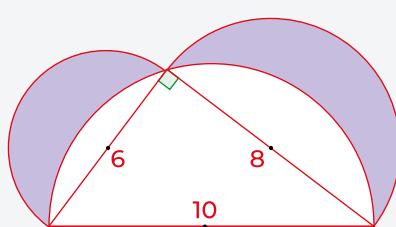
8.2 Da diagonal de um retângulo de 20 m de base e 24 m de altura.

8.3 Do lado de um quadrado cujas diagonais medem 16 dm.

8.4 Da altura de um triângulo isósceles de 24 cm de base, e para o qual os lados iguais têm 15 cm de comprimento.

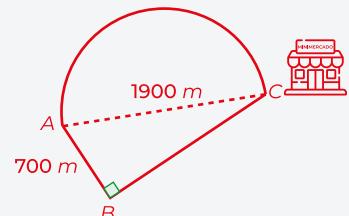


- 9.** Calcula a área das seguintes figuras coloridas (a unidade de comprimento é o centímetro).

9.1**9.2**

A diagonal do quadrado tem 10 cm.

- 10.** Observa a figura ao lado. A Joana vive no local A e vai às compras num minimercado no local C. Tem as alternativas: ou vai na estrada com a forma de um semicírculo; ou na estrada que passa pela casa da tia, no ponto B. Para percorrer a menor distância, qual dos percursos deve escolher?



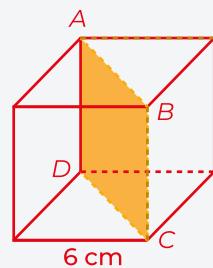
- 11.** Uma sala de aula tem 10 m de comprimento por 7 m de largura e 3 m de altura. Na sala, encontram-se duas abelhas. Qual é a distância máxima a que as abelhas se podem encontrar uma da outra?

- 12.** A figura ao lado representa um cubo com aresta igual a 6 cm. Determina:

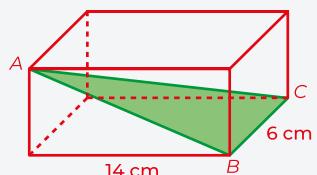
12.1 O comprimento da diagonal do retângulo $[ABCD]$.

12.2 A área do retângulo $[ABCD]$.

12.3 O volume do cubo.



- 13.** A figura ao lado representa uma caixa com a forma de um prisma quadrangular. Verifica se é possível colocar um lápis de 17 cm de comprimento, na posição $[AC]$.



1

3

5

7

2

4

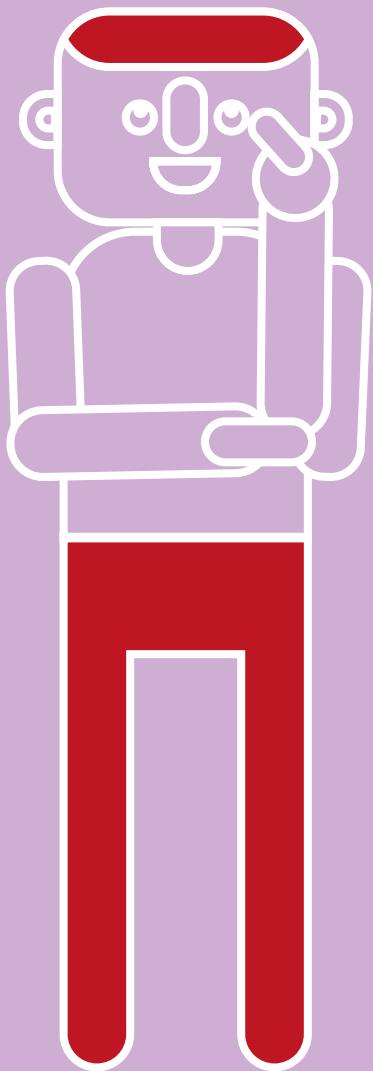
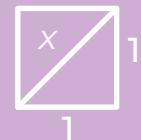
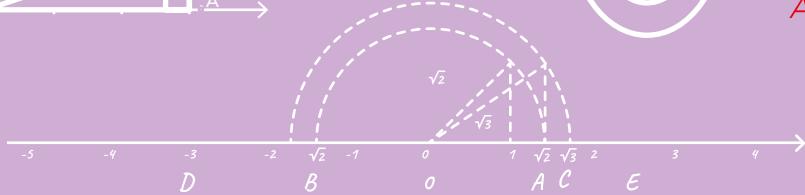
6

8



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$A = \left\{ -2, \frac{6}{5}, -\frac{11}{3}, \pi, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0, \frac{14}{2} \right\}$$



UNIDADE 3

Números e Operações



UNIDADE 3

NÚMEROS E OPERAÇÕES

CONTEÚDOS:

- Noção de número irracional.
- Noção de número real.
- O conjunto dos números reais.
- A reta real.
- Relação de ordem em \mathbb{R} .
- Valores aproximados de números reais.
- Operações em \mathbb{R} :
 - Adição algébrica;
 - Multiplicação e divisão de radicais com o mesmo índice.

OBJETIVOS:

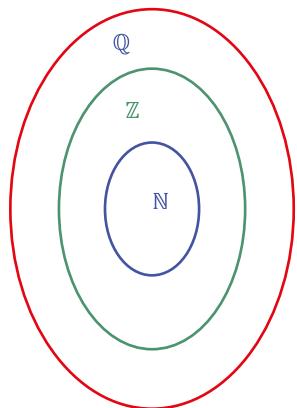
- Identificar um número real, como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita periódica, no caso racional e infinita não periódica, no caso irracional.
- Representar números reais na reta real, com aproximações apropriadas aos contextos.
- Comparar números reais.
- Ordenar números reais.
- Compreender e utilizar a transitividade das relações $<$ e $>$ em \mathbb{R} .
- Determinar valores aproximados por defeito e por excesso da soma e do produto de números reais, conhecidos valores aproximados por defeito e por excesso das parcelas e dos fatores, respectivamente.
- Efetuar operações com números reais.
- Resolver problemas e investigar regularidades, envolvendo números racionais e reais.
- Realizar atividades de forma autónoma, responsável e criativa.
- Desenvolver a autoconfiança.
- Criar hábitos de trabalho e de persistência.
- Ser capaz de confrontar as suas ideias, justificando as suas opiniões, mostrando-se capaz de raciocinar e de comunicar em contextos numéricos.

NÚMEROS RACIONAIS - REVISÕES

Para iniciar esta unidade, vais recordar o estudo feito sobre o conjunto dos números racionais.



Um número racional pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros relativos e b diferente de zero.



Exemplos de números racionais:

$$\frac{1}{2}, 0, -\frac{8}{4}, \sqrt{16}, \frac{7}{3}$$

O conjunto dos números racionais representa-se por \mathbb{Q} .

Qualquer número racional pode ser representado por uma dízima finita ou por uma dízima infinita periódica.

Exemplos de dízimas finitas

$$0,02; \frac{9}{3}; \frac{1}{4}; -8$$

Exemplos de dízimas infinitas periódicas

$$\frac{1}{9}; 0,(3); -2,03(5)$$

ATIVIDADES

- 1.** Determina as dízimas que representam os seguintes números racionais e classifica-as, indicando o respetivo período, no caso de serem infinitas periódicas:

1.1 $\frac{4}{5}$

1.2 $\frac{2}{3}$

1.3 $\frac{31}{33}$

- 2.** Escreve, sob a forma de fração, as seguintes dízimas:

2.1 -0,6

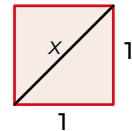
2.2 5,(4)



NÚMEROS IRRACIONAIS. NÚMEROS REAIS

Problema

Determina a medida do comprimento da diagonal de um quadrado, sendo o comprimento do lado igual à unidade.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ é um número racional?

Para ser um número racional, devem existir dois números inteiros a e b ($b \neq 0$), tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Se $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, então $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ onde, por definição de raiz quadrada de um número não negativo e das operações com potências, podemos escrever:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$$

De acordo com as medidas do quadrado representado, ao substituirmos a e b pelos seus valores, verificamos que $2 \times 1^2 \neq 1^2$.

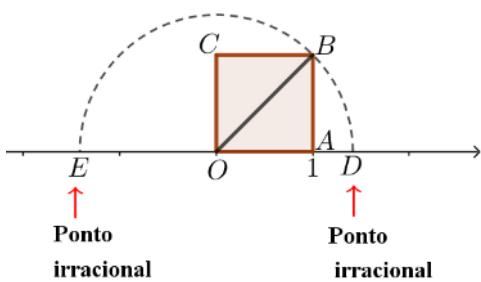
Substituindo agora a por 3 e b por 2, verificamos que:

$$2 \times 3^2 \neq 2^2$$

Verifica para outros valores inteiros não negativos (pois trata-se de medidas de comprimento).

Certamente concluíste que a e b não existem, logo, não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$.

$\sqrt{2}$ não é um número racional, é um **número irracional**.



Retomando o problema inicial e representando o quadrado na reta numérica, obtemos a figura ao lado.

Os segmentos $[OB]$ e $[OA]$ são incomensuráveis, isto é, não é possível representar as suas medidas como razão entre dois números inteiros.

Relativamente à figura, o ponto D é tal que $\overline{OD} = \overline{OB}$, cuja abcissa, $\sqrt{2}$, não é um número racional. Então, pode-se dizer que o ponto D é um ponto irracional.

O ponto E , simétrico do ponto D relativamente à origem, também é um ponto irracional.

- **Ponto irracional** é um ponto cuja abcissa é um número irracional.
- O simétrico, relativamente à origem, de um ponto irracional também é um **ponto irracional**.

Como sabes, qualquer número racional, pode ser representado por uma dízima finita ou por uma dízima infinita periódica.

Relativamente ao número $\sqrt{2}$, que já vimos, é um número irracional e, recorrendo a uma calculadora, podemos verificar que este pode ser representado por:

$$\sqrt{2} = 1,4142135624\dots$$

que é uma dízima infinita não periódica.

Existem outros números irracionais, como por exemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, \dots

Assim,

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,23606798\dots$$

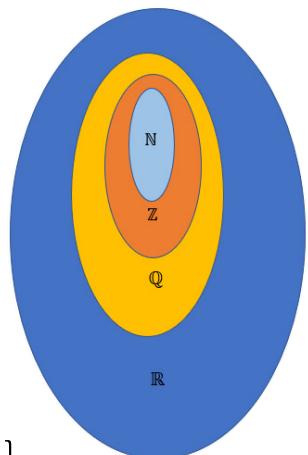
$$\pi = 3,1415926536\dots$$

são também dízimas infinitas não periódicas.



Ao conjunto reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais dá-se o nome de **conjunto dos números reais** e designa-se por \mathbb{R} .

$$\mathbb{Q} \cup \{números irracionais\} = \mathbb{R}$$



Temos, então, como principais conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} = \{números naturais\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{números inteiros\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{x : x = a - b, a, b \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{números racionais\} = \left\{ x : x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{números irracionais\}$$

Assim,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Existem outros subconjuntos de \mathbb{R} , nomeadamente:

$$\mathbb{R}^+ = \{números reais positivos\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{números reais negativos\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \{números reais não negativos\}$$

$$\mathbb{R}_0^- = \{números reais não positivos\}$$

A reta real

Com a inclusão dos números irracionais, a reta numérica passa a chamar-se **reta real**. A cada ponto da reta real corresponde um número real e a cada número real corresponde um ponto na reta real.

Então,

ponto da reta real \hookrightarrow número real (abcissa do ponto)

e, reciprocamente,

número real \hookrightarrow ponto da reta real

Consideremos a reta real e sobre ela os pontos A, B, C, D e E cujas abscissas são números reais:

$$A \hookrightarrow \sqrt{2}$$

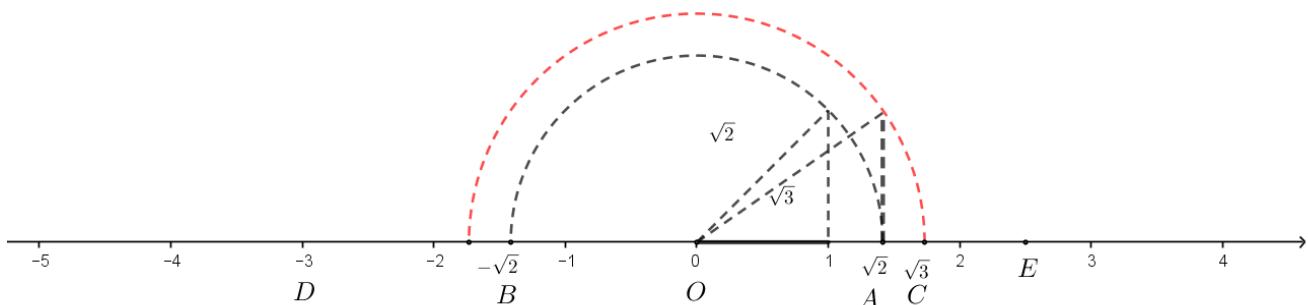
$$B \hookrightarrow -\sqrt{2}$$

$$C \hookrightarrow \sqrt{3}$$

$$D \hookrightarrow -3$$

$$E \hookrightarrow \frac{5}{2}$$

Para representar $\sqrt{2}$ na reta real consideramos um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1 e a hipotenusa tem comprimento $\sqrt{2}$. Para marcar $\sqrt{3}$, consideramos um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1, respectivamente. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{3}$.



ATIVIDADES

- 1.** Considera o conjunto $A = \left\{-2, \frac{6}{5}, -\frac{11}{3}, \pi, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0, \frac{14}{2}\right\}$

Dos elementos do conjunto, indica:

- 1.1** os que são números racionais;
- 1.2** os que representam dízimas infinitas não periódicas;
- 1.3** os números reais não positivos.



2. Completa, utilizando os sinais \in ou \notin , de modo a obteres afirmações verdadeiras:

2.1 $6 \dots \mathbb{N}$

2.2 $-3 \dots \mathbb{N}$

2.3 $\frac{2}{3} \dots \mathbb{Q}$

2.4 $-\sqrt{25} \dots \mathbb{Z}$

2.5 $\sqrt{0,4} \dots \mathbb{N}$

2.6 $-1,5 \dots \mathbb{Q}$

2.7 $-\pi \dots \mathbb{Q}$

2.8 $\frac{0}{2} \dots \mathbb{R}_0^+$

2.9 $-1,(6) \dots \mathbb{R}$

3. Diz, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

3.1 todo o número real é racional;

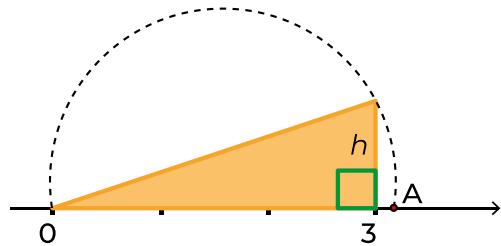
3.2 todo o número natural é inteiro;

3.3 todo o número real é irracional.

4. Observa a figura ao lado.

4.1 Se $h=1$, a abscissa do ponto A é racional ou irracional?

4.2 Indica um valor para h , de modo que a abscissa do ponto A seja um número inteiro.



RELAÇÃO DE ORDEM EM \mathbb{R}

ATIVIDADE

Representa, na reta real, os pontos A, B, C e D de abscissas, respectivamente, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$



A partir da representação desses pontos, vais agora escrever os números por ordem crescente.

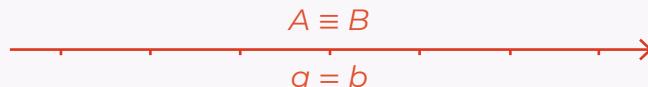
De uma forma geral, dados dois pontos A e B de abscissas a e b , respectivamente, na reta real representada abaixo



podemos afirmar que b é maior que a porque o ponto B se situa à direita do ponto A .

Dados dois números reais a e b , correspondentes às abcissas dos pontos A e B , respetivamente, pode ocorrer uma e uma só das três possibilidades:

- $a = b$. Os pontos A e B coincidem.



- $a > b$. O ponto A está à direita de B .



- $b > a$. O ponto B está à direita de A .



Propriedades da relação de ordem em \mathbb{R}

Propriedade tricotómica



Dados dois números reais quaisquer, a e b , tem-se um e um só dos seguintes casos:

- i) $a = b$; ii) $a > b$; iii) $b > a$.



Propriedade transitiva

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$, quaisquer que sejam os números reais a, b e c .



Operações em \mathbb{R}

As operações e as respetivas propriedades estudadas no conjunto dos números racionais estendem-se ao conjunto dos números reais, isto é, permanecem válidas neste conjunto.

Quando nos cálculos surgem números irracionais, estes podem ser substituídos pelos seus valores aproximados, em forma de dízimas.

Adição algébrica

Exemplo 1

Cálculo de $3 + \sqrt{2}$

Como $\sqrt{2} = 1,414\dots$ (dízima infinita não periódica), 1,4 e 1,5 são valores aproximados às décimas de $\sqrt{2}$, respetivamente, por defeito e por excesso, logo podemos escrever:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$3 + 1,4 < 3 + \sqrt{2} < 3 + 1,5, \text{ onde}$$

- 4,4 é o valor aproximado por defeito às décimas da soma $3 + \sqrt{2}$.
- 4,5 é o valor aproximado por excesso às décimas da soma $3 + \sqrt{2}$.

Do mesmo modo, podemos calcular os valores aproximados por defeito e por excesso, às centésimas e às milésimas, da soma $3 + \sqrt{2}$.

Exemplo 2

Cálculo de $\pi + \sqrt{5}$

Sabendo que $\pi = 3,141\dots$ e $\sqrt{5} = 2,23606\dots$, e considerando os valores aproximados por defeito e por excesso às centésimas, de cada uma das parcelas, podemos escrever:

$$3,14 < \pi < 3,15$$

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$$

Adicionando, temos: $3,14 + 2,23 < \pi + \sqrt{5} < 3,15 + 2,24$

ou seja, $5,37 < \pi + \sqrt{5} < 5,39$

- 5,37 é o valor aproximado às centésimas por defeito da soma $\pi + \sqrt{5}$.
- 5,39 é o valor aproximado às centésimas por excesso da soma $\pi + \sqrt{5}$.

Calcula agora os valores aproximados por defeito e por excesso, às décimas e às milésimas, da soma considerada.

Multiplicação**Exemplo**

Cálculo de $2 \times \sqrt{7}$

Sendo $\sqrt{7} = 2,6457\dots$

- $2 \times 2,6 = 5,2$ é o valor aproximado por defeito às décimas do produto $2 \times \sqrt{7}$.
- $2 \times 2,7 = 5,4$ é o valor aproximado por excesso às décimas do produto $2 \times \sqrt{7}$.

Por simplificação da escrita, $2 \times \sqrt{7}$ é o mesmo que $2\sqrt{7}$.



Como determinar o valor exato de $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$?

Tendo em conta a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (2+3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Exemplo:

Calcula o valor exato de cada uma das expressões:

1. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

2. $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

Resolução:

1. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (5-3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

2. $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7+2-4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

1. Marca na reta real dois números reais x e y , tais que:

1.1 $x \geq \sqrt{2}$

1.2 $y < \sqrt{3}$

2. Escreve um valor aproximado às décimas do número irracional:

2.1 $\sqrt{7}$ (por defeito)

2.2 $\sqrt{7-\sqrt{4}}$ (por excesso)

2.3 $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ (por excesso)

2.4 $\pi \times \frac{2}{3}$ (por defeito)

3. Indica o valor lógico das proposições:

3.1 $3,141$ é um valor aproximado às milésimas por defeito de π .

3.2 $0,(3)$ é um valor aproximado às décimas de $\frac{1}{3}$.

3.3 $10\sqrt{12} = 12\sqrt{10}$.

4. Completa as afirmações seguintes, utilizando um dos símbolos $>$ ou $<$, ou números, conforme os casos, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

4.1 Sabendo que $x < y$:

4.1.1 $x + 3 \dots y + 3$

4.1.2 $x - 3 \dots y - 3$

4.1.3 $y + 1,3 \dots x + 1,3$

4.1.4 $y - 1,3 \dots x - 1,3$

4.2 Sabendo que $x > -7$:

4.2.1 $x + 3 > \dots$

4.2.2 $x + 2 \dots -1$

4.2.3 $x - \dots > -5$

4.3 Sendo $x < 0$ e $x > y$, então $|x| \dots |y|$

4.4 Sendo $x > 0$ e $x < y$, então $|x| \dots |y|$

5. Indica o menor número natural, a , tal que:

5.1 $a > \sqrt{40}$

5.2 $a > \sqrt{130}$

6. Simplifica cada uma das seguintes expressões:

6.1 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 35\sqrt{2}$

6.2 $4\sqrt{6} + 9\sqrt{6} - 20\sqrt{6}$

6.3 $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

7. Verifica que sendo x e y dois números reais não negativos temos:

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \quad y \neq 0$$

7.1 $x = 16$ e $y = 4$

7.2 $x = 0,36$ e $y = 0,9$

7.3 $x = 5$ e $y = 2$



8. Calcula:

8.1 $\sqrt{50} \times \sqrt{2}$

8.2 $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

8.3 $\sqrt{1,6} \times \sqrt{10}$

8.4 $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

8.5 $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$

8.6 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{363}}$

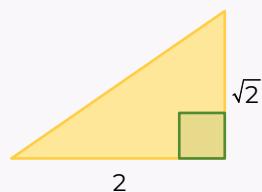
9. Considera uma circunferência de raio 15 cm.

9.1 Qual é o valor exato do perímetro dessa circunferência?

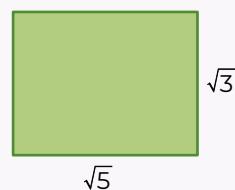
9.2 Indica um valor aproximado às décimas desse perímetro.

10. Usando valores aproximados às centésimas, calcula entre que valores se situa o perímetro e a área de cada uma das figuras.

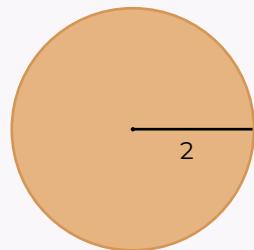
10.1



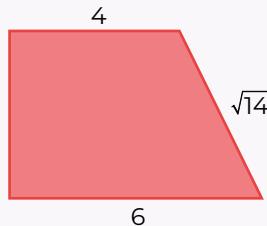
10.2



10.3



10.4



1

3

5

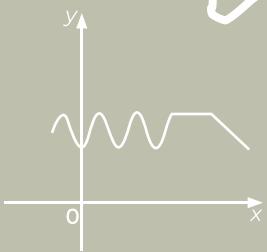
7

2

4

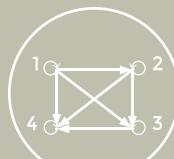
6

8

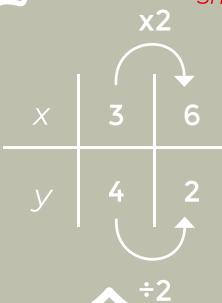


$$f: x \rightarrow \frac{12}{x}$$

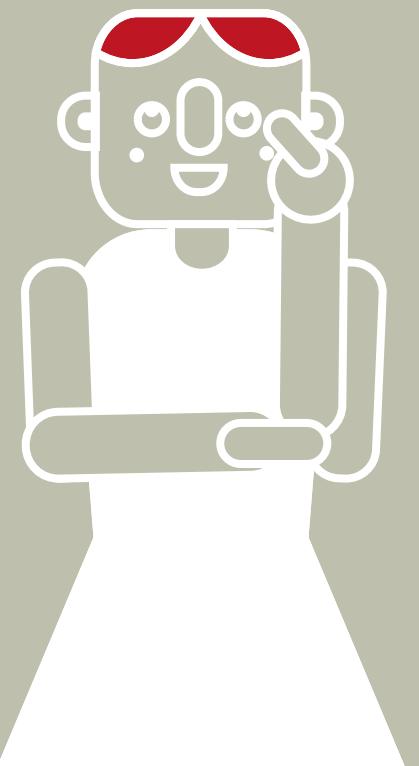
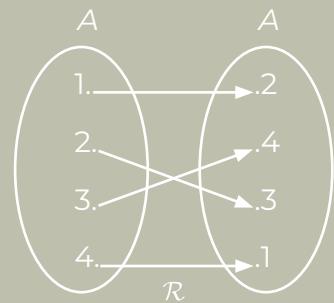
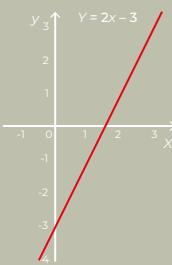
$$4 \xrightarrow[g]{f} 16 \xrightarrow{f} 8 \quad (f \circ g)(4) = 8$$



$$c_n = 2n - 1$$



$$3n+1=72 \Leftrightarrow 3n=72-1$$



UNIDADE 4

Álgebra



UNIDADE 4

ÁLGEBRA

CONTEÚDOS:

1. Sequências numéricas

- Termo geral de uma sequência numérica.
- Representação.

2. Relações binárias

- Produto cartesiano de conjuntos.
- Relações binárias entre dois conjuntos.
- Representação em diagrama sagital, em gráfico cartesiano e em tabela.
- Propriedades das relações binárias definidas no conjunto.
- Classificação.
- Relações de ordem.
- Relações de equivalência.
- Relações identidade.
- Relação inversa.
- Composição de duas relações.
- Relações funcionais.

3. Funções

- Conceito de função.
- Representação de funções através de diagramas, tabelas, gráficos e expressões algébricas.
- Conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio e contradomínio de uma função.
- Propriedades das funções.
- Classificação das funções.
- Composição de funções.
- Funções linear e afim.
- Proporcionalidade direta e inversa como funções.

OBJETIVOS:

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica.
- Representar o termo geral de uma sequência numérica, usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica.
- Determinar os termos de diversas ordens a partir do termo geral de uma sequência numérica.
- Formar o produto cartesiano de dois conjuntos dados e calcular o respetivo cardinal.
- Identificar entre correspondências, apresentadas em diferentes contextos e de diversas formas, aquelas que representam relações binárias.
- Identificar, numa relação, os principais elementos (domínio, contradomínio, objetos, imagens).
- Representar relações por diagrama sagital, em grafo, em tabela e em gráfico cartesiano.
- Identificar as propriedades das relações binárias definidas num conjunto.
- Classificar relações binárias definidas no conjunto: relações de ordem e relações de equivalência.
- Identificar relações idênticas e inversas.
- Realizar a composição de duas relações.
- Reconhecer relações funcionais.
- Resolver problemas que envolvem relações binárias.
- Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, utilizando as suas várias notações.
- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
- Analisar uma função a partir das suas representações.
- Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função seja crescente, decrescente ou constante.
- Analisar situações de proporcionalidade direta e inversa como funções do tipo: $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), respetivamente.
- Representar algebraicamente situações de proporcionalidade direta e inversa.
- Representar gráfica e algebraicamente uma função linear ou afim.
- Representar funções através de diagrama sagital, tabelas, gráficos e expressões algébricas.
- Identificar funções afins.
- Interpretar e construir tabelas e gráficos de funções afins.



SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

TERMO GERAL DE UMA SEQUÊNCIA NUMÉRICA

No 7º ano, estudaste vários tipos de sequências como, por exemplo, as sequências numéricas.

Exemplos:

- 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... sequência dos múltiplos de 10
- 15, 20, 25, 30, 35, 40 sequência dos múltiplos de 5 maiores que 10 e menores que 45

Uma **sequência numérica** ou **sequência de números** é uma lista ordenada de números.

Cada número da lista é chamado **termo da sequência** e a ordem do seu lugar na lista diz-se a **ordem do termo**.



Na sequência 10, 20, 30, 40, 50, 60, ..., diz-se que:

- o primeiro termo da sequência é 10, ou seja, o termo de ordem 1 é 10:
 $10 = 10 \times 1$;
- o segundo termo da sequência é 20, ou seja, o termo de ordem 2 é 20:
 $20 = 10 \times 2$;
- o terceiro termo da sequência é 30, ou seja, o termo de ordem 3 é 30:
 $30 = 10 \times 3$.

Pela regularidade, o termo de ordem n é $10 \times n$ ou $10n$, que também se designa por **termo geral** ou **regra de formação** da sequência. A partir do termo geral, pode-se calcular o termo de qualquer ordem da sequência.

O termo geral, ou termo de ordem n , desta sequência numérica, também pode ser representado da seguinte forma: $a_n = 10n$.

Deste modo,

- a_1 é o primeiro termo;
- a_2 é o segundo termo;
- a_3 é o terceiro termo.

O décimo primeiro termo da sequência considerada é representado por a_{11} , sendo $a_{11} = 10 \times 11 = 110$.

Exemplos:

- 1.** Considera a sequência:

1, 4, 9, 16, 25...

1.1 Indica o sétimo termo da sequência.

1.2 Escreve uma expressão do termo geral da sequência.

- 2.** Considera a sequência cujo termo geral é $b_n = 3n + 1$.

2.1 Determina o segundo e o décimo termo da sequência.

2.2 Verifica se 61 e 72 são ou não termos da sequência.

- 3.** Considera as sequências de termo geral:

$$c_n = 2n - 1 \quad \text{e} \quad d_n = 2n + 1$$

3.1 Determina $c_2 + d_3$.

3.2 Escreve, na sua forma mais simples, uma expressão de:

3.2.1 $c_n + d_n$

3.2.2 $c_n - d_n$

3.2.3 $c_n \times d_n$

Resolução

- 1.** De acordo com a sequência, temos:

O primeiro termo $1 = 1^2$;

O segundo termo $4 = 2^2$;

O terceiro termo $9 = 3^2$;

O quarto termo $16 = 4^2$;

O quinto termo $25 = 5^2$;



Então, o sétimo termo $49 = 7^2$ e o termo geral é dado por $a_n = n^2$.

2.1 Sendo $b_n = 3n+1$, temos:

$$b_2 = 3 \times 2 + 1 = 7 \quad \text{e} \quad b_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$$

2.2 61 é termo da sequência se existir um valor natural de n , tal que:

$$b_n = 61$$

Resolvendo a equação, temos:

$$3n+1=61 \Leftrightarrow 3n=61-1$$

$$\Leftrightarrow 3n=60$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{60}{3}$$

$$\Leftrightarrow n=20$$

Como 20 é um número natural, concluímos que 61 é o vigésimo termo da sequência.

De igual modo se procede para 72:

$$b_n = 72$$

$$3n+1=72 \Leftrightarrow 3n=72-1$$

$$\Leftrightarrow 3n=71$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{71}{3}$$

Como $\frac{71}{3}$ não é número natural, concluímos que 72 não é termo da sequência.

3.1 Sendo $c_n = 2n - 1$ e $d_n = 2n + 1$, temos:

$$\begin{aligned} c_2 + d_3 &= (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 + 1) \\ &= 3 + 7 = 10 \end{aligned}$$

$$\text{3.2.1} \quad c_n + d_n = (2n-1) + (2n+1)$$

$$= 2n - 1 + 2n + 1$$

$$= 2n + 2n - 1 + 1$$

$$= 4n$$

$$\text{3.2.2} \quad c_n - d_n = (2n-1) - (2n+1)$$

$$= 2n - 1 - 2n - 1$$

$$= 2n - 2n - 1 - 1$$

$$= -2$$

$$\text{3.2.3} \quad c_n \times d_n = (2n-1) \times (2n+1)$$

$$= 2n \times 2n + 2n \times 1 - 1 \times 2n - 1 \times 1$$

$$= 4n^2 + 2n - 2n - 1$$

$$= 4n^2 - 1$$

ATIVIDADES

- 1.** Escreve os cinco primeiros termos de cada sequência, sabendo que:

1.1 o primeiro termo é 3. Cada termo, a partir do primeiro, é obtido do anterior adicionando 4 unidades;

1.2 o primeiro termo é 5. Cada termo, a partir do primeiro, é obtido subtraindo 2 unidades;

1.3 o primeiro termo é 4. Cada termo, a partir do primeiro, é o dobro do anterior;

1.4 o primeiro termo é 20. Cada termo, a partir do primeiro, é metade do anterior;

1.5 o primeiro termo é 0. Cada termo, a partir do primeiro, é o quíntuplo do anterior.



- 2.** Considera as sequências:

$$a_n = 1, 4, 16, 64, \dots$$

$$b_n = 3, 7, 11, 15, \dots$$

$$c_n = 30, 27, 24, 21, \dots$$

$$d_n = 2, 4, 8, 16, \dots$$

Para cada uma delas, escreve os quatro termos seguintes e explica a regra que utilizaste.

- 3.** Observa o seguinte quadro:

Número	3	6	9	12	15	...
Termo	1º	2º	3º	4º	5º	

- 3.1** Escreve uma expressão do termo geral da sequência.

- 3.2** Determina o termo de ordem 50.

- 3.3** O número 183 é termo da sequência? Justifica.

- 4.** Escreve os cinco primeiros termos das sequências cujo termo geral é:

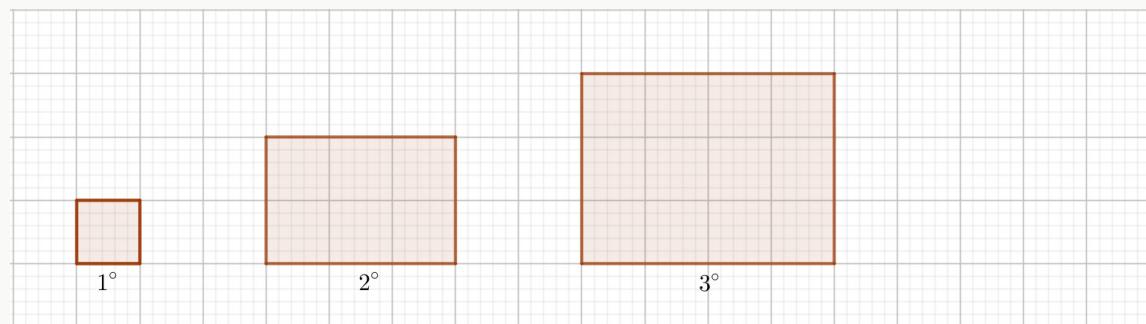
4.1 $a_n = 3n - 1$

4.2 $b_n = n^2 + 1$

4.3 $c_n = (n+1)^2$

4.4 $d_n = \frac{2n-1}{4n+4}$

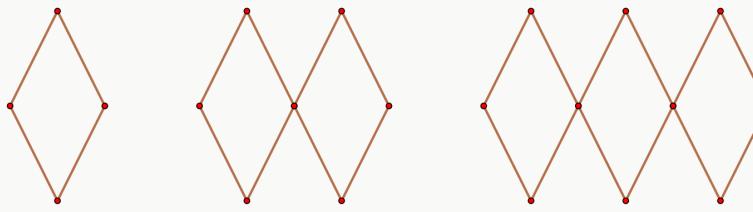
- 5.** A figura abaixo mostra os três primeiros termos de uma sequência geométrica. Cada nova figura é constituída aumentando uma linha e duas colunas de quadrados.



- 5.1** Desenha a próxima figura da sequência.

- 5.2** Considerando que o primeiro termo da sequência corresponde a uma quadrícula, escreve uma fórmula para determinar o número de quadrículas que está na posição enésima da sequência.

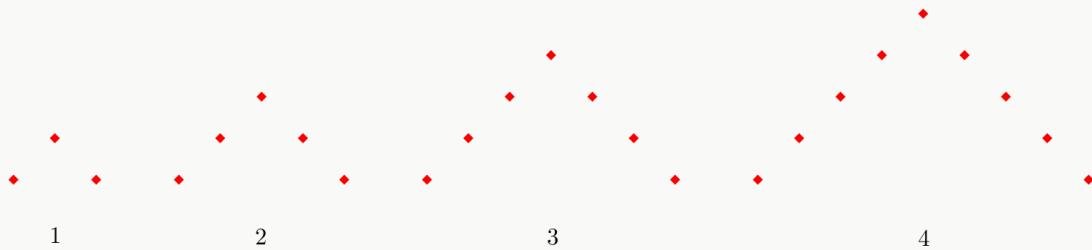
6. Observa a sequência:



Completa o quadro.

Nº de losangos	1	2	3	4	...	10	...	n
Nº de pontos	4							

7. Considera os quatro primeiros termos de uma sequência onde cada figura representa um bando de aves. Cada ponto simboliza uma ave. O número de aves vai sempre aumentando.



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

7.1 Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?

7.2 Escreve uma regra que permite determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.

7.3 Escreve uma expressão do termo geral desta sequência.

7.4 Quantos pontos tem a 100ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?

7.5 Existe, nesta sequência, alguma figura com 76 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.

7.6 Existe alguma figura nesta sequência com 125 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.



PRODUTO CARTESIANO DE DOIS CONJUNTOS

Considera o problema:

Para o lanche, a Paula tinha de escolher, para beber, leite ou chá e, para comer, bolo, pizza ou sandes. De quantas maneiras diferentes pode a Paula fazer o seu lanche, escolhendo uma bebida e um acompanhamento?

Resolução

Designando por $A=\{\text{chá, leite}\}$ e $B=\{\text{bolo, pizza, sandes}\}$, podemos representar a relação definida do conjunto A para o conjunto B pela expressão “ x é bebida para acompanhar y ”.

		B	bolo	pizza	sandes
A					
chá		(chá, bolo)	(chá, pizza)	(chá, sandes)	
leite		(leite, bolo)	(leite, pizza)	(leite, sandes)	

Como podes observar na tabela, existem seis maneiras diferentes de fazer o lanche.

A definição extensiva dessa correspondência representa-se da seguinte forma:

$\{(chá, bolo), (chá, pizza), (chá, sandes), (leite, bolo), (leite, pizza), (leite, sandes)\}$, que se designa por produto cartesiano de A por B .

Dados dois conjuntos A e B , chama-se **produto cartesiano** de A por B , que se representa por $A \times B$, ao conjunto formado por todos os **pares ordenados** (x,y) em que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B .

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

No par ordenado (x,y) , a ordem dos elementos não pode ser trocada, quer isto dizer que $(x,y) \neq (y,x)$. Porquê?

Observa que (x,y) não é o mesmo que $\{x,y\}$.

Exemplo

Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

Repara que:

1. $\#A = 3$; $\#B = 2$ e $\#(A \times B) = 6$

De uma forma geral, tem-se:

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

- 2.** O produto cartesiano de dois conjuntos não é comutativo, isto é, $A \times B \neq B \times A$, pois **não são**, em geral, conjuntos com os mesmos elementos.

Caso B seja igual a A , tem-se:

$A \times B = B \times A = A \times A = A^2$, que se designa por **quadrado cartesiano** de A .

Exemplo

$$A = \{1, 2, 3\},$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$\#A^2 = 3^2 = 9$$



ATIVIDADES

- 1.** Considera os seguintes conjuntos:

$$M = \{\text{Paulo, Ricardo, Victor}\}$$

$$F = \{\text{Márcia, Sofia}\}$$

1.1 Determina o produto cartesiano de M por F .

1.2 Completa $\#(M \times F) =$

- 2.** Define extensivamente:

2.1 $\{2\} \times \{2, 3, 4\}$

2.2 $\{2, 3, 4\} \times \{2\}$

- 3.** Considera o conjunto $A = \{0, 3, 4\}$.

3.1 Define em extensão A^2 .

3.2 Qual é o subconjunto de A^2 constituído pelos seus pares ordenados de termos iguais?

- 4.** Completa, utilizando um dos sinais $=, \neq, \in$ e \subset :

4.1 $(1, 5) \dots (5, 1)$

4.2 $\{(1, 2) \dots (1, 2)\}$

4.3 $\{(1, 1) \dots \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}\}$

4.4 $\{(1, 2) \dots \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}\}$

RELAÇÕES BINÁRIAS ENTRE DOIS CONJUNTOS

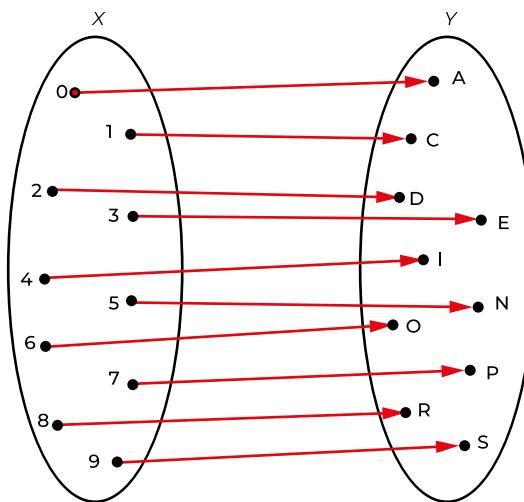
CORRESPONDÊNCIAS ENTRE CONJUNTOS

O Alberto enviou uma mensagem ao Pedro cujo teor é:

1 6 8 8 3 9 7 6 5 2 3 5 1 4 0

O Pedro não compreendeu a mensagem e pediu ao amigo que o ajudasse na descodificação da mesma.

Para isso, o Alberto enviou-lhe o seguinte esquema, que contém a chave, permitindo-lhe assim fazer corresponder a cada número do conjunto X , uma letra do conjunto Y .



Com estes dados, o Pedro descodificou a mensagem, como mostra a seguinte tabela.

Mensagem	1	6	8	8	3	9	7	6	5	2	3	5	1	4	0
Chave	C	O	R	R	E	S	P	O	N	D	E	N	C	I	A

Como acabaste de ver, foi estabelecida uma **correspondência** entre o conjunto

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, **conjunto de partida**, e o conjunto

$Y = \{A, C, D, E, I, N, O, P, Q, R\}$, **conjunto de chegada**.



No dia a dia, estabeleces muitas vezes correspondências entre conjuntos sem dares por isso.

Exemplos de correspondências

Exemplo 1

Na tua turma, a cada aluno corresponde um número natural.

Se o último aluno tem o número 32, então há 32 alunos na turma.

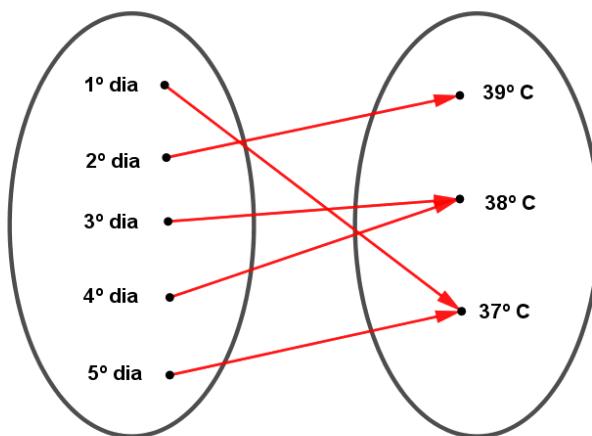
Neste caso, o conjunto de partida é o conjunto dos alunos da turma e o de chegada, o dos números naturais.

Exemplo 2

Imagina o registo das temperaturas de uma criança internada na pediatria do hospital, durante cinco dias.

Dias	1º	2º	3º	4º	5º
Temperaturas	37°C	39°C	38°C	38°C	37°C

Podemos definir esta correspondência entre o conjunto dos dias de internamento e o conjunto das temperaturas por um diagrama de setas (diagrama sagital).

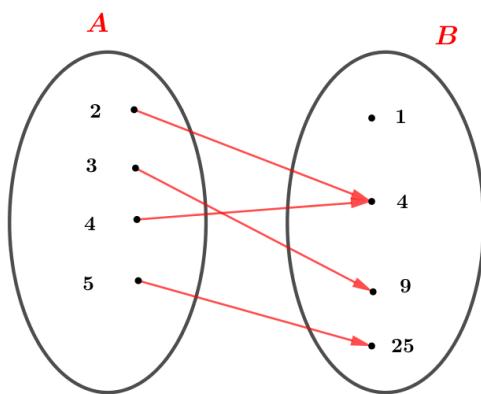


Considera os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 4, 9, 25\}$.

Vamos estabelecer uma correspondência entre os dois conjuntos, de modo a que cada elemento de A seja divisor de um elemento de B .

Esta correspondência de A para B ($A \rightarrow B$), que define uma relação entre os elementos de A e os de B , pode ser representada por um diagrama de setas, no qual as setas partem do conjunto A para o conjunto B .

Assim, a expressão “é divisor de”, é a propriedade que permite relacionar um elemento $x \in A$ com um elemento $y \in B$, e define uma relação binária entre os dois conjuntos.



Simbolicamente, utiliza-se a expressão xRy ou $\mathcal{R}(x, y)$ que significa que x está em relação com y .

Usualmente, representam-se as relações por letras maiúsculas do tipo: $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \dots$

Já sabes que o conjunto A é o **conjunto de partida** e o conjunto B é o **conjunto de chegada**.

Aos elementos do conjunto A chamamos **objetos** e aos seus correspondentes em B , **imagens**.

Assim, no exemplo, a imagem de 2 é 4 e a imagem de 3 é 9.

Ao conjunto dos objetos, que é o mesmo que o conjunto de partida, damos o nome de **domínio** da relação e ao conjunto das imagens chamamos de **contradomínio** da relação.



A mesma correspondência pode ser representada através da condição:

“ x é divisor de y ”,

cujas soluções se obtêm substituindo x pelos elementos de A e y pelos correspondentes elementos de B .

Assim, teremos:

- 2 é divisor de 4; • 4 é divisor de 4;
- 3 é divisor de 9; • 5 é divisor de 25.

A condição “ x é divisor de y ” tem, pois, várias soluções.

Cada uma das soluções pode registar-se sob a forma de um par ordenado de números. Por exemplo, “3 é divisor de 9” pode substituir-se pelo par ordenado $(3, 9)$.

No par ordenado $(3, 9)$, o **primeiro elemento**, 3, pertence ao conjunto de partida e o **segundo elemento**, 9, pertence ao conjunto de chegada.

A partir destas informações, podemos escrever as soluções da condição “ x é divisor de y ” sob a forma de pares ordenados, isto é,

$\{(2, 4), (3, 9), (4, 4), (5, 25)\}$, que se designa por **grafo** da relação.

Observa que uma relação binária do conjunto A para o conjunto B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$:

$$\{(2,4), (3,9), (4,4), (5,25)\} \subset \{(2,1), (2,4), (2,9), (2,25), (3,1), (3,4), (3,9), (3,25), (4,1), (4,4), (4,9), (4,25), (5,1), (5,4), (5,9), (5,25)\} = A \times B$$

Existem ainda outras formas de representar uma relação, como por exemplo:

Tabela de verdade

Uma tabela de verdade é uma tabela de dupla entrada em que a leitura é feita “linha por coluna”, assinalando com V a célula que se encontra na interseção da “linha x ” com a “coluna y ” se e somente (x, y) pertence à relação.

B	1	4	9	25
A				
2		V		
3			V	
4		V		
5				V

Por exemplo, o par $(2,4)$ pertence à relação; o par $(3,1)$ não pertence à relação.

Gráfico cartesiano

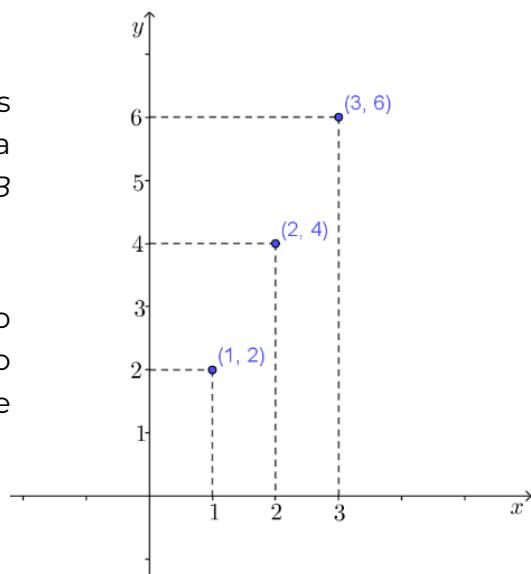
O gráfico cartesiano de uma relação é o conjunto de pontos do plano cartesiano que tem por coordenadas (x,y) .

O primeiro elemento do par é a abscissa e o segundo é a ordenada.

Exemplo

Considera agora os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ e uma correspondência de A para B definida por: “ x é metade de y ”.

As soluções estão definidas no grafo: $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ cujo gráfico cartesiano é o que se apresenta ao lado:



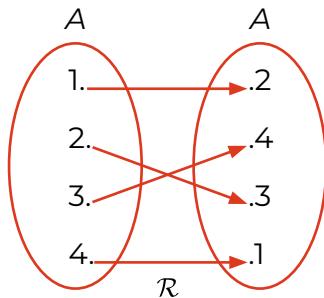


RELAÇÕES BINÁRIAS DEFINIDAS NUM CONJUNTO

Numa relação binária, pode acontecer que o conjunto de partida e o conjunto de chegada sejam iguais. Nesse caso, a relação binária está definida num só conjunto.

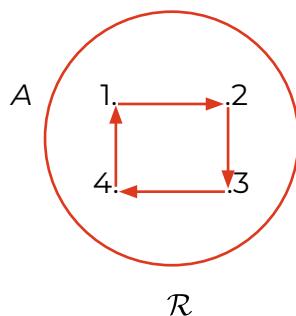
Exemplo

Considera a relação \mathcal{R} , dada pelo seguinte diagrama sagital:



Diz-se, neste caso, que \mathcal{R} é uma relação binária definida no conjunto A .

O diagrama sagital, neste caso, pode elaborar-se de maneira mais simples:



Exemplo

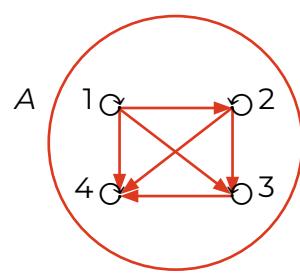
Considerando o mesmo conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e nele definida a relação binária \mathcal{S} , pela condição “ x é menor ou igual a y ”, os pares que verificam a relação \mathcal{S} são:

$$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)$$

A relação pode ser representada em extensão por:

$$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Repara que a relação \mathcal{S} é um subconjunto do quadrado cartesiano do conjunto A , isto é, $\mathcal{S} \subset A^2$.



\mathcal{S}

Podemos observar ainda que pertencem à relação \mathcal{S} todos os pares de termos iguais: (1,1), (2,2), (3,3), e (4,4).

Por isso, no diagrama sagital, figuram correspondências, de 1 para 1, de 2 para 2, de 3 para 3 e de 4 para 4, que se denominam **lacetes**.

ATIVIDADES

1. O conjunto

$P = \{\text{Achada Igreja, Espargos, Assomada, Stª Maria, Sal Rei}\}$ representa algumas cidades cabo-verdianas e nele define-se a relação “ x é da mesma ilha que y ”:

1.1 Define em extensão a relação (representando cada cidade pela inicial do seu nome).

1.2 Representa a relação por uma tabela de verdade.

1.3 Representa a relação por um diagrama sagital.

2. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e nele definida a relação \mathcal{T} “ x é múltiplo de y ”.

2.1 Representa a relação por um diagrama sagital.

2.2 Há lacetes em todos os pontos da relação. Porquê?

2.3 De todos os pontos partem setas para o elemento 1. Porquê?

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES BINÁRIAS NUM CONJUNTO

Uma relação binária, definida num conjunto A , pode ter as seguintes propriedades: reflexiva, não reflexiva, simétrica, não simétrica, antissimétrica, transitiva e não-transitiva.

- **Reflexiva:** Se $x \mathcal{R} x$ para todos os elementos do conjunto A , dizemos que \mathcal{R} é uma relação reflexiva, isto é, todos os pares de elementos iguais pertencem à relação.
- **Simétrica:** Se para todo o par $(x, y) \in \mathcal{R}$ tivermos: $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$, ou seja, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$, dizemos que \mathcal{R} é **simétrica**.

Os pares ordenados (x, y) e (y, x) dizem-se **inversos** um do outro.



- **Antissimétrica:** Se x é diferente de y e x está em relação com y , então y não está em relação com x , ou seja, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \notin \mathcal{R}$. Neste caso, dizemos que \mathcal{R} é antissimétrica.
- **Transitiva:** Se, para todo o par $(x, y) \in \mathcal{R}$ e para todo o par $(y, z) \in \mathcal{R}$ tivermos $(x, z) \in \mathcal{R}$, dizemos que \mathcal{R} é **transitiva**.

Considera as seguintes relações definidas no conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

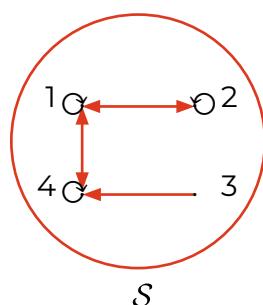
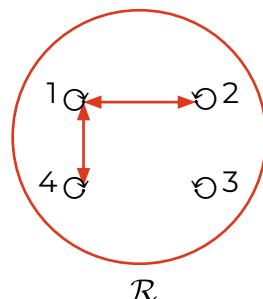
$$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

Como podes observar, todos os pares de termos iguais pertencem à relação \mathcal{R} , o que já não se verifica na relação \mathcal{S} ($(3,3) \notin \mathcal{S}$). Por esta razão, diz-se que a relação \mathcal{R} é **reflexiva** e \mathcal{S} é **não reflexiva**.

Todos os pares que pertencem à relação \mathcal{R} têm inverso, isto é $(1,2)$ e $(2,1)$; $(1,4)$ e $(4,1)$.

No diagrama sagital todas as setas têm retorno. Isto permite concluir que a relação é **simétrica**.

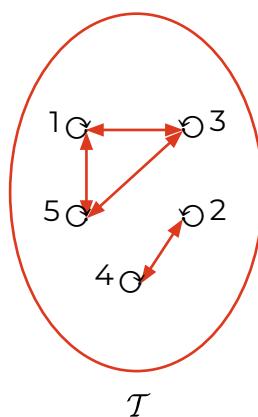
Na relação \mathcal{S} , por exemplo, o par $(3,4)$ pertence à relação, mas o seu inverso que é o par $(4,3)$ não pertence à relação, por isso, a relação é **não-simétrica**.



Consideremos agora o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a relação \mathcal{T} nele definida por “ $x + y$ é par”.

Podemos verificar que $(1,1), (3,5), (2,4)$ são alguns dos pares da relação.

O diagrama sagital é:



Observa que, sempre que existe uma seta de um primeiro elemento para um segundo elemento e outra do segundo elemento para um terceiro elemento, existe uma terceira seta do primeiro elemento para o terceiro elemento.

Por exemplo, 1 está em relação com 3 e 3 está em relação com 5, então 1 está em relação com 5.



Podemos concluir que a relação T é **transitiva**.

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Considerando a relação binária T definida anteriormente “ $x + y$ é par”, verifica-se que, para além de ser **transitiva**, ela é **reflexiva** e **simétrica**. Neste caso, diz-se que T é uma **relação de equivalência**.

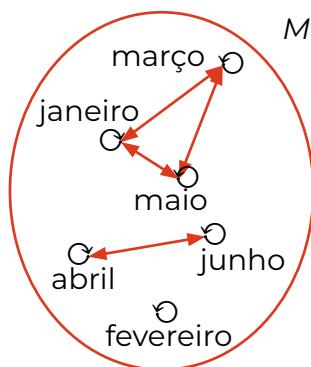
Uma relação binária que seja, ao mesmo tempo, **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva** diz-se uma **relação de equivalência**.

Exemplos

- Seja S o conjunto de todas as retas do plano e a relação binária definida por $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ é paralela a y ou x coincide com y . Podemos dizer que:
 - \mathcal{R} é Reflexiva: sendo, $x \in S$ o par (x, x) está presente para todas as retas do plano, pois x coincide com x ;
 - \mathcal{R} é Simétrica: sendo, $x, y \in S$ se (x é paralela a y ou x coincide com y), então (y é paralela a x ou y coincide com x);
 - \mathcal{R} é Transitiva: sendo, x, y e $z \in S$ se (x é paralela a y ou x coincide com y) e (y é paralela a z ou y coincide com z), então (x é paralela a z ou x coincide com z).



2. Seja $M = \{\text{janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho}\}$ e a relação \mathcal{T} “tem tantos dias como” representada pelo seu diagrama:



Justifica que \mathcal{T} é uma relação de equivalência.

3. A relação “ x tem a mesma altura que y ” no conjunto dos alunos de uma turma.

RELAÇÕES DE ORDEM

Considera definida no conjunto $P = \{\text{Sónia, Márcia, Ana, Ivo, Rafael}\}$ a relação traduzida por “ x tem mais letras do que y ”. Verifica-se que, para além de ser **transitiva** e **reflexiva**, ela é **antissimétrica**. Neste caso, diz-se que é uma **relação de ordem**.

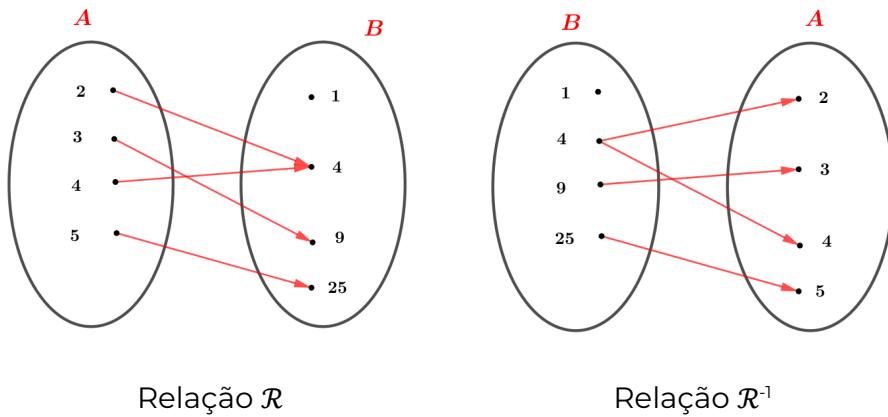
Uma relação binária que seja, ao mesmo tempo, **reflexiva**, **antissimétrica** e **transitiva** diz-se uma **relação de ordem**.

Exemplos

- A relação “ x é tão alto ou maior que y ”, no conjunto dos alunos de uma turma.
- A relação “ x é menor ou igual a y ” em \mathbb{R} .

RELAÇÕES INVERSAS

Sendo \mathcal{R} uma relação de A para B , chama-se **relação inversa** à relação de B para A , tal que: Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}^{-1}$.



Se a relação \mathcal{R} está representada pelo seu grafo, para representar o grafo de \mathcal{R}^{-1} basta inverter a ordem dos elementos de cada par ordenado.

A relação $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$ definida de $\{1, 2\}$ para $\{3, 4, 5\}$ tem como inversa: $\mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

RELAÇÃO IDENTIDADE

Dado um conjunto A , chama-se **relação identidade em A** , e representa-se por Id_A , à relação $Id_A = \{(x, x) : x \in A\}$, isto é, a relação cujo grafo é formado por todos os pares de termos iguais que é possível formar em A .

Exemplo:

Sendo $A = \{3, 4, 5, 6\}$,

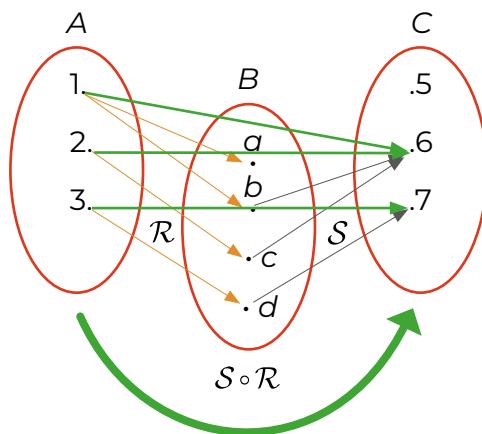
a relação identidade em A é definida pelo grafo:

$$Id_A = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

COMPOSIÇÃO DE DUAS RELAÇÕES

Sejam A, B e C três conjuntos, \mathcal{R} e \mathcal{S} duas relações definidas de A para B e de B para C , respectivamente, chama-se relação composta de \mathcal{R} com \mathcal{S} , que se representa por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, à relação cujo grafo está contido em $A \times C$, tal que:

Um par (x, z) pertence a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ se existe um elemento y pertencente a B , tal que (x, y) pertence a \mathcal{R} e (y, z) pertence a \mathcal{S} .

**Exemplo:**

$$S \circ R = \{(1, 6), (2, 6), (3, 7)\}$$

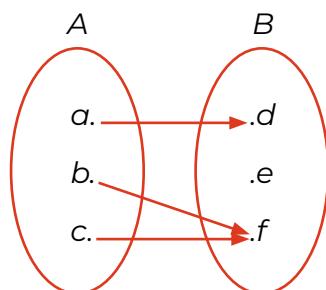
$S \circ R$ lê-se S após R

Ou

S composto com R ou R seguido de S .

RELAÇÕES FUNCIONAIS

Uma relação binária \mathcal{R} definida de A para B é uma **relação funcional** se cada elemento do conjunto A está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto B .

Exemplo

ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

- 1.** Considera a relação binária “ x é igual a y ” definida no conjunto $A = \{4, 5, 8, 9\}$.
 - 1.1** Completa a definição extensiva dessa relação $\{(4, 4), \dots, \dots, \dots\}$.
 - 1.2** Representa a relação através do diagrama sagital.

- 2.** Considera definida no conjunto $P = \{Sónia, Márcia, Ana, Ivo, Rafael\}$ a relação \mathcal{R} traduzida por “ x tem o mesmo número de letras que y ”.
 - 2.1** Representa \mathcal{R} pelo seu grafo.
 - 2.2** Representa \mathcal{R} através de um diagrama sagital.
 - 2.3** Determina a relação inversa de \mathcal{R} .
 - 2.4** Classifica, justificando, a relação \mathcal{R} quanto à reflexividade, simetria e transitividade.
 - 2.5** \mathcal{R} é uma relação de equivalência? Justifica.
 - 2.6** \mathcal{R} é uma relação de ordem? Justifica.

- 3.** No conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ definem-se as seguintes relações binárias:
“ $x + y$ é par”, “ $x + y = 7$ ” e “ x é o quadrado de y ”
 - 3.1** De entre essas relações, indica as que são reflexivas e as que são simétricas.
 - 3.2** Determina, em extensão, a primeira relação.
 - 3.3** Define, por uma tabela de verdade, a segunda relação.
 - 3.4** Define, por um diagrama sagital, a terceira relação.

- 4.** Considera o seguinte grafo de uma relação binária reflexiva, definida num conjunto M :
$$\{(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 2)\}$$
 - 4.1** Identifica o conjunto M .
 - 4.2** Representa a relação através de um diagrama sagital.
 - 4.3** A relação é simétrica? Justifica.



- 5.** Considera o seguinte conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e as relações \mathcal{R} e \mathcal{S} .

\mathcal{R} : “ x é metade de y ” e \mathcal{S} : “ x é o dobro de y ”

- 5.1** Representa cada uma das relações através do seu grafo.

- 5.2** Classifica, justificando, cada uma das relações quanto à reflexividade, simetria e transitividade.

- 6.** Considera o conjunto $\{10, 15, 20, 25, 30\}$ e desenha o diagrama sagital das seguintes relações nele definidas:

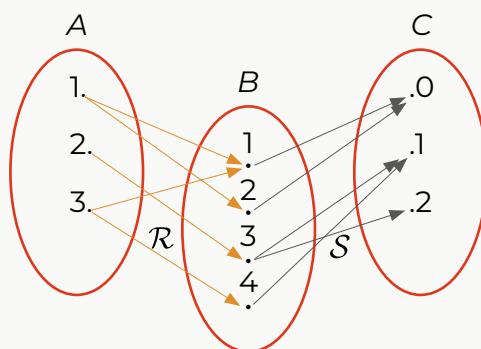
6.1 “ x tem o mesmo algarismo das unidades que y ”;

6.2 “ x tem o mesmo algarismo das dezenas que y ”;

6.3 “ x e y divididos por dois dão restos iguais”.

Verifica que todas as relações são de equivalência.

- 7.** Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$ e as relações \mathcal{R} e \mathcal{S} definidas através do diagrama sagital:



- 7.1** Completa: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 0), \dots, \dots, \dots, \dots\}$.

- 7.2** A relação de A para B é funcional? Justifica.

- 7.3** Representa a relação inversa de \mathcal{R} através de um diagrama sagital.

CONCEITO DE FUNÇÃO

No dia a dia usamos muitas vezes a palavra função no sentido de “dependência” entre as variações de duas grandezas:

- O enchimento de um depósito de água depende (é função) do tempo que a torneira estiver aberta.
- O juro de um capital é função (depende) do tempo de capitalização.

Função é um dos conceitos mais importantes da matemática. Todas as ciências exatas, experimentais, humanas e sociais estudam funções.

Na base do conceito de função estão as ideias de conjuntos e correspondências que acabámos de estudar.

Consideremos as seguintes situações do dia a dia e observemos que em qualquer delas há a considerar dois conjuntos e uma correspondência em forma de relação funcional entre os elementos desses conjuntos.

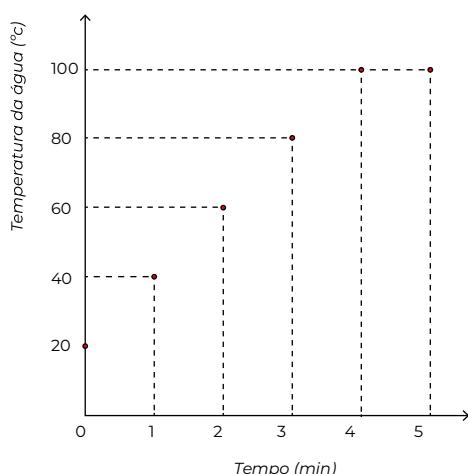
- I.** No mês de maio, o preço de gasolina fixado nos postos de abastecimento de combustível é de 120\$00 por litro. De acordo com essa informação, completa a tabela seguinte:

Quantidade de gasolina (em litros)	Preço (em escudos)
1	120
2	240
3	
	480



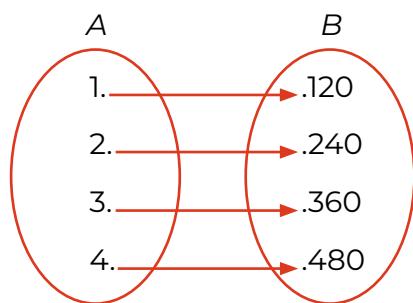


II. Observa a figura:

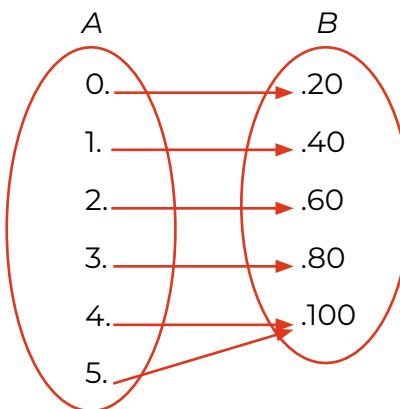


Em cada situação apresentada temos que a todo o elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B .

I.



II.



Nos casos acima, a correspondência de A para B é uma **relação funcional** ou uma **função** definida de A para B .

Dados dois conjuntos, A e B , chama-se **aplicação** ou **função** de A para B , a toda a correspondência que a todo o elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B , isto é, a cada objeto faz corresponder uma e uma só imagem. Nota-se $f: A \rightarrow B$.

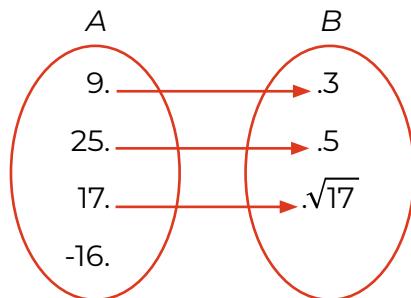
A é o conjunto de partida de f e B é o conjunto de chegada de f .



Há correspondências do conjunto A para o conjunto B que não são funções de A para B :

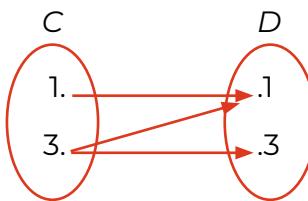
Exemplos:

I.

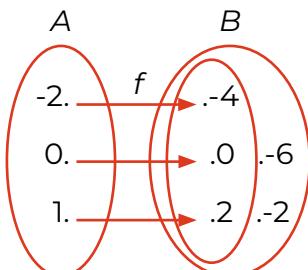


Correspondência entre um número e a sua raiz quadrada

II.



Correspondência entre um número e os seus divisores



Domínio e contradomínio de uma função

Considera os conjuntos $A = \{-2, 0, 1\}$ e $B = \{-6, -4, -2, 0, 2\}$ e a função f definida de A para B , onde a cada elemento do conjunto A corresponde o seu dobro em B .

Domínio de uma função ou aplicação é o conjunto dos objetos.

Representa-se por D_f

Exemplo: Na função considerada acima, o **domínio** de f é o conjunto A :

$$D_f = \{-2, 0, 1\}$$

O conjunto das imagens é o **contradomínio** de f , que se nota D'_f

No mesmo exemplo, tem-se:

$$D'_f = \{-4, 0, 2\}$$

Observa que o contradomínio pode ou não coincidir com o conjunto de chegada.

No exemplo em estudo, o conjunto de chegada é $\{-4, 0, 2, -6, -2\}$ que é diferente de $D'_f = \{-4, 0, 2\}$.



Modos de definir e representar uma função

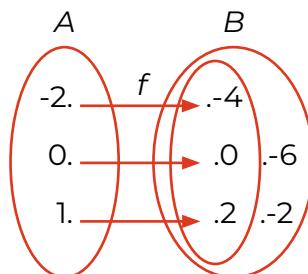
Para definir uma função é necessário conhecer:

- o domínio;
- o conjunto de chegada;
- um processo que transforma cada elemento do domínio num elemento do conjunto de chegada.

As formas de representar uma função cumprem as três condições para a sua definição.

Assim, retomando a função anterior, temos as diferentes formas de a representar:

Diagrama sagital



Tabela

$$f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para representar uma função deste modo, é necessário indicar o conjunto de chegada.

Conjunto de chegada: $B = \{-6, -4, -2, 0, 2\}$

A tabela pode também ter a forma:

x	$f(x)$
-2	-4
0	0
1	2

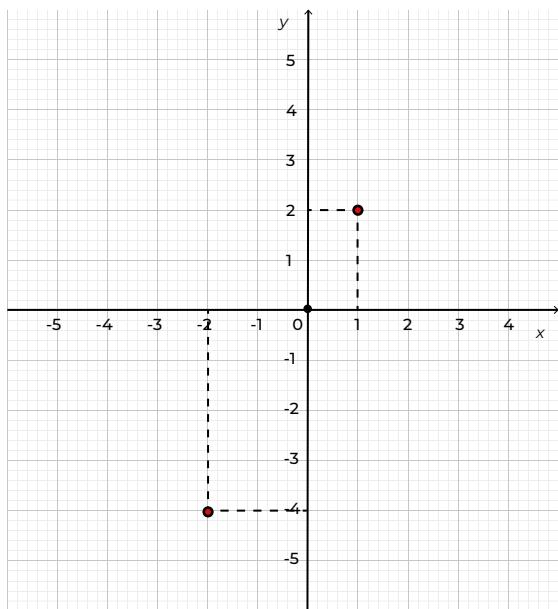
Grafo

$$f = \{(-2, -4), (0, 0), (1, 2)\}$$

Tal como no caso das tabelas, é necessário indicar o conjunto de chegada.

Conjunto de chegada: $B = \{-6, -4, -2, 0, 2\}$

Gráfico cartesiano



No sistema de eixos cartesianos, representamos os pares ordenados que definem a função:

$$(-2, -4), (0, 0), (1, 2)$$

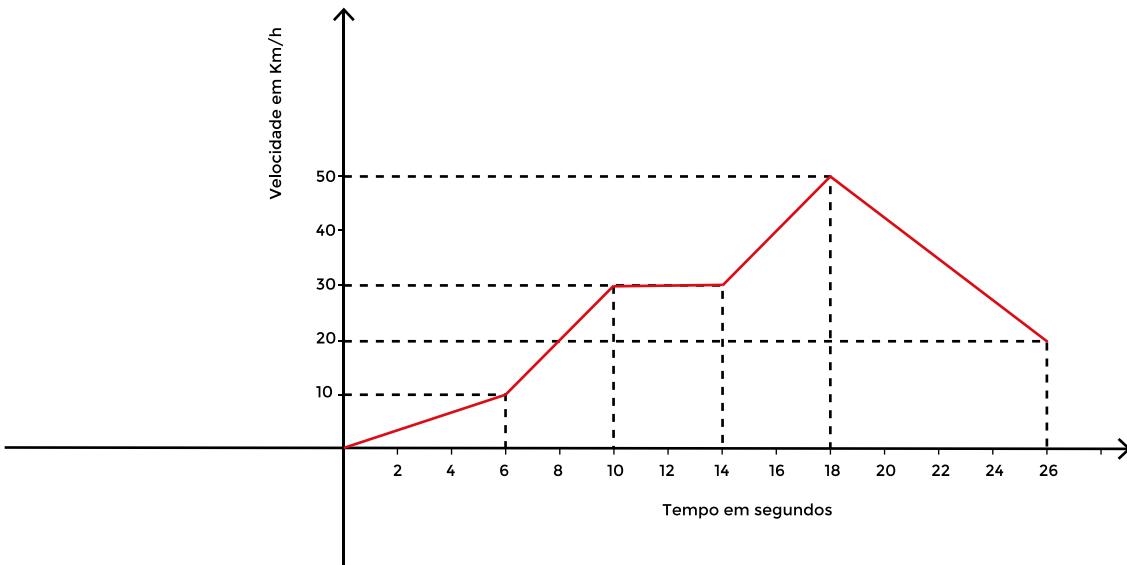
O primeiro elemento do par ordenado, abcissa, representa-se no eixo Ox (eixo das abcissas).

O segundo elemento do par ordenado, ordenada, representa-se no eixo Oy (eixo das ordenadas).

No caso em que o domínio da função é um conjunto finito, o gráfico da função é representado por pontos. No caso em que o domínio da função é um conjunto infinito, o gráfico da função é representado por linhas, obtidas unindo os pontos.

Outro exemplo:

O gráfico seguinte mostra a velocidade (km/h) de um carro num determinado intervalo de tempo (em segundos).



Como podes observar, há um aumento de velocidade entre 0 e 10 segundos; entre 10 e 14 segundos a velocidade mantém-se constante; entre 14 e 18 segundos a velocidade volta a aumentar e, finalmente, entre 18 e 20 segundos ela diminui.



Ainda se pode ver que aos:

- 6 segundos a velocidade era de 10 km/h;
- 10 segundos a velocidade era de 30 km/h;
- 14 segundos a velocidade era de 30 km/h;
- 18 segundos a velocidade era de 50 km/h;
- 26 segundos a velocidade era de 20 km/h.

Expressão algébrica

A expressão algébrica de uma função é uma expressão com variáveis, que relaciona cada objeto com a respetiva imagem.

Sendo x o objeto e $y = f(x)$ a imagem, podemos escrever:

$$y = 2x \text{ ou } f(x) = 2x \text{ ou ainda } f: A \rightarrow B \\ x \mapsto 2x$$

em que x e y são as variáveis, sendo x a **variável independente** e y a **variável dependente**.

Concretizando x pelos valores do domínio, obtemos as respetivas imagens, isto é,

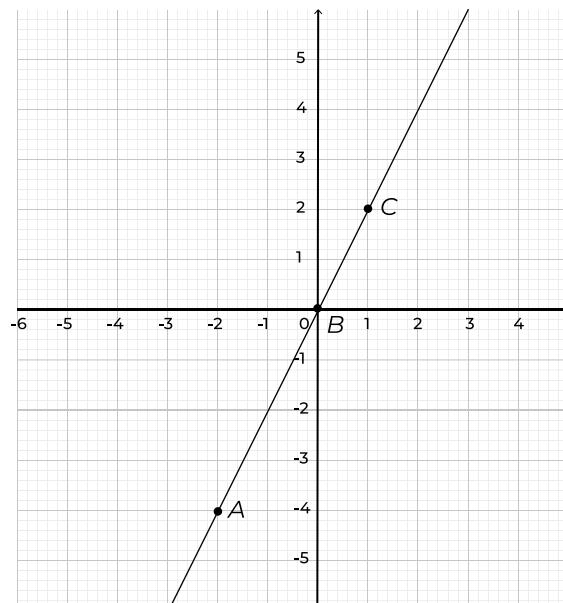
na função $f(x) = 2x$

$$f(-2) = 2 \times (-2) = -4;$$

$$f(0) = 2 \times 0 = 0;$$

$$f(1) = 2 \times 1 = 2$$

No caso do domínio ser o conjunto \mathbb{R} , o gráfico da função $f(x) = 2x$ é uma reta que se obtém unindo os pontos já representados.



Certamente, já estudaste situações em que o valor de uma grandeza é dependente de outra, ou seja, é função dele, como por exemplo:

- O volume (V) do cubo como função da aresta (a):

$$V = a^3$$
 (a é a variável independente e V é a variável dependente).
- O Perímetro (P) de um polígono regular, com n lados, como função do lado (l):

$$P = n \times l$$

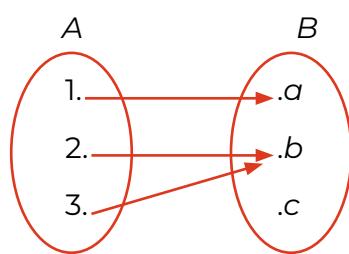
- A área (A) de um quadrado como função do lado (l):

$$A = l^2$$

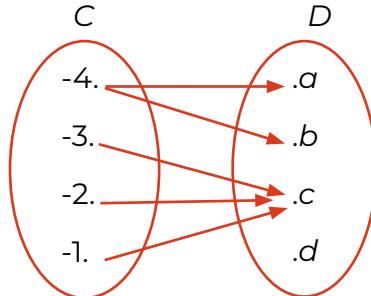
Mais exemplos

- 1.** Considera as seguintes correspondências.

I.



II.



- III.** $\{(1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$

Indica:

- 1.1 as que são funções;
- 1.2 o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada das funções identificadas em 1.1.



2. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ e a função f definida de A para B por $f(x) = x - 3$:

2.1 Qual é a imagem de -2 ?

2.2 Calcula $f(-1)$ e $f(0)$.

2.3 Qual é o objeto cuja imagem é -1 ?

2.4 Indica o conjunto de chegada e o contradomínio de f .

2.5 Representa a função f por meio de uma tabela.

Resolução

1.1 Só o diagrama sagital I. representa uma função, porque a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento de B .

1.2 $D = \{1, 2, 3\}$

$D' = \{a, b\}$ e Conjunto de chegada = $\{a, b, c\}$

2.1 Para calcular a imagem de (-2) basta substituir na expressão o x por (-2) e efetuar os cálculos:

Como $f(x) = x - 3$, temos: $f(-2) = -2 - 3 = -5$,
logo, a imagem de -2 é -5 .

2.2 $f(-1) = -1 - 3 = -4$; $f(0) = 0 - 3 = -3$

2.3 Sabemos que $f(x) = x - 3$ tem valor (-1) ; pretende-se saber o valor de x .

Temos $x - 3 = -1$ que representa uma equação do 1º grau, a qual já sabes resolver.

$$x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 3 - 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Então, o objeto cuja imagem é (-1) é 2 .

2.4 Conjunto de chegada é o conjunto B ; como o contradomínio é o conjunto das imagens, falta-nos apenas determinar a imagem do objeto 1: $f(1) = 1 - 3 = -2$

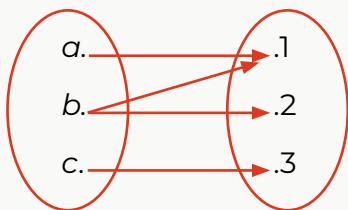
Assim, o contradomínio $D'_f = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

2.5 A tabela desta função é: $f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

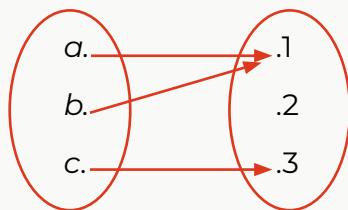
ATIVIDADES

1. Considera os diagramas seguintes:

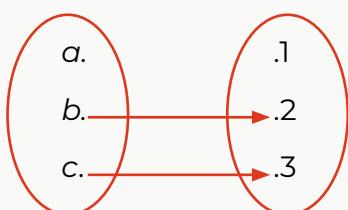
I.



II.



III.

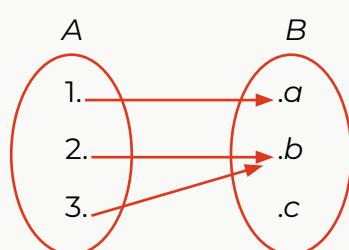


1.1 Qual deles representa uma função? Justifica.

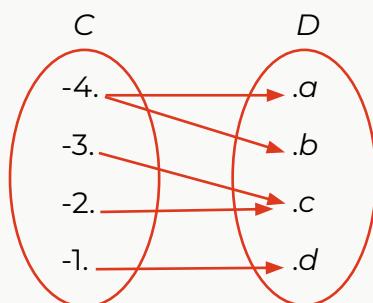
1.2 Nas funções, identifica o domínio e o contradomínio.

2. Considera as seguintes correspondências:

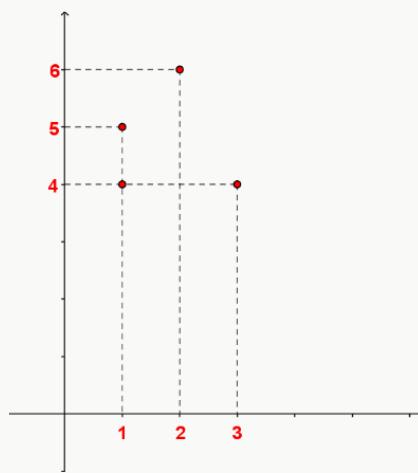
I.



II.



III.





2.1 Qual delas é uma função? Justifica.

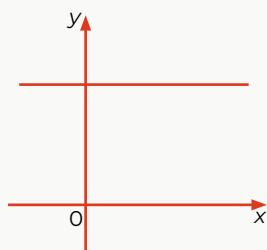
2.2 Nas funções indica:

2.2.1 O domínio e o contradomínio.

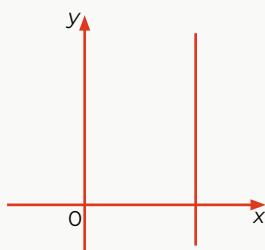
2.2.2 Dois objetos com a mesma imagem.

3. Identifica quais dos gráficos seguintes representam uma função.

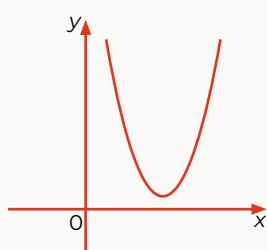
3.1



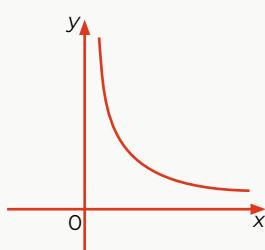
3.2



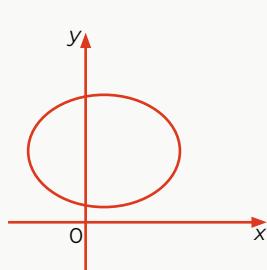
3.3



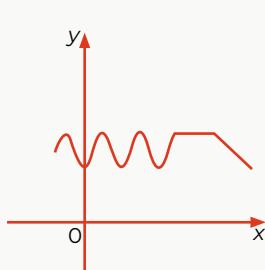
3.4



3.5



3.6

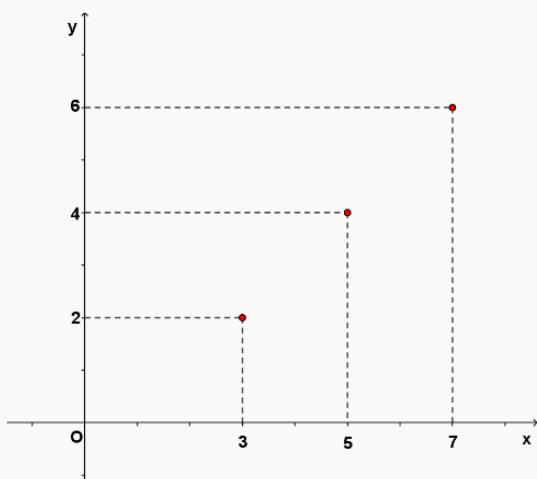


4. A figura ao lado representa uma correspondência entre dois conjuntos.

4.1 Representa a correspondência através de um diagrama sagital.

4.2 Indica os pares ordenados que formam a correspondência.

4.3 Descobre uma relação que defina a correspondência.



- 5.** Seja f o grafo de uma aplicação definida do conjunto A para conjunto $B = \{a, b, c, d\}$:

$$f = \{(1, b), (2, c), (3, d)\}$$

5.1 Indica o domínio e o contradomínio da aplicação.

5.2 Completa a tabela

$$f = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

5.3 Completa:

$$\begin{matrix} 1 & \xrightarrow{f} & \dots \\ f(2) = & \dots \\ \dots & \xrightarrow{f} & d \end{matrix}$$

- 6.** Seja h a função definida do seguinte modo, sendo \mathbb{Z} , o conjunto de chegada:

$$h = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6.1 Indica:

6.1.1 o domínio e o contradomínio de h ;

6.1.2 a imagem de -1 por h ;

6.1.3 os objetos cuja imagem é 4 .

6.2 Completa:

$$h(-2) = h(\dots) = \dots$$

$$h(\dots) = h(-1) = \dots$$

$$h(\dots) = 0$$

6.3 Representa h , recorrendo a uma expressão analítica.

- 7.** Considera o conjunto $A = \{21, 23, 25, 27, 29, 31\}$ e a função

$$f: A \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto 20 - x$$



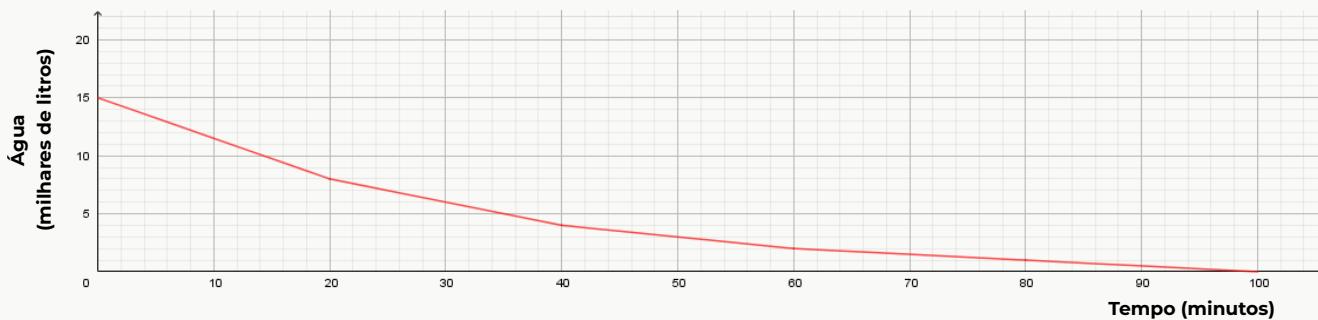
- 7.1** Qual a imagem de 23, por f ?
- 7.2** Quais dos seguintes números pertencem ao contradomínio de f : 1, 0, ou –1?
- 7.3** Qual o contradomínio de f ?
- 7.4** O conjunto de chegada de f , poderia ser \mathbb{Z}^- ?

- 8.** O Pedro e o João são irmãos e combinaram almoçar juntos fora de casa. O Pedro saiu às 9 horas a pé e o João saiu mais tarde e foi de bicicleta. No gráfico seguinte, estão indicados os percursos que cada um fez.



- 8.1** A que horas saiu o João de casa?
- 8.2** A que horas o João encontrou o Pedro?
- 8.3** A que distância de casa almoçaram?
- 8.4** Designando por f a função que representa o percurso do Pedro e por g a função que representa o percurso do João, indica:
- x , sendo $f(x) = 7,5$;
 - x , sendo $g(x) = 15$;
 - x , sendo $f(x) = g(x)$.
- 8.5** Descreve, em linguagem corrente, os percursos do Pedro e do João em função do tempo.

- 9.** Um depósito cheio leva 15 000 litros de água. O gráfico mostra o seu esvaziamento.



- 9.1** Trata-se de uma função? Justifica.
- 9.2** Indica a variável dependente e a variável independente.
- 9.3** Quantos litros de água tinha o depósito quando começou a esvaziar-se?
- 9.4** Quanto tempo demorou a esvaziar o depósito?
- 9.5** Ao fim de 50 minutos, que quantidade de água havia ainda no depósito?
- 9.6** Ao fim de quanto tempo podemos afirmar:
“Já só falta esvaziar $\frac{1}{3}$ da água”?
- 9.7** Com os dados do gráfico, completa a tabela:

Tempo (minutos)	0		60	100
Água (litros)		2500		

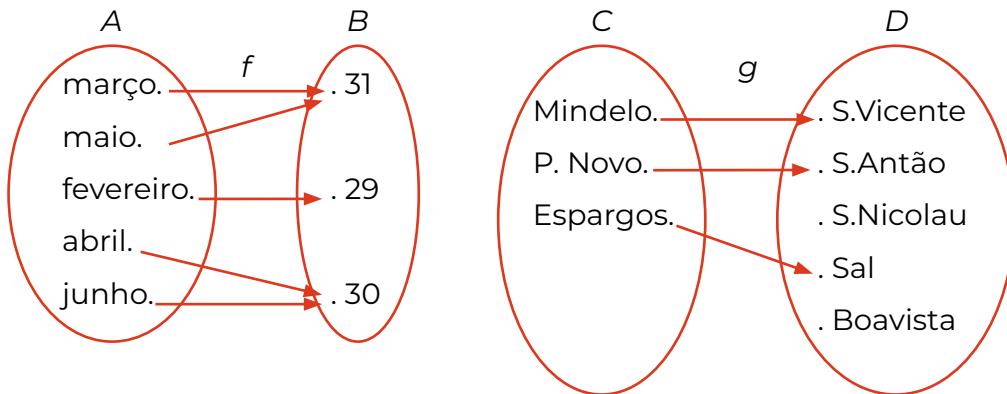
- 10.** Considera a função j de domínio \mathbb{R} definida por $j(x) = 2x + 1$.
- 10.1** Calcula: $j(-1)$, $j(0)$ e $j\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 10.2** Determina o objeto cuja imagem por j é 11.



CLASSIFICAÇÃO DE FUNÇÕES

PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO

Observa os diagramas das funções f e g .



Vamos comparar as funções a partir das seguintes perguntas:

1^a Pergunta:

Os contradomínios coincidem com os conjuntos de chegada?

- Na função f : SIM
- Na função g : NÃO

2^a Pergunta:

A objetos diferentes correspondem sempre imagens diferentes?

- Na função f : NÃO
- Na função g : SIM

De acordo com as perguntas, podemos apresentar as definições:

Uma função cujo contradomínio coincide com o conjunto de chegada, diz-se **função sobrejetiva**; no caso contrário, diz-se **não sobrejetiva**.



Uma função em que a objetos diferentes entre si correspondem sempre imagens diferentes, diz-se **função injetiva**; no caso contrário, diz-se **não injetiva**.



Dos exemplos anteriores, tem-se:

f é sobrejetiva, mas não injetiva; g não é sobrejetiva, mas é injetiva.

Exemplos

1. Considera as duas funções h e g de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} , definidas por:

$h: \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$...	-2	-1	0	+1	+2	...
	...	+2	+1	0	-1	-2	...
$g: \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$...	-2	-1	0	+1	+2	...
	...	+4	+1	0	+1	+4	...

Classifica cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

2. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes aplicações de A em A :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Preenche a seguinte tabela:

	Sobrejetivas	Não sobrejetivas
Injetivas		
Não injetivas		

Resolução

1. Ambas as funções têm como conjunto de chegada o conjunto \mathbb{Z} .

O contradomínio da função h é o conjunto \mathbb{Z} enquanto que o de g é $\{0, +1, +4, +9, \dots\}$

Portanto, a função h é sobrejetiva, porque o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, mas a função g é não sobrejetiva (o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada).



Na função h , a objetos diferentes correspondem sempre imagens diferentes; na função g , podemos verificar que dois objetos simétricos quaisquer têm a mesma imagem, logo a função h é injetiva e a função g é não injetiva.

2. Em qualquer uma das funções, o conjunto de chegada é o conjunto A .

$$D'_{f} = \{1, 4\}$$

$$D'_{g} = D'_{i} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D'_{h} = \{1\}$$

As funções g e i são sobrejetivas e as outras são não sobrejetivas.

Nas funções f e h podemos verificar que existem objetos diferentes que têm imagens iguais, enquanto que, nas outras, objetos diferentes correspondem sempre a imagens diferentes.

Logo, g e i são injetivas e f e h são não injetivas.

	Sobrejetivas	Não sobrejetivas
Injetivas	g, i	
Não injetivas		f, h

Repara que nos exemplos considerados acima, verificamos que existem funções que são simultaneamente injetivas e sobrejetivas.

Uma função que seja, simultaneamente, **sobrejetiva** e **injetiva**, diz-se **bijetiva**.



COMPOSIÇÃO DE DUAS FUNÇÕES

Considera os seguintes conjuntos:

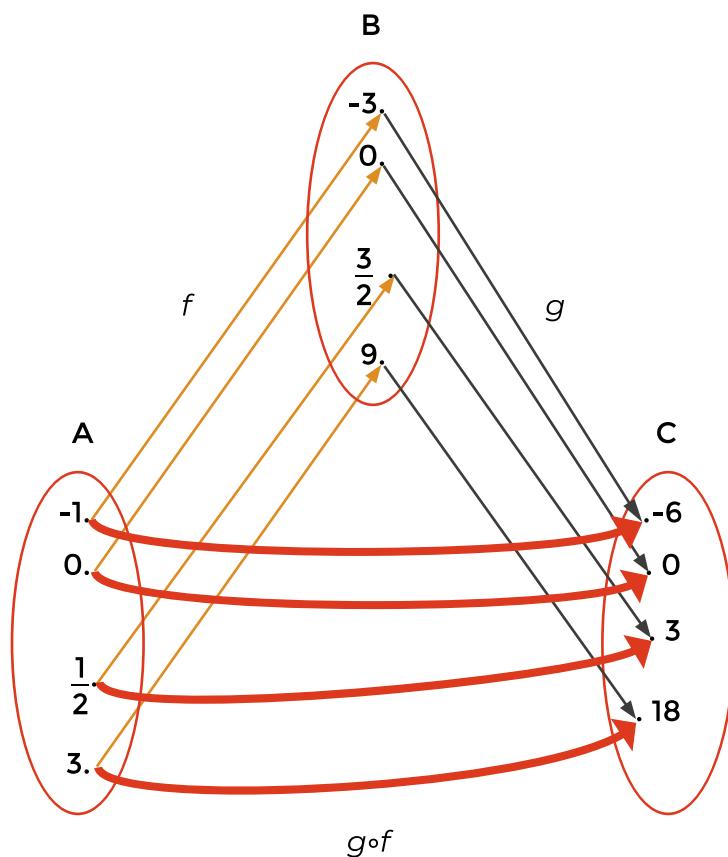
$$A = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 3\right\}; \quad B = \left\{-3, 0, \frac{3}{2}, 9\right\}; \quad C = \left\{-6, 0, 3, 18\right\}$$

e as funções:

$$\begin{aligned} f: A \rightarrow B \\ x \mapsto \text{triplo de } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: B \rightarrow C \\ x \mapsto \text{dobro de } x \end{aligned}$$

Representando as funções f e g por meio de diagramas, temos:

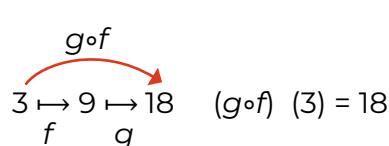
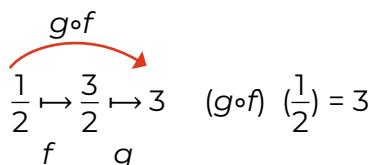
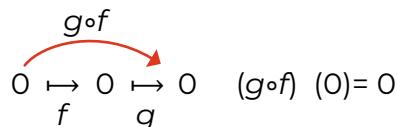
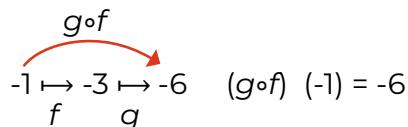




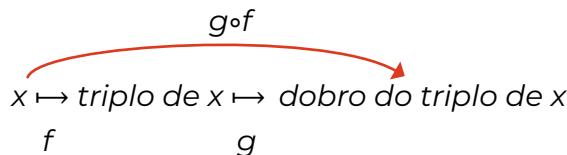
A função que aplica A em C é a função composta de \mathbf{g} com \mathbf{f} , $\mathbf{g}(\mathbf{f}(x))$. Representa-se por $g \circ f$ (lê-se g de f).

- $g \circ f$ significa “ g após f “.
- $f \circ g$ significa “ f após g “.

Repara que:



Se x for um elemento de A , temos:



Portanto, a função composta $g \circ f$ fica assim definida:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto 6x \quad (\text{séxtuplo de } x) \end{aligned}$$

Na forma de tabela:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -6 & 0 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

Exemplos

- 1.** Considera as funções f e g definidas em \mathbb{Q} :

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$x \mapsto$ metade de x

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$x \mapsto$ quadrado de x

Calcula:

$$(g \circ f)(4) \text{ e } (f \circ g)(4)$$

$$(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) \text{ e } (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(g \circ f)(x) \text{ e } (f \circ g)(x)$$

- 2.** Dadas as funções f e g :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina $(g \circ f)$ e $(f \circ g)$.

Resolução:

- 1.** $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

$x \mapsto$ metade de x

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$x \mapsto$ quadrado de x

$$(g \circ f)(4) \text{ e } (f \circ g)(4)$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow[f]{\quad} & 2 \xrightarrow[g]{\quad} 4 \\ & \curvearrowright^{g \circ f} & \\ & & \end{array} \quad (g \circ f)(4) = 4$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & \xrightarrow[g]{\quad} & 16 \xrightarrow[f]{\quad} 8 \\ & \curvearrowright^{f \circ g} & \\ & & \end{array} \quad (f \circ g)(4) = 8$$

$$(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) \text{ e } (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \xrightarrow[f]{\quad} & \frac{1}{4} \xrightarrow[g]{\quad} \frac{1}{16} \\ & \curvearrowright^{g \circ f} & \\ & & \end{array} \quad (g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \xrightarrow[g]{\quad} & \frac{1}{4} \xrightarrow[f]{\quad} \frac{1}{8} \\ & \curvearrowright^{f \circ g} & \\ & & \end{array} \quad (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$



$(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$

$$\begin{array}{c} g \circ f \\ \curvearrowright \\ x \xrightarrow[f]{\quad} \frac{1}{2} x \xrightarrow[g]{\quad} \frac{1}{4} x^2; \quad (g \circ f)(x) = \frac{1}{4} x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f \circ g \\ \curvearrowright \\ x \xrightarrow[g]{\quad} x^2 \xrightarrow[f]{\quad} \frac{1}{2} x^2; \quad (f \circ g)(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{array}$$

2. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} g \circ f \\ \curvearrowright \\ 1 \xrightarrow[f]{\quad} 3 \xrightarrow[g]{\quad} 3 \quad (g \circ f)(1) = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} g \circ f \\ \curvearrowright \\ 2 \xrightarrow[f]{\quad} 1 \xrightarrow[g]{\quad} 1 \quad (g \circ f)(2) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} g \circ f \\ \curvearrowright \\ 3 \xrightarrow[f]{\quad} 2 \xrightarrow[g]{\quad} 2 \quad (g \circ f)(3) = 2 \end{array}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f \circ g \\ \curvearrowright \\ 1 \xrightarrow[g]{\quad} 1 \xrightarrow[f]{\quad} 3 \quad (f \circ g)(1) = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f \circ g \\ \curvearrowright \\ 2 \xrightarrow[g]{\quad} 2 \xrightarrow[f]{\quad} 1 \quad (f \circ g)(2) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f \circ g \\ \curvearrowright \\ 3 \xrightarrow[g]{\quad} 3 \xrightarrow[f]{\quad} 2 \quad (f \circ g)(3) = 2 \end{array}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $g \circ f = f \circ g$.

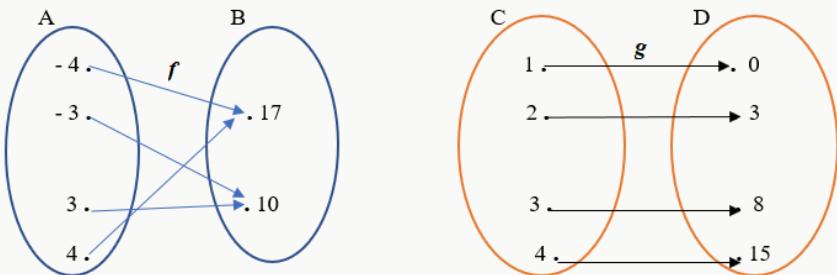
Dizemos que estas funções são **permutáveis**.

Duas funções f e g são **permutáveis** se $g \circ f = f \circ g$.



ATIVIDADES

1. Considera as funções f e g definidas por:



1.1 Indica o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada de cada uma das funções.

1.2 Classifica as funções quanto à injetividade e sobrejetividade.

2. Dada a seguinte função de \mathbb{N} em \mathbb{N} , definida por $f(x) = x + 3$.

2.1 Calcula as imagens de 2 e de 3.

2.2 A função é injetiva? E sobrejetiva?

2.3 Indica o contradomínio da função.

3. Considera as funções seguintes definidas de A em A , sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3.1 Qual é o objeto que tem imagens iguais nas três funções?

3.2 Classifica as funções quanto à injetividade e sobrejetividade.

3.3 Calcula $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(4)$.

3.4 As funções f e g são permutáveis? Justifica.

4. Considera as funções definidas de \mathbb{R} em \mathbb{R} por $f(x) = -\frac{x}{2}$ e $g(x) = x^2$.

4.1 Calcula $g(-2)$ e $f(-3)$.

4.2 Calcula $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4.3 Verifica se a função g é injetiva ou não.



FUNÇÕES PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA

Função proporcionalidade direta

A tabela representa a relação entre o número de iogurtes e o custo em escudos.

Nº de iogurtes (x)	1	2	3	4
Custo em escudos (y)	45	90	135	180

$$\text{Repara que: } \frac{45}{1} = \frac{90}{2} = \frac{135}{3} = \frac{180}{4} = 45$$

Isto permite-nos dizer que a tabela representa uma situação de uma **proporcionalidade direta** entre duas grandezas, porque o quociente entre dois quaisquer valores correspondentes é constante. Neste caso, a constante de proporcionalidade é 45 e representa o preço de cada iogurte.

A correspondência representada na tabela é uma função porque a cada valor da variável independente (número de iogurtes: x) corresponde um e um só valor da variável dependente (custo: y).

Como a função traduz uma situação de proporcionalidade direta, diz-se que é uma **função proporcionalidade direta** e pode ser representada por uma expressão analítica do tipo $y = 45x$ ou $f(x) = 45x$, cujo domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

O gráfico da função é constituído por pontos isolados porque a variável independente só pode tomar valores inteiros.

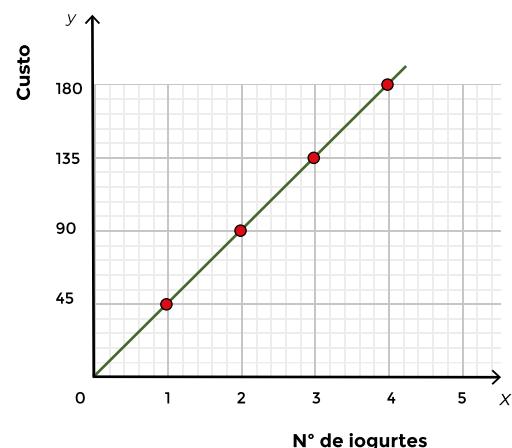
Todos os pontos do gráfico estão situados sobre uma reta que passa pela origem do referencial.

Toda a função proporcionalidade direta, f , é também designada por função linear e pode ser representada por uma expressão analítica do tipo:

$$y = kx \quad \text{ou} \quad f(x) = kx \quad \text{ou} \quad f: x \mapsto kx \quad \text{com } k \neq 0$$

traduz uma situação de proporcionalidade direta, em que:

- k é a constante de proporcionalidade direta
- $k = \frac{y}{x}$

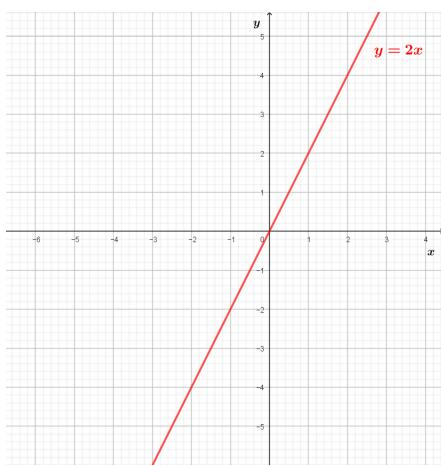


Nota:

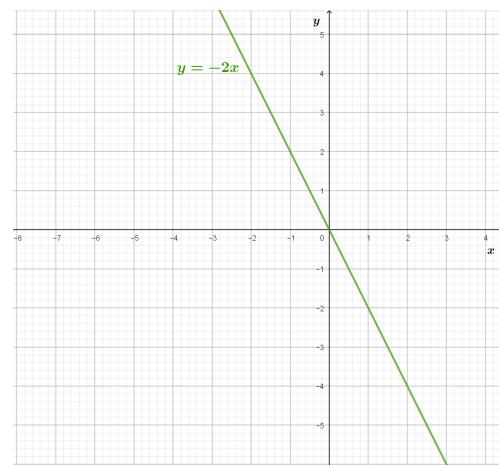
- No caso de o domínio da função ser o conjunto \mathbb{R} , o gráfico é uma reta que passa pela origem do referencial.
- A constante de proporcionalidade, k , é o declive da reta.
- Se $k > 0$, a função é crescente; se $k < 0$, a função é decrescente.

Exemplos

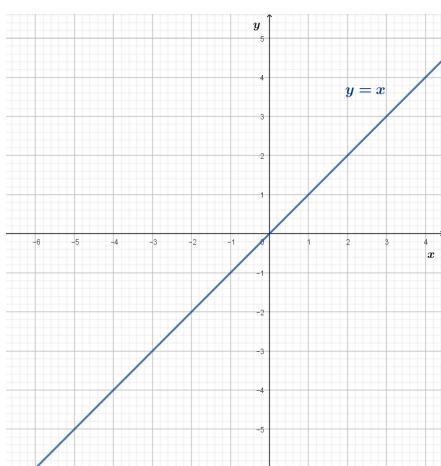
$$y = 2x;$$



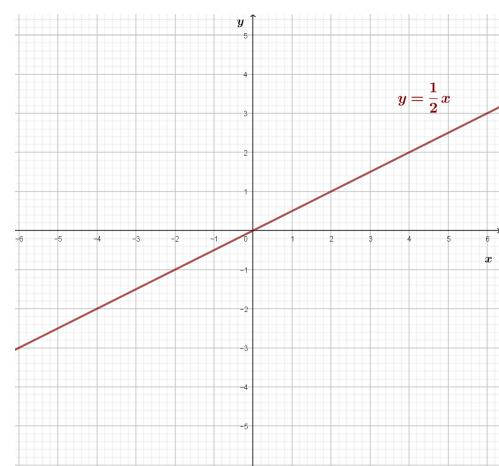
$$y = -2x;$$



$$y = x;$$



$$y = \frac{1}{2}x$$





ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

- 1.** Considera um polígono regular cujo lado tem 6,8 cm e cujo perímetro é 40,8 cm.

1.1 De que polígono regular se trata?

1.2 Escreve uma expressão algébrica que representa a função que a cada valor do comprimento do lado associa o perímetro deste polígono regular.

1.3 Representa graficamente essa função num referencial.

- 2.** Considera os quadrados cujos comprimentos dos lados são:

2 cm, 2,5 cm, 3 cm e 3,5 cm

2.1 Completa a tabela.

Lado do quadrado x (cm)	2	2,5	3	3,5	x
Perímetro do quadrado y (cm)					

2.2 Constrói um gráfico cartesiano de acordo com os valores da tabela.

2.3 Mostra que as grandezas x e y são diretamente proporcionais.

2.4 Qual é a constante de proporcionalidade direta?

2.5 Qual é a expressão algébrica da função linear que é o modelo matemático da situação apresentada?

2.6 Considera a seguinte afirmação “a função que ao lado de um quadrado faz corresponder a sua área não é uma função proporcionalidade direta”.

2.6.1 Concordas com esta afirmação? Explica porquê.

- 3.** Na tabela seguinte, sabe-se que as duas grandezas x e y são diretamente proporcionais.

x	4	$-\frac{4}{5}$		7	
y	-2	0,4	4,5		-6

- 3.1** Completa a tabela.
3.2 Qual é a constante de proporcionalidade?
3.3 Indica a expressão algébrica que traduz a proporcionalidade.

- 4.** Considera a função de expressão algébrica $f(x) = \frac{3}{2}x$.

- 4.1** Completa a tabela:

x	-6	-2		1		$\frac{20}{3}$
$y = f(x)$			0		4,5	

- 4.2** Faz uma representação gráfica da função f .

- 5.** Indica quais das condições seguintes representam funções proporcionalidade direta:

5.1 $y = -x$

5.2 $xy = 4$

5.3 $x = \frac{8}{y}$

5.4 $\frac{m}{3} = c$

5.5 $\frac{e}{t} = 20$

5.6 $y = 4x + 1$

5.7 $t = 4l$

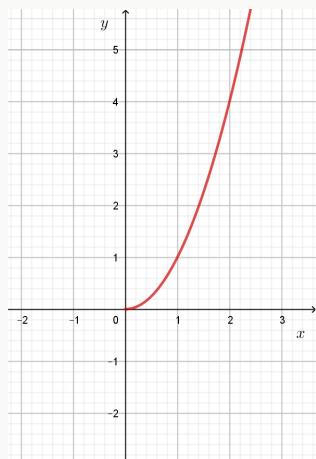
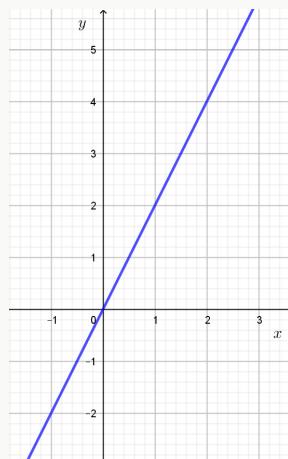
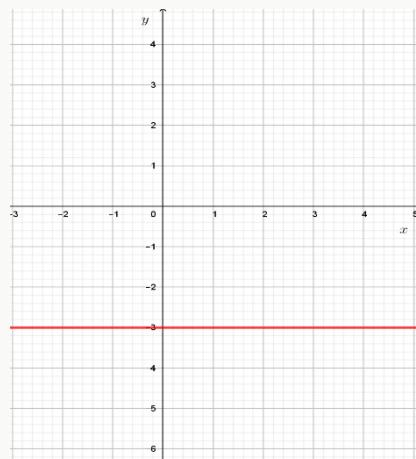
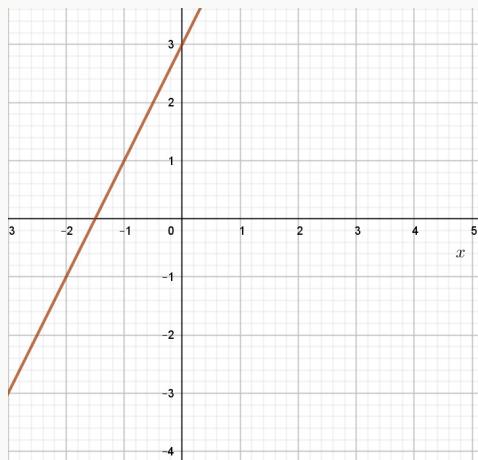
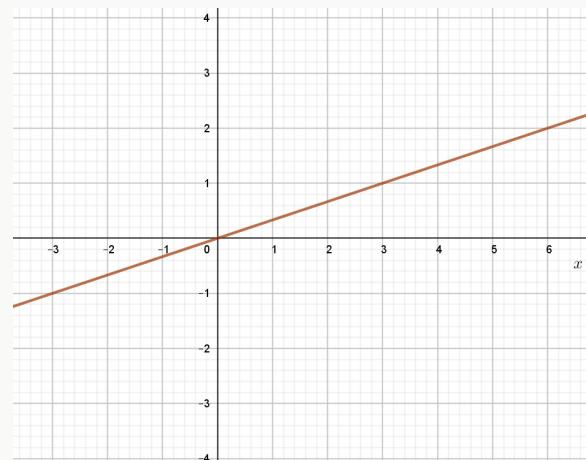
5.8 $t = \frac{10}{b}$

5.9 $y = \frac{x}{5}$

- 6.** Indica a constante de proporcionalidade das proporcionalidades diretas do exercício anterior.



- 7.** Quais dos gráficos seguintes representam uma função linear?
Justifica a tua resposta.

7.1**7.2****7.3****7.4****7.5**

- 8.** Quando um automóvel se movimenta a uma velocidade constante, a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo gasto no percurso:

$e = vt$ em que v representa a velocidade; t o tempo;
 e o espaço.

Sabe-se que o automóvel se move a uma velocidade constante de 20 m/s .

- 8.1** Determina o espaço percorrido nos tempos seguintes:

1s 2s 3s e 4s

8.2 Num referencial, em que no eixo das abcissas se representa o tempo em segundos e no eixo das ordenadas o espaço, em metros, representa graficamente a função que traduz o espaço percorrido em função do tempo.

8.3 Quanto tempo (em segundos) leva o automóvel a percorrer:

8.3.1 1000 m? **8.3.2** 2 km?

8.4 Qual das expressões seguintes permite determinar o espaço percorrido, em metros, por este automóvel com o tempo gasto, em segundos?

- (A) $e = 0.2t$ (B) $e = 0.2t$ (C) $e = 20t$ (D) $e = 0.4t$

9. Define algebricamente, em cada caso, a função que relaciona:

- I.** O volume de um cubo com a sua aresta.
- II.** O perímetro de um triângulo equilátero com o seu lado.
- III.** A área do círculo com o seu diâmetro.

9.1 Representa graficamente as funções que são de proporcionalidade direta.

10. Considera as funções:

$$f(x) = -3x \quad g(x) = 2x \quad h(x) = \frac{x}{3}$$

10.1 Representa, no mesmo referencial, as funções f , g e h .

10.2 Por leitura gráfica, copia e completa:

$$f(-2) = \dots \quad g(1) = \dots \quad \text{e} \quad h(6) = \dots$$

10.3 A partir dos gráficos, indica os valores de x que verificam:

$$f(x) = -3 \quad g(x) = 3 \quad \text{e} \quad h(x) = -2$$

11. Seja f uma função proporcionalidade direta em que a constante de proporcionalidade é $\frac{5}{4}$:

11.1 Indica a expressão algébrica que representa a função.

11.2 Representa graficamente a função f .

11.3 Completa:

$$f(-8) = \dots \quad f(0) = \dots \quad f(\dots) = 1 \quad f(\dots) = \frac{1}{2}$$



Função proporcionalidade inversa

A tabela seguinte estabelece uma correspondência entre os dias gastos para fazer uma certa obra e o número de horas de trabalho diário.

Dias gastos com a obra	x	3	4	6	12
Horas de trabalho diário	y	4	3	2	1

Estamos perante uma função $f:x \rightarrow y$, que a cada valor de x corresponde um e um só valor de y .

Repara que o produto dos valores correspondentes de x e y é constante:

$$3 \times 4 = 12; \quad 4 \times 3 = 12; \quad 6 \times 2 = 12; \quad 12 \times 1 = 12$$

Pode-se, pois, escrever:

$$xy = 12 \text{ ou } y = \frac{12}{x}$$

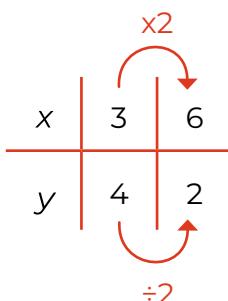
$$\text{Mas } y = \frac{12}{x} \text{ significa } f:x \mapsto \frac{12}{x}$$

Diz-se que, neste caso, as duas grandezas são **inversamente proporcionais** e ao produto constante, 12, dá-se o nome de **constante de proporcionalidade**.

Por observação da tabela, ainda podemos concluir que:

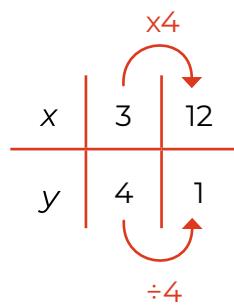
Quando o valor de x é duplicado, o valor de y vem reduzido para a metade.

Repara que:



Quando o valor de x é quadruplicado, o valor de y vem reduzido para a quarta parte.

Repara que:



Podemos, pois, concluir que:

Quando o valor de x é multiplicado por um número (diferente de zero), o valor correspondente de y vem dividido por esse mesmo número.

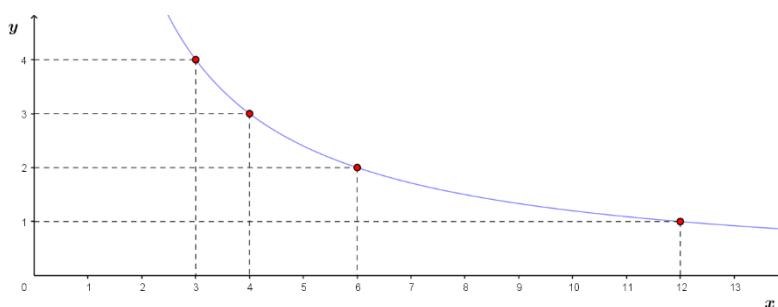


Uma função $f: x \mapsto y$ é uma **proporcionalidade inversa**, se o produto de cada objeto x pela respetiva imagem y for constante.

$$xy = k \quad \text{ou} \quad y = \frac{k}{x} \quad k \neq 0$$

k é a **constante de proporcionalidade**.

No problema inicial, o gráfico é um conjunto de pontos situados sobre uma curva, onde os objetos e as respetivas imagens são todos positivos.

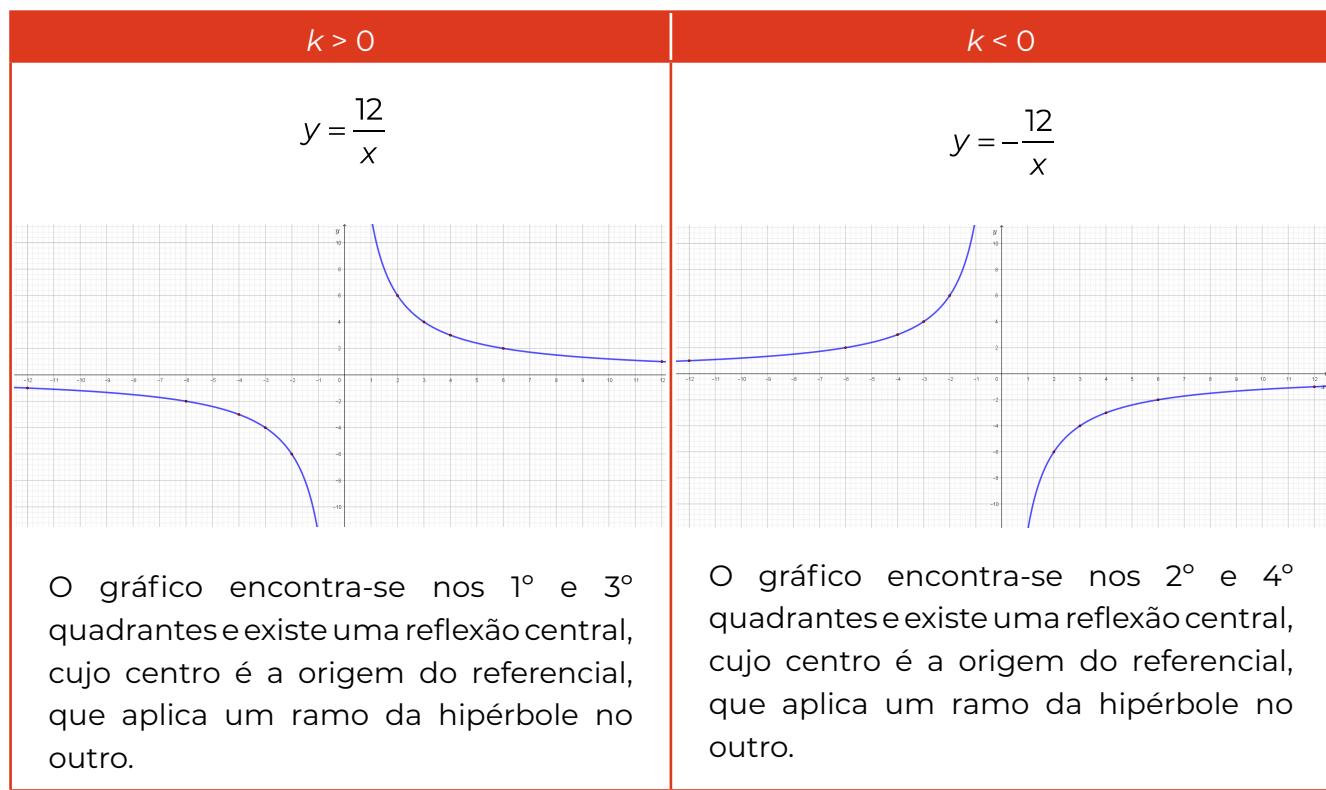


Mas numa função proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}$ $k \neq 0$, a variável independente x pode tomar qualquer valor real, diferente de zero.

O gráfico de uma função proporcionalidade inversa é uma curva chamada **hipérbole**.



Na figura, estão representadas graficamente duas funções proporcionalidade inversa:



Exemplos

- 1.** A tabela exprime uma proporcionalidade inversa entre duas variáveis x e y .

x	1,6	-2	b	4	d
y	a	-8	0,2	c	0,8

1.1 Qual é a constante de proporcionalidade?

1.2 Completa $y = \frac{\dots}{x}$

1.3 Completa a tabela.

- 2.** Numa escola, matricularam-se, no 8º ano, 240 alunos.

2.1 Se pretendermos formar turmas com 24 alunos, quantas turmas vamos constituir?

2.2 E se cada turma tiver 30 alunos?

2.3 Se pretendermos formar 12 turmas, quantos alunos deve ter cada turma?

2.4 Regista num quadro os resultados a que chegaste nos pontos anteriores.

2.5 Que tipo de proporcionalidade existe entre as duas variáveis?

2.6 Qual é a constante de proporcionalidade?

3. A tabela abaixo identifica valores correspondentes da velocidade V e do tempo t necessário para percorrer determinada distância:

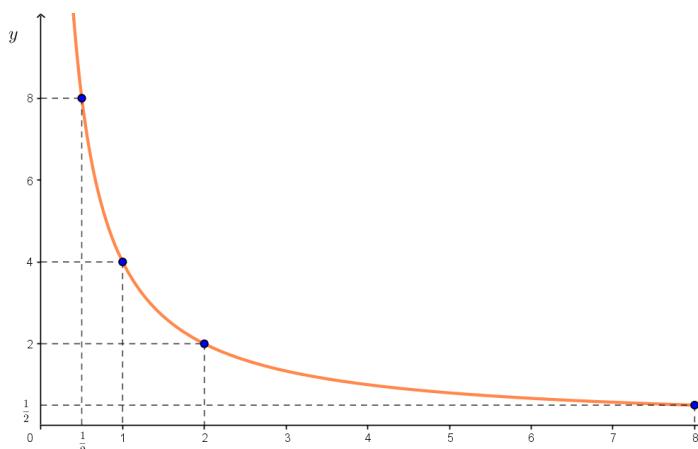
V	75	20	30	12
t	4	15	10	25

3.1 Mostra que as grandezas V e t são inversamente proporcionais.

3.2 Indica a constante de proporcionalidade e diz qual é o seu significado.

3.3 Escreve a expressão que relaciona a velocidade com o tempo.

4. Observa o gráfico da função f .



4.1 Justifica que se trata de uma proporcionalidade inversa.

4.2 Indica a constante de proporcionalidade.

4.3 Escreve uma expressão analítica de f .



4.4 Completa a tabela:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	8
$f(x)$				

Resolução

1.1 Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos:

$$xy = k$$

Na tabela, estão registados dois valores correspondentes de x e y , respetivamente, -2 e -8 , logo

$$(-2) \times (-8) = k \quad \text{ou} \quad k = 16$$

A constante de proporcionalidade é 16.

1.2 De $xy = k$ vem $y = \frac{k}{x}$

$$\text{Logo, } y = \frac{16}{x}$$

1.3 Para completarmos a tabela, tens de determinar os valores de a, b, c e d .

Ora, de $xy = 16$, temos:

- $1,6 \times a = 16$ donde $a = \frac{16}{1,6}$, logo $a = 10$
- $b \times 0,2 = 16$ donde $b = \frac{16}{0,2}$, logo $b = 80$
- $4 \times c = 16$ donde $c = \frac{16}{4}$, logo $c = 4$
- $d \times 0,8 = 16$ donde $d = \frac{16}{0,8}$, logo $d = 20$

2.1 Se representarmos o número de turmas pela letra t e o número de alunos pela letra n , teremos $nxt = 240$.

Então, $24 \times t = 240$ donde $t = 10$.

Logo, o número de turmas a formar é de 10.

2.2 Neste caso, de $30 \times t = 240$ temos $t = 8$

Podem-se constituir 8 turmas.

2.3 Neste caso, teremos $n \times 12 = 240$, donde $n = \frac{240}{12}$ ou $n = 20$.

Cada turma deve ter 20 alunos.

2.4

Número de alunos por turma n	24	30	20
Número de turmas t	10	8	12

2.5 Uma vez que já verificaste que $n \times t = 240$, podemos já afirmar que estas duas grandezas são inversamente proporcionais.

2.6 A constante de proporcionalidade é 240.

3.1 Como $75 \times 4 = 300$ $20 \times 15 = 300$

$$30 \times 10 = 300 \quad 12 \times 25 = 300$$

Portanto, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

3.2 A constante de proporcionalidade é 300 e representa a distância percorrida.

3.3 A expressão é: $V \cdot t = 300$ ou $t = \frac{300}{V}$.

4.1 As grandezas são inversamente proporcionais, porque:

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4 \quad 2 \times 2 = 4 \quad 1 \times 4 = 4 \quad 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

4.2 A constante de proporcionalidade é 4.

4.3 A expressão é $xy = 4$ ou $y = \frac{4}{x}$

4.4

x	$\frac{1}{2}$	1	2	8
$f(x)$	8	4	2	$\frac{1}{2}$



ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

- 1.** Verifica em cada caso se há proporcionalidade inversa. Em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e descobre uma expressão que relacione as duas variáveis.

1.1

v	1	2	4	10	30
t	60	30	15	6	21

1.2

x	4,8	4	3	2	1
y	1,5	1,8	2,4	3,6	7,2

1.3

a	10	5	4	3	1,5
b	20	10	8	6	3

- 2.** Na tabela seguinte, estão representadas duas variáveis, f e p , inversamente proporcionais.

f	2	$\frac{1}{5}$		-5		4
p	2,5		0,5		15	

- 2.1** Escreve uma condição que relacione f com p .

- 2.2** Completa a tabela.

- 3.** Sabe-se que $r \cdot s = 30$.

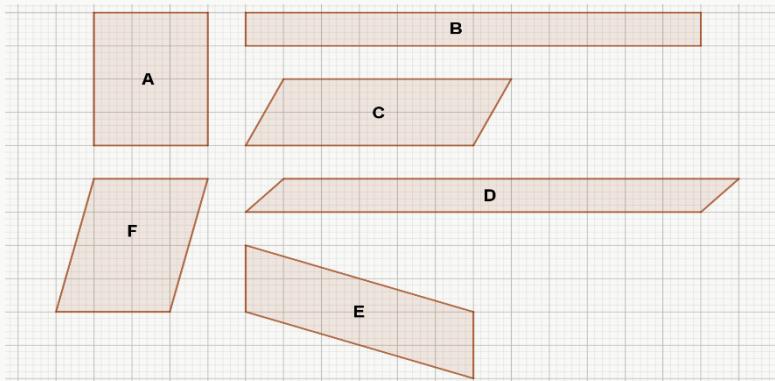
- 3.1** Se $r = 20$, qual é o valor de s ?

- 3.2** Se $s = 1,5$, qual é o valor de r ?

- 4.** A Carla tem 450 escudos para comprar caramelos.
- 4.1** Se cada caramelo custar 25 escudos, quantos caramelos pode comprar?
- 4.2** E quantos caramelos comprará, se cada um custar 30 escudos?
- 5.** Com uma certa quantia de farinha, podem-se formar 20 sacos com o peso de 1,5 kg cada um. Completa a tabela seguinte.

Nº de sacos de farinha	20		40	50	
Peso de cada saco em kg	1,5	6			5

- 6.** Observa a figura:



- 6.1** Completa a tabela

Paralelogramo	Base b	Altura a	Área
A			
B			
C			
D			
E			
F			



6.2 Justifica que se trata de uma proporcionalidade inversa entre as variáveis a e b .

6.3 Indica a constante de proporcionalidade e diz qual é o seu significado.

7. Numa prova de ciclismo, os concorrentes têm de percorrer 60 km. O gráfico seguinte representa a velocidade média, em km/h, e o tempo, em horas, gasto por cada ciclista.

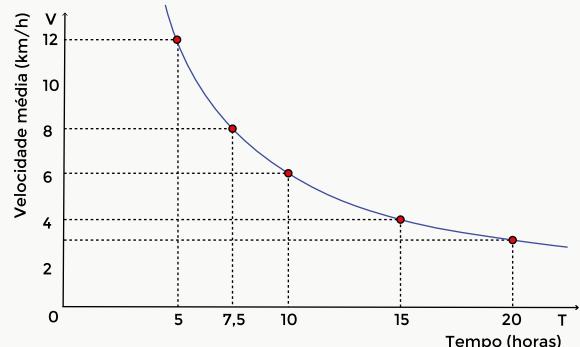
7.1 Justifica que existe uma proporcionalidade inversa entre as grandezas v e t .

7.2 Qual é a constante de proporcionalidade?

7.3 Escreve a expressão analítica da função.

7.4 Se a velocidade média fosse 20 km/h, que tempo demorava o ciclista a fazer o percurso?

7.5 Se o ciclista demorou 12 horas a fazer o percurso, qual é a sua velocidade média?



8. O comprimento de uma onda de rádio é uma função da sua frequência. Uma expressão para esta função é: $w = \frac{300000}{f}$, em que w representa o comprimento de onda em metros e f representa a frequência em quilociclos/segundo.

8.1 O que acontece ao comprimento de onda, quando a frequência de uma onda de rádio duplica? E quando é reduzida a metade?

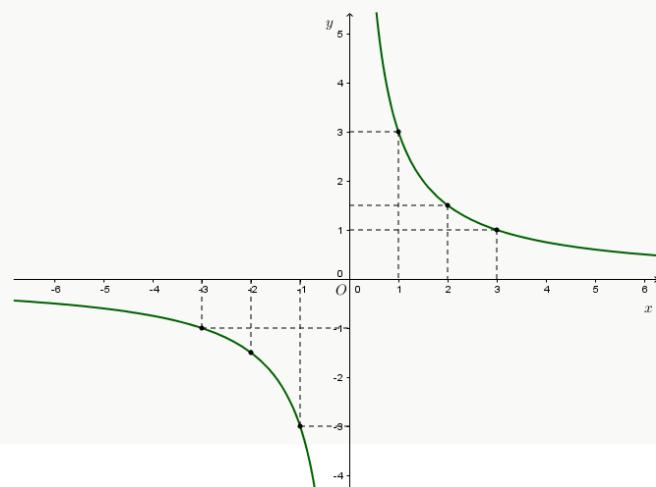
8.2 Resolve a equação em ordem a f .

8.3 Determina a frequência de uma onda de rádio cujo comprimento de onda é 1500 metros.

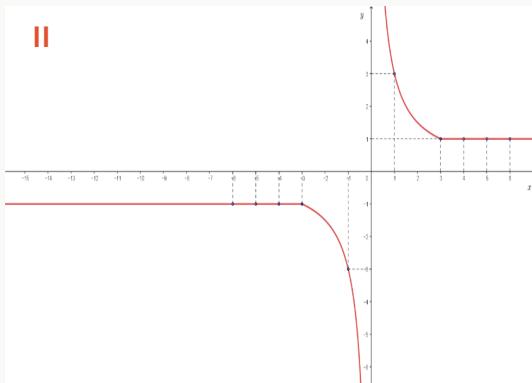
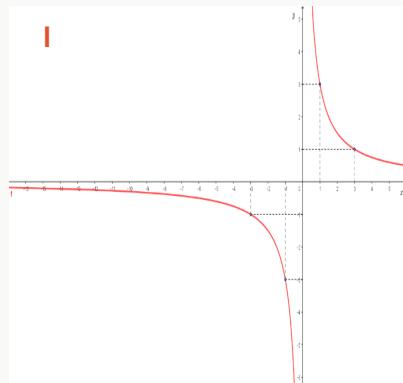
9. Considera a função proporcionalidade inversa representada na figura ao lado.

Das expressões analíticas, indica a que corresponde ao gráfico:

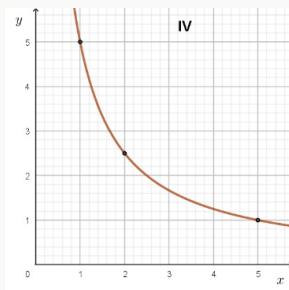
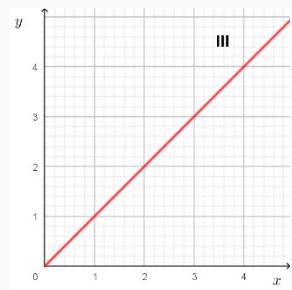
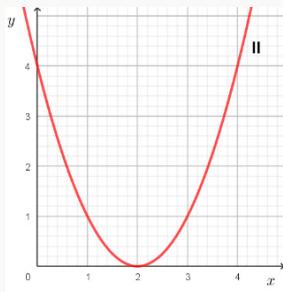
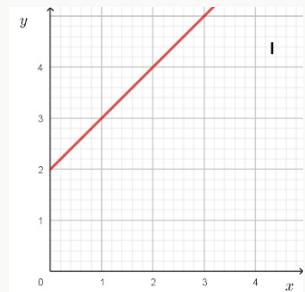
- (A) $xy = \frac{1}{3}$ (B) $y = \frac{x}{3}$ (C) $y = 3x$ (D) $y = \frac{3}{x}$



10. Qual dos seguintes gráficos representa uma função proporcionalidade inversa?



11. Qual dos gráficos traduz uma situação de proporcionalidade direta? E inversa?



11.1 Determina as respetivas constantes de proporcionalidade.

12. Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{2}{3}x ; \quad g(x) = 3x^2 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{5}{x}$$

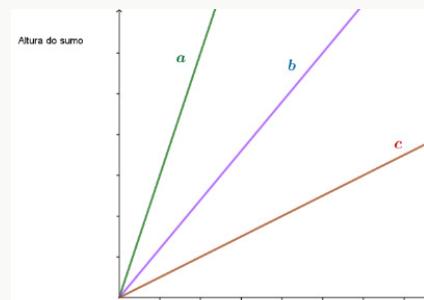
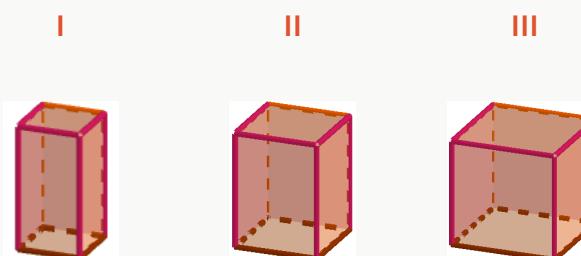
Indica qual delas representa:

12.1 uma proporcionalidade inversa;

12.2 uma proporcionalidade direta.



- 13.** Uma máquina enche três pacotes de sumo com a mesma regularidade. No gráfico, cada reta representa a altura atingida pelo sumo, em cada pacote, em função do tempo de enchimento.

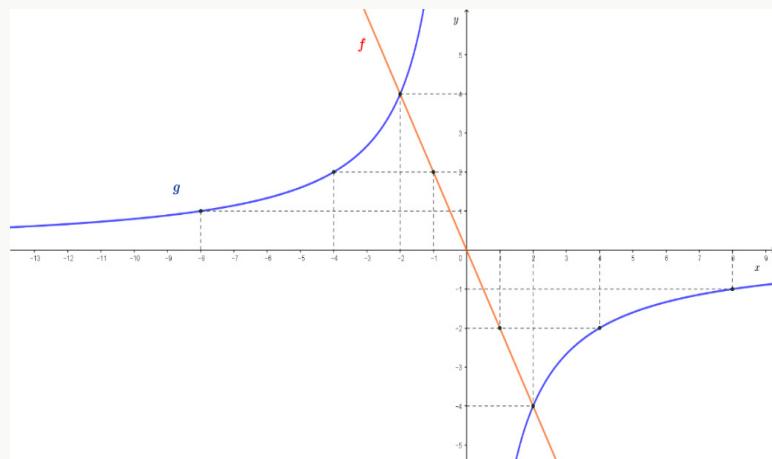


- 13.1** Faz correspondência entre os pacotes de sumo e os gráficos.

- 14.** Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, representadas graficamente.

- 14.1** Justifica as afirmações:

- « $f(x)$ é uma função proporcionalidade direta»
- « $g(x)$ é uma função proporcionalidade inversa»



- 14.2** Escreve a expressão analítica de $f(x)$.

- 14.3** Escreve a expressão analítica de $g(x)$.

- 14.4** Indica as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

- 14.5** Completa as tabelas:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

x	-8	-4	-2	2	4	8
$g(x)$						

Função afim

Numa experiência, os alunos de uma turma do 8º ano resolveram medir o comprimento de uma mola (em centímetros), quando nela são colocados x quilos. Registaram os resultados na seguinte tabela:

Massa (x kg)	0	1	2	3	4
Comprimento da mola (y cm)	10	12,5	15	17,5	20

Qual é a expressão que relaciona as duas variáveis x e y ?

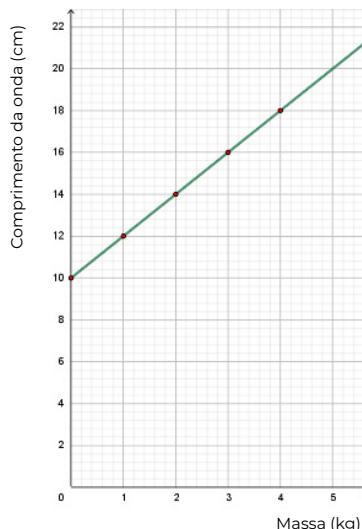
Para descobrir a expressão que relaciona as duas variáveis, basta observar, na tabela, que quando o x aumenta 1 unidade, y aumenta 2,5 unidades.

Repara que:

- $10 = 2,5 \times 0 + 10$
- $12,5 = 2,5 \times 1 + 10$
- $15 = 2,5 \times 2 + 10$
- $17,5 = 2,5 \times 3 + 10$
- $20 = 2,5 \times 4 + 10$

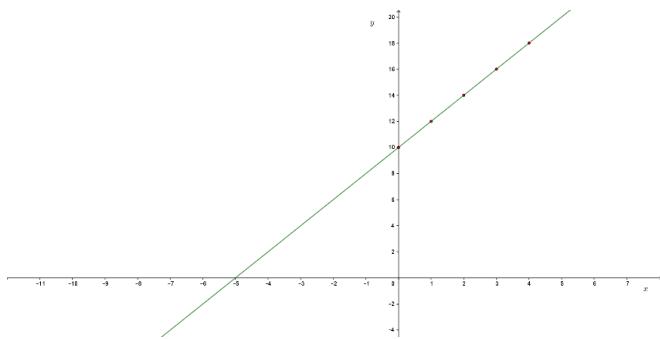
Então, podemos concluir que $y = 2,5x + 10$

Vamos representar graficamente a função $y = 2,5x + 10$, utilizando os valores da tabela.





Se o domínio for \mathbb{R} , o gráfico da função é uma reta que não passa pela origem do referencial e interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 10)$. Neste caso, dizemos que 10 é a ordenada na origem, ou seja, 10 é o valor de y para $x = 0$.



Uma função do tipo $y = 2,5x + 10$ designa-se por **função afim**.

O **declive** é o coeficiente de inclinação da reta que representa a função, ou seja, a reta de equação $y = kx + b$ é paralela à reta que passa na origem e pelo ponto $(1, k)$. Resumindo:

Uma função $f: x \mapsto y$ é uma função afim se $y = kx + b$, onde k e b são números reais.

k é o coeficiente do termo em x e representa o declive da reta, b é o **termo independente** e representa a ordenada na origem.



No caso de ser $b = 0$ e $k \neq 0$, obtemos uma função proporcionalidade direta, $y = kx$.

Se $k = 0$, obtemos uma **função constante**, $y = b$.

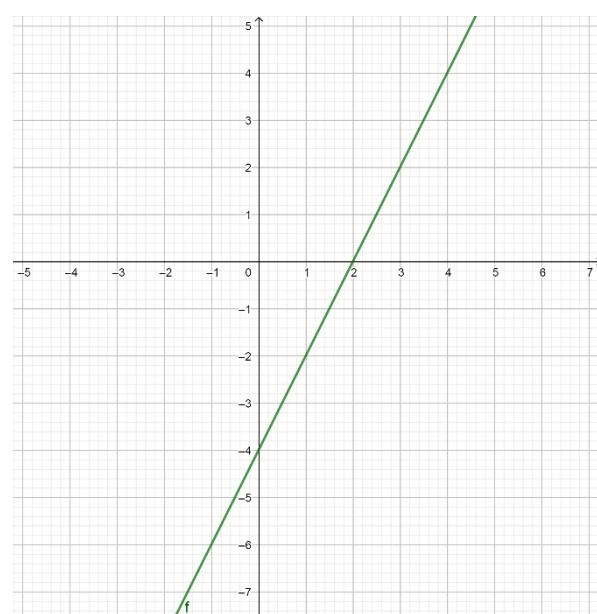
Exemplos

$$f(x) = 2x - 4; \quad g(x) = -2x; \quad h(x) = -2$$

Gráfico de uma função afim

Representa graficamente cada uma das funções dos exemplos anteriores.

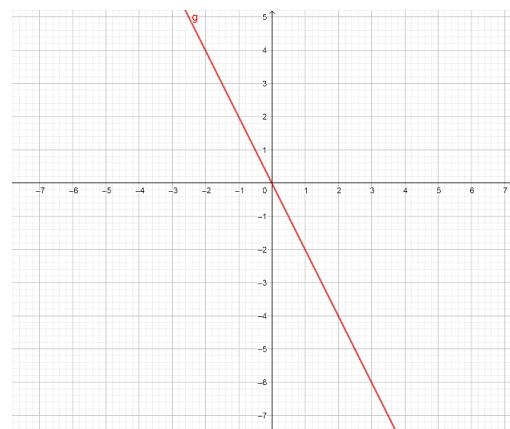
x	$y = 2x - 4$
-1	$2 \times (-1) - 4 = -6$
0	$2 \times 0 - 4 = -4$
1	$2 \times 1 - 4 = -2$
2	$2 \times 2 - 4 = 0$



A ordenada na origem é $-4 = b$ e o declive é $2 = k$.

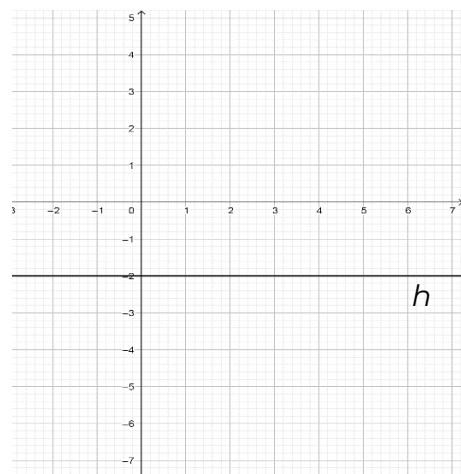
Pelo gráfico, pode-se ver que a função é crescente.

x	$y = -2x$
-1	$-2 \times (-1) = 2$
0	$-2 \times 0 = 0$
1	$-2 \times 1 = -2$
2	$-2 \times 2 = -4$



Neste caso, a função é decrescente, a ordenada na origem é $0 = b$ e o declive é $-2 = k$.

x	$y = -2$
-1	-2
0	-2
1	-2
2	-2

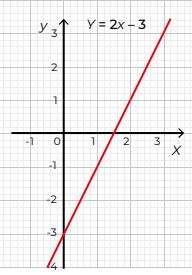
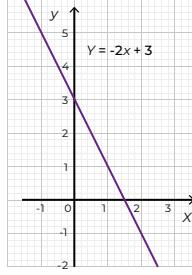
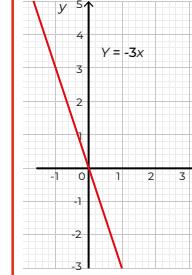
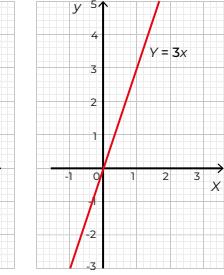
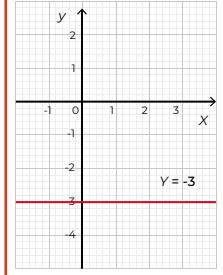
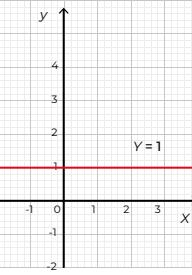


A função é constante, a ordenada na origem é $-2 = b$ e o declive é $0 = k$.

Pelos exemplos anteriores, podemos constatar que qualquer função afim tem como gráfico uma reta oblíqua ou uma reta horizontal, de acordo com os valores de k .

- Se $k > 0$, a função é crescente;
- Se $k < 0$, a função é decrescente;
- Se $k = 0$, a função é constante.



Função afim					
$f(x) = kx + b, k \neq 0 \text{ e } b \neq 0$	$f(x) = kx + b, k \neq 0 \text{ e } b = 0$ $f(x) = kx \rightarrow \text{Função linear}$	$f(x) = kx + b, k = 0$ $f(x) = b \rightarrow \text{Função constante}$			
O gráfico é uma reta que não passa pela origem do referencial.	O gráfico é uma reta que passa pela origem do referencial.	O gráfico é uma reta horizontal (paralela ao eixo das abcissas)			
 $k > 0$	 $k < 0$	 $k > 0$	 $b < 0$	 $b > 0$	

ATIVIDADES

1. Considera uma função afim f , cujo gráfico é a reta representada no referencial ao lado.

- 1.1 Escreve uma expressão algébrica que traduz a função.

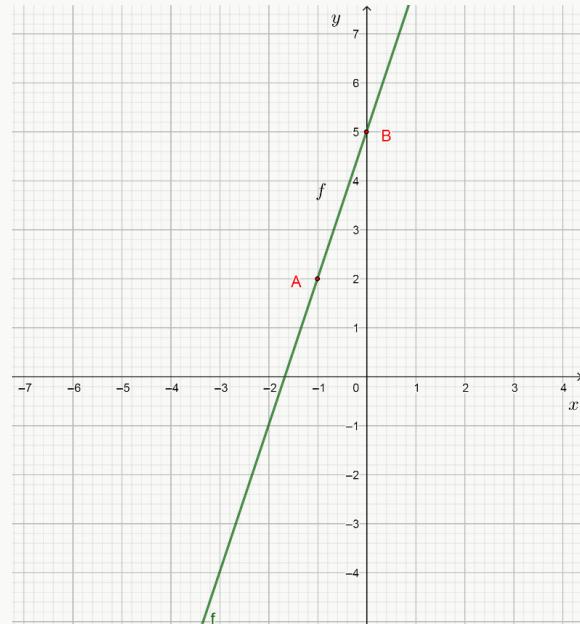
- 1.2 Quais dos pontos seguintes pertencem ao gráfico da função f ?

$$A \rightarrow (-3, -4); \quad B \rightarrow \left(\frac{1}{3}, 7\right)$$

- 1.3 Determina a ordenada do ponto da reta cuja abcissa é igual a -2 .

- 1.4 Indica a abcissa do ponto da reta cuja ordenada é igual a 17 .

- 1.5 Indica as coordenadas do ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas.



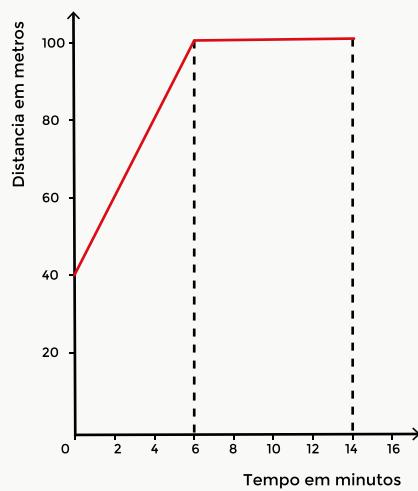
2. O gráfico ao lado representa uma viagem que o João fez durante as férias.

- 2.1 A que distância estava de casa quando iniciou a viagem?

- 2.2 Quanto tempo esteve parado?

- 2.3 Verifica que a função que representa o gráfico para t de 0 a 6 mn é

$$f(t) = 10t + 40 \text{ e para } t \text{ de } 6 \text{ a } 14 \text{ mn é } g(t) = 100$$



Resolução

1.1 Como a expressão de uma função afim é do tipo $y = kx + b$, precisamos calcular os valores de b e k . Pelo gráfico, o valor de b é 5 (ordenada na origem), então $y = kx + 5$.

Para determinar o valor de k , sabendo que $A(-1, 2)$ é um dos pontos da reta, vamos substituir, na equação, o x por -1 e o y por 2 (abcissa e ordenada, respectivamente do ponto A).

$$y = kx + 5$$

$$2 = k(-1) + 5 \Leftrightarrow 2 = -k + 5 \Leftrightarrow k = 5 - 2 \Leftrightarrow k = 3$$

A expressão pedida é $y = 3x + 5$

1.2 Para verificar se um ponto pertence ao gráfico da função, basta substituir na expressão o x e o y pelas coordenadas dos pontos dados.

Sendo

$$y = 3x + 5 \quad \text{e} \quad A \hookrightarrow (-3, -4), \text{ temos:}$$

$-4 = 3 \times (-3) + 5 \Leftrightarrow -4 = -9 + 5 \Leftrightarrow -4 = -4$ Proposição verdadeira, logo o ponto A pertence ao gráfico da função, o que significa que o par ordenado $(-3, -4)$ é solução da equação $y = 3x + 5$.

Para

$$B \hookrightarrow \left(\frac{1}{3}, 7\right), \text{ temos:}$$

$$7 = 3 \times \frac{1}{3} + 5 \Leftrightarrow 7 = 1 + 5 \Leftrightarrow 7 = 6 \quad \text{Proposição falsa, logo o ponto}$$

B não pertence ao gráfico da função, o que significa que o par ordenado $\left(\frac{1}{3}, 7\right)$ não é solução da equação $y = 3x + 5$.

1.3 Neste caso, temos que substituir, na expressão da função, x por (-2) , então

$$y = 3x + 5 \Leftrightarrow y = 3(-2) + 5 \Leftrightarrow y = -6 + 5 \Leftrightarrow y = -1$$

A ordenada do ponto é -1 .

1.4 Para determinar a abcissa, basta substituir, na expressão, y por 17 e resolver a equação.

$$y = 3x + 5$$

$$17 = 3x + 5 \Leftrightarrow 17 - 5 = 3x \Leftrightarrow 12 = 3x \Leftrightarrow \frac{12}{3} = x \Leftrightarrow 4 = x$$

A abcissa do ponto é 4.



- 1.5** O ponto de interseção da reta com o eixo das abscissas tem ordenada zero, logo

$$y = 3x + 5$$

$$0 = 3x + 5 \Leftrightarrow -5 = 3x \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

O ponto tem de coordenadas $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.

- 2.1** Estava a 40 metros de distância.

- 2.2** Esteve parado durante 8 minutos.

- 2.3** Pelo gráfico, vê-se que é uma função afim do tipo $f(t) = kt + b$.

Sendo $b = 40$ a ordenada na origem, precisamos calcular o valor de k .

No instante $t = 6\text{ mn}$, a distância é de 100 m , logo

$100 = k \times 6 + 40$, resolvendo a equação, temos:

$$100 - 40 = 6k \Leftrightarrow 60 = 6k \Leftrightarrow \frac{60}{6} = k \Leftrightarrow 10 = k$$

Como $f(t) = kt + b$, substituindo o k e o b pelos valores encontrados, obtemos:

$$f(t) = 10t + 40.$$

De 6 a 14 mn a função é constante, então $g(t) = b$, logo

$$g(t) = 100.$$

ATIVIDADES DE CONSOLIDAÇÃO

- 1.** Considera os pontos cujas coordenadas são.

$$A \cup (4, 4); B \cup (-4, 4); C \cup (-4, -4); D \cup (4, -4);$$

- 1.1** Representa-os num referencial cartesiano.

- 1.2** Classifica o quadrilátero $[ABCD]$ e indica a medida de cada um dos seus lados.

- 1.3** Indica as coordenadas de qualquer ponto da diagonal $[AC]$ e da diagonal $[BD]$.

2. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 3x - 1$.

2.1 Completa a seguinte tabela:

x	2	4		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$
$f(x)$			14		59	

2.2 Representa graficamente a função f .

2.3 Quais dos pontos seguintes pertencem ao gráfico da função f ?

$$A \curvearrowleft (3, 8); B \curvearrowleft (6, 18); C \curvearrowleft \left(\frac{4}{3}, 3\right).$$

3. Considera as funções definidas por:

$$y = 2x - 5; \quad y = 2x + 3 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x$$

3.1 Representa-as graficamente.

3.2 Sejam r , s e t , respetivamente, as retas correspondentes à sua representação gráfica. Qual é a posição relativa das retas r e s ? E de r e t ?

4. Considera a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = 3x - 3$.

4.1 Determina os valores de $f(x)$ correspondentes a

$$x \in \left\{-\frac{2}{3}, -1, 0, \frac{1}{3}, 2\right\}.$$

4.2 Representa graficamente essa função.

4.3 Indica as coordenadas dos pontos de interseção da reta que a representa com os eixos coordenados.

5. Considera a função $y = 3x - 2$.

5.1 Indica:

5.1.1 a ordenada do ponto de abcissa -1 ;

5.1.2 a abcissa do ponto de ordenada 3 .



5.1.3 As coordenadas do ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas.

5.2 Tendo em conta os resultados anteriores, representa, graficamente, a função $y = 3x - 2$.

6. Escreve a expressão algébrica da função afim f , sabendo que:

6.1 $f(0) = 3$ e $f(1) = 2$

6.2 $f(2) = -3$ e $f(0) = -3$

6.3 $f(0) = 0$ e $f(-1) = -1$

6.4 $f(3) = -3$ e $f(-2) = 0$

7. Dadas as funções $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = 3 - x$:

7.1 Representa-as graficamente num mesmo referencial.

7.2 Indica as coordenadas do ponto que pertence aos dois gráficos.

7.3 Calcula o valor de $h(0)$, sendo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

8. Considera a função afim f , de domínio \mathbb{R} , representada parcialmente na figura ao lado.

8.1 Qual é a imagem de 0 por f ?

8.2 Qual é o objeto cuja imagem por f é 0?

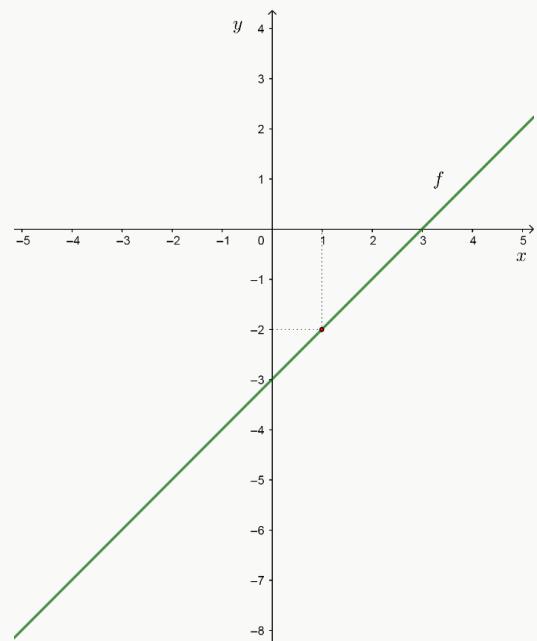
8.3 Qual é a imagem de 1 por f ?

8.4 Escreve uma expressão algébrica da função f .

8.5 Qual é a imagem de 10 por f ?

8.6 Qual é o objeto cuja imagem por f é 97?

8.7 Seja agora a função g definida por $g(x) = -3x + 1$.



Haverá algum objeto cuja imagem por f e g seja a mesma?

9. Três amigos estavam na cantina da escola a estudar e resolveram lanchar. Constataram os seguintes preços:

- um sumo custava 30 escudos;
- uma sanduíche de fiambre custava 45 escudos;
- um iogurte custava 40 escudos.

9.1 Qual pode ser, neste contexto, o significado de cada uma das expressões?

- (A) $y = 30n$; (B) $y = 45n$; (C) $y = 40n$.

9.2 As funções referidas em 9.1 são funções proporcionalidade direta. Justifica esta afirmação.

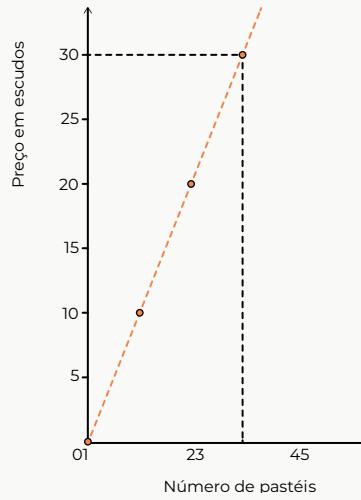
9.3 Para cada uma das funções dadas, identifica a constante de proporcionalidade direta e explica o seu significado.

9.4 Representa as funções no mesmo referencial.

9.5 Um dos amigos construiu o gráfico representado na figura ao lado.

9.5.1 Escreve uma expressão algébrica da função representada graficamente.

9.5.2 Determina a constante de proporcionalidade e interpreta o seu significado no contexto apresentado.



10. Um móvel em movimento retilíneo com velocidade constante obedece à função $s(t) = 5t + 15$, em que s é o espaço percorrido pelo móvel (em metros) e t é o tempo gasto em percorrê-lo (em segundos).

10.1 Determina:

10.1.1 A posição do móvel no instante $t = 0$ s.

10.1.2 A posição no instante $t = 5$ s.

10.1.3 O instante em que o móvel se encontra a 35 metros da origem.

10.2 Constrói o gráfico da função $s(t)$.



- 11.** Uma máquina, ao sair da fábrica, sofre uma desvalorização constante pelo seu uso, representada pela função $p(t) = 50 - 5t$, em que p é o preço da máquina (em contos) e t é o tempo de uso (em anos).

11.1 Constrói o gráfico dessa função.

11.2 Determina:

- 11.2.1** O custo da máquina ao sair da fábrica.
11.2.2 O custo da máquina após cinco anos de uso.

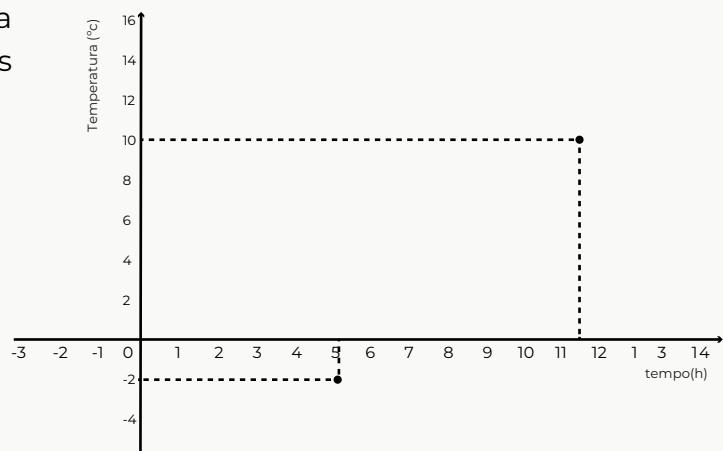
11.2.3 O tempo para que a máquina se desvalorize totalmente.

- 12.** O gráfico ao lado mostra a temperatura de uma região do globo, desde as 5 horas até às 11 horas.

12.1 Em que horário desse período a temperatura atingiu zero graus centígrados?

12.2 Entre que horas desse período a temperatura esteve negativa?

12.3 Entre que horas desse período a temperatura esteve positiva?



- 13.** A máquina de lavar da Joana avariou. Ela ligou para uma oficina especializada e foi informada que o custo da reparação seria de 2500 escudos para a deslocação da máquina e 1000 escudos por hora de trabalho.

13.1 Completa a tabela.

Número de horas	Custo do arranjo (escudos)
1	3500
2	
3	
...	

13.2 Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Joana?

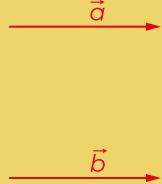
13.3 Se a Joana pagou pelo arranjo da máquina 7500 escudos, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

1



$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = 2$$

\vec{d}

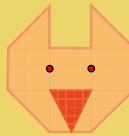


\vec{b}

3



4



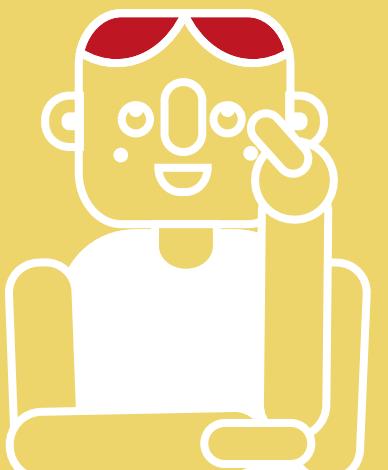
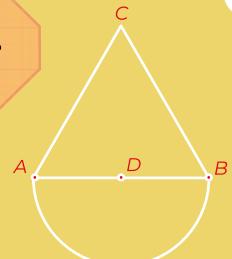
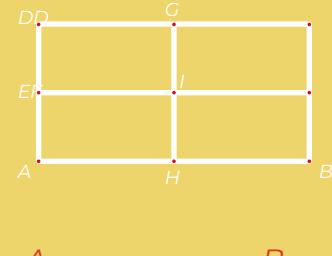
$$3^{n+1} = 6^n \Leftrightarrow 3^n = 6^{n-1}$$

7



8

$$-2\vec{U} = -2 \times \vec{U}$$



UNIDADE 5

Geometria e Medida II



UNIDADE 5

GEOMETRIA E MEDIDA II

CONTEÚDOS:

1. Transformações geométricas

- Operações com vetores.
- Propriedades das operações com vetores.
- Isometrias.
- Translação associada a um vetor.
- Propriedades das translações.
- Rotações, centro e ângulo de rotação.
- Propriedades das rotações.
- Composição de isometrias.
- Homotetias.
- Redução e ampliação.
- Teorema de Thales.
- Semelhanças.
- Propriedades das homotetias e das semelhanças.
- Polígonos semelhantes.
- Semelhança de triângulos.

2. Medidas

- Áreas de regiões poligonais.

OBJETIVOS:

- Definir o conceito de vetor.
- Efetuar a adição algébrica de vetores.
- Aplicar as propriedades da adição algébrica de vetores.
- Associar um vetor a uma dada translação.
- Construir a imagem de uma figura numa translação definida por um vetor dado.
- Reconhecer propriedades das translações.
- Resolver problemas simples que envolvam translações.
- Compor translações, relacionando-as com a adição de vetores.
- Utilizar instrumentos de medição e de desenho na construção de figuras.
- Identificar rotações, os seus centros e os seus ângulos.
- Aplicar as propriedades das rotações.
- Construir rotações dados um ponto como centro e a amplitude de um ângulo.
- Reconhecer as propriedades comuns das isometrias.
- Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direções.
- Compreender a noção de homotetia.
- Definir homotetia.
- Compreender a noção de semelhança.

OBJETIVOS (CONTINUAÇÃO):

- Reduzir e ampliar figuras, dada a razão de semelhança.
- Identificar figuras semelhantes, distinguindo-as das congruentes.
- Construir polígonos semelhantes.
- Calcular distâncias reais a partir de uma representação.
- Determinar a razão de semelhança, de homotetia de triângulos e de quadriláteros.
- Compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas.
- Enunciar o teorema de Thales.
- Aplicar o teorema de Thales no cálculo de comprimentos de um dos lados de um triângulo.
- Identificar critérios de semelhança de triângulos e diferenciá-los dos de congruência.
- Justificar a semelhança entre os triângulos obtidos ao traçar a altura referente à hipotenusa num triângulo retângulo.
- Calcular áreas de regiões poligonais planas, recorrendo a composições e decomposições e às fórmulas correspondentes.
- Comparar áreas de regiões poligonais planas semelhantes.
- Realizar atividades de forma autónoma, responsável e criativa.
- Manifestar sentido de responsabilidade, de flexibilidade e de respeito pelo seu trabalho e pelos outros.
- Desenvolver a autoconfiança.
- Criar hábitos de trabalho e de persistência.
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico, de modo a ser capaz de os usar.
- Desenvolver a noção de demonstração, mostrando-se capaz de fazer raciocínios dedutivos.
- Explicar e confrontar as suas ideias, justificando as suas opiniões, desenvolvendo a comunicação e o raciocínio.



TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

ORIENTAÇÕES DA RETA

Considera a reta r e sobre ela marca os pontos A , B e C .

O ponto A pode deslocar-se sobre a reta r em dois sentidos opostos. Assim:



- A deslocação do ponto A para a direita indica uma orientação da reta: a orientação de A para B . Nesse caso, a reta fica orientada de A para B , logo, o ponto A **precede** o ponto B .



- A deslocação do ponto A para a esquerda indica outra orientação da reta: a orientação de A para C . Nesse caso, a reta fica orientada de A para C , logo, o ponto A **precede** o ponto C .



Com a reta orientada de A para B , dizemos que nela foi definido o **sentido positivo**.

Com a reta orientada de A para C , dizemos que nela foi definido o **sentido negativo**.

ATIVIDADE

Considera a reta r da figura e nela os pontos P , Q , R e S .



Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1. Se a reta está orientada de Q para R , então P precede S .
2. A orientação de Q para R é igual à orientação de P para S .
3. A orientação de R para Q é oposta à orientação de Q para S .
4. O sentido da orientação de S para P é negativo.

SEGMENTOS ORIENTADOS

Consideremos, agora, um segmento de reta $[AB]$.



A este segmento de reta $[AB]$ correspondem dois segmentos orientados:

- O segmento de reta orientado de A para B . A é a **origem** do segmento e o ponto B é a sua **extremidade**. Representa-se por $[A, B]$.
- O segmento de reta está orientado de B para A . A **origem** do segmento é o ponto B e a **extremidade** é o ponto A . Representa-se por $[B, A]$.

Nota que $[A, B] \neq [B, A]$.

Um segmento orientado $[A, B]$ é definido pelos pontos A e B , sendo A a origem e B a extremidade.

O comprimento de um segmento de reta orientado $[A, B]$ é o comprimento do segmento de reta $[AB]$, ou seja, a distância entre a sua origem e a sua extremidade e representa-se por \overline{AB} .

A direção de um segmento de reta orientado $[A, B]$ é a direção da sua reta suporte, a reta AB .

O segmento de reta $[AA]$ e o segmento de reta orientado $[A, A]$, de extremos coincidentes, têm comprimento igual a zero.

O segmento de reta orientado $[A, A]$ tem direção e sentido indefinidos.

O segmento de reta orientado $[A, A]$ designa-se por **segmento orientado nulo** (coincide com o ponto A).

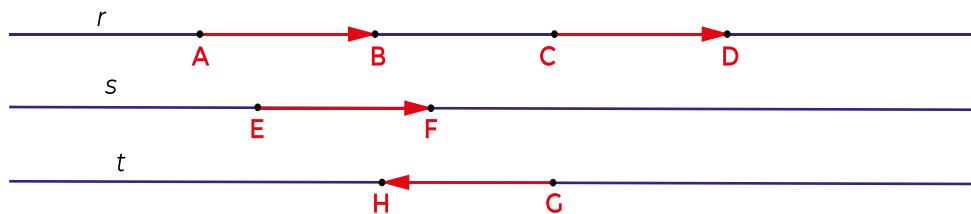
Nota:

Dois segmentos de reta orientados têm a mesma direção quando as respectivas retas suporte são estritamente paralelas ou coincidentes.



VETORES NO PLANO

Na figura, as retas r , s e t são estritamente paralelas e os segmentos de reta representados têm 3 cm de comprimento cada.



Os segmentos de reta orientados $[A, B]$, $[C, D]$ e $[E, F]$ têm a **mesma direção**, o **mesmo sentido** e o **mesmo comprimento**. Por esta razão, dizemos que são **segmentos orientados equipolentes**.

O segmento de reta orientado $[G, H]$ tem a mesma direção, o mesmo comprimento e **sentido oposto** em relação aos outros segmentos de reta orientados $[A, B]$, $[C, D]$ e $[E, F]$

Dois segmentos de reta orientados são **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

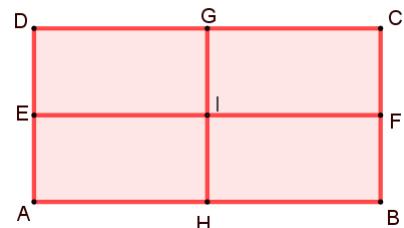


Exemplo

Na figura ao lado, está representado um retângulo maior $[ABCD]$, com 2 cm e 4 cm de lado, dividido em quatro retângulos menores geometricamente iguais.

1. Utilizando as letras da figura ao lado, indica dois segmentos de reta orientados com:

- 1.1 a mesma direção, o mesmo sentido e 2 cm de comprimento;
- 1.2 a mesma direção, sentidos opostos e 4 cm de comprimento;
- 1.3 zero centímetros de comprimento.



2. Ainda na mesma figura, indica dois segmentos de reta orientados equipolentes a:

- 2.1 $[D, A]$;
- 2.2 $[A, B]$.

Resolução

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1.1 Por exemplo, $[A, D]$ e $[B, C]$ | 2.1 $[G, H]$ e $[C, B]$ |
| 1.2 Por exemplo, $[A, B]$ e $[F, E]$ | 2.2 $[E, F]$ e $[D, C]$ |
| 1.3 $[A, A]$, $[I, I]$ | |

NOÇÃO DE VETOR

Os segmentos de reta orientados equipolentes distinguem-se uns dos outros apenas por terem origens diferentes, dado que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Dizemos que eles representam o mesmo vetor.



Um **vetor** é um conjunto de segmentos orientados equipolentes.

Qualquer segmento orientado de um vetor representa esse vetor.

Um vetor fica definido por uma direção, um sentido e um comprimento. O comprimento, o sentido e a direção de um vetor são o comprimento, o sentido e a direção de qualquer segmento de reta orientado que o representa.

O vetor determinado pelo segmento de reta orientado $[AB]$ pode representar-se por \overrightarrow{AB} ou por uma letra minúscula, como por exemplo, \vec{u} .

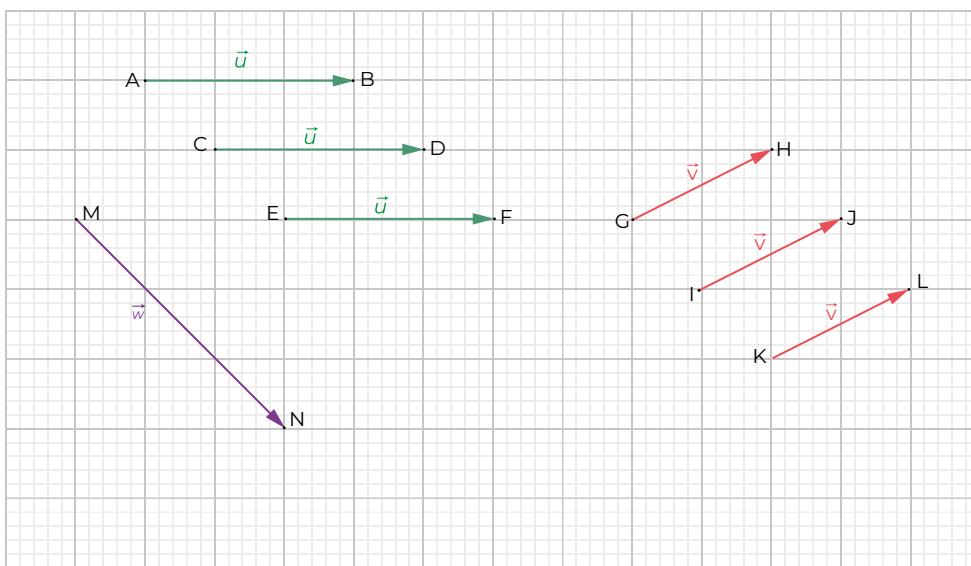
O vetor determinado pelos segmentos de reta orientados de extremos coincidentes é o vetor nulo e representa-se por \vec{O} .

O vetor nulo tem direção e sentido indeterminados.

Assim, por exemplo, $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$

Exemplo

Consideremos os conjuntos de segmentos de reta orientados da figura seguinte, representados por cores diferentes:



Os segmentos de reta orientados $[A, B]$, $[C, D]$ e $[E, F]$ são equipolentes. Representam o **vetor \vec{u}** .

Os segmentos de reta orientados $[G, H]$, $[I, J]$ e $[K, L]$ são equipolentes. Representam o **vetor \vec{v}** .

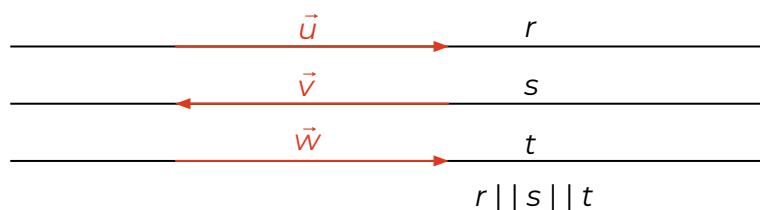
O segmento de reta orientado $[M, N]$ representa o **vetor \vec{w}** .
 $\vec{w} = \overrightarrow{MN}$

Dois vetores não nulos com a mesma direção dizem-se **vetores colineares**.

Dois vetores com a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos, dizem-se **vetores simétricos**.

O vetor simétrico do vetor \vec{u} representa-se por $-\vec{u}$.

Exemplo



Na figura acima, temos que os vetores:

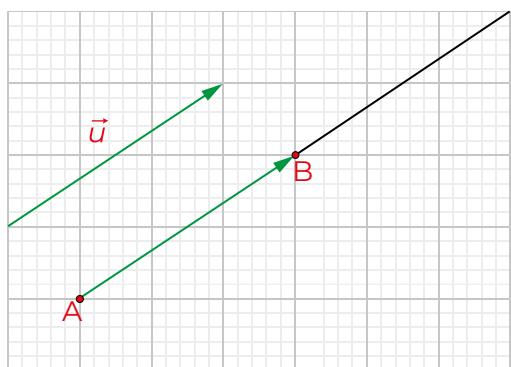
- \vec{u} , \vec{v} , e \vec{w} são colineares;
- \vec{u} e \vec{v} são vetores simétricos ($\vec{u} = -\vec{v}$);
- \vec{u} e \vec{w} são iguais ($\vec{u} = \vec{w}$).

SOMA DE UM PONTO COM UM VETOR

Considera o seguinte problema:

Dado o ponto A e um vetor \vec{u} , determina a extremidade B do segmento de reta orientado com origem em A , que representa o vetor \vec{u} .

O problema resolve-se da seguinte forma:



- Começamos por traçar a semirreta de origem em A com a direção e sentido de \vec{u} ;
- Sobre essa semirreta consideramos, a partir de A , o segmento de reta de comprimento igual ao do vetor \vec{u} ;
- A extremidade desse segmento é o ponto B .

Desta forma, ao ponto A e ao vetor \vec{u} foi possível fazer corresponder um ponto B , tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, ou seja, $B - A = \vec{u}$.

Ao ponto B dá-se o nome de **soma do ponto A com o vetor \vec{u}** .



A soma de um ponto A com um vetor \vec{u} é um ponto B , tal que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ ou } B = A + \vec{u} \text{ ou } \vec{u} = B - A$$

Nota que $A + \vec{O} = A$.

ATIVIDADES

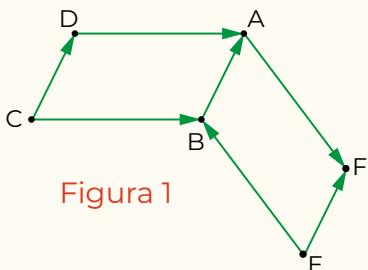


Figura 1

1. Na figura 1, $[ABCD]$ e $[ABEF]$ são dois paralelogramos.

1.1 Quantas direções estão representadas?

1.2 Quantos sentidos estão representados?

1.3 Quantos são os segmentos de reta orientados?

1.4 Quantos vetores estão representados?

1.5 Indica dois vetores iguais e dois vetores simétricos.

1.6 Indica dois vetores com o mesmo comprimento, mas que não sejam iguais.



2. Na figura ao lado, $[ABCD]$ é o losango maior, dividido em quatro losangos menores, geometricamente iguais.

Completa:

2.1 $A + \overrightarrow{AB} = \dots$

2.2 $C + \overrightarrow{DA} = \dots$

2.3 $\dots + \overrightarrow{DB} = B$

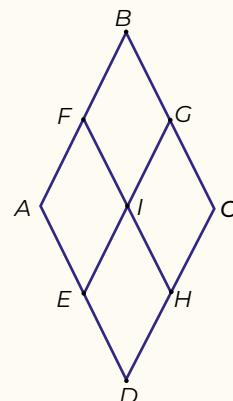
2.4 $E + \dots = G$

2.5 $H + \dots = H$

2.6 $\dots + \overrightarrow{DH} = C$

2.7 $F - A = \dots$

2.8 $\overrightarrow{IH} = C - \dots$



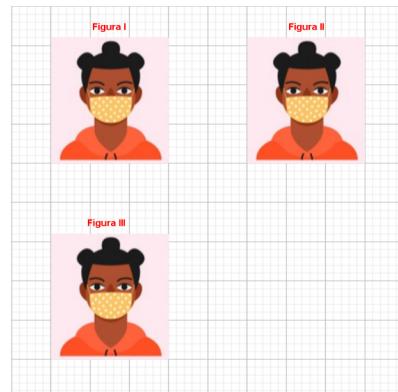
TRANSLAÇÃO ASSOCIADA A UM VETOR

A translação é uma transformação geométrica associada a uma direção, a um sentido e a um comprimento, isto é, a um vetor, do seguinte modo: a cada ponto da figura original, faz-se corresponder a soma desse ponto com o vetor considerado.

Exemplo 1

Observando a figura ao lado, podemos verificar que a partir da figura I, deslocando-se cinco unidades para a direita, obtém-se a figura II e deslocando-se cinco unidades para baixo obtém-se a figura III.

Assim, dizemos que as figuras II e III são os transformados da figura I por meio de translações.

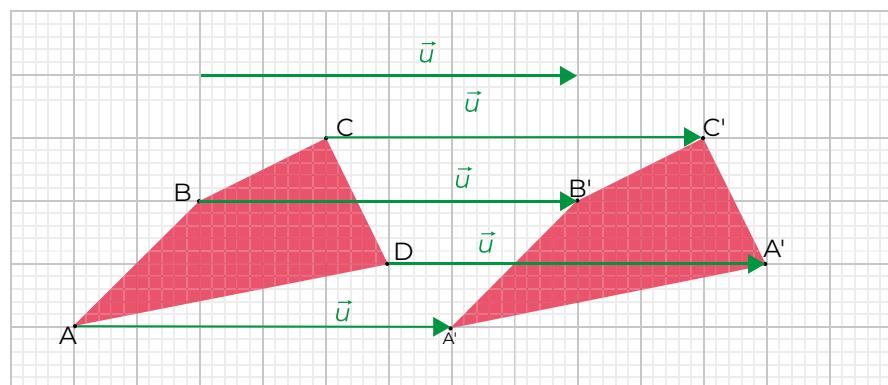


Exemplo 2

Considera agora a figura ao lado.

Por observação, podemos verificar que:

- $A' = A + \vec{u}$
- $B' = B + \vec{u}$
- $C' = C + \vec{u}$
- $D' = D + \vec{u}$



Para cada ponto P do quadrilátero $[ABCD]$ existe um ponto P' do quadrilátero $[A'B'C'D']$, tal que $P' = P + \vec{u}$.

Diz-se que o quadrilátero $[A'B'C'D']$ é o transformado do quadrilátero $[ABCD]$ pela translação associada ao vetor \vec{u} .



A translação associada ao vetor \vec{u} é a aplicação que a um ponto P faz corresponder o ponto P' , tal que $P' = P + \vec{u}$.

A translação associada ao vetor \vec{u} representa-se por $T_{\vec{u}}$.

A imagem do ponto P por $T_{\vec{u}}$ representa-se por $T_{\vec{u}}(P)$, ou seja, $P' = T_{\vec{u}}(P)$

Exemplos

1. Observa a figura seguinte.

Qual é a imagem do ponto P pela translação:

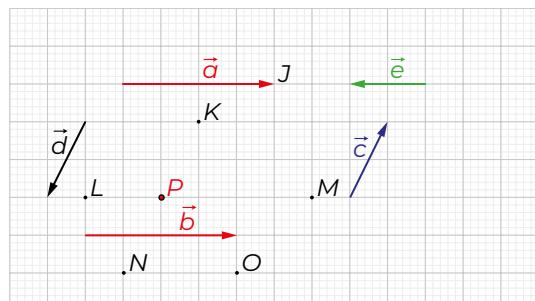
1.1 $T_{\vec{a}}$

1.2 $T_{\vec{b}}$

1.3 $T_{\vec{c}}$

1.4 $T_{\vec{d}}$

1.5 $T_{\vec{e}}$



Resolução

1.1 $T_{\vec{a}}(P) = P + \vec{a} = M$

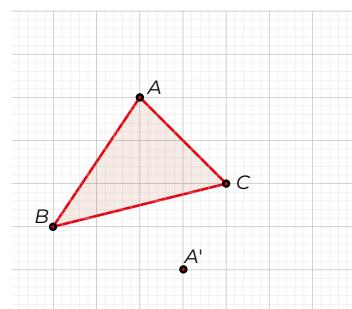
1.2 $T_{\vec{b}}(P) = P + \vec{b} = N$

1.3 $T_{\vec{c}}(P) = P + \vec{c} = K$

1.4 $T_{\vec{d}}(P) = P + \vec{d} = L$

1.5 $T_{\vec{e}}(P) = P + \vec{e} = Q$

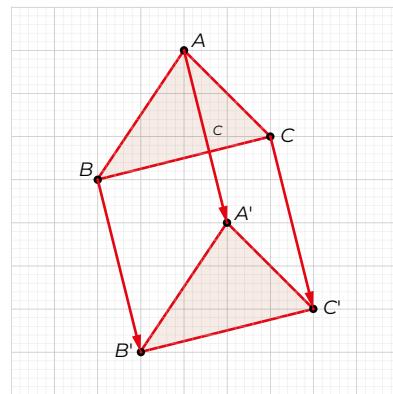
2. Reproduz a figura ao lado no teu caderno e desenha o transformado do triângulo $[ABC]$ pela translação que transforma A em A' .





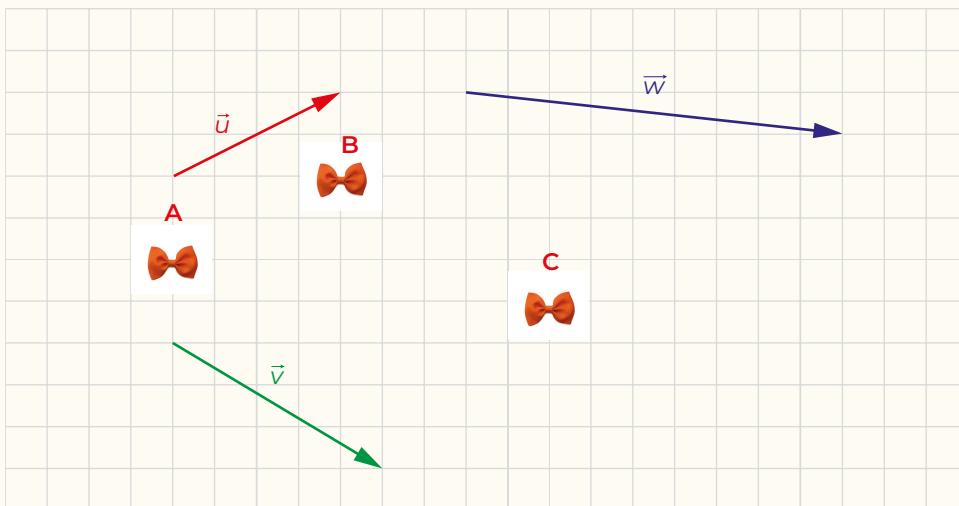
Resolução

2. Vamos desenhar o vetor $\overrightarrow{AA'}$ e obter a imagem de cada um dos vértices na translação $T_{\overrightarrow{AA'}}$.

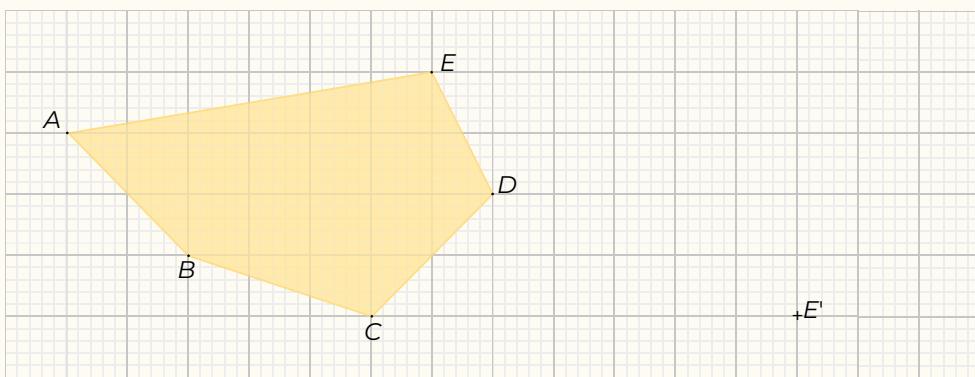


ATIVIDADES

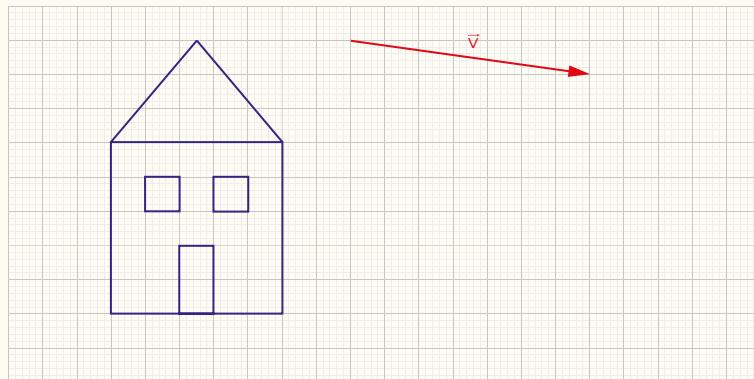
1. Considera a figura abaixo.



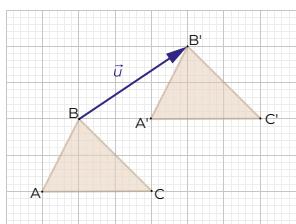
- 1.1 Qual é a imagem do motivo A na translação associada ao vetor \vec{u} ?
 1.2 Indica a imagem do motivo B na translação associada ao vetor \vec{v} .
 1.3 Qual é o vetor da translação que aplica o motivo A no motivo C?
 1.4 Existe alguma translação que aplica o motivo C no motivo B?
2. Determina a imagem da figura através da translação associada ao vetor $\overrightarrow{CE'}$.



3. Determina a imagem da figura representada, pela translação associada ao vetor \vec{v} .



PROPRIEDADES DAS TRANSLAÇÕES



Na figura ao lado, o triângulo $[A' B' C']$ é o transformado do triângulo $[ABC]$ na translação associada ao vetor \vec{u} .

Observando a figura, podemos verificar que:

Os segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$ são transformados, respetivamente, nos segmentos de reta paralelos e geometricamente iguais, $[A'B']$, $[B'C']$ e $[A'C']$.

- Os ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ são transformados, respetivamente nos ângulos $\angle A'$, $\angle B'$ e $\angle C'$, geometricamente iguais;
- Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são geometricamente iguais.

Propriedades das translações

Uma translação transforma:

- um segmento de reta noutro segmento de reta paralelo ao primeiro e geometricamente igual;
- um ângulo noutro ângulo geometricamente igual;
- uma figura noutra figura geometricamente igual.

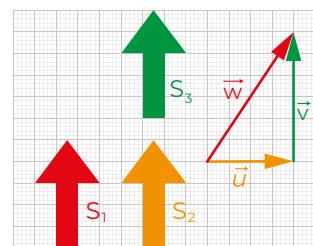


COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES. ADIÇÃO DE VETORES

Composição de translações

Na figura ao lado, pode-se ver que através da translação associada ao vetor \vec{u} , a seta S_1 é transformada na seta S_2 e a seta S_2 é transformada na seta S_3 , na translação associada ao vetor \vec{v} .

Podemos verificar ainda que a seta S_1 é transformada na seta S_3 por meio da translação associada ao vetor \vec{w} .

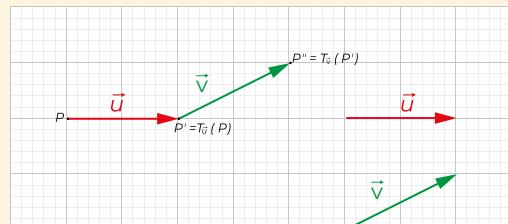


À translação associada ao vetor \vec{w} , ($T_{\vec{w}}$), dá-se o nome de translação composta das translações ($T_{\vec{v}}$) e ($T_{\vec{u}}$) e representa-se $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

O vetor \vec{w} é o vetor soma do vetor \vec{u} com o vetor \vec{v} .

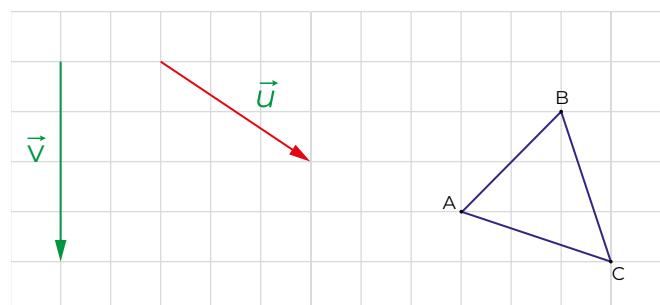
Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , a composta da translação $T_{\vec{v}}$, com a translação $T_{\vec{u}}$, é a translação que consiste em aplicar $T_{\vec{u}}$, a um ponto P e, em seguida, $T_{\vec{v}}$, ao ponto $T_{\vec{u}}(P)$, isto é, $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(P))$. Ela está associada ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$:

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(P) = T_{\vec{u} + \vec{v}}(P)$$



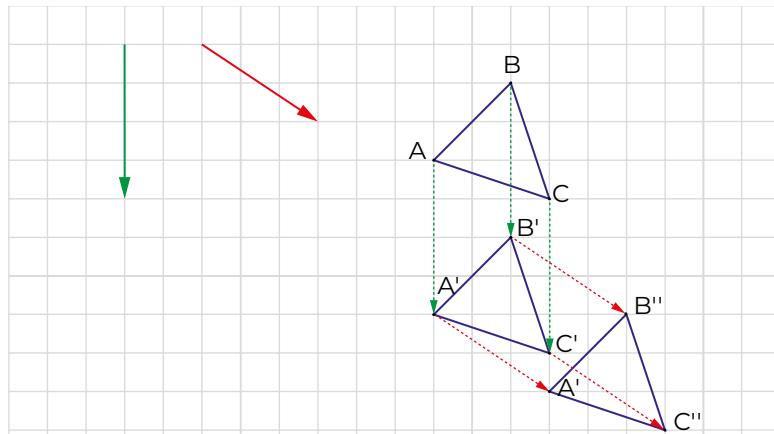
Exemplo

Dado o triângulo $[ABC]$ e os vetores \vec{u} e \vec{v} , determina a sua imagem na translação composta $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$.



Resolução

$$[ABC] \hookrightarrow [A'B'C'] \quad \text{e} \quad [A'B'C'] \hookrightarrow [A''B''C'']$$

 $T_{\vec{v}}$ $T_{\vec{u}}$ 

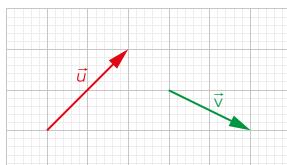
$$\text{Então: } T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}([ABC]) = T_{\vec{u}}(T_{\vec{v}}([ABC]))$$

$$T_{\vec{u}}(A'B'C') = [A''B''C'']$$

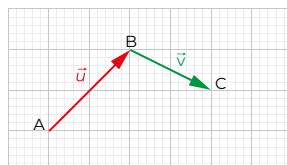
Adição de vetores

Como vimos acima, o vetor associado à translação composta de duas translações é o vetor soma dos vetores associados àquelas translações.

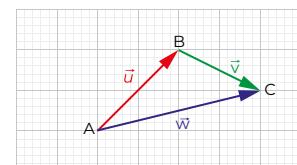
Para adicionar dois vetores quaisquer, procede-se do seguinte modo:



1º \vec{u} e \vec{v} são os vetores dados.

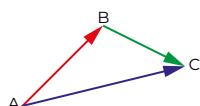


2º Considera-se um ponto qualquer A (origem). Determina-se $B = T_{\vec{u}}(A)$ e $C = T_{\vec{v}}(B)$.



3º O vetor \overrightarrow{AC} é a soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$

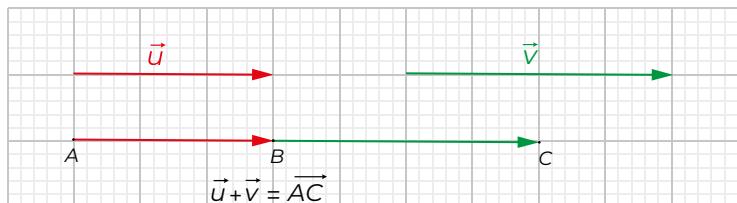


$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

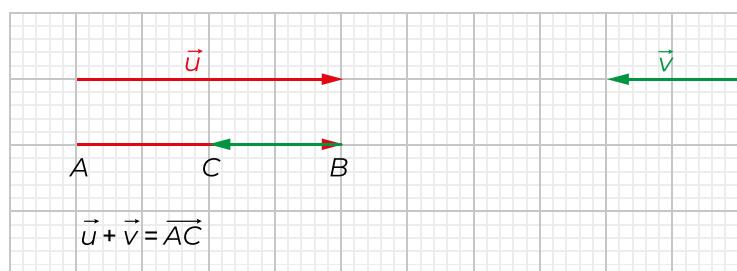


No caso em que os vetores têm a mesma direção, podemos considerar:

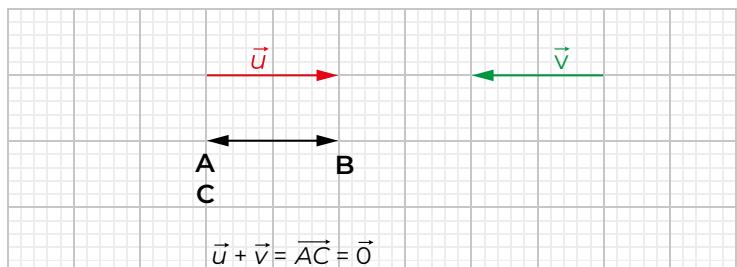
- vetores com o mesmo sentido e comprimentos diferentes;



- vetores com sentidos contrários e comprimentos diferentes;



- vetores com sentidos contrários e comprimentos iguais.

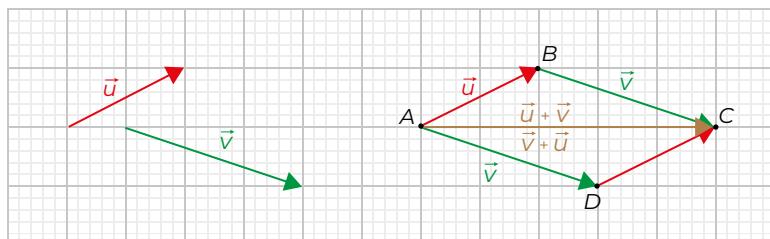


Então, podemos concluir que **o vetor soma** é um vetor com a origem do primeiro vetor e extremidade do segundo vetor.

Propriedades da adição de vetores

- **Propriedade comutativa**

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} .

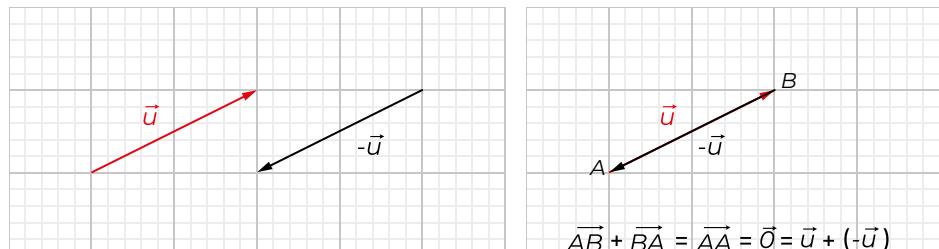


- **Existência do elemento neutro**

$\vec{u} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{u} = \vec{u}$, qualquer que seja o vetor \vec{u} .

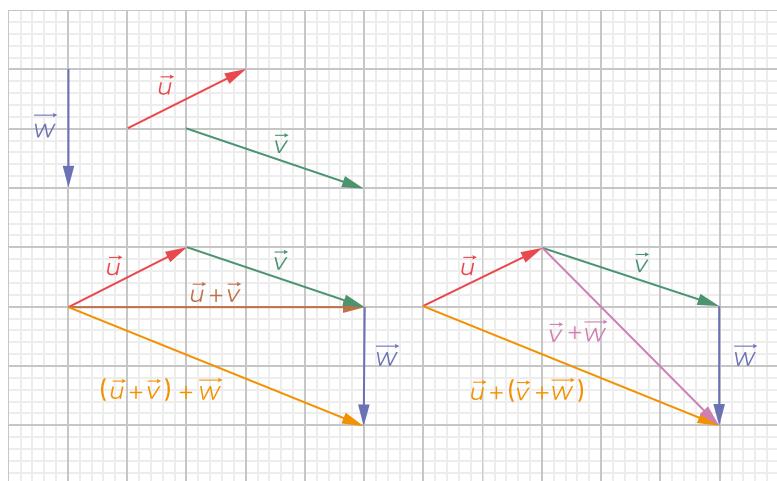
- **Existência do elemento simétrico**

$\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{O}$, qualquer que seja o vetor \vec{u} .



- **Propriedade associativa**

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, quaisquer que sejam os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .



Produto de um número real por um vetor

Considera o vetor \vec{u} :

A soma $\vec{u} + \vec{u}$ é um vetor com a mesma direção e sentido do vetor \vec{u} e comprimento igual ao dobro do comprimento do vetor \vec{u} .

$$\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u} = 2 \times \vec{u}$$





A soma $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ é um vetor com a mesma direção e sentido do vetor \vec{u} e comprimento igual ao triplo do comprimento do vetor \vec{u} .

$$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u} = 3 \times \vec{u}$$

Recorda que o vetor simétrico de $-\vec{u}$ que se representa por \vec{u} é um vetor com a mesma direção e o mesmo comprimento de \vec{u} , e com sentido contrário ao de \vec{u} .

$$-\vec{u}$$

Assim,

A soma $(-\vec{u}) + (-\vec{u})$ é um vetor com a mesma direção, sentido contrário ao do vetor \vec{u} e comprimento igual ao dobro do comprimento do vetor \vec{u} .

$$2 \times (-\vec{u}) = -2 \times \vec{u}$$

A soma $(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u})$ é um vetor com a mesma direção e sentido contrário ao do vetor \vec{u} e comprimento igual ao triplo do comprimento do vetor \vec{u} .

$$3 \times (-\vec{u}) = -3 \times \vec{u}$$

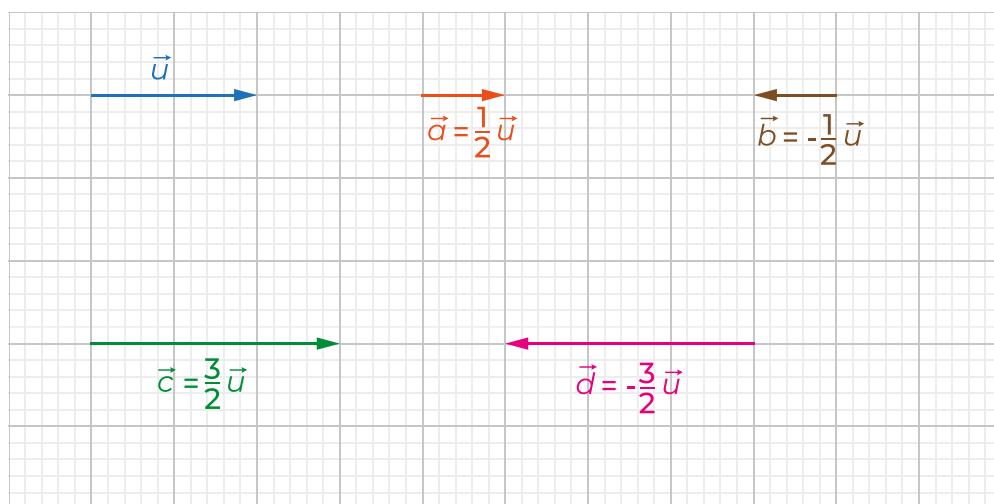
Então,

O produto de um número real k por um vetor \vec{u} é um vetor com:

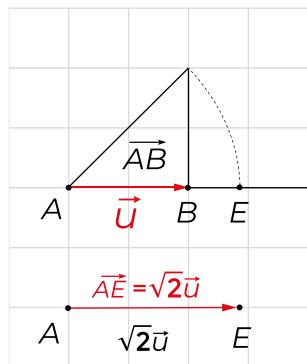
- Direção e sentido do vetor \vec{u} , se k for positivo e comprimento igual ao produto de k pelo comprimento do vetor \vec{u} .
- Direção do vetor \vec{u} , sentido contrário, se k for negativo e comprimento igual ao produto do $|k|$ pelo comprimento do vetor \vec{u} .

Se $k = 0$, obtemos o vetor nulo.

Exemplos

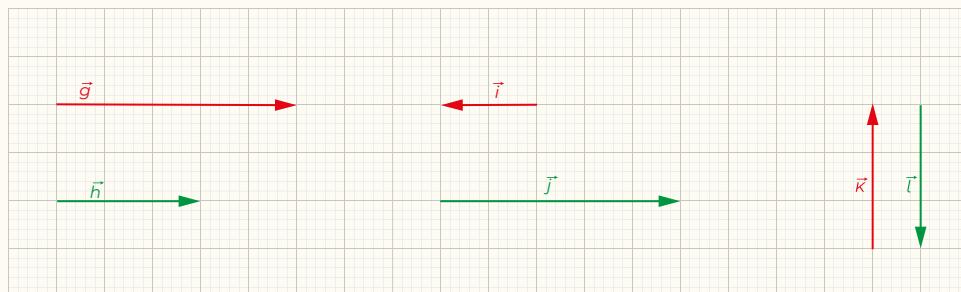
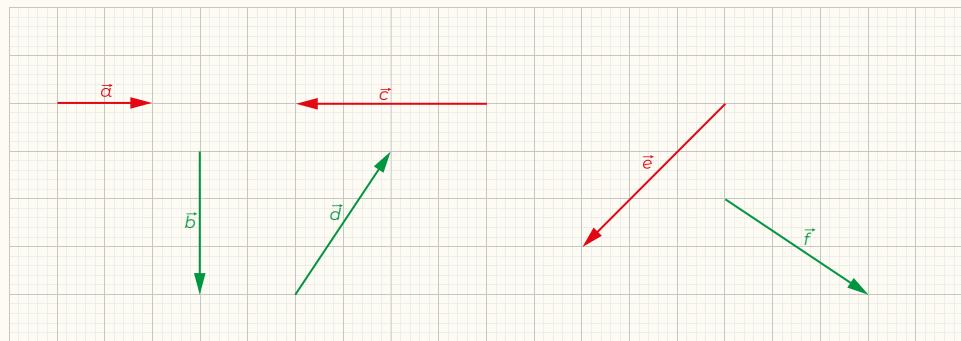


No caso de $\sqrt{2}\vec{u}$:



ATIVIDADES

- 1.** Determina o vetor soma de cada um dos seguintes pares de vetores: \vec{a} e \vec{c} , \vec{b} e \vec{d} , \vec{e} e \vec{f} , \vec{g} e \vec{l} , \vec{h} e \vec{j} , \vec{k} e \vec{t} ,



- 2.** Considera o retângulo $[ABCD]$.

2.1 Completa:

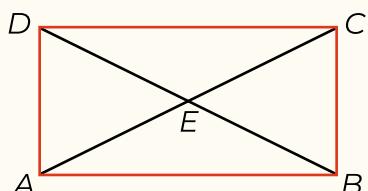
$$\text{2.1.1} \quad T_{\overrightarrow{AB}}(A) = \dots$$

$$\text{2.1.2} \quad T_{\overrightarrow{BC}}(B) = \dots$$

$$\text{2.1.3} \quad (T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}})(A) = \dots$$

$$\text{2.1.4} \quad (T_{\overrightarrow{DB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}})(C) = \dots$$

- 2.2** O vetor que define a translação composta $(T_{\overrightarrow{DB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}})$ é...





2.3 Determina:

2.3.1 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \dots$

2.3.2 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \dots$

2.3.3 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \dots$

2.3.4 $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DE} = \dots$

- 3.** Na figura estão desenhados nove triângulos equiláteros geometricamente iguais.

Completa:

3.1 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \dots$

3.2 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \dots$

3.3 $\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{DC} = \dots$

3.4 $\overrightarrow{BF} + \dots = \overrightarrow{BH}$

3.5 $\overrightarrow{FE} + \dots = \overrightarrow{FE}$

3.6 $\dots + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$

3.7 $T_{\overrightarrow{AC}}(A) = \dots$

3.8 $T_{\overrightarrow{GB}}(H|J) = \dots$

3.9 $T_{\dots}(H) = B$

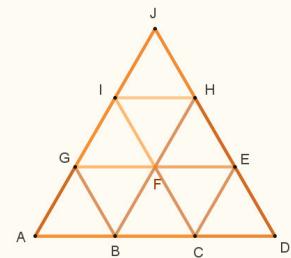
3.10 $T_{\overrightarrow{CE}} \circ T_{\overrightarrow{IH}}(A) = \dots$

3.11 $\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{AB}$

3.12 $\overrightarrow{DJ} = \dots \overrightarrow{ED}$

3.13 $\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{AD}$

3.14 $\overrightarrow{IH} = \dots \overrightarrow{DB}$



- 4.** Desenha no teu caderno um paralelogramo $[ABCD]$, tal que:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm}; \quad \overline{BC} = 4\text{ cm} \quad \text{e} \quad \hat{B}AD = 60^\circ$$

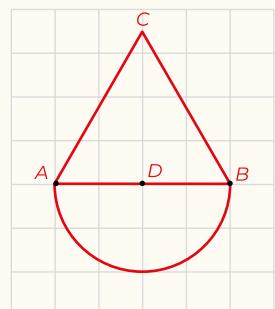
- 4.1** Determina o transformado do paralelogramo que desenhaste pela translação $T_{\overrightarrow{BA}} \circ T_{\overrightarrow{CB}}$.

- 5.** Desenha no teu caderno a figura ao lado, constituída por um semicírculo de centro D e por um triângulo equilátero.

- 5.1** Constrói a imagem da figura, pela translação associada ao vetor \overrightarrow{CD} e chama $[A'B'C']$ à imagem do triângulo $[ABC]$ e D' à imagem de D .

- 5.2** Qual é a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo $[A'B'C']$? Justifica.

- 5.3** À imagem da figura, obtida pela translação $T_{\overrightarrow{CD}}$, aplica a $T_{\overrightarrow{DB}}$ e chama-lhe $[A''B''C']$. Qual é o vetor que te permite passar, por translação, diretamente do triângulo $[ABC]$ para o triângulo $[A''B''C']$?



ROTAÇÕES

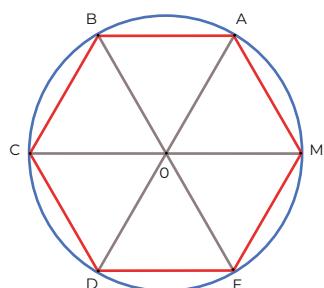
Rotações, centro e ângulo de rotação

No 6º ano de escolaridade, iniciaste o estudo das rotações. Como sabes, no quotidiano, observamos muitas vezes e em várias situações o movimento de rotação.

No movimento de rotação há sempre um ponto fixo - o **centro de rotação** - e um ângulo - o **ângulo de rotação**.

Uma rotação pode ser feita no sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios (sentido positivo, +), ou no sentido dos ponteiros dos relógios (sentido negativo, -).

Na figura, está representada uma circunferência de centro O e um hexágono regular nela inscrito.



Repara que o hexágono está dividido em seis triângulos equiláteros geometricamente iguais, o que significa que a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo é de 60° .

Imagina o ponto M a rodar no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio sobre a circunferência.

Assim:

- se M roda 60° no sentido positivo vai coincidir com o ponto A ;
- se M roda 120° no sentido positivo vai coincidir com o ponto B .

E se M rodar $+180^\circ$, -240° , -300° e $+360^\circ$, qual é a posição que vai ocupar?

Dados dois pontos, O e M , e um ângulo α , o ponto M' é a imagem do ponto M pela **rotação de centro O e ângulo α** , quando os segmentos de reta $[OM]$ e $[OM']$ têm o mesmo comprimento e os ângulos α e MOM' têm a mesma amplitude.



Simbolicamente, representa-se por $R_{(O,\alpha)}(M)=M'$.

A imagem do centro de uma rotação é o próprio centro.



Construção de imagens por rotação

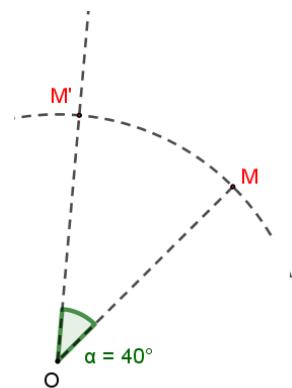
Vamos construir, na rotação de centro O e ângulo α , a imagem de:

Um ponto

Dados dois pontos distintos, O e M , determina a imagem do ponto M na rotação de centro O e amplitude 40° .

Deves:

- Marcar os dois pontos O e M ;
- Unir o ponto O com o ponto M ;
- Colocar o transferidor com centro em O e o zero alinhado com o ponto M e marcar o ângulo $\alpha = 40^\circ$;
- Com o compasso, com centro em O e raio \overline{OM} , desenhar o arco MM' .

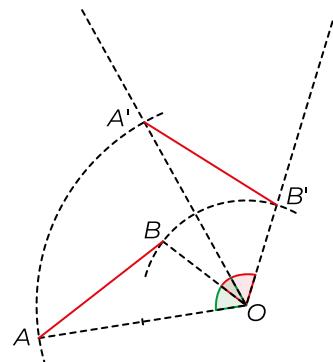


M' é a imagem de M pela rotação de centro em O e amplitude 40° .

Um segmento de reta

Constrói a imagem de $[AB]$ na $R_{(O, -70^\circ)}$.

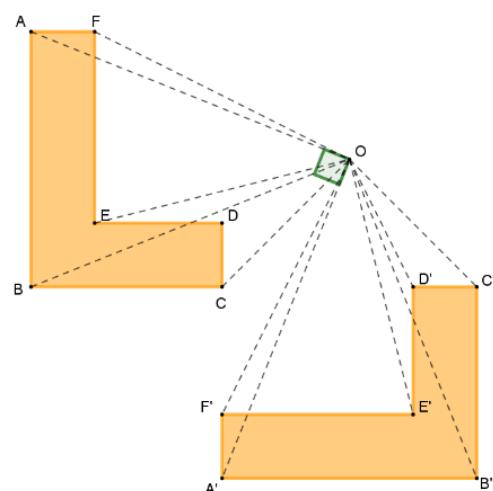
Para construir a imagem de um segmento de reta, começa-se por construir as imagens de cada um dos extremos, A' e B' , desse segmento, procedendo como no caso anterior. Depois, basta unir os pontos imagem, A' e B' , obtendo-se o segmento $[A'B']$.



Um polígono

Determina a imagem da figura ao lado, na rotação de centro O e amplitude $+90^\circ$.

Para construir a imagem de um polígono por meio de uma rotação, começa-se por construir as imagens de cada um dos vértices desse polígono. Depois, basta unir os pontos imagem, A', B', C', D', E' e F' , obtendo-se o polígono $[A'B'C'D'E'F']$.



PROPRIEDADES DAS ROTAÇÕES

Uma rotação transforma:

- um segmento de reta noutro segmento de reta geometricamente igual ao primeiro;
- um ângulo noutro geometricamente igual;
- uma figura noutra geometricamente igual.

ATIVIDADES

- 1.** Considera um quadrado $[ABCD]$ e seja O o ponto de interseção das suas diagonais.

Determina o transformado do quadrado pela rotação de centro O e amplitude:

1.1 $+90^\circ$

1.2 -180°

1.3 $+45^\circ$

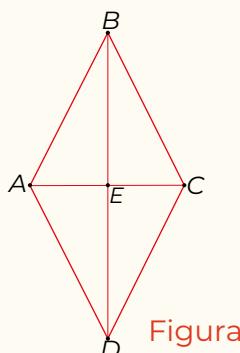


Figura 1

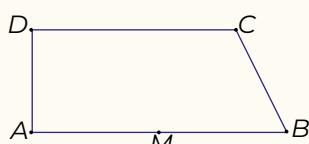


Figura 2

- 2.** Na figura 1, está representado um losango $[ABCD]$, sendo E o ponto de interseção das suas diagonais.

- 2.1** Determina o transformado do losango $[ABCD]$ na rotação de centro E e amplitude -90° .

- 2.2** Determina a imagem do losango $[ABCD]$ na rotação $R_{(C, +180^\circ)}$.

- 2.3** Indica uma rotação de centro E que aplique o losango em si mesmo.

- 3.** Na figura 2, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$, sendo M o ponto médio do lado $[AB]$. Determina o transformado do trapézio na rotação de centro M que aplica B em C .

- 4.** Na figura 3 está representado um octógono regular $[ABCDEFGH]$.

Completa:

4.1 $A \xrightarrow{\quad} \text{-----}$
 $R_{(O, +135^\circ)}$

4.2 $E \xrightarrow{\quad} \text{-----}$
 $R_{(O, -45^\circ)}$

- 4.3** Na rotação de centro O que aplica C em E , a imagem de F é -----

- 4.4** B é imagem de -----, na rotação de centro O , que aplica H em D .

4.5 $E \xrightarrow{\quad} E$
 $R_{(O, ---)}$

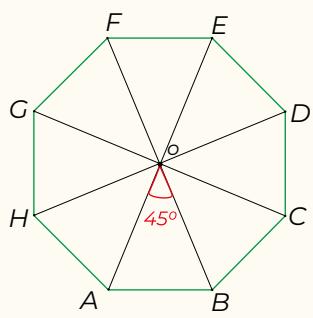
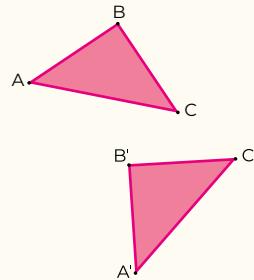


Figura 3



5. Determina o centro e o ângulo de rotação que aplica o triângulo $[ABC]$ no triângulo $[A'B'C']$, da figura ao lado.



ISOMETRIAS DO PLANO. PROPRIEDADES

No estudo das transformações geométricas, nomeadamente translação, rotação e reflexão, vimos que as figuras mantêm a sua forma e tamanho, alterando apenas a sua posição. Por este motivo, também se chamam **isometrias**.

Isometria (*Iso* → igual, *metria* → medida) que significa a mesma medida.

Observa a imagem de cada um dos polígonos, nas seguintes transformações geométricas:

Translação	Rotação	Reflexão
<p>Translação associada ao vetor \vec{u} do triângulo $[ABC]$</p>	<p>Rotação de centro O e amplitude $+135^\circ$ do quadrado $[ABCD]$</p>	<p>Reflexão de eixo r do losango $[EFGH]$</p>

Certamente, verificaste que a translação é a única isometria que conserva a direção e o sentido de qualquer segmento orientado ou semirreta.

COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS

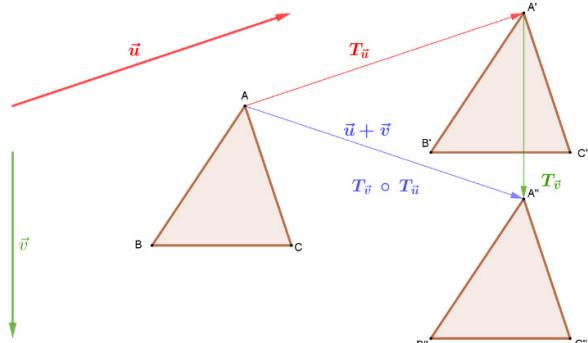
Uma composição de isometrias resulta da aplicação sucessiva de isometrias na mesma figura.

Quando se compõem duas ou mais isometrias, o resultado é ainda uma isometria.

- A composição de duas translações é uma translação associada ao vetor soma dos vetores das translações parcela.

Exemplo:

Determina a imagem do triângulo $[ABC]$ na translação composta $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

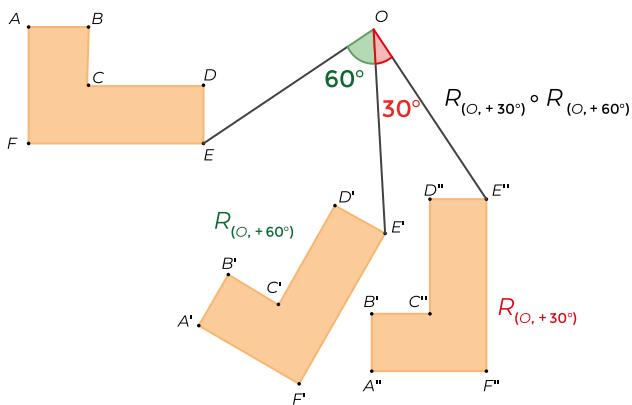


1. A partir do triângulo $[ABC]$, constrói-se a sua imagem na translação associada ao vetor \vec{u} , obtendo-se o triângulo $[A'B'C']$.
2. De seguida, determina-se a imagem do triângulo $[A'B'C']$ na translação associada ao vetor \vec{v} , obtendo-se o triângulo $[A''B''C'']$.
3. O triângulo $[A''B''C'']$ é a imagem do triângulo $[ABC]$ na translação composta $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$, em que o vetor associado a essa translação é igual à soma do vetor \vec{u} com o vetor \vec{v} .

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}[ABC] = T_{\vec{u} + \vec{v}}[ABC]$$

- A composição de duas rotações com o mesmo centro é uma rotação com o mesmo centro e ângulo de amplitude igual à soma das amplitudes dos ângulos das rotações parcela.

Determina a imagem do polígono $[ABCDEF]$ na rotação composta $R_{(O, +30^\circ)} \circ R_{(O, +60^\circ)}$.



1. A partir do polígono $[ABCDEF]$, constrói-se a sua imagem na rotação $R_{(O, +60^\circ)}$, obtendo-se o polígono $[A'B'C'D'E'F']$.
2. De seguida, determina-se a imagem do polígono $[A'B'C'D'E'F']$ na rotação $R_{(O, +30^\circ)}$, obtendo-se o triângulo $[A''B''C''D''E''F'']$.
3. O polígono $[A''B''C''D''E''F'']$ é a imagem do polígono $[ABCDEF]$ na rotação composta $R_{(O, +30^\circ)} \circ R_{(O, +60^\circ)}$, em que o centro dessa rotação é o ponto O e o ângulo de rotação é igual à soma das amplitudes dos ângulos dados.

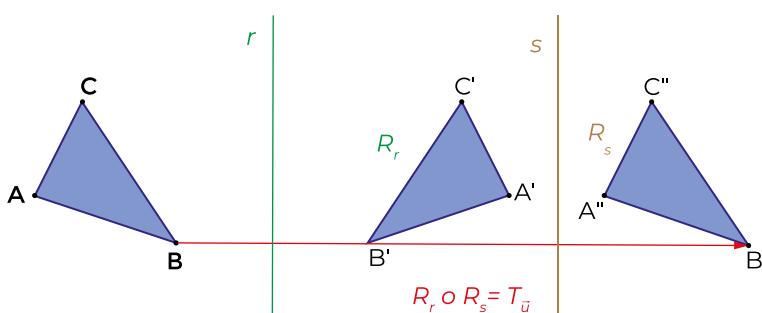
$$R_{(O, +30^\circ)} \circ R_{(O, +60^\circ)}[ABCDEF] = R_{(O, +90^\circ)}[ABCDEF]$$

- A composição de duas reflexões axiais não é uma reflexão axial, sendo uma translação no caso em que os eixos de reflexão são paralelos (exemplo 1) e uma rotação no caso em que os eixos se intersejam num ponto (exemplo 2).



Exemplo 1

Determina a imagem do triângulo $[ABC]$ na reflexão composta $R_s \circ R_r$.



1. A partir do triângulo $[ABC]$, constrói-se a sua imagem na reflexão de eixo r , obtendo-se o triângulo $[A'B'C']$.
2. De seguida, determina-se a imagem do triângulo $[A'B'C']$ na reflexão de eixo s , obtendo-se o triângulo $[A''B''C'']$.
3. O triângulo $[A''B''C'']$ é a imagem do triângulo $[ABC]$ na reflexão composta $R_s \circ R_r$, sendo esta, agora, uma translação associada ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{BB''}$.

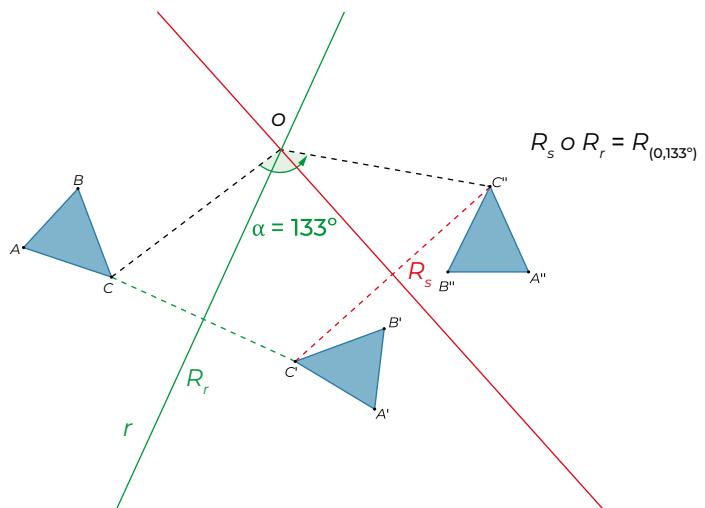
$$R_s \circ R_r [ABC] = T_{\vec{u}} [ABC]$$

Exemplo 2

Determina a imagem do triângulo $[ABC]$ na reflexão composta $R_s \circ R_r$, sendo os dois eixos r e s concorrentes num ponto O .

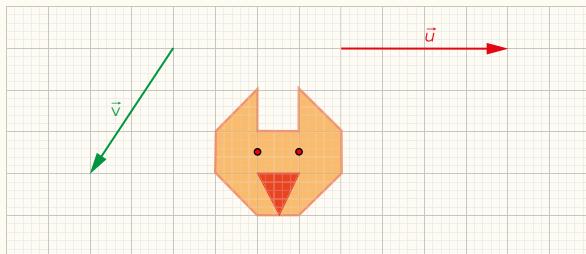
1. A partir do triângulo $[ABC]$, constrói-se a sua imagem na reflexão de eixo r , obtendo-se o triângulo $[A'B'C']$.
2. De seguida, determina-se a imagem do triângulo $[A'B'C']$ na reflexão de eixo s , obtendo-se o triângulo $[A''B''C'']$.
3. O triângulo $[A''B''C'']$ é a imagem do triângulo $[ABC]$ na reflexão composta $R_s \circ R_r$, sendo esta, agora, uma rotação de centro O e amplitude do ângulo COC'' .

$$\text{Neste caso, } R_s \circ R_r [ABC] = R_{(O, +130^\circ)} [ABC].$$

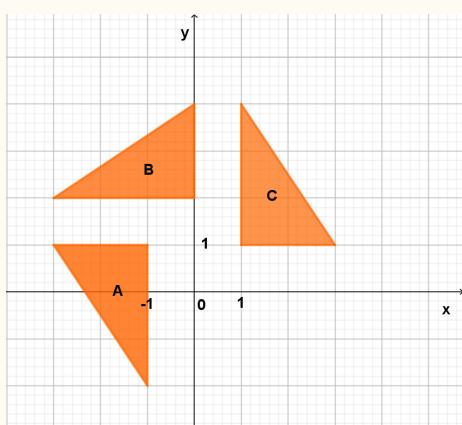


ATIVIDADES

- 1.** Desenha a figura seguinte no teu caderno e determina o seu transformado na translação $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$.

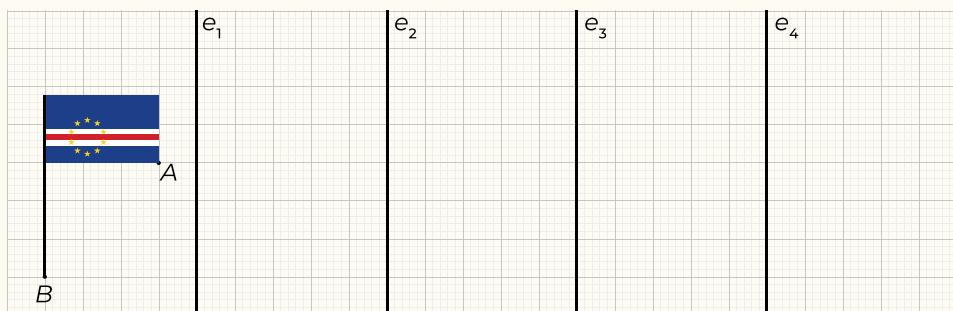


- 2.** Observa a figura ao lado, onde num referencial cartesiano estão representados três triângulos A , B e C .



- 2.1** O triângulo B é o transformado do triângulo A por uma rotação. Qual é o centro e a amplitude do ângulo de rotação?
- 2.2** O triângulo C é o transformado do triângulo B por uma rotação. Qual é o centro e a amplitude do ângulo de rotação?
- 2.3** Descreve a única rotação que transforma o triângulo A no triângulo C .
- 2.4** Escreve as coordenadas dos vértices do triângulo D , que é obtido do triângulo C , numa rotação de centro $(0, 1)$ e amplitude -90° .

- 3.** Na figura seguinte, está representada a bandeira de Cabo Verde e nela dois pontos A e B .



- 3.1** Desenha no teu caderno:

- 3.1.1** a bandeira \mathbf{B}_1 , imagem da bandeira \mathbf{B} pela reflexão de eixo e_1 ;
- 3.1.2** a bandeira \mathbf{B}_2 , imagem da bandeira \mathbf{B}_1 pela reflexão de eixo e_2 ;
- 3.1.3** a bandeira \mathbf{B}_3 , imagem da bandeira \mathbf{B}_2 pela reflexão de eixo e_3 ;
- 3.1.4** a bandeira \mathbf{B}_4 , imagem da bandeira \mathbf{B}_3 pela reflexão de eixo e_4 .



3.2 Descreve a translação que transforma:

3.2.1 B em B_2 **3.2.2** B_1 em B_3 **3.2.3** B_2 em B_4

3.3 Do que observaste em 3.2, formula uma conjectura para descrever a transformação geométrica que resulta de duas reflexões consecutivas de eixos paralelos.

4. Considera os pontos $A \rightarrow (1, 2)$, $B \rightarrow (6, 5)$ e $C \rightarrow (4, -1)$.

4.1 Representa, num referencial cartesiano, os pontos A , B e C e constrói o triângulo $[ABC]$.

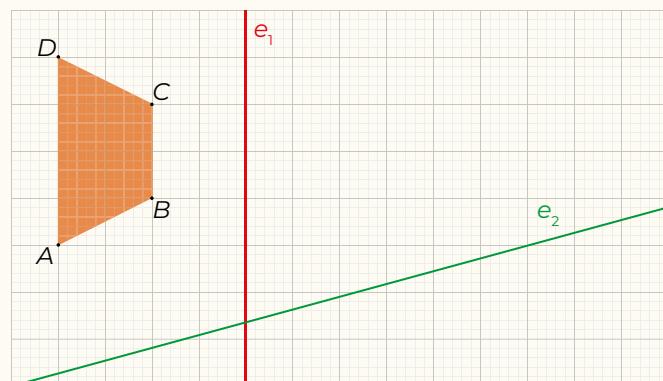
4.2 Traça uma reta e paralela ao segmento de reta $[AC]$.

4.3 Determina a imagem do triângulo $[ABC]$ pela $T_{\overline{AC}} \circ R_e$.

5. Considera a figura ao lado:

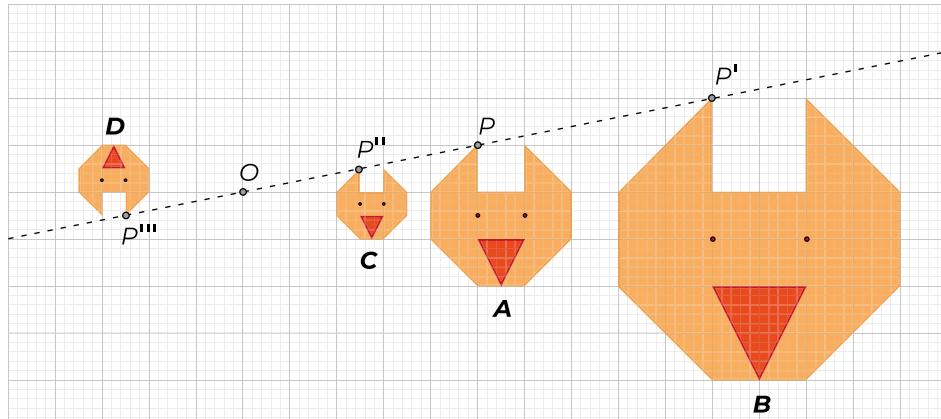
5.1 Determina $[A''B''C''D'']$ o transformado do trapézio $[ABCD]$ por meio de $R_{e_2} \circ R_{e_1}$.

5.2 Carateriza a isometria que aplica $[ABCD]$ em $[A''B''C''D'']$.



HOMOTETIAS

Observa a figura ao lado.



Repara que:

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \times \overrightarrow{OP}, \text{ onde } P' = P + 2 \times \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OP''} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{OP}, \text{ onde } P'' = P + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OP'''} = -\frac{1}{2} \times \overrightarrow{OP}, \text{ onde } P''' = P + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \overrightarrow{OP}$$

À aplicação que transforma o boneco A nos bonecos B, C e D dá-se o nome de **homotetia de centro O e razão r** e representa-se por $H_{(O, r)}$.



Homotetia de centro O e razão r é uma aplicação que a cada ponto P do plano faz corresponder um ponto P' homotético de P , tal que:

$$P' = O + r \times \overrightarrow{OP} \text{ e } \overrightarrow{OP'} = r \times \overrightarrow{OP}$$

Nota: A homotetia de razão zero (ou razão nula) transforma cada ponto no centro de homotetia.

De acordo com a definição de homotetia, podemos verificar que:

- a imagem do centro O é o próprio O ;
- um ponto P , a sua imagem P' e o centro O estão sobre a mesma reta e $\overline{OP'} = |r| \overline{OP}$.

Se $|r| > 1$, a imagem da figura dada é uma **ampliação**;

Se $|r| < 1$, a imagem da figura dada é uma **redução**;

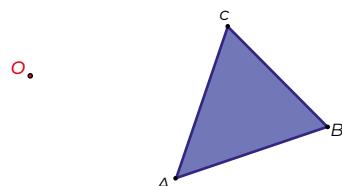
Se $|r| = 1$, a imagem da figura dada é uma **isometria**.

No caso de a razão ser positiva, a homotetia diz-se positiva e diz-se negativa se a razão for negativa.

Voltando à figura representada inicialmente, verificamos ainda que o boneco B é uma ampliação do boneco A , enquanto que os bonecos C e D são reduções do boneco A .

Exemplo

Considera o triângulo $[ABC]$ representado na figura e um ponto O . Determina o seu transformado na homotetia de centro O e razão 2. A figura obtida é uma redução ou uma ampliação? Justifica.





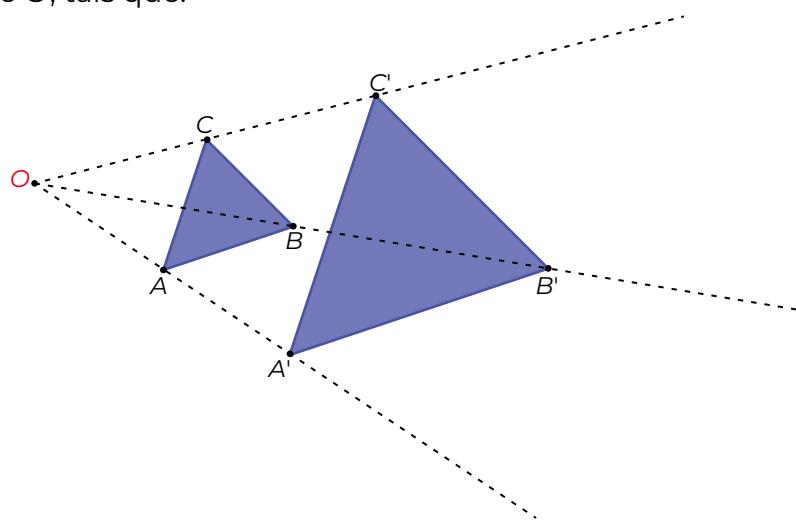
Resolução

- Pelo ponto O , traçam-se três semirretas com origem nesse ponto e que passem por cada um dos vértices do triângulo.
- Assinalam-se os pontos A' , B' e C' , tais que:

$$\overline{OA'} = 2\overline{OA}$$

$$\overline{OB'} = 2\overline{OB}$$

$$\overline{OC'} = 2\overline{OC}$$



- Unem-se os pontos A' , B' e C' :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = 2$$

2 é a razão da homotetia.

A figura obtida é uma ampliação.

Podemos verificar que:

$$\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$$

$$\overline{B'C'} = 2\overline{BC}$$

$$\overline{A'C'} = 2\overline{AC} ,$$

ou seja, os lados do triângulo $[ABC]$ e do seu homotético $[A'B'C']$ são diretamente proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = 2$$

Os comprimentos dos lados de um triângulo e do seu homotético são diretamente proporcionais.



A partir deste exemplo, podemos verificar ainda que numa homotetia:

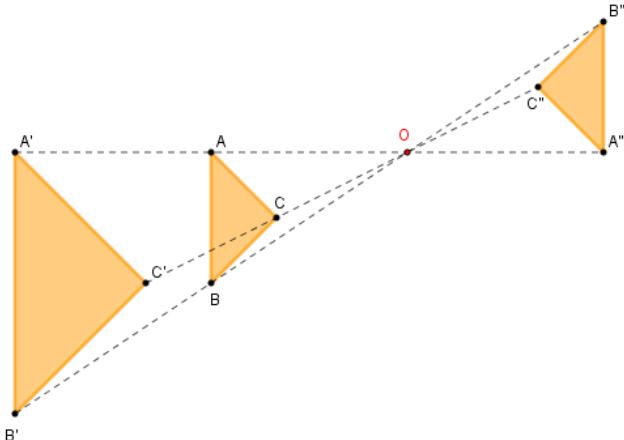
- um segmento de reta e o seu homotético são paralelos e os seus comprimentos são proporcionais;
- uma reta é transformada noutra reta paralela;
- um ângulo é transformado noutro com a mesma amplitude.

Composição de homotetias

Considera o triângulo $[ABC]$ e a homotetia H_1 de centro O e razão $-\frac{1}{2}$, e a homotetia H_2 de centro O e razão 2. Determina o transformado $[A''B''C'']$ do triângulo $[ABC]$ na aplicação $H_1 \circ H_2$.

Resolução

A aplicação



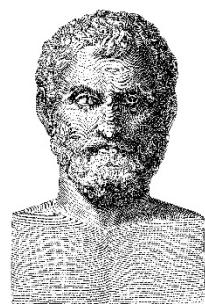
$H_1 \circ H_2$ é uma homotetia de razão -1 , pois,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 2 \text{ e } \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{2}, \text{ então } \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

e os ângulos do triângulo inicial $[ABC]$ e os correspondentes do seu homotético final $[A''B''C'']$ são geometricamente iguais.

A composição de homotetias é uma homotetia cuja razão é o produto das razões.

TEOREMA DE THALES



Thales de Mileto (640-546 a.C.), matemático, professor, astrónomo e filósofo grego, ficou conhecido como um dos sete sábios da antiga Grécia. Por muitos considerado o pai do raciocínio dedutivo, introduziu o estudo da Geometria na Grécia. Supõe-se que viveu algum tempo no Egito onde, provavelmente, aprendeu geometria e na Babilónia onde entrou em contacto com tabelas e instrumentos astronómicos. Ao matemático Thales, associam-se as primeiras descobertas matemáticas. Acredita-se que foi o primeiro geómetra a provar as suas teorias por meio de demonstrações feitas



passo a passo. Atribui-se a Thales o cálculo da pirâmide de Quéops, recorrendo à semelhança de triângulos e à medição de distâncias dos navios no mar até à praia, entre muitos resultados geométricos importantes.

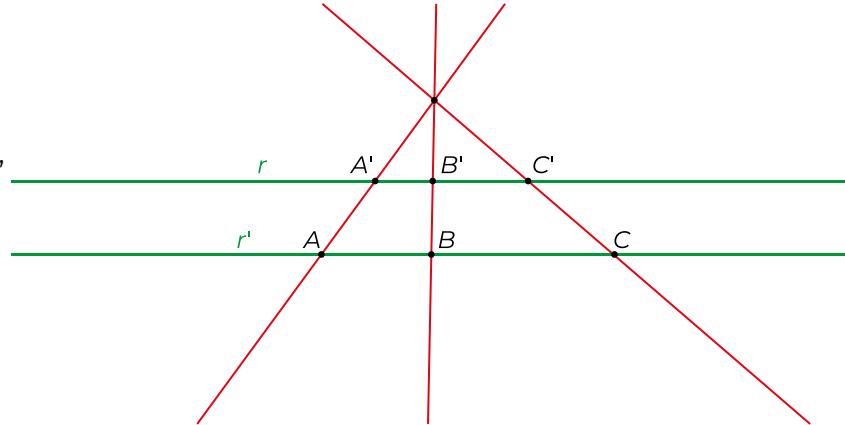


Na figura $r \parallel r'$:

Da homotetia de centro O , que aplica A em A' , B em B' e C em C' , r em r' , conclui-se que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dots$$

ou seja:



Teorema de Thales: Um feixe de retas concorrentes determina, em duas paralelas, segmentos de reta correspondentes diretamente proporcionais.

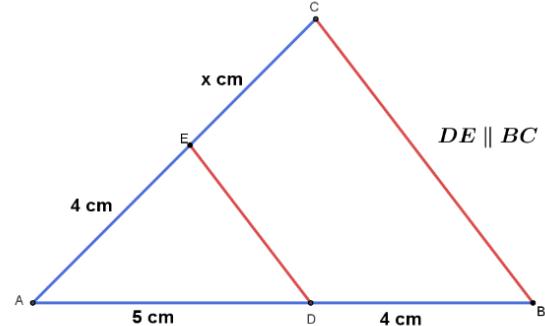


Exemplo

Aplica o teorema de Thales para determinar a medida, em cm, do comprimento do segmento x .

Resolução

Como $DE \parallel BC$, pelo teorema de Thales, temos:



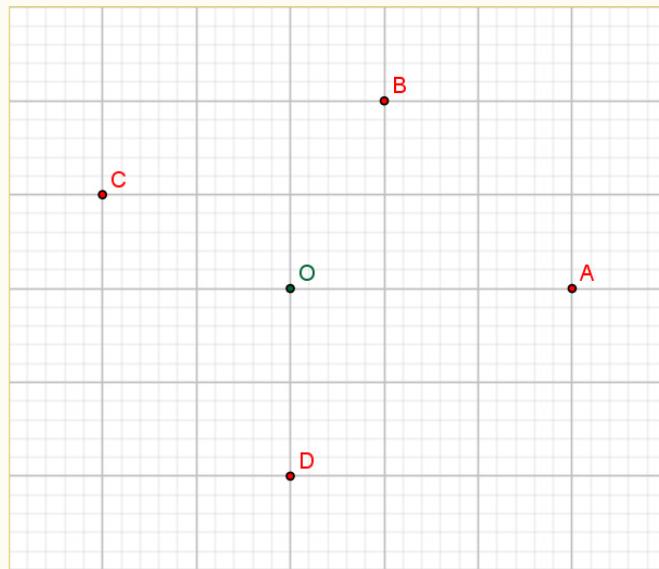
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{\overline{AC}}{4} \Leftrightarrow 5\overline{AC} = 36 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{36}{5} \Leftrightarrow \overline{AC} = 7,2 \text{ cm}$$

$$x = \overline{AC} - 4 = 7,2 - 4 = 3,2 \text{ cm}$$

ATIVIDADES

- 1.** Considera a homotetia de centro O e razão 2 e os pontos A, B, C e D .



- 1.1** Determina geometricamente os pontos A' , B' , C' e D' homotéticos, respetivamente de A , B , C e D .

1.2 Completa:

$$\text{1.2.1 } \overrightarrow{OA'} = \dots \overrightarrow{OA} \quad \text{1.2.2 } \dots = 2\overrightarrow{OB} \quad \text{1.2.3 } \overrightarrow{OC'} = 2\dots$$

- 2.** Representa, num sistema de eixos coordenados, os pontos A' ($3, 1$) e C' ($1, 1$).

Na homotetia de centro C e razão -2, A' é o transformado de A .

- 2.1** Determina, geometricamente, o ponto A e indica as suas coordenadas.

- 2.2** Obtém, geometricamente, os transformados dos pontos B ($0, 2$) e D ($2, 2$) na mesma homotetia.

- 2.3** Determina as coordenadas do ponto A'' na homotetia $H(C, -2)$.



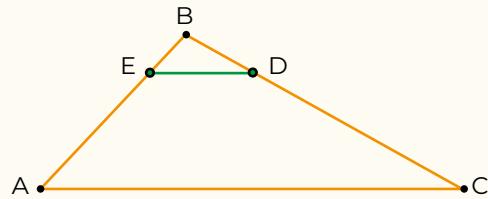
3. Considera a figura ao lado, em que:

[ABC] é um triângulo;

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm}; \overline{BC} = 6 \text{ cm}; \overline{AC} = 8 \text{ cm};$$

$$ED \parallel AC$$

$$\overline{BD} = 1,5 \text{ cm}$$



3.1 Constrói o homotético do triângulo [ABC] na homotetia $H_{(B; -\frac{1}{2})}$.

3.2 Determina $\overline{EA} = \overline{ED}$.

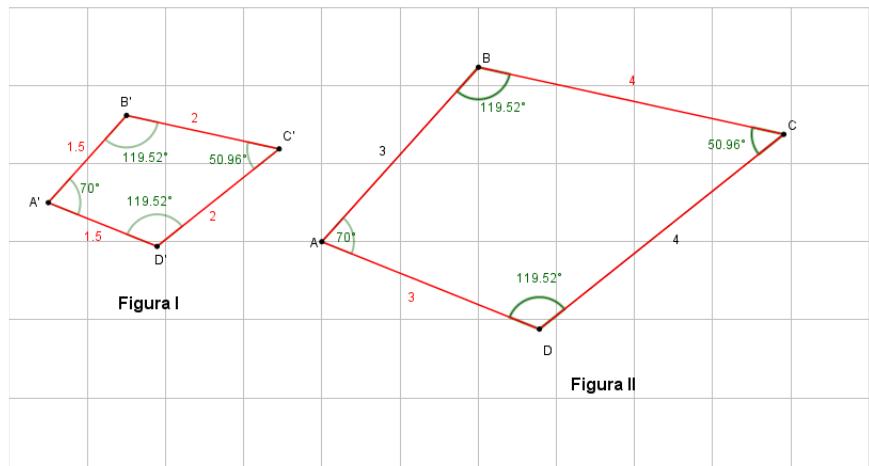
SEMELHANÇAS

Semelhança é uma transformação geométrica que conserva a amplitude dos ângulos e a proporcionalidade dos segmentos.

Nas figuras abaixo, podemos observar dois polígonos semelhantes.

A **figura I** é uma redução da **figura II**, ou a **figura II** é uma ampliação da **figura I**, pois os ângulos correspondentes têm a mesma amplitude e os lados correspondentes são proporcionais. Por isso, são semelhantes.

As figuras I e II têm a mesma forma.



Uma figura F diz-se semelhante a uma figura F' se e só se existe uma semelhança que transforma F em F' . Simbolicamente, **F semelhante a F'** escreve-se $F \sim F'$

Chama-se **razão de semelhança** ao quociente entre os comprimentos do segmento de reta imagem e do segmento de reta original correspondentes.

Exemplo

Relativamente às figuras I e II:

A ampliação é uma semelhança de razão 2 ($r = \frac{3}{1,5}$);

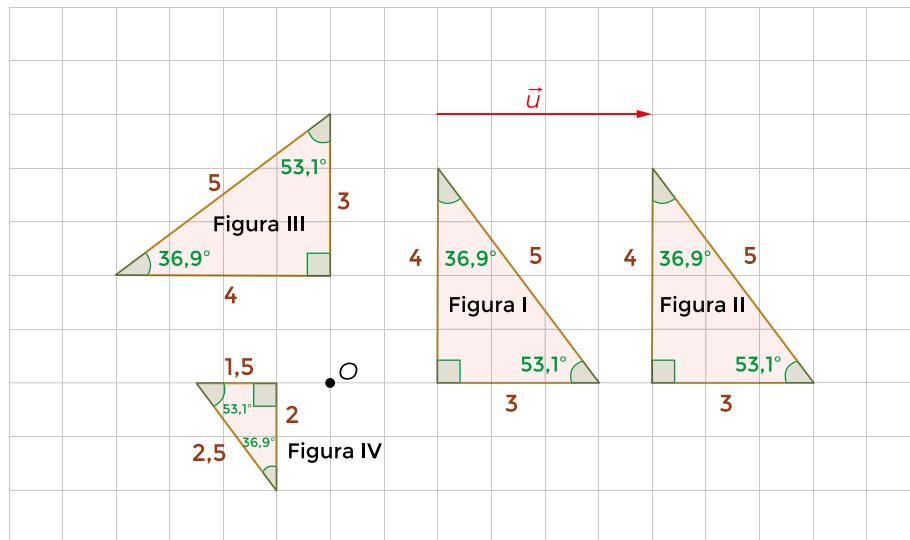
A redução é uma semelhança de razão $\frac{1}{2}$ ($r = \frac{1,5}{3}$).

Observa que:

- No estudo das isometrias, verificamos que a translação, a rotação e a reflexão conservam as amplitudes dos ângulos e o comprimento dos segmentos. Então, essas transformações geométricas, a translação, a rotação e a reflexão são semelhanças.
- Uma homotetia também é uma semelhança porque conserva a amplitude dos ângulos e transforma segmentos de reta outros que lhes são proporcionais.

Exemplos de semelhanças

Considera as figuras I, II, III e IV e o vetor \vec{u} .



Repara que:

- todas essas figuras são semelhantes;
- a figura II é imagem da figura I na $T_{\vec{u}}$;
- a figura III é imagem da figura I na $R_{(O, +90)}$;
- a figura IV é imagem da figura I na $H_{(O, -\frac{1}{2})}$.



Composição de uma isometria com uma homotetia

Exemplo

Considera um quadrado $[EFGH]$ e determina o seu transformado na aplicação $T_{\overrightarrow{EG}} \circ H_{(H, -\frac{1}{2})}$.

Resolução

Começa-se por desenhar o quadrado $[EFGH]$, e depois determina-se a $[E'F'G'H']$ que é imagem do quadrado referido na $H_{(H, -\frac{1}{2})}$.

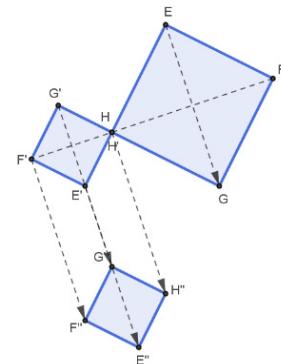
De seguida, aplica-se $T_{\overrightarrow{EG}}$ ao quadrado $[E'F'G'H']$, obtendo-se o quadrado $[E''F''G''H'']$ imagem de $[EFGH]$ na aplicação composta

$T_{\overrightarrow{EG}} \circ H_{(H, -\frac{1}{2})}$.

Repara que:

A aplicação $T_{\overrightarrow{EG}} \circ H_{(H, -\frac{1}{2})}$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{2}$.

Então, podemos concluir que **a composta de uma isometria com uma homotetia é uma semelhança**.



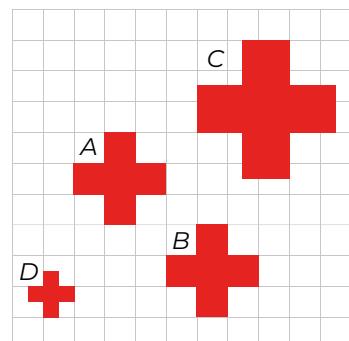
Classificação das semelhanças

Observando as figuras ao lado, podemos verificar que:

- a figura **C** é uma ampliação da figura **A** ($r = 1,5$);
- a figura **D** é uma redução da figura **A** ($r = 0,5$);
- a figura **B** é uma isometria da figura **A** ($r = 1$).

Isto permite-nos classificar as semelhanças em:

- **Ampliações, se $r > 1$**
- **Reduções, se $r < 1$**
- **Isometrias, se $r = 1$**



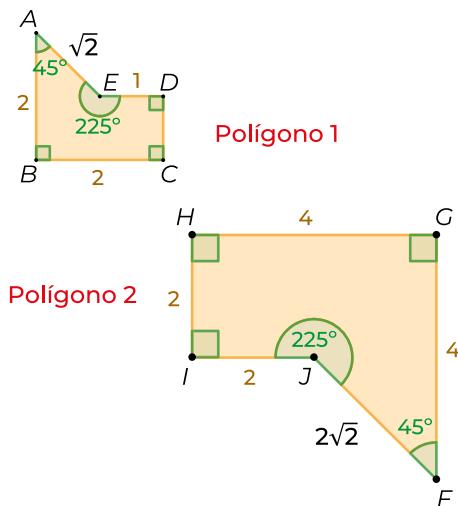
POLÍGONOS SEMELHANTES

Nos polígonos (1 e 2), ao lado, verifica-se que:

$$\hat{A} = \hat{F}; \hat{B} = \hat{G}; \hat{C} = \hat{H}; \hat{D} = \hat{I}; \hat{E} = \hat{J}$$

$$\text{e } \frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{AE}} = 2$$

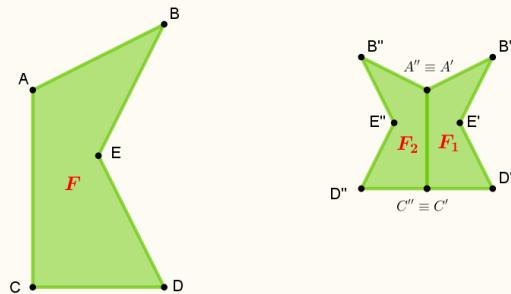
Então, dizemos que os dois polígonos são semelhantes.



Dois polígonos são **semelhantes** se os ângulos correspondentes forem geometricamente iguais e os comprimentos dos lados correspondentes forem diretamente proporcionais.

ATIVIDADES

- Observa a figura ao lado e completa o quadro que se segue, utilizando régua e transferidor:



Caracterização da aplicação que transforma		Medidas dos comprimentos dos lados e amplitudes dos ângulos das figuras		
F em F_1	F_1 em F_2	F	F_1	F_2
		$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$	$\overline{A''B''} =$
		$\overline{BC} =$	$\overline{B'C'} =$	$\overline{B''C''} =$
		$\overline{CD} =$	$\overline{C'D'} =$	$\overline{C''D''} =$
		$\overline{DE} =$	$\overline{D'E'} =$	$\overline{D''E''} =$
		$\overline{AE} =$	$\overline{A'E'} =$	$\overline{A''E''} =$
		$\hat{A} =$	$\hat{A}' =$	$\hat{A}'' =$
		$\hat{B} =$	$\hat{B}' =$	$\hat{B}'' =$
		$\hat{C} =$	$\hat{C}' =$	$\hat{C}'' =$
		$\hat{D} =$	$\hat{D}' =$	$\hat{D}'' =$
		$\hat{E} =$	$\hat{E}' =$	$\hat{E}'' =$



2. Verifica, usando os resultados do quadro anterior, que a composta de uma isometria com uma homotetia é uma semelhança e indica a sua razão.

3. Constrói, para cada caso, um triângulo $[PQR]$ semelhante ao triângulo $[MNO]$, sabendo que:

3.1 $\hat{M} = 40^\circ$; $\hat{N} = 60^\circ$; $\overline{MN} = 8\text{ cm}$ e a razão de semelhança $\frac{1}{2}$;

3.2 $\hat{M} = 90^\circ$; $\hat{N} = 30^\circ$; $\overline{MO} = 1\text{ cm}$ e a razão de semelhança 3;

3.3 $\hat{M} = 60^\circ$; $\overline{MN} = 1,5\text{ cm}$; $\overline{MO} = 2\text{ cm}$ e a razão de semelhança 1,5;

3.4 $\overline{MN} = 3\text{ cm}$; $\overline{NO} = 4\text{ cm}$; $\overline{MO} = 5\text{ cm}$ e a razão de semelhança 1.

4. Comenta as seguintes afirmações:

4.1 Um triângulo retângulo não pode ser semelhante a um triângulo obtusângulo;

4.2 Um triângulo equilátero não pode ser semelhante a um triângulo retângulo;

4.3 Como qualquer retângulo tem quatro ângulos retos, é semelhante a um quadrado.

5. Observa a figura ao lado.

5.1 Escolhe figuras semelhantes.

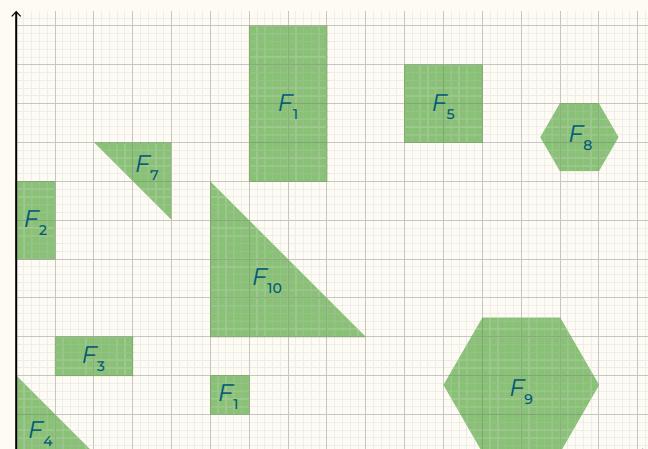
5.2 Carateriza uma semelhança que transforma F_9 em F_8 .

5.3 Justifica que F_1 não é semelhante a F_3 .

5.4 Indica as coordenadas do centro de homotetia que te permite obter F_1 a partir de F_2 .

5.5 Carateriza uma semelhança que transforma F_7 em F_4 .

5.6 Carateriza uma semelhança que transforma F_4 em F_{10} .



SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

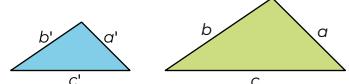
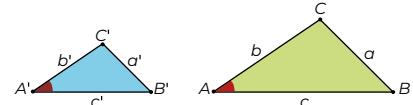
Vamos estudar os casos de semelhança de triângulos. Dado o paralelismo que existe entre o estudo da semelhança de triângulos e o estudo da congruência de triângulos, começamos recordando os casos de congruência de triângulos.

Congruência de triângulos

CRITÉRIO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	Dois triângulos são congruentes se e só se os lados correspondentes forem congruentes.	Dois triângulos são congruentes se tiverem dois lados correspondentes congruentes e o ângulo por eles formado também congruentes.	Dois triângulos são congruentes se tiverem um lado correspondente congruente e os dois ângulos adjacentes a esse lado também congruentes.
<i>LLL</i>			

Nos casos de semelhanças de triângulos, mantém-se a congruência dos ângulos e os lados que seriam congruentes passam a ser proporcionais.

Semelhança de triângulos

CRITÉRIO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro.	Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados são geometricamente iguais.	Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos geometricamente iguais.
$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$			$\hat{A}' = \hat{A}; \hat{B}' = \hat{B}$

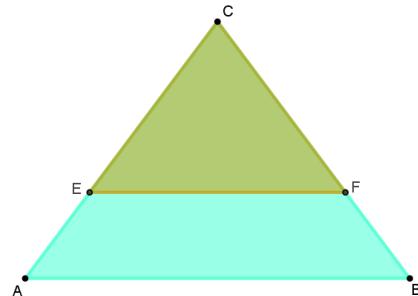


Triângulos em posição de Thales

Na figura ao lado, $[AB] \parallel [EF]$.

Os triângulos $[ABC]$ e $[EFC]$ estão em posição de Thales porque:

- têm um vértice em comum;
- os lados opostos a este vértice são paralelos;
- e os outros dois lados estão sobre a mesma reta.



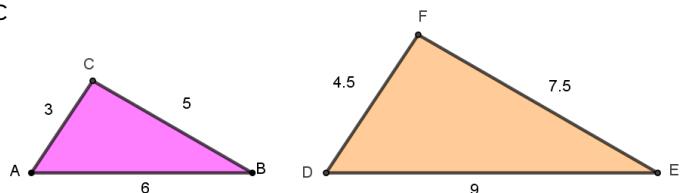
Nota que os dois triângulos são semelhantes.

Se traçarmos uma paralela a qualquer um dos lados de um triângulo, obtemos triângulos em posição de Thales, logo, **semelhantes**.

Exemplos

1. Observa os triângulos abaixo. Os números representam as medidas dos segmentos a que estão associados.

- 1.1 Mostra que os triângulos são semelhantes e indica a razão de semelhança que permite construir um a partir do outro.



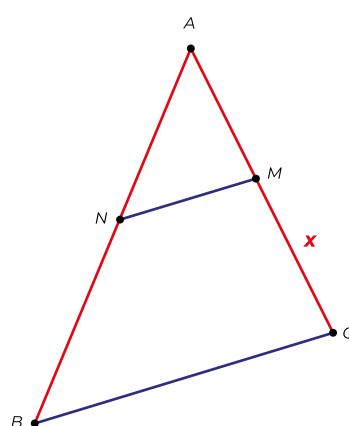
- 1.2 Escreve a relação entre os ângulos correspondentes dos triângulos.

2. Na figura ao lado, sabe-se que:

$$[MN] \parallel [BC] \quad \overline{AM} = 6 \text{ cm}; \quad \overline{NB} = 10 \text{ cm} \text{ e } \overline{AN} = 8 \text{ cm}$$

- 2.1 Justifica $\Delta[ABC] \sim \Delta[ANM]$.

- 2.2 Calcula x .



Resolução

1.1 Para verificarmos que os triângulos são semelhantes, teremos de ver se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

Para isso, escrevemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5}$$

Como,

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes.

A razão de semelhança é $r = \frac{2}{3}$.

Se considerássemos uma ampliação, a razão de semelhança seria $r = 1,5$.

1.2 Em triângulos semelhantes, a lados correspondentes opõem-se ângulos iguais.

Logo, $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$.

2.1 Os triângulos são semelhantes porque são triângulos em posição de Thales.

$$\text{2.2 } \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$$

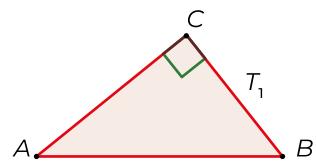
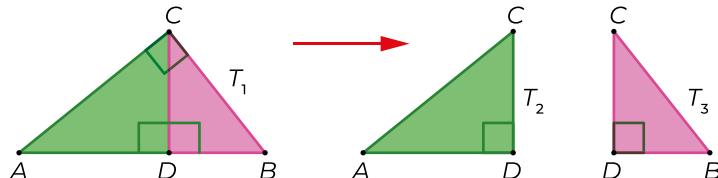
$$\frac{10+8}{8} = \frac{\overline{AC}}{6} \Leftrightarrow \frac{18}{8} = \frac{\overline{AC}}{6} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{18 \times 6}{8} \Leftrightarrow \overline{AC} = 13,5 \text{ cm}$$

Logo, $x = \overline{AC} - \overline{AM} = 13,5 - 5 = 8,5 \text{ cm}$.

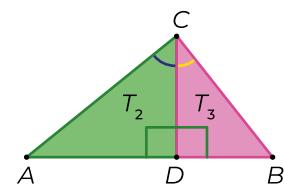


Decomposição de um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa

Na figura ao lado, o triângulo T_1 , retângulo em C foi dividido em dois triângulos T_2 e T_3 pela altura relativa à hipotenusa.



- Os triângulos T_1 e T_2 são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos.
- Os dois triângulos têm um ângulo reto e o ângulo de vértice A é comum.
- Os triângulos T_1 e T_3 são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos.
- Os dois triângulos têm um ângulo reto e o ângulo de vértice B é comum.
- Os triângulos T_2 e T_3 são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos.
- Os dois triângulos têm um ângulo reto, por exemplo, $D\hat{A}C = D\hat{C}B$, porque são ângulos agudos de lados perpendiculares.



Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos semelhantes entre si e cada um deles semelhante ao triângulo dado.



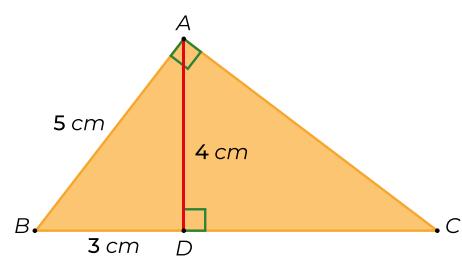
Exemplo

1. A figura ao lado representa um triângulo $[ABC]$, retângulo em A e $[AD]$ é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}; \overline{BD} = 3 \text{ cm}; \overline{AD} = 4 \text{ cm}$$

- 1.1 Qual é a razão da semelhança que transforma o triângulo $[ABD]$ no triângulo $[ABC]$?

- 1.2 Determina \overline{CD} e \overline{AC} .



Resolução

1.1 Como os triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$ são semelhantes (propriedade referida anteriormente), a razão de semelhança é dada pelo quociente de dois lados correspondentes.

Assim:

$$r = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{5}{3}$$

1.2 $\overline{CD} = \overline{BC} - 3$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{5} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3 \times \overline{BC} = 25 \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{25}{3}$$

Como

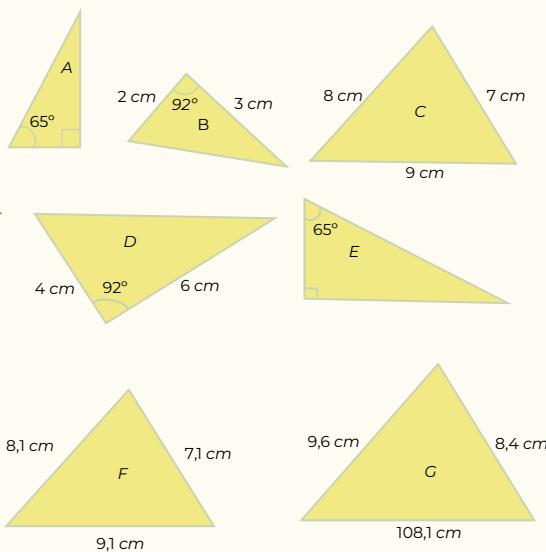
$$\overline{CD} = \overline{BC} - 3, \text{ temos que}$$

$$\overline{CD} = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{4} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3 \times \overline{AC} = 20 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

ATIVIDADES

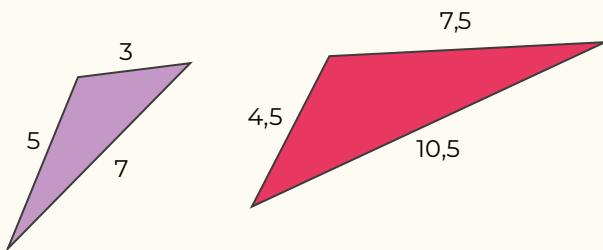
- 1.** Na figura ao lado estão representados vários triângulos. Indica três pares de triângulos semelhantes e, para cada par indicado, enumera o critério de semelhança que justifica a tua resposta.



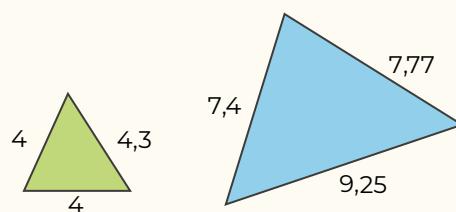


2. Diz, justificando, se são ou não semelhantes os seguintes pares de triângulos (as medidas estão na mesma unidade).

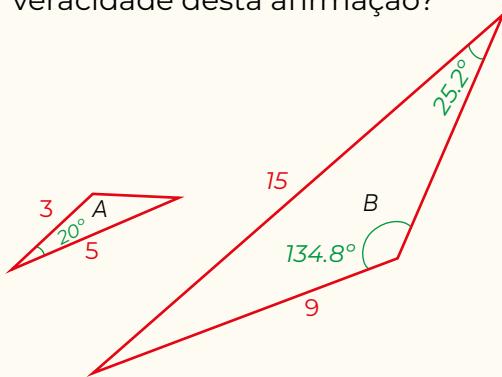
2.1



2.2

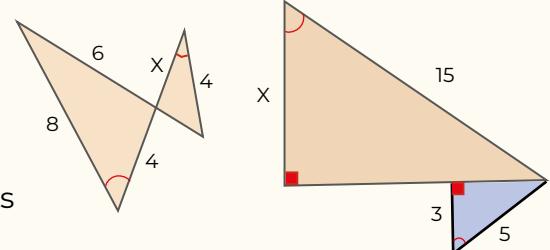


3. Considera a afirmação: "Os triângulos A e B são semelhantes." Qual é o critério de semelhança de triângulos que sustenta a veracidade desta afirmação?



4. Observa com atenção os pares de triângulos representados ao lado:

- 4.1 Justifica que em ambas as situações os triângulos são semelhantes.



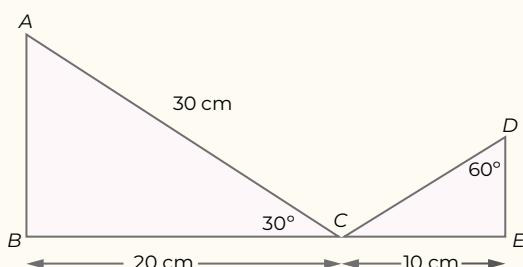
- 4.2 Determina o valor de x em cada situação.

5. Observa a figura ao lado.

- 5.1 Calcula $B\hat{A}C$ e $E\hat{C}D$.

- 5.2 O triângulo $[ABC]$ é semelhante ao triângulo $[CDE]$? Justifica.

- 5.3 Calcula \overline{CD} .

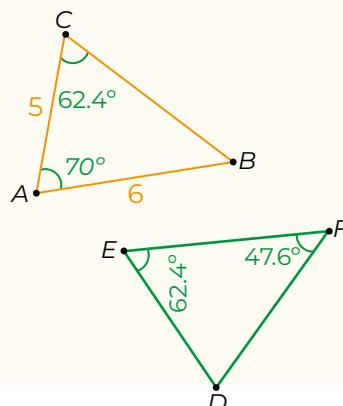


6. Observa os seguintes triângulos.

- 6.1 Justifica que os triângulos são semelhantes.

- 6.2 Indica os pares de lados correspondentes.

- 6.3 Calcula o valor de \overline{BC} .



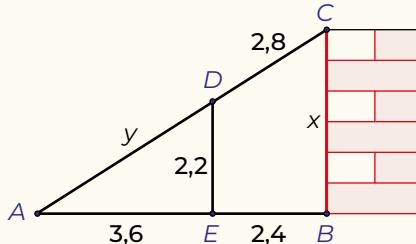
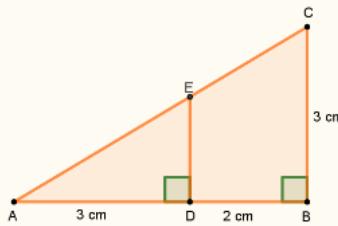
7. Observa a figura seguinte:

7.1 Justifica que $\Delta[ABC] \sim \Delta[ADE]$.

7.2 \overline{DE} é igual a:

(A) 18 cm (B) 4,5 cm

(C) 3 cm (D) 1,8 cm



8. Ao chegar a casa, a Maria observou as escadas da sua casa e reparou que: a escada [AC] está apoiada num muro e no chão, a 6 metros do muro. Uma estaca [ED] de 2,2 metros foi colocada na vertical (paralela ao muro), a 2,4 metros do muro, para reforçar a segurança da escada.

8.1 Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes.

8.2 Determina a altura do muro (distância \overline{BC}), com aproximação ao centímetro.

8.3 Indica a razão de semelhança entre os dois triângulos, considerando uma ampliação e determina o valor de y .



9. Para determinar a altura da torre reproduzida na figura ao lado, foi medido o comprimento da sombra e registado o valor de 7,3 metros. À mesma hora, uma vara com 2 metros, colocada na vertical, projetava uma sombra de 2,6 metros, aproximadamente. Calcula a altura da torre. Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

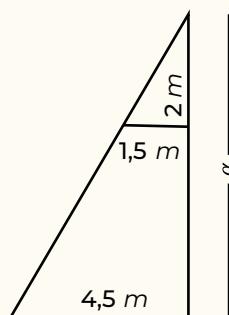
10. Para a atividade de prevenção e vigilância numa das praias de Cabo Verde, foi construída uma torre de vigia. Na Figura 1, podes ver uma fotografia dessa torre. Para determinar a altura da torre, imaginaram-se dois triângulos retângulos, semelhantes, representados na Figura 2.



Figura 1

Figura 2

A figura ao lado é um esquema desses dois triângulos. O esquema não está desenhado à escala. Qual é a altura da torre de vigia?



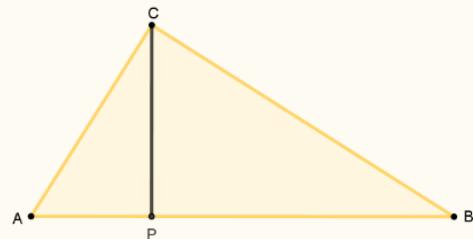
Apresenta todos os cálculos que efetuares e, na resposta, indica a unidade de comprimento.



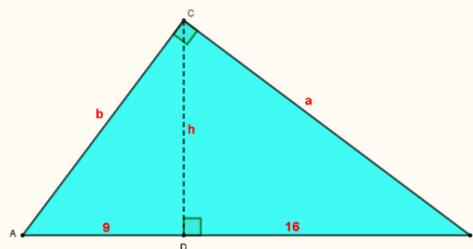
11. Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em C , em que $[CP]$ é a altura relativa à hipotenusa.

11.1 Prova que os triângulos $[ACP]$ e $[CBP]$ são semelhantes e escreve as relações entre os seus lados.

11.2 Sendo $\hat{B} = 15^\circ$, indica a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo $[ACP]$.



12. Na figura ao lado, está representado um triângulo $[ABC]$, retângulo em C , tal que $[CD]$ é a altura relativa à hipotenusa.



Sabe-se que:

$$\overline{AD} = 9 \text{ cm}; \quad \overline{BD} = 16 \text{ cm}; \quad \overline{BC} = a$$

$$\overline{AC} = b; \quad \overline{AB} = c; \quad \overline{CD} = h$$

12.1 Copia e completa, utilizando as letras a , b ou h :

a) $\dots = \frac{9}{\dots} = \frac{\dots}{16}$ b) $\dots = \frac{\dots}{25} = \frac{16}{\dots}$ c) $\dots = \frac{9}{25} = \frac{\dots}{\dots}$

12.2 Determina:

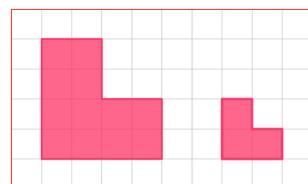
a) h b) a c) b

12.3 Verifica que $c^2 = a^2 + b^2$.

ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS

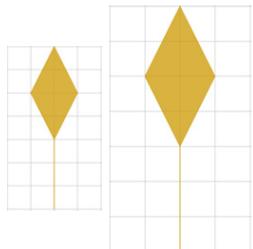
CONSTRUÇÃO DE REGIÕES POLIGONAIS SEMELHANTES

Para construir uma figura semelhante a uma figura dada, podemos proceder de diferentes formas:



- a mesma quadrícula;

As quadrículas têm as mesmas dimensões. Para construir uma figura semelhante basta aumentar ou reduzir proporcionalmente as dimensões da figura original.

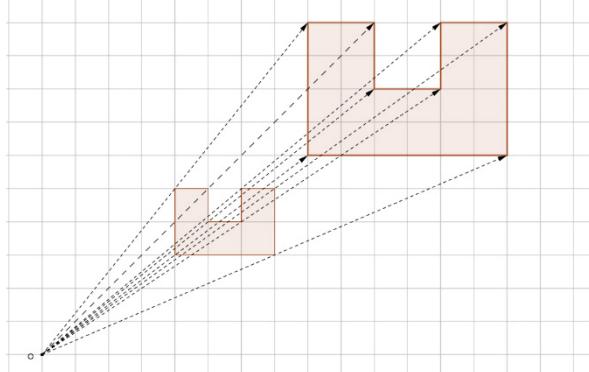


- quadrículas diferentes;

As quadrículas têm dimensões diferentes. Para construir uma figura semelhante a uma dada, basta reproduzir a figura original com o mesmo número de quadrículas.

- método da homotetia.

Neste caso, escolhe-se um centro da homotetia O , uma razão r e determina-se a imagem da figura na $H_{(O, r)}$.



RELAÇÃO ENTRE OS PERÍMETROS E ENTRE AS ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS SEMELHANTES

Utilizando a mesma quadrícula, vamos construir figuras para procurar a relação entre os perímetros e as áreas de duas figuras semelhantes.

Figuras	Perímetros	Áreas	Razão dos perímetros	Razão das áreas	Razão de semelhança
	$P_B = 4$ $P_C = 8$	$A_B = 1$ $A_C = 4$	$\frac{P_C}{P_B} = 2$	$\frac{A_C}{A_B} = 4$	$r = 2$
	$P_B = 12$ $P_C = 16$	$A_B = 9$ $A_C = 16$	$\frac{P_C}{P_B} = \frac{4}{3}$	$\frac{A_C}{A_B} = \frac{16}{9}$	$r = \frac{4}{3}$
	$P_B = 8$ $P_C = 16$	$A_B = 3$ $A_C = 12$	$\frac{P_C}{P_B} = 2$	$\frac{A_C}{A_B} = 4$	$r = 2$

A partir desses exemplos, podemos verificar que a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança e que a razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.



Para calcular a área ou o perímetro de uma região poligonal, basta calcular a área ou o perímetro duma região poligonal semelhante a ela e ter em conta a razão da semelhança.

ATIVIDADES

- 1.** Observa com atenção o triângulo $[ABC]$ representado ao lado:

1.1 Calcula a área e o perímetro do triângulo.

1.2 Considera o triângulo $[A'B'C']$, semelhante ao triângulo $[ABC]$.

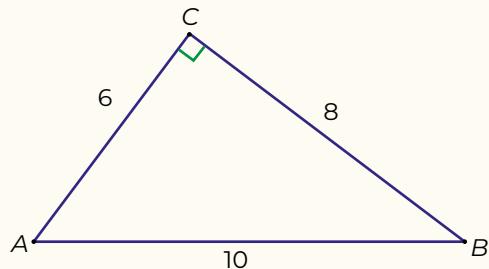
Calcula a área e o perímetro do triângulo $[A'B'C']$, sabendo que a razão de semelhança é:

1.2.1 2

1.2.2 3

1.2.3 0.5

1.2.4 $\frac{1}{5}$

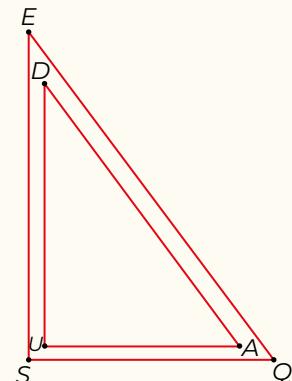


- 2.** A figura ao lado representa um esquadro. Os lados do triângulo exterior são paralelos aos lados do triângulo interior.

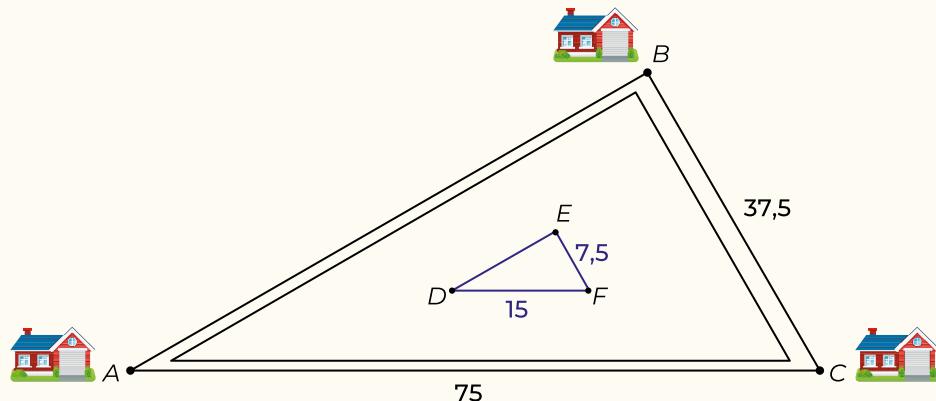
2.1 Sabendo que $\hat{D} = 30^\circ$, qual é a amplitude do ângulo E ? Justifica a tua resposta.

2.2 Prova que os triângulos são semelhantes.

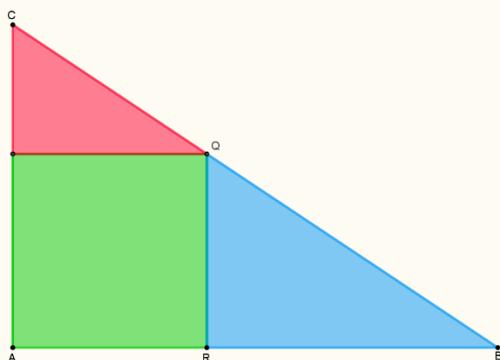
2.3 Sabendo que a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DUA]$ no triângulo $[ESQ]$ é 1,2, calcula o perímetro e a área do triângulo $[DUA]$.



- 3.** Observa a figura, onde A , B e C representam as zonas de três urbanizações. Pretende-se construir uma piscina triangular $[DEF]$ de lados paralelos às estradas que ligam as três urbanizações, onde os moradores possam praticar natação.



- 3.1** Determina a que distância se encontram as urbanizações A e B .
- 3.2** Calcula o perímetro da piscina.
- 4.** Na figura seguinte, está representado o triângulo $[ABC]$, decomposto em dois triângulos e um quadrado.



A área do quadrado $[ARQP]$ é igual a 36 cm^2 e a área do triângulo $[RBQ]$ é igual a 27 cm^2 .

- 4.1** Justifica que os triângulos $[RBQ]$ e $[PQC]$ são semelhantes.
- 4.2** Determina a área do triângulo $[PQC]$.
- 4.3** Determina \overline{BC} .

