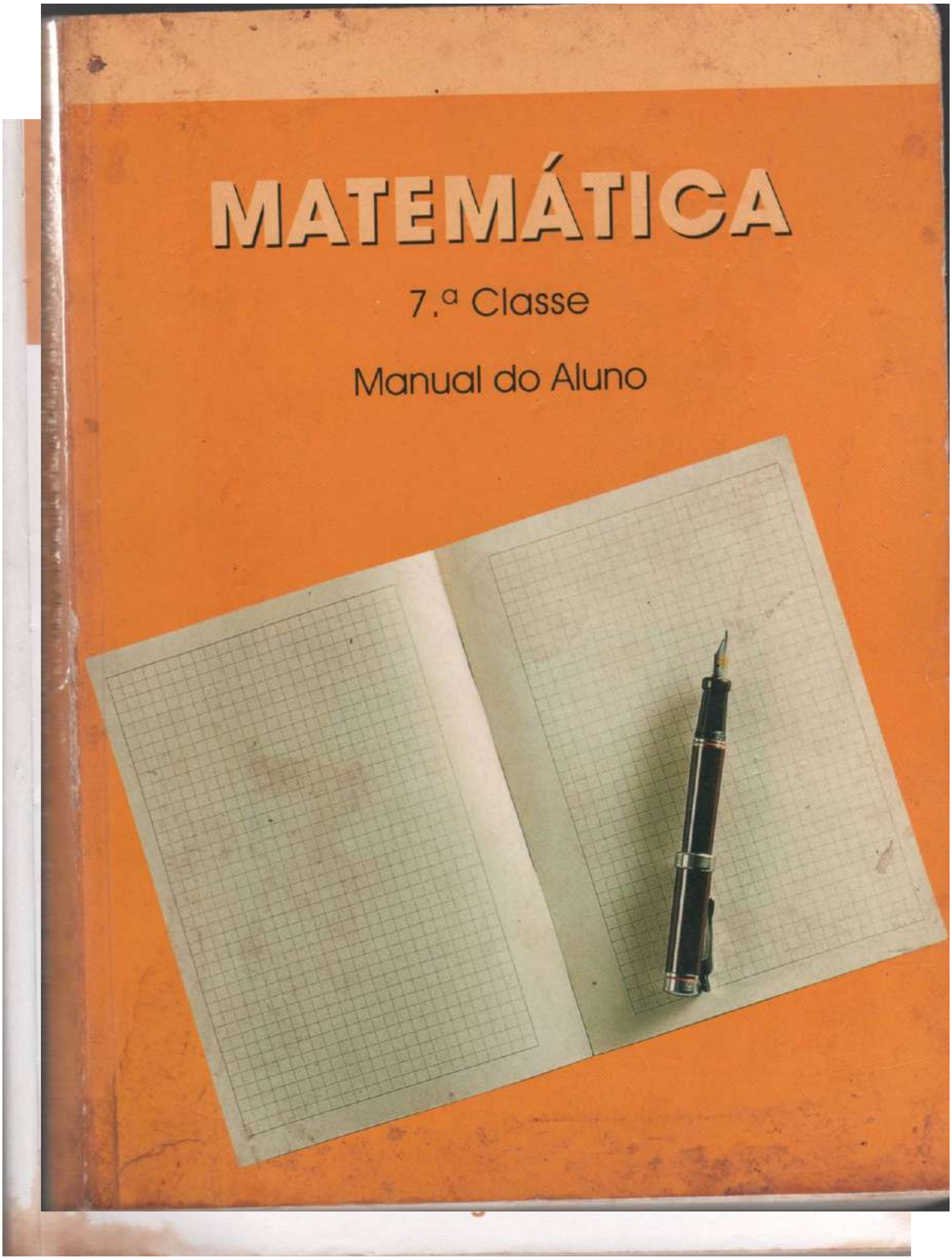

MATEMÁTICA
7.ª Classe
Manual do Aluno

Mais tarde, os Árabes introduziram o nosso sistema numérico na Europa, onde os algarismos foram sofrendo modificações até à forma actual.

Assim, podemos dizer que a importância dos números está intimamente ligada às origens da Matemática. Nessa altura, números e geometria constituíam a própria Matemática.

É também relevante o surgimento do número zero, o sistema decimal e os números negativos. O número zero, indispensável para representar o espaço vazio, terá a sua origem na Grécia e, daí, propagou-se pela Índia, depois dos Hindus terem consolidado o sistema decimal.

Devem-se a Pitágoras de Samos (matemático grego 580-500 a.C.) muitas descobertas matemáticas, embora se questione se tal personagem existiu de facto, pois várias biografias da Antiguidade, incluindo a de Aristóteles, a seu respeito desapareceram.

Pitágoras.

A.1.2 SEQUÊNCIA DE NÚMEROS

Consideremos o alfabeto português como exemplo:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Z.

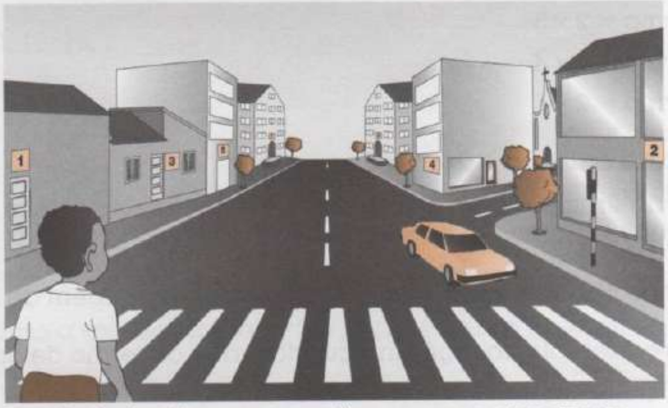
Desconhecem-se as suas regras de formação, mas elas são úteis, a julgar pela organização a que devem obedecer as tarefas do nosso quotidiano.

Não sabemos porquê, nesse alfabeto, a letra A vem antes da letra B, e a letra S sucede a letra R, e por aí em diante; mas temos na memória essa ordem, que é necessária para a construção das palavras, entre outras coisas, para encontrarmos o nome de alguém na lista telefónica. Essa ordem é muito importante, tendo o psicólogo Piaget dito:

«Ordem é a nossa necessidade lógica de estabelecer uma organização, que não precisa de ser especial, entre os objectos, para termos certeza de que contamos todos e de que nenhum foi contado mais de uma vez».

Piaget.

O jovem Sapalo, morador de um dos bairros periféricos de Benguela, ao voltar da escola verificou que, de um lado da sua rua, as casas estavam numeradas com números pares e, do outro lado, com números ímpares.



Sequência de números pares e ímpares nas portas da rua.

Qualquer um dos casos apresentados (alfabeto português e números) são exemplos de sequências.

- Exemplos

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... números naturais;

1, 4, 9, 16, 25, ... quadrados perfeitos;

1, 3, 5, 7, 9, 11, ... números ímpares;

1, 4, 7, 10, 13, 16, ... a cada elemento é adicionado três unidades.

Cada elemento de uma sequência chama-se «termo».

- Na sequência 1, 4, 10, 13, 16, ...

1 é o 1.º termo ou termo de ordem 1;

7 é o 3.º termo ou termo da ordem 7;

13 é o 5.º termo ou termo de ordem 13;

e a lei de formação é: cada termo é obtido adicionando 3 ao anterior.

- Na sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... tem-se:

  O 1.º termo $= 2 \times 1$
  O 2.º termo $= 2 \times 2$
  O 3.º termo $= 2 \times 3$
  O 4.º termo $= 2 \times 4$
  O 5.º termo $= 2 \times 5$

- O termo da ordem $n = 2 \times n = 2n$

A expressão 2n chama-se **termo geral da sequência**. Assim, é a lei de formação que foi escrita em linguagem simbólica.

A partir dele pode calcular-se o termo de qualquer ordem de sequência.

Tomemos o exemplo do trigésimo quarto termo ou termo de ordem 34.
$2 \times 17 = 34$.

- Outros exemplos de sequências:

1. –1, –3, –5, –7, –9, ... cada termo é obtido do anterior subtraindo 2.

2. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... cada termo é obtido do anterior somando 3.

3. Na sequência 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ verifica-se que $3 = \frac{3}{1}$.

Neste sentido, os numeradores das fracções são iguais a 3 e cada denominador calcula-se multiplicando o denominador anterior por 2.

Assim: 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{32}$

4. Na sequência 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ verifica-se que o numerador de cada termo é 1 e os denominadores constituem a sequência dos quadrados perfeitos.

Logo: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{49}$, ...

Na sequência 1, 2, 4, 7, 11 observa-se que:

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11$$

Actividades

1. Escreve os três termos das seguintes sequências:

1.1 4, 8, 12, 16, ...

1.2 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$

1.3 1, 5, 9, 13, ...

1.4 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

2. Considera a sequência do termo geral $4n - 12$ e determina:

2.1 O termo 1 e 110.

2.2 O vigésimo quinto e septuagésimo termos.

3. Escreve os cinco primeiros termos das sequências, cujo termo de ordem n é:

3.1 $n + 1$

3.2 $2n + 1$

3.3 $n^2 + 1$

3.4 $2n - 2$

4. Considera as sequências e para cada uma escreve os quatro termos seguintes, explicando a regra utilizada.

4.1 1, 4, 16, 64, ...

4.2 5, 8, 11, 14, ...

4.3 20, 17, 14, 11, ...

4.4 2, 4, 8, 16, ...

A.1.3 OS NÚMEROS PRIMOS

Existem vários teoremas sobre números primos, assim como várias fórmulas que não foram ainda provadas pelos matemáticos, a que é comum chamar conjecturas.

Os primeiros teoremas foram estudados pela Escola de Pitágoras (500 a. C. – 300 d. C.).

A título de exemplo, o Teorema Fundamental da Aritmética «Todo o número inteiro pode ser escrito de forma única», apareceu demonstrado no Livro IX dos Elementos de Euclides (300 a. C.). Como já foi dito, muitos problemas ainda continuam por resolver, um deles é:

«Todos os números pares são a diferença de dois números primos consecutivos». O primeiro caso é 2 = n5 – 3. Se consultarmos uma tabela em causa também é verdadeira para todos os números pares até 20.

Analisa o seguinte exemplo:

Alguns amigos, também colegas de escola, reuniram-se numa manhã de Sábado, em casa do Manuel para aí realizarem algumas actividades, incluindo jogos com números.

Resolveram, para o efeito, usar a calculadora que o tio da Joana lhe oferecera como prenda por ter transitado de classe.

Com alguma tristeza, observaram que a referida máquina não tinha os números «zero» e «dois». Não faz mal – disse o Mapinda – assim o jogo será mais interessante. Veremos quem consegue escrever os números 302, 605 e 6005, usando as operações elementares e escrevendo quatro operações para cada número. De recordar que não usaremos os números «zero» nem o «dois».

A Joana escreveu:

$302 = 191 + 111$
(apenas realizou uma operação: **a adição**).

$302 = 413 - 111$
(neste caso usou uma operação diferente: **a subtracção**).

$302 = 5 \times 57 + 17$
(neste caso usou duas operações: **a multiplicação e a soma**).

$302 = 999 \div 3 - 31$
(neste caso usou duas operações diferentes: **a divisão e a subtracção**).

Podes fazer o mesmo com outros números? Então, usando as quatro operações em qualquer um dos casos, experimenta os exemplos que se seguem:

1. Dos números que se seguem (302, 605 e 6005) um deles tem um divisor que se repete. De que divisor se trata?

2. Verifica se é verdadeira a igualdade:

$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

2.1 Há oito divisores de 30, escreve-os.

3. Sabes que o número natural 2 é divisor de 12.

3.1 Calcula $(12)^2$ e mostra que também 2 é seu divisor.

3.2 Como $(12)^4 = 12 \times 12 \times 12 \times 12$, será que 2 também é divisor de $(12)^4$?

Número Primo é todo o número diferente de 0 e 1 que apenas admite dois divisores: o 1 e o próprio número.
Um número que não é primo chama-se Composto.

Actividades

1. Decompõe em factores primos o número 5808, usando a máquina de calcular e os critérios de divisibilidade como auxiliar.
Que propriedade têm os números primos que encontraste ?

2. Depois de decompostos em factores primos os números:

$M= 2^3 \times 3$

$N = 2^2 \times 3 \times 5$

$R= 2^2 \times 3$

$T= 2 \times 3$

usa a calculadora e:

2.1 Mostra que T é divisor de M, N e R.

2.2 Mostra que M não é múltiplo de N.

2.3 Mostra que R é múltiplo de M, N, e T.

3. Qual é o menor número natural que dividido por 5, por 6 e por 9 dá resto 3?

4. O conjunto A = {29, 31, 37, 41} é composto apenas por números primos.

4.1 Para cada número x, tal que $x \in A$, calcular $x - 1$ e $x + 1$.
Estes dois números ainda são primos?

4.2 Completa a seguinte tabela:

X – 1	X	X + 1
28	29	30
40	41	42
36	37	38

4.3 Qual é a propriedade comum dos números da 2.ª e 3.ª colunas?

4.4 Tomando em consideração a alínea b), explica porque razão, se um número x é primo e é superior a 3, $x - 1$ e $x + 1$ não podem ser primos.

Actividades

5. Em cada alínea, escreve todas as fracções equivalentes às dadas com denominadores menores do que os que são dados.

5.1 $\frac{27}{54}$ **5.2** $\frac{25}{45}$ **5.3** $\frac{604}{540}$

6. Entre as expressões dadas, diz quais são as equivalentes:

6.1 O maior número que é divisor de 730 e 70

6.2 $7 \times \left(2 - \frac{2}{5}\right) + 0{,}2 \times (3 \div 0{,}1)$

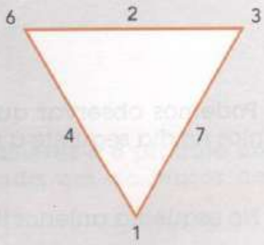
6.3 $2 \times 3 \times 5$

6.4 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

7. O galinheiro do senhor Chimuco tem a forma de um rectângulo, cujos lados medem 9m e 7m e está rodeado por um gradeamento. Pretende-se usar esse gradeamento para um outro galinheiro com o mesmo perímetro, mas de forma quadrada.

Qual é a área deste?

8. O triângulo da figura, diz-se mágico, porque a soma dos números em cada lado é a mesma.



8.1 Com os mesmos números, encontra outro triângulo mágico.

8.2 Tenta encontrar outros triângulos com os números 1, 2, 3, 4, 6 e 7.

9. Determina o número de triângulos que a figura possui. Encontra um método que te permita não esquecer nenhum.

10. Decompõe em factores primos cada um dos números:

24; 40; 64; 72; 96; 150; 154; 294; 504; 602.

11. Prova que os números 66 e 475 são primos entre si.

A.1.4 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Um doente precisa de tomar medicamentos de 6 em 6 horas e outro de 8 em 8 horas. Tendo ambos iniciado o tratamento às 0 horas do mesmo dia, quando voltarão a tomar os medicamentos juntos?

Para a solução do problema em questão, vamos fazer um esquema:

Podemos observar que os doentes voltarão a tomar os medicamentos juntos no dia seguinte à mesma hora.

No esquema anterior tínhamos:

0, 6, 12, 18, 24, 30, ... **múltiplos de 6.**

0, 8, 16, 24, ... **múltiplos de 8.**

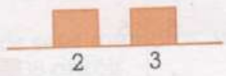
mínimo múltiplo comum de 6 e 8 é 24 e escreve-se:

m.m.c. (6, 8) = 24

Assim,

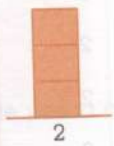
Para calcular o m.m.c. (6, 8), poderíamos também fazer a decomposição em factores primos.

6	2
3	3
1	



$6 = 2 \times 3$

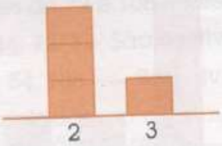
8	2
4	2
2	2
1	



$8 = 2^3$

Então,

m.m.c. (6, 8) = $2^3 \times 3 = 24$



O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o produto dos factores comuns e não comuns elevado cada um ao maior dos expoentes.

Vê os seguintes exemplos:

1. Calcula.

   1.1 m.m.c. (16, 30)

   1.2 m.m.c. (24, 60)

Resolução:

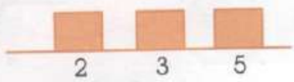
1.

1.1 Decompondo 16 e 30 em factores primos, obtém-se:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

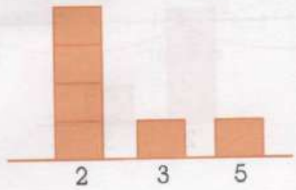
$16 = 2^4$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



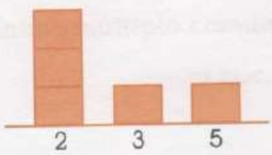
$30 = 2 \times 3 \times 5$

Então, **m.m.c. (16, 30) = $2^4 \times 3 \times 5 = 240$**



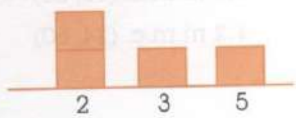
1.2 Decompondo igualmente em factores primos os números dados:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$



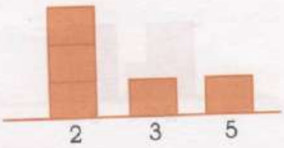
$24 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Então, **m.m.c. (24, 60) = $2^3 \times 3 \times 5 = 120$**



A.1.5 MÁXIMO DIVISOR COMUM

Para distribuir pelos seus membros, uma associação de pesca artesanal dispõe de 72 redes e 108 anzóis.

A Direcção, depois de ouvir os seus associados, decidiu que daria a cada um igual número de anzóis e de redes.

No máximo, quantos associados poderão ser contemplados? O que receberá cada um?

Para resolvermos este problema, teremos de procurar números que, ao mesmo tempo, sejam divisores de 72 e 108 e desses escolher o maior.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, **36**, 72 → São os divisores de 72.

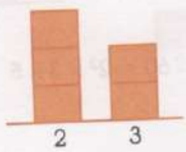
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, **36**, 54, 108 → São divisores de 108.

Assim, poderão ser contemplados, no máximo 36 pescadores associados, devendo cada um receber 3 anzóis e 2 redes.

O **máximo divisor comum** de 72 e 108 é 36 e escreve-se: **m.d.c. (72, 108) =36**

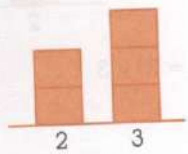
Para calcular o m.d.c. (72, 108), poderíamos também fazer a decomposição em factores primos.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	



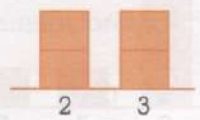
$72 = 2^3 \times 3^2$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	



$108 = 2^2 \times 3^3$

Então, **m.d.c. (72, 108) = $2^2 \times 3^2 = 36$**



O máximo divisor comum (m.d.c.) de dois ou mais números é o produto dos factores comuns cada um deles elevado ao menor dos expoentes.
Se o m.d.c. de dois números é 1, dizemos que os números são primos entre si.

Assim, os números 3 e 7 são primos entre si porque o m.d.c. (3, 7)=1.

Tratemos os seguintes exemplos:

Calcula:

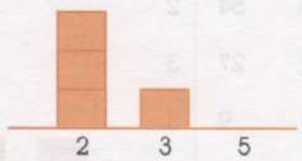
1. m.d.c. (24, 60)

2. m.d.c. (198, 600)

Resolução:

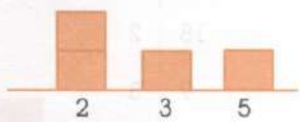
1. Decompondo 24 e 60 em factores primos:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	



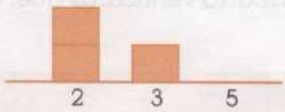
$24 = 2^3 \times 3$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	



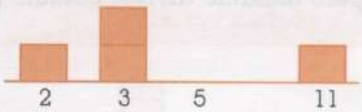
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Então, **m.d.c. (24, 60) = $2^2 \times 3 = 12$**



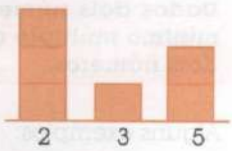
2. Decompondo 198 e 600 em factores primos, temos:

198	2
99	3
33	3
11	11
1	



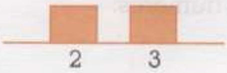
$198 = 2 \times 3^2 \times 11$

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	



$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Então, **m.d.c. (198, 600) = $2 \times 3 = 6$**



Relação entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números

Ao preencher a tabela abaixo verificarás que, dados dois números x e y, obtém-se: $x \times y = M \times D$

x	y	M m.d.c. (x, y)	D m.d.c. (x, y)	x × y	M × D
2	3				
3	4				
6	10				
8	12				
30	40				

Dados dois números x e y, o seu produto é igual ao produto do mínimo múltiplo comum (M) pelo máximo divisor comum (D), dos dois números.

Alguns exemplos:

1. Sabendo que o m.d.c. (493, 221) = 17

1.1 Calcular o m.m.c. (493, 221).

Resolução:

Sabemos que:

$x \times y = M \times D$

$493 \times 221 = M \times 17$

$M = 6409$

2. Compara os seguintes números:

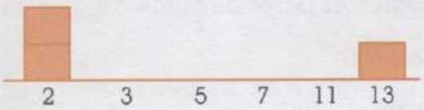
$\frac{13}{52}$; $\frac{55}{208}$

Resolução:

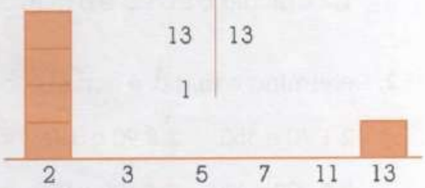
Vamos calcular o m.m.c. (52, 208), reduzir as fracções ao mesmo denominador e, em seguida, concluiremos que é maior o número representado pela fracção com maior denominador.

52	2
26	2
13	13
1	

208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	



$52 = 2^2 \times 13$



$208 = 2^4 \times 13$

Então,

m.m.c. (52, 208) = $2^4 \times 13 = 208$

$$\frac{13}{52} \overset{\times 4}{=} \frac{52}{208} \; ; \; \frac{55}{208} \overset{\times 1}{=} \frac{55}{208}$$

$$\frac{52}{208} < \frac{55}{208}$$

Logo, é maior o número $\frac{55}{208}$.

Actividades

1. Considera os números 75 e 210.

1.1 Decompõe-os em factores primos.

1.2 Calcula o m.d.c. e o m.m.c. dos referido números.

2. Determina o m.d.c. e o m.m.c. dos seguintes pares de números:

2.1 70 e 350 **2.3** 90 e 360 **2.5** 96 e 600

2.2 290 e 116 **2.4** 120 e 900 **2.6** $(120)^2$ e $(900)^2$

3. Determina o m.d.c. e o m.m.c. dos seguintes termos de números:

3.1 100, 50 e 60 **3.3** 120, 144 e 360

3.2 120, 484 e 630 **3.4** 80, 30 e 72

4. Simplifica cada uma das fracções utilizando o m.d.c.:

4.1 $\frac{24}{153}$ **4.3** $\frac{96}{150}$ **4.5** $\frac{64}{602}$ **4.7** $\frac{400}{150}$

4.2 $\frac{153}{204}$ **4.4** $\frac{350}{-525}$ **4.6** $\frac{-285}{342}$

5. Indica os números em falta, de modo a que:

5.1 m.d.c. (45, . . .) = 45

5.2 m.m.c.(45, . . .) = 45

5.3 m.d.c. (. . . . , 7) = 56

5.4 m.m.c.(. . . . , 7) = 56

Actividades

6. Reduz ao mesmo denominador e escreve por ordem crescente:

6.1 $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{3}{10}$

6.2 $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{3}{11}$

6.3 $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{6}{35}$, $\frac{1}{14}$

7. Preenche os espaços vazios das tabelas seguintes:

7.1

a	b	M m.m.c. (a, b)	D m.d.c. (a, b)	a × b	M × D
6	44				
9	78				
12	143				
15	35				
80	700				
90	750				

7.2

a	b	M m.m.c. (a, b)	D m.d.c. (a, b)	a × b	M × D
12	225				
21	250				
60	324				
350	125				
910	112				
875	180				

A.2 OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

A.2.1 OS NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

Depois de te habituares a trabalhar com números naturais e com fracções, vamos agora abordar os **números racionais absolutos**.

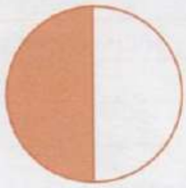
Para tal, consideremos o seguinte exemplo:

Duas irmãs, a Rita e a Isabel Ndesipanda, comeram $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$, respectivamente, de um bolo no dia do aniversário do seu irmão mais novo, o Cabaco.

Diz qual das irmãs comeu maior quantidade de bolo.

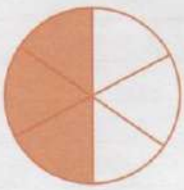
Resolução:

Primeiro, vamos repartir o bolo em duas partes, representando a fracção $\frac{1}{2}$ e depois considerar uma parte.



$\frac{1}{2}$

Seguidamente, vamos repartir o mesmo bolo em 6 partes e considerar 3, para representar a fracção $\frac{3}{6}$.



$\frac{3}{6}$

Resumindo as duas figuras numa só:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Finalmente, podemos concluir que as duas irmãs comeram a mesma quantidade de bolo, logo, as fracções que representam a porção de bolo que cada uma comeu são equivalentes.

As fracções equivalentes representam o mesmo número, isto é, formam um conjunto que se chama **classe de equivalência (CE) dessas fracções**.

Cada classe de fracções equivalentes entre si é chamada **número racional**.

Para representar um número racional, pode usar-se qualquer uma das fracções da classe de equivalência que o gerou.

Exemplos de números racionais:

$\frac{2}{8} = 0{,}25$

$\frac{2}{4} = 0{,}5$ são **números racionais decimais**.

$\frac{4}{10} = 0{,}4$

$\frac{2}{3} = 0{,}6666$

são **números racionais não decimais**.

$\frac{2}{6} = 0{,}3333$

$\frac{2}{2}$

são **números racionais inteiros**.

$\frac{2}{1}$

Exemplos de classes de equivalência (CE):

$$CE\ \frac{4}{2} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \dots \right\}$$

$$CE\ \frac{2}{3} = \left\{ \frac{4}{6}, \frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{15}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \dots \right\}$$

Conjunto dos números racionais absolutos

Depois de termos definido «número racional», interrogamo-nos agora: «o que é, afinal, o **conjunto dos números racionais absolutos**?»

Consideremos como exemplo as classes de equivalência (CE) de fracções já referidas anteriormente; se de uma maneira geral as tomarmos como referência, elas formam o conjunto dos números racionais absolutos.

O conjunto dos números racionais $\frac{a}{b}$, sendo a e b naturais e b ≠ 0, é chamado conjunto dos números racionais absolutos e é representado por $\mathbb{Q}^+$.

Lembrando que o conjunto dos números é IN, temos:

$$IN \subset \mathbb{Q}^+$$

Pois todo o número que está em IN, está também em $\mathbb{Q}^+$.

Se representarmos o conjunto $\mathbb{Q}^+$, em diagrama, temos:

$\mathbb{Q}^+$

IN | $IN \subset \mathbb{Q}^+$

Conjunto dos números racionais naturais

Conjunto dos números racionais fraccionários

Actividades

1. Escreve sete elementos de cada classe:

1.1 $CE\left(\frac{1}{2}\right)$ 1.2 $CE\left(\frac{3}{2}\right)$ 1.3 $CE\left(\frac{1}{3}\right)$ 1.4 $CE\left(\frac{4}{5}\right)$

2. Dá a classe chamada $\frac{1}{4}$.

3. Quais dos racionais abaixo são fraccionários e quais são naturais?

3.1 $\frac{4}{31}$ 3.4 $\frac{54}{9}$ 3.7 $\frac{135}{27}$ 3.10 $\frac{60}{19}$

3.2 $\frac{18}{2}$ 3.5 $\frac{175}{5}$ 3.8 $\frac{128}{43}$

3.3 $\frac{24}{30}$ 3.6 $\frac{111}{11}$ 3.9 $\frac{1024}{128}$

4. Qual dos conjuntos pertence à fracção $\frac{27}{81}$?

4.1 $CE\left(\frac{1}{2}\right)$ 4.3 $CE\left(\frac{1}{3}\right)$ 4.5 $CE\left(\frac{2}{3}\right)$

4.2 $CE\left(\frac{2}{3}\right)$ 4.4 $CE\left(\frac{1}{4}\right)$

5. Encontra uma fracção que seja equivalente a $\frac{4}{5}$ e tenha a soma dos termos igual a 35.

6. Encontra uma fracção que seja equivalente a $\frac{7}{11}$ e tenha soma dos termos igual a 36.

7. Resolve:

7.1 Um automobilista observa que, tendo percorrido 156 quilómetros de uma estrada, completou apenas $\frac{12}{19}$, da viagem por ele prevista. Quantos quilómetros tem a viagem completa?

7.2 Quando se preparava para ir às compras, a Senhora Lucília Ndavoca verificou que tinha apenas na sua carteira Kz 3280,00, equivalente a $\frac{8}{12}$ do dinheiro que pretendeu levar. Quanto dinheiro precisava a Senhora Lucília levar às compras?

A.2.2 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

Duas costureiras resolveram bordar um lençol para oferecer a uma amiga no dia do seu casamento. O trabalho foi realizado num espaço de tempo relativamente curto. Logo nos primeiros dias, as duas senhoras já tinham bordado $\frac{3}{4}$ do lençol, sendo metade para cada uma.

Que parte do lençol bordou cada costureira logo nestes primeiros dias ?

Resolução:

Para responder precisamos de calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, ou seja, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$.

Repara como se apresenta a representação geométrica da operação:

Então, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

A fracção $\frac{3}{8}$ representa o produto de $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

Logo, cada senhora bordou $\frac{3}{8}$ do lençol.

Vamos usar um esquema para calcular o seguinte:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

Apresentamos primeiro a representação geométrica.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Para multiplicar dois números representados por fracções, multiplicam-se os numeradores e multiplicam-se os denominadores.

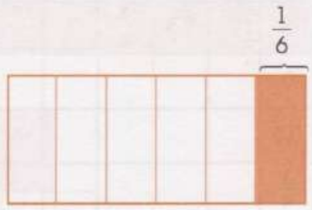
$$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$$

Outros exemplos:

$$\frac{1}{6} \times 60 = 10$$

Como podemos chegar a este valor, usando a regra?

Observar a figura.



$$\frac{1}{6} \times 60 = \frac{1}{6} \times \frac{60}{1} = \frac{1 \times 60}{6 \times 1} = \frac{60}{6} = 10$$

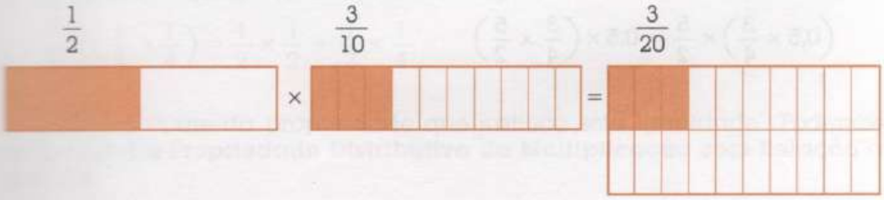
Vamos calcular $\frac{1}{2} \times 0,3$.

Observando a figura, concluímos que:

$$\frac{1}{2} \times 0,3 = \frac{3}{20}$$

usando a regra:

$$\frac{1}{2} \times 0,3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{1 \times 3}{2 \times 10} = \frac{3}{20}$$



Também podíamos calcular deste modo:

$$\frac{1}{2} \times 0{,}3 = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{15 \div 5}{100 \div 5} = \frac{3}{20}$$

Propriedades da multiplicação de números racionais absolutos (comutativa, associativa e distributiva em relação à adição e subtracção)

Repara que $\frac{3}{4} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times \frac{3}{4}$

$\times$	0	0,5	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{2}$
0					
0,5					
$\frac{3}{4}$					
1					
$\frac{5}{2}$					

Em todos os casos será o mesmo? Qual é o nome da propriedade da multiplicação que está evidente na tabela anterior?

Uma delas é a **Propriedade Comutativa**.

Exemplo: $0{,}5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 0{,}5$

Partindo dos mesmos valores, calcula:

$$\left(0{,}5 \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{2} = 0{,}5 \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}\right)$$

Obtiveste o mesmo valor? Porquê?

Neste caso utilizaste a **Propriedade Associativa**.

Experimenta com outros valores.

Substitui os espaços pelos valores correctos e completa:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ ______

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ ______

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) =$ ______

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$ ______

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$ ______

los cálculos que efectuaste, verificaste que:

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

ual é o nome da propriedade que justifica esta igualdade? Podemos er que é a **Propriedade Distributiva da Multiplicação com Relação à ção**.

Completa os esquemas:

$3 \times \left(\underbrace{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}}\right) =$

$= 3 \times$ ______ $=$

$= \frac{3}{5}$

$3 \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) =$

$= \underbrace{3 \times \underline{\quad\quad}} - \underbrace{3 \times \frac{1}{5}} =$

$= \frac{6}{5} -$ ______ $=$

$= \frac{3}{5}$

Concluíste que $3 \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 3 \times \frac{2}{5} - 3 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{3} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

Que propriedade aplicaste ?

Aplicaste a **Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Subtracção**.

Na tabela da página 32 encontramos também as seguintes propriedades:

$0{,}5 \times 0 = 0$

$\frac{3}{5} \times 0 = 0$

$\frac{5}{2} \times 0 = 0$

O zero é o elemento absorvente da multiplicação.

Ainda naquela tabela, temos:

$0{,}5 \times 1 = 0{,}5$

$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$

Neste caso, **o número 1 é o elemento neutro da multiplicação.**

Actividades

1. Calcula mentalmente:

1.1 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$

1.2 $\frac{7}{9} \times 4 \times 0{,}25$

1.3 $\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2}$

1.4 $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 2$

2. As matrículas duma escola primária na Província de Luanda, num dado ano lectivo, foram de 600, assim distribuídas:

$\frac{1}{3}$ eram da 1.ª classe; $\frac{1}{4}$ eram da 2.ª classe e as restantes da 3.ª classe.

Que fracção, relativamente ao total de alunos, representa os alunos da 3.ª classe?

3. Calcula o valor das expressões:

3.1 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{2}$

3.2 $2 \times \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{10}$

3.3 $\frac{21}{4} \times \frac{20}{14} - \frac{2}{27} \times \frac{9}{10}$

3.4 $\frac{1}{2} + 3 \times \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

3.5 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{7}{3}$

3.6 $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

3.7 $\frac{2}{5}\left(\frac{10}{7} - \frac{5}{7}\right)$

3.8 $\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{7} - \frac{7}{8}\right)$

3.9 $\frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times \left(3 + \frac{1}{4}\right) \times \left(3 + \frac{1}{4}\right)$

3.10 $\left(2 \times \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right) \times \frac{11}{10}$

Actividades

4. Calcula:

4.1 O quádruplo de $\frac{2}{3}$.

4.2 Os $\frac{4}{7}$ de $\frac{11}{8}$.

4.3 A terça parte de 17.

4.4 Os $\frac{11}{20}$ de 120.

5. Para construir uma casa, o Senhor Watana ocupou $\frac{3}{7}$ de um terreno. Em seguida destinou $\frac{1}{3}$ do restante para jardinagem. Que fracção do terreno reservou para a jardinagem?

6. Calcula:

6.1 $\frac{24}{25} \times \left(\frac{5}{36} + \frac{25}{54}\right)$

6.2 $\frac{2}{5} \times \left[1 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25}\right)\right]$

6.3 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{15} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right)$

6.4 $7 - \left(\frac{11}{2} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\right)$

6.5 $\frac{18}{25} \times \left(\frac{5}{3} \times \frac{10}{9} + \frac{25}{6} \times \frac{75}{18}\right)$

Potência de um número racional absoluto

Potência de um número racional absoluto
A potência de um número natural pode ser definida como o produto de vários factores iguais.

Por exemplo:

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Vamos estender esta definição ao conjunto Q+.

$25 = 5 \times 5$

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

A base é o factor que se repete.
O expoente é o número de vezes que a base se repete.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{3 \longrightarrow \text{expoente}}_{\longrightarrow \text{base}}$$

Observa o esquema:

$$\frac{1}{2} \quad \times \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{4} \quad \times \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{8}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{factores}} = \frac{1}{8} \longrightarrow \text{produto}$$

Também podes escrever o produto de factores iguais na forma de **potência**:

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

De uma forma semelhante ao que foi visto para potências cuja base é um número natural, vamos concluir que **toda a fracção elevada ao expoente 1 dá como resultado a própria fracção**:

$\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$

Podemos então, estabelecer a seguinte regra:

Para se elevar uma fracção a um dado expoente, deve elevar-se o numerador e o denominador a esse expoente.

Actividades

1. Calcula.

1.1 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

1.2 $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

1.3 $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

1.4 $\left(1\,\frac{1}{6}\right)^2$

1.5 $\left(3\,\frac{5}{6}\right)^2$

1.6 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

1.7 $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{11}{9}$

1.8 $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2$

1.9 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

1.10 $\left(\frac{4}{21} + \frac{3}{28}\right)^2$

2. Escreve sob a forma de potência.

2.1 $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

2.2 $0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$

2.3 $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{11}{3}$

2.4 $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$

3. Completa a seguinte tabela:

Potência	Leitura
$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	Um meio ao quadrado ou um meio elevado a dois.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	
$\left(\frac{4}{7}\right)^3$	Quatro sétimos ao cubo ou quatro sétimos elevado a três.
$\left(\frac{2}{8}\right)^3$	
$\left(\frac{3}{10}\right)^8$	Três décimos elevado a oito ou três décimos à oitava.

Actividades

4. Calcula o valor das expressões.

4.1 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

4.2 $2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

4.3 $1^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

4.4 $\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{10}$

4.5 $\frac{3}{14} \times \frac{7}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

4.6 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

4.7 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$

4.8 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^3$

5. Na cantina de uma escola do Ensino Secundário em Cabinda, foi feita uma pesquisa sobre preferência, quanto a refrigerantes, por parte de alunos e alunas.

Sabendo que $\frac{1}{3}$ escolheram Fanta, $\frac{1}{4}$ escolheram Coca-Cola, $\frac{1}{5}$ preferiram Sumol e ainda restaram 195 alunos que estavam indecisos.

Quantos alunos há na escola?

6. Imagina que a Televisão Pública de Angola,TPA, ouviu 1200 telespectadores para saber como estava a audiência de alguns dos seus programas, num determinado dia. O resultado foi o seguinte:

$\frac{5}{12}$ viam o programa A; $\frac{11}{30}$ viam o programa B; $\frac{7}{60}$ viam o programa C e os demais estavam com o aparelho desligado, por vários motivos.

Quantos telespectadores não viam televisão naquele dia?

Inverso ou recíproco de um número

Numa revista havia um passatempo que constava em descobrir números.

O número que era necessário descobrir, multiplicado pelo número dado, dava o valor 1.

Por exemplo $4 \times \square = 1$

Teríamos que responder $\frac{1}{4}$, porque $4 \times \frac{1}{4} = 1$

Assim, $\frac{1}{4}$ é o **inverso ou recíproco** do número 4.

Consideremos a fracção $\frac{3}{5}$.

Para determinar o seu recíproco ou inverso basta trocar os termos da referida fracção, logo, o recíproco é a fracção $\frac{5}{3}$.

O inverso ou recíproco de uma fracção diferente de zero é a fracção que se obtém trocando entre si o numerador e o denominador da fracção dada. O produto de uma fracção pelo seu inverso é 1.

Vê se és capaz de descobrir o número que deve estar no lugar do $\square$.

$0,6 \times \square = 1$ $\quad \square \times 13 = 1$ $\quad \frac{7}{3} \times \square = 1$

$9 \times \square = 1$ $\quad \frac{3}{5} \times \square = 1$ $\quad \square \times 0,7 = 1$

$\square \times 5 = 1$ $\quad \square \times 8 = 1$

Será que o zero também tem recíproco ?

Porquê? Talvez resolvendo as tarefas que se seguem consigas responder com maior facilidade à questão colocada.

Calcula.

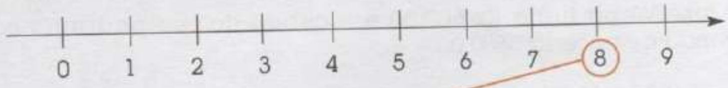
1. $3,215 \times \frac{3}{5} \times 0$

2. $59,5 \times 0 + 3,314 \times 1$

3. $2,6 + \left(0 \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)$

Expressões numéricas

Para representar um número, podemos usar várias expressões. Vamos, por exemplo, representar o número 8.



$$2^3$$

$$4 \times 2$$

$$2 + 2 + 2 + 2$$

$$2^2 + 2^2$$

$$2 \times (1 + 3)$$

O que é necessário, afinal, para calcular um número representado por uma expressão numérica ?

Tomemos o seguinte exemplo:

$$7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

1.º Efectuamos as potências;

$$= 7 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

2.º Efectuamos os cálculos dentro de parêntesis;

$$= 7 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$$

3.º Efectuamos as multiplicações;

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{3} =$$

4.º Efectuamos as operações pela ordem indicada.

$$= \frac{17}{12}$$

Actividades

1. Escreve três expressões numéricas que representem o número $\frac{1}{4}$.

2. O José Weba tinha Kz 600,00 e recebeu do seu padrinho como prenda de anos, Kz 3500,00.

   $\frac{1}{2} \times (600 + 3500)$

   O que representa esta expressão relativamente ao dinheiro do Weba?

3. Representa por uma expressão numérica:

   3.1 $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de 6000

   3.2 $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{7}$ de 1

4. Faz corresponder, através de uma seta, o enunciado à expressão numérica que o traduz.

Enunciado	Expressão Numérica
Metade da soma de 200 com 500 •	• $x\left(\frac{1}{2}\right)^2$
O dobro de um meio ao quadrado •	• $\frac{1}{4} \times 4$
O quadrado do dobro de um meio •	• $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{4} + 0{,}01\right)$
O produto de $\frac{2}{5}$ pela soma de $\frac{1}{4}$ com 0,01 •	• $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times 0{,}01$
O produto de $\frac{1}{4}$ pelo seu inverso •	• $\frac{1}{2}\,(200 + 500)$
	• $\left(2\,\frac{1}{2}\right)^2$
	• $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + 0{,}01$

Actividades

5. Descodifica a mensagem seguinte, associando ao valor de cada expressão numérica a letra correspondente na tabela:

- $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{5}$; • $\left(\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}\right)+3$; • $0{,}75\times2\times\frac{1}{2}$; • $1{,}2\times\frac{8}{10}$;
- $\frac{4}{5}\times\frac{4}{3}\times\frac{15}{16}$; • $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}$; • $75\times0{,}01$; • $2+\frac{3}{4}\times80$;
- $0{,}6\times\frac{10}{3}$; • $\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}+3$; • $0{,}25+\frac{1}{2}$; • $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}$;
- $0{,}25\times4\times\frac{3}{4}$.

A	B	D	F	M	N	R	P
2	62	0,96	$\frac{2}{5}$	$\frac{51}{10}$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{3}{4}$

6. Para fomento do desporto escolar, três escolas participaram numa competição e havia 60 prémios para distribuir. $\frac{2}{5}$ dos prémios foram para a escola da Katila; $\frac{1}{6}$ foi para a escola do Bruno.

6.1 Diz o significado da expressão:

$$60-\frac{2}{5}\times60-\frac{1}{6}\times60$$

6.2 Calcula o valor da expressão.

7. Os pais da Wesa foram ao supermercado fazer compras e trouxeram:

- Um quilo e meio de maçãs.
- 2,5 kg de bananas.
- $\frac{5}{4}$ kg de ananás.

7.1 Quantos quilogramas de fruta trouxeram os pais da Wesa?

Actividades

7.2 Dá um significado a cada uma das expressões numérica
seguintes e calcula cada uma delas.

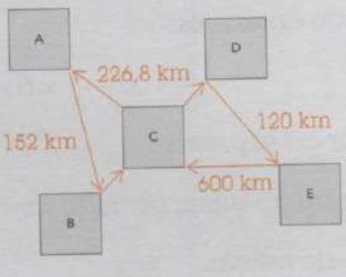
- $\frac{5}{4} \times 200$
- $1{,}5 \times 160$
- $\frac{5}{4} \times 180 + 1{,}5 \times 160 + \frac{1}{4} \times 200$

8. Três cães apanharam distraída a Dona Bela e comeram o frang
que ela tinha para o jantar.

O *Simba* comeu metade, o *Leão* comeu a sexta parte e o *Bolá*
comeu a quarta parte.

Será que ainda sobrou frango?
Justifica a tua resposta.

9. O pai da Inês seguiu o seguinte percurso: ABCDECA.



A distância de A a C é o dobro da distância de B a C e a distân
de C a D é $\frac{1}{3}$ da distância de C a E.
Que distância percorreu o pai da Inês?

A.2.3 DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

Determinação do quociente de dois números racionais

Estamos a finalizar o estudo dos números racionais absolutos, por conseguinte, pensamos teres já adquirido certas competências e dominado igualmente alguns conceitos que te permitem enfrentar a divisão sem dificuldades.

Vamos recordar que divisões como $2 \div 3$; $3 \div 4$ e $1 \div 6$ não podem ser efectuadas no conjunto dos números naturais. Os resultados dessas divisões não são números naturais. Mas iremos demostrar que essas divisões são possíveis realizar na divisão de números racionais absolutos.

A subtracção é a operação inversa da adição e de igual modo, a multiplicação é a operação inversa da divisão.

Se, $2 \times 8 = 16$, então $16 \div 8 = 2$

Se $\frac{1}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$, então $\frac{7}{3} \div \frac{1}{3} = 7$

Soluciona os problemas que se seguem:

1. A água de um garrafão de 5 litros foi distribuída por garrafas de $\frac{1}{2}$ litro cada.

   Quantas garrafas se encheram?

   $5 \div \frac{1}{2} = 10$ é o mesmo que $5 \times 2 = 10$

   Encheram-se 10 garrafas.

2. O Ned distribuiu o sumo de uma garrafa de $\frac{1}{2}$ litro igualmente por 4 copos.

   Quanto ficou em cada copo?

   $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$ é o mesmo que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

   Cada copo tem $\frac{1}{8}$ litro de sumo.

3. Imagina agora que $\frac{1}{2}$ litro de sumo foi distribuído igualmente por dois copos de $\frac{1}{4}$ litro cada.

Quantos copos se encheram?

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$ é o mesmo que $\frac{1}{2} \times 4 = 2$

Encheram-se 2 copos.

Em qualquer dos problemas resolvidos, verifica-se que:

Para dividir dois números racionais diferentes de zero, multiplica-se o dividendo pelo recíproco ou inverso do divisor.

Número ⟶ inverso

$$\frac{1}{3} \longrightarrow 3$$

$$2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} \longrightarrow 5$$

dividendo

divisor

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15} \longrightarrow \text{quociente}$$

Actividades

1. Calcula mentalmente.

1.1 $\frac{1}{8} \div \frac{1}{8}$

1.2 $1 \div \frac{1}{10}$

1.3 $1 \div 100$

1.4 $2 \div \frac{1}{100}$

1.5 $4 \div \frac{1}{4}$

1.6 $\frac{1}{5} \div 1$

1.7 $\frac{1}{5} \div \frac{2}{5}$

1.8 $\frac{2}{5} \div \frac{2}{5}$

1.9 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{100}$

2. Calcula.

2.1 $5 \div \frac{1}{3}$

2.2 $\frac{1}{3} \times 5$

2.3 $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$

3.

3.1 Completa a tabela.

Dividendo	Divisor	Quociente
30	3	10
30×4	3×4	_____
$30 \div 0,1$	$3 \times 0,1$	_____
$30 \div 6$	$3 \div 6$	_____
$30 \div \frac{1}{3}$	$3 \div \frac{1}{3}$	_____
$30 \times$ _____	3×5	10
$30 \div 8$	$30 \div$ _____	10

Actividades

3.1 Repara que obtiveste sempre o mesmo quociente. Será por acaso?
Justifica a tua resposta.

4. Marca numa recta numérica os pontos que correspondem aos seguintes números:

4.1 $\frac{2}{3} \div 1$

4.2 O quociente de 1 por 2

4.3 O quociente de 1 por $\frac{1}{3}$

4.4 0,5

4.5 $(1.5) \div (1.5)$

4.6 $(1 \div 5) \div (3 \div 5)$

4.7 O número maior do que 1 e menor do que 3

4.8 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$

5. Quantos pontos obtiveste na recta ?

Expressões numéricas e problemas

1. Para a festa de aniversário da Wesa, compraram-se 24 litros de sumo de ananás e 24 litros de sumo de laranja.

   O sumo de ananás distribuiu-se por canecas de 0,5 litros cada. O sumo de laranja distribuiu-se por canecas de 1,5 litros cada.

   Ao todo, quantas canecas foram necessárias?

   Repara que:

   $24 \div \frac{1}{2} + 24 \div 1{,}5 = \left(24 \div \frac{1}{2}\right) + (24 \div 1{,}5)$

   Nesta expressão, a divisão tem prioridade relativamente à adição e à subtracção, por isso, podemos usar ou não parêntesis.

2. A área de um rectângulo é igual a $24m^2$. Sabe-se que as medidas dos seus lados são números inteiros e que uma delas é $\frac{3}{2}$ da outra.

   Quais são as dimensões do rectângulo?

   Área: $A = 24m^2$

Casos possíveis para as dimensões:	Dimensão A	Dimensão B
	1m	24m
	2m	12m
	3m	8m
	4m	6m

Em qual das situações uma dimensão é $\frac{3}{2}$ da outra ?

Experimentando caso a caso, concluiu-se que a solução é a situação 4m e 6m, porque $6 = \frac{3}{2} \times 4$, ou seja $6 \div 4 = \frac{3}{2}$.

Resolução:

1. • Canecas de $\frac{1}{2}$ litro: $24 \div \frac{1}{2} = 48$

   • Canecas de 1,5 litros: $24 \div 1{,}5 = 16$

- Canecas de dois tipos:

$24 \div \frac{1}{2} + 24 \div 1{,}5 =$

$= 48 + 16 =$

$= 64$

Ao todo foram necessárias 64 canecas.
Quantas canecas de 0,5 litro foram necessárias a mais do que canecas de 1,5 litro?

$24 \div \frac{1}{2} - 24 \div 1{,}5 =$

$= 48 - 16 =$

$= 32$

Regras para a resolução de expressões numéricas com números racionais absolutos	
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div 2 =$	Primeiro calculam-se as potências.
$= \frac{9}{4} + 2 \times \frac{9}{2} \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div 2 =$	Depois calculam-se as operações dentro dos parêntesis.
$= \frac{9}{4} + 2 \times \frac{9}{2} \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div 2 =$ $= \frac{9}{4} + 9 \div \frac{1}{2} \div 2 =$ $= \frac{9}{4} + 18 \div 2 =$	Em seguida efectuam-se as operações de multiplicação e divisão pela ordem indicada.
$= \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$	Por último efectuam-se as operações de adição e subtracção pela ordem indicada.

Actividades

1. Calcula.

1.1 $20 \div \frac{2}{3} + 30 \div \frac{5}{3}$

1.2 $20 \div \left(\frac{5}{2}\right)^2$

1.3 $10 \div \frac{1}{2} \times 2$

1.4 $10 \div \left(\frac{1}{2} \times 2\right)$

1.5 $5 \div \frac{2}{3} \div 2$

1.6 $2 \div \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.7 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \div 2$

1.8 $2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \div \frac{4}{21}$

2. A Dona Linda leva $\frac{3}{4}$ de hora a colocar renda numa toalha.
Quantas toalhas acaba em dois dias de trabalho (16 horas)?

3. Um aprendiz de sapateiro gasta $\frac{1}{4}$ de hora para coser um sapato; e um sapateiro experiente faz o mesmo trabalho em metade deste tempo.
Quantos sapatos cosem os dois em 8 horas?

4. Para fazer exercícios de Matemática a Inês tem 1 hora e $\frac{1}{4}$. Em média gasta cinco minutos com cada um.
Quantos exercícios vai fazer?

5. Feita uma pesquisa a respeito dos moradores de uma rua, concluiu-se que $\frac{1}{2}$ dos moradores são menores de 18 anos e $\frac{1}{2}$ dos restantes são homens. Se as mulheres (adultas) residentes nessa rua são 130, quantos são os moradores?

Actividades

6. Uma pasteleira tinha três dúzias de ovos. Gastou $\frac{1}{3}$ dos ovos a fazer um pudim e 6 ovos a fazer bolos.
Pensa em perguntas que poderias fazer com os dados que tens.
Registra essas perguntas e as respectivas respostas.

7. Calcula o valor das expressões:

7.1 $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \div \frac{5}{3}\right)$

7.2 $\left(\frac{10}{21} + \frac{25}{28}\right) \div \left(\frac{25}{42} - \frac{5}{14} \times \frac{10}{17}\right)$

7.3 $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \frac{7}{12} + \frac{1}{7} \times \left(3 \times \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\right] \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{7}$

7.4 $\left[\frac{9}{2} - 74 \times \left(2 + \frac{2}{5}\right)\right] \div \left(\frac{11}{3} \div \frac{11}{7} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{7}\right)$

7.5 $3 \times \frac{1}{7} \div \frac{4}{5} \times \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times 3\right)\right]$

7.6 $\frac{3}{14} \times \frac{7}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

7.7 $\frac{2}{7} \div \frac{1}{14} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \div \frac{4}{27}$

7.8 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} \times \frac{7}{2} \div \frac{11}{8}$

A.3 NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

A.3.1 OS NÚMEROS NEGATIVOS E OS NÚMEROS POSITIVOS

Os números negativos aparecem pela primeira vez num trabalho do matemático francês, Nicolas Chuquet, que viveu entre 1445 e 1488. A sua vida é pouco conhecida, mas sabe-se que viveu em Paris e Lion onde ganhou a sua vida como copista.

Consideremos os casos seguintes:

1. A Josefa Cazola e o Chambuanda são irmãos e residem na vila de Camabatela. Num dado dia resolveram deslocar-se a Luanda em visita a familiares e, no regresso fizeram algumas compras.

A Josefa levava Kz 8000,00 e o Cambuanda 5000,00. Entretanto, feitas as compras verificaram que tinham gasto Kz 12 000,00, tendo cada um pago metade desta importância. Mas como é que eles vão fazer? Será que o dinheiro chega? Será que sobra?

A Josefa Cazola tem Kz 8000,00 e gastou Kz 6000,00, portanto ficou com Kz 2000,00.

Kz 8000,00 – Kz 6000,00 = Kz 2000,00

O Cambuanda tem Kz 5000,00. Como pode gastar Kz 6000,00? Fica a dever Kz 1000,00

Kz 5000,00 – Kz 6000,00 = ?

2. Se ao nível da água do mar fizermos corresponder o zero, conforme ilustra a figura, a casa está a uma altitude de + 30 metros e o pequeno navio naufragado está a uma profundidade de – 40 metros.

3. Se a Teresa Ngueve não deve nada a ninguém e tem Kz 16 000,00, isto significa que o seu saldo é Kz 16 000,00, número positivo.

4. Se não tenho dinheiro nenhum e devo Kz 50,00 a um colega de turma, eu digo que o meu saldo é negativo.

5. Se não tenho dinheiro nenhum e não devo nada a ninguém, o meu saldo é 0 (zero).

Assim, o meu saldo pode ser positivo ou negativo do mesmo modo que o saldo de uma empresa.

Pelos exemplos atrás apontados, verifica-se que certas subtracções são impossíveis em IN, mas possíveis em Z, como veremos mais adiante (página 62). Isto acontece quando o aditivo é menor que o subtractivo.

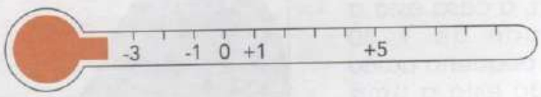
No caso das temperaturas dizemos: 3 °C abaixo de zero, ou 3 °C negativos, ou – 3 °C.

Conclusão:

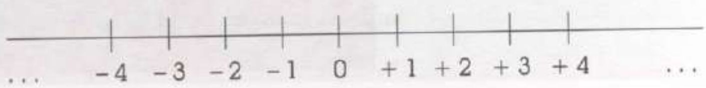
Com os elementos do conjunto Z, podemos fazer a contabilidade da Josefa e do Cambuanda – caso 1. A Josefa Cazola fica com + Kz 20 000,00, o Cambuanda fica com Kz 1000,00.

A.3.2 REPRESENTAÇÃO NA RECTA

Consideremos o termómetro da figura.
O mesmo não tem todas as graduações. Completa-as:



Lembra-te que a graduação de um termómetro sugere uma forma simples de representar os números inteiros relativos num eixo ou recta orientada.



Os matemáticos associaram a cada número, um ponto de uma recta.

Para representar os números inteiros numa recta orientada, procedemos do seguinte modo:

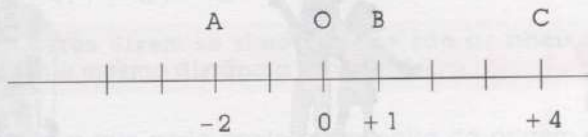
1.º Partimos de uma recta.

2.º Marcamos um ponto ao qual atribuímos um número.

3.º Definimos uma unidade de medida.

4.º Consideramos o sentido positivo do zero para a direita.

A recta representada chama-se **eixo ou recta orientada**.



Os números colocados à direita do zero são chamado números positivos.

1 ou +1 ⟶ número positivo

Os números colocados à esquerda do zero são chamados números negativos.

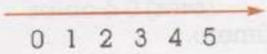
−1 ⟶ número negativo

O número 0 nem é positivo, nem é negativo.

Aos pontos A, B, C, O do eixo correspondem certos números relativos. Na figura anterior, + 4 é a abcissa do ponto C e 0 é a abcissa do ponto O.

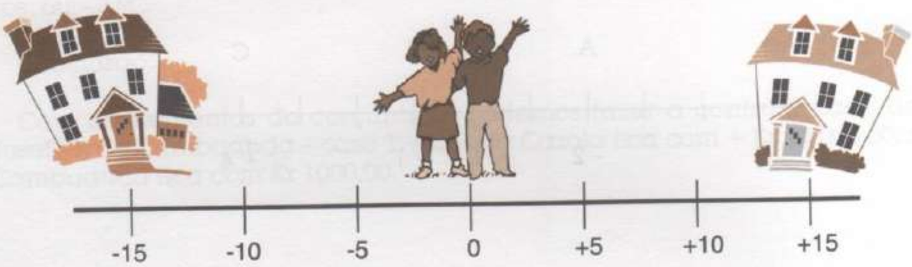
Assim,

IN = {1, 2, 3, 4, 5,...}



Números simétricos. Módulo ou valor absoluto de um número

Observa a figura:



A Felícia Ngueve (F) e o Vissoca (V) partiram ambos do mesmo ponto, que corresponde ao 0, e dirigiam-se às respectivas casas.

Qual deles vai percorrer maior distância? As casas da Felícia e do Vissoca, respectivamente, estão à mesma distância do ponto de partida. Eles vão andar 15 km cada um.

F ⟶ + 15 relativamente ao ponto 0.

V ⟶ – 15 relativamente ao ponto 0.

Os números +15 e –15 têm o mesmo **módulo ou valor absoluto**, que é 15

Esta afirmação pode ser indicada da seguinte forma:

$|+15| = 15$ (lê-se: «valor absoluto de mais 15 ou módulo de + 15 é igual a 15»).

$|-15| = 15$ (lê-se: «valor absoluto de menos 15 ou módulo de –15 é igual a 15»).

Por possuírem o mesmo valor absoluto, os números em causa designam-se por **números simétricos**.

Os números simétricos têm a seguinte propriedade:

O simétrico do simétrico de um número é o próprio número.

$-(-4) = +4 ; -(-a) = a$

$-(+4) = -4 ; +(-a) = -a$

Dois números dizem-se simétricos se são as abcissas de pontos colocados à mesma distância da origem.

A distância a que cada ponto se encontra da origem chama-se **valor absoluto da abcissa desse ponto**.

O valor absoluto de um número x representa-se por $|x|$.

Exemplos:

$|+3| = 3$, $|-3| = 3$

$|+7| = 7$, $|-7| = 7$

$|0| = 0$

Dois números simétricos têm o mesmo valor absoluto, só diferindo no sinal:

$+a(+a) = +a$
$+(-a) = -a$
$-(+a) = -a$
$-(-a) = +a$

(+ 3) é simétrico de (– 3).

(– 1,5) é simétrico de (+ 1,5).

0 é simétrico de 0.

$\left(+\frac{1}{2}\right)$ é simétrico de $\left(-\frac{1}{2}\right)$

Actividades

1. Completa as tabelas.

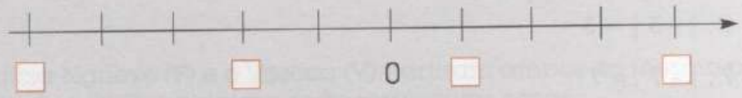
1.1

Número	Número simétrico
− 10	
	+ 15
+ 40	
− 175	
	− 300

1.2

Número	Número simétrico
9	− 9
2	
	− 7
− 5	
0	
	9

2. Que número deves escrever dentro dos ☐ ?



3. Completa a igualdade, de modo a que sejam verdadeiras as expressões:

$|+30| =$

$|-78{,}5| =$

$\left|+\frac{3}{5}\right| = |- \quad | =$

$| \quad | = 27 = | \quad |$

Actividades

4. Escreve por ordem crescente os simétricos dos seguintes números:

- 8; 3,4; – 2,5; 6

5. Simplifica cada uma das expressões.

5.1 – (– 13)

5.2 + (– 13)

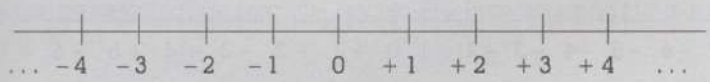
5.3 +(+ 13)

5.4 – (+ 13)

5.5 – (+ 5)

5.6 – (– 5)

6. Considera os pontos assinalados no eixo.

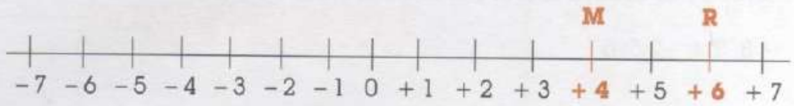


6.1 Indica a distância à origem de cada um dos pontos.

6.2 Escreve o valor absoluto da abcissa de cada um dos pontos.

A.3.3 COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

A Rosa Ndesipanda (R) tem Kz 6000,00 e o Mpinda (M) tem Kz 4000,00. Qual deles tem mais dinheiro?

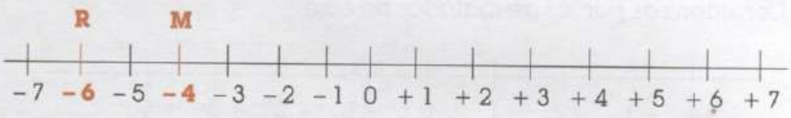


A Rosa tem mais dinheiro, já que $+6 > +4$.

Na recta, o número maior está colocado à direita.

Se dois números são positivos, é maior o que tiver maior valor absoluto.

Considera agora que a Rosa Ndesipanda deve Kz 6000,00 e o Mpinda deve Kz 4000,00. Embora ambos sejam devedores, qual dos dois está em melhores condições financeiras?



O Mpinda está em melhores condições financeiras, já que $-4 > -6$.

Dados dois números **na recta, o número menor está colocado à esquerda.**

Se dois números são negativos, é maior o que tiver menor valor absoluto.

De acordo com a disposição dos números inteiros nas figuras anteriores, podemos também dizer que:

Qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo.
0 é maior que qualquer número negativo.

Actividades

1. Com um dos símbolos $>$ ou $<$, completa:

1.1 $+2$ ___ $+5$

1.2 -3 ___ -4

1.3 -11 ___ $+3$

1.4 $+5$ ___ $+3$

1.5 0 ___ -8

1.6 -17 ___ -175

2. O prédio onde vive o Lukeni tem 13 andares e 2 abaixo do nível da rua, estes destinados a lavandarias e estacionamento de viaturas. Fazendo corresponder o rés-do-chão ao número 0, resolve:

2.1 Usa os números positivos e negativos para indicar cada situação.

- O Caunda está no 9.º andar.
- A Antónia está dois andares abaixo do nível da rua.

2.2 Qual é o número que corresponde ao andar onde está a Luísa, se partiu do andar correspondente ao número 2, subiu 7, desceu 3 e por último subiu 5?

3. A figura está incompleta. Os pontos P e R correspondem a números simétricos.

3.1 Completa a figura.

3.2 Qual é o número que corresponde à letra P?

3.3 Marca na recta o ponto A, sabendo que A é -6.

4. Para cada lista de números, representa numa recta e escreve por ordem decrescente:

4.1 -5; $+3$; -1; 0; $+7$; -3

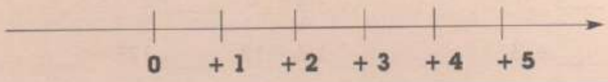
4.2 -11; $+8$; -5; -2; 0; -9; $+3$

A.3.4 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Aos principais conjuntos de números associou-se uma letra e um nome.

• **Conjunto dos números naturais.** Este é representado por IN.

IN = {1, 2, 3, 4, 5, ...}



• **Conjunto dos números inteiros**

Se ao conjunto IN juntarmos o 0, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, IN_0.

IN_0 = { 0, 1, 2, 3, 4, 5,... }

Se ao conjunto IN_0 juntarmos o conjunto dos números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros relativos** e este representa-se pela letra Z.

Z= {... , −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, ...}

Assim, podemos considerar dois conjuntos importantes:

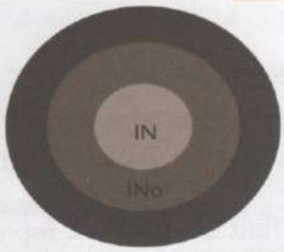
$Z^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$, números inteiros negativos

$Z^+ = \{+1, +2, +3, +4, ...\}$, números inteiros positivos

Por vezes, escreve-se também $Z^+ = IN$

Com estes conjuntos pode escrever-se a igualdade: $\mathbf{Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+}$

Principais conjuntos numéricos.



Em tua opinião, porque razão os conjuntos numéricos são escritos de um modo especial?

Toma o conjunto dos números naturais como exemplo. À letra N da palavra «naturais» acrescenta-se mais um traço (I) para que ao escrevermos IN se entenda que se trata de um conjunto de números e não da letra N.

Do mesmo modo se fez com outras letras que representam conjuntos.

Actividades

1. Usando um dos símbolos $\in$ ou $\notin$, completa:

1.1 -17 ____ IN

1.2 -3 ____ Z

1.3 $+10$ ____ Z

1.4 $+\frac{1}{3}$ ____ IN

1.5 0 ____ IN

1.6 $-\frac{2}{3}$ ____ Z^-

1.7 0 ____ IN_0

1.8 100 ____ IN

1.9 $\frac{1}{2}$ ____ IN_0

1.10 -5 ____ Z

1.11 $\frac{1}{2}$ ____ Z

1.12 125 ____ IN

1.13 $\frac{4}{5}$ ____ Z

1.14 -4 ____ Z

1.15 -4 ____ IN

A.3.5 ADIÇÃO E SUBTRACÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Adição em Z

Já sabes somar números naturais desde o Ensino Primário.

Agora vamos tratar da adição de números inteiros, observando, para tc algumas regras que, com a ajuda de três irmãos, procuraremos entende

A Engrácia e o Bento estão a colecci nar selos, mas têm repetidos e pretende trocá-los. A irmã Cheila que veio recent mente de viagem, também tem selos também pretende trocar com os se irmãos.

– A Engrácia tem 20 selos não repetidos e recebeu 10 do Bento. Fica com 30 selos. $(+20) + (+10) = +30$

– A Cheila recebe 20 selos do Bento e 10 da Engrácia. Os dois ficam com – 30 selos. $(-20) + (-10) = -30$

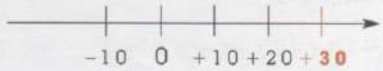
– O Bento tinha 40 selos e já deu 10 à Engrácia e 20 à Cheila, por isso o seu saldo é de 10 selos: $(+40) + (-30) = +10$

– Mas a Cheila só tinha 20 selos e agora deve 30. Depois de pagar, fica com um saldo negativo de 10 selos. $(+20) + (-30) = -10$

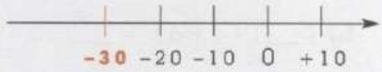
- **Para adicionar dois números inteiros relativos com o mesm sinal, adicionam-se os seus valores absolutos e dá-se ao resul tado o sinal das parcelas.**
- **Para adicionar dois números inteiros relativos de sinal contrário subtraem-se os seus valores absolutos e dá-se ao resultado sinal da parcela que tem maior valor absoluto.**

A adição de dois números inteiros relativos pode ser representada sobre um eixo:

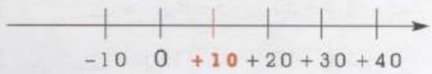
(+ 20) + (+ 10) = + 30



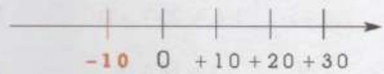
(- 20) + (- 10) = - 30



(+ 40) + (- 30) = + 10



(+ 20) + (- 30) = - 10



A tabela abaixo desenhada mostra as temperaturas registadas em quatro estações meteorológicas (A, B, C, D) de quatro zonas do globo diferentes, às 3 horas e 13 horas de um certo dia.

Observatório	A	B	C	D
3h	+ 12	0	- 2	+ 5
13h	+ 15	- 3	+ 1	+3
Variação	+ 3	- 3	+ 3	- 2

– A temperatura subiu nas estações A e C.
– A temperatura desceu em B e D.

Vais agora calcular algumas somas de números inteiros relativos.

(+ 1) + (+ 2) = + 3 (- 2) + (+ 3) = + 1

(- 5) + (+ 3) = - 2 (+ 7) + (+ 3) = + 10

(- 6) + (- 4) = - 10 (- 4) + (+ 4) = 0

Actividades

1. Completa:

1.1 $(-2)+(+3) = \_\_$

1.2 $(+6)+(-6) = \_\_$

1.3 $(\_\_)+(+6) = \_\_$

1.4 $+10 + (-8) = \_\_$

1.5 $-30 + (-8) = \_\_$

1.6 $-15 + (-15) = \_\_$

1.7 $\_\_ + (-2) = +12$

1.8 $-20 + (+25) = 0$

1.9 $80 + (-14) = \_\_$

1.10 $-3 + 0$

1.11 $(-5) + (+4) = \_\_$

1.12 $(-3) + (+10) = \_\_$

1.13 $(\_\_) + (+4) = -2$

1.14 $-12 - (-4) = \_\_$

1.15 $-12 + (\_\_) = -20$

1.16 $+5 + (\_\_) = -5$

1.17 $-185 + (\_\_) = 0$

1.18 $-185 + (...) = 0$

1.19 $7 + (-13) = \_\_$

2. Adiciona os seguintes números:

2.1 -10 e $+12$

2.2 18 e 12

2.3 -18 e 17

2.4 -24 e 25

2.5 -13 e 15

2.6 0 e -7

2.7 -12 e 12

2.8 -7 e $+27$

2.9 17 e 14

3. Efectua, por processos geométricos, as adições seguintes:

3.1 $(-2)+5$

3.2 $1+4$

3.3 $(-1)+(-2)$

3.4 $2+(-3)$

3.5 $1+4$

3.6 $3+(-5)$

Actividades

4. Faz corresponder a cada adição indicada na coluna da esquerda, a sua soma na coluna da direita:

(− 24) + 14 •	• − 40
(+ 3) + (− 21) •	
33 + (− 33) •	• 10
(− 8) + 18 •	
(− 20) + (− 20) •	• 0
25 + (− 35) •	
(− 28) + 10 •	• − 18
(− 50) + 50 •	
60 + (− 50) •	
(− 22) + (− 18) •	• − 10

Adição sucessiva

Existem adições que se apresentam com mais de duas parcelas. Nestes casos, podemos fazer uso de certas propriedades já utilizadas na adição de números naturais, tais são os casos da propriedade comutativa e da propriedade associativa.

Vamos considerar os seguintes exemplos:

1. Efectua as seguintes adições sucessivas:

1.1 $2 + (-7) + 3 + (-8)$

1.2 $(-5) + (+4) + (-3) + (+9) + (+3)$

1.3 $(-10) + (-3) + 3 + 8 + 2$

1.4 $7 + (-1) + (-8) + (-3) + 5$

Resolução:

1.1 $2 + (-7) + 3 + (-8) = 2 + 3 + (-7) + (-8)$
$= 5 + (-15) = -10$

1.2 $(+4) + (+3) + (+9) + (-5) + (-3) = (+16) + (-8) = 8$

1.3 $(-10) + (-3) + 3 + 8 + 2 = (-13) + 13 = 0$

1.4 $7 + (-1) + (-8) + (-3) + 5 = 7 + 5 + (-8) + (-3) + (-1)$
$= 12 + (-12) = 10$

2. Completa.

2.1 $(+5) + (-2) + (-3) + (+4) + (-7) =$
$(+5) + (\_\_\_) + (-2) + (-3) + (+7) =$
$(+9) + (\_\_\_) =$
$= \_\_\_$

2.2 $(-2) + (+7) + (-4) + (-5) + (+1) =$
$(-\_\_\_) + (-\_\_\_) + (-\_\_\_) + (+\_\_\_) + (+\_\_\_) =$
$= (-\_\_\_) + (+\_\_\_) =$
$= \_\_\_$

Actividades

1. Utiliza as propriedades comutativa e associativa para efectuar rapidamente as adições seguintes:

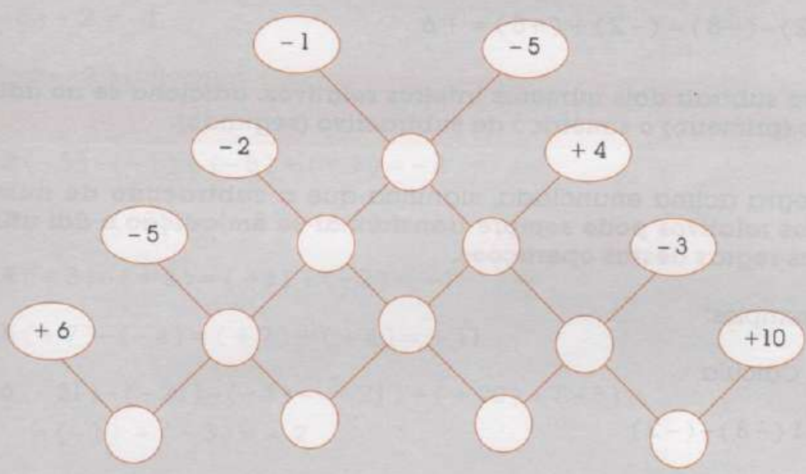
1.1 $(-6)+(-4)+(-3)+(+7)+(+5)+(+3)$

1.2 $6+(-7)+(+3)+(-10)+20-5$

1.3 $(-27)+13+17+(-3)+(+4)$

1.4 $(-12)+15+(-18)+(-8)+19$

2. Completa o esquema, colocando dentro dos círculos a soma dos dois números que estão por cima.



Subtracção em Z

Algumas regras da subtracção em IN vão manter-se em Z. Vamos ver alguns casos:

- Se $(+2)+(+3)=+5$, então $+2=(+5)-(+3)$
- Se $(-2)+(-3)=-5$, então $-2=(-5)-(-3)$
- Se $(+6)+(-8)=-2$, então $+6=(-2)-(-8)$

Ainda te lembras da regra que te permite efectuar as subtracções? Então vejamos:

$(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=+2$

$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$

$(-2)-(-8)=(-2)+(+8)=+6$

Para subtrair dois números inteiros relativos, adiciona-se ao aditivo (primeiro) o simétrico do subtractivo (segundo).

A regra acima enunciada, significa que **a subtracção de números inteiros relativos pode sempre transformar-se em adição e daí utilizarmos as regras destas operações.**

Exemplos:

1. Calcula.

1.1 $(-3)-(-2)$

1.2 $(-5)-(-1)$

1.3 $(-8)-(+3)$

1.4 $(+3)-(+2)$

1.5 $(+7)-(-4)$

1.6 $(-21)-(-20)-(-3)$

Resolução:

1.1 Como vamos interpretar a expressão $(-3)-(-2)$?

$(-3)-(-2)=-1$

Repara que:

$(-3)+(+2)=-1$

«Tirar» – 2 é o mesmo que adicionar +2.

Então:

$(-3)-(-2)=-1$

$(-3)+2=-1$

«Tirar» – 2 é adicionar + 2.

1.2 $(-5)-(-1)=(-5)+(+1)=-4$

1.3 $(-8)-(+3)=(-8)+(-3)=-11$

1.4 $(+3)-(+2)=(+3)+(-2)=+1$

1.5 $(+7)-(-4)=(+7)+(+4)=+11$

1.6 $(-21)-(-20)-(-3)=(-21)+(+20)+(+3)=$
$=(-1)+(+3)=+2$

Actividades

1. Completa:

1.1 $(+7)-(-10)=$ _____

1.2 $0-(-3)=$ _____

1.3 $(-20)-(+8)=$ _____

1.4 $(-300)-($_____$)=-100$

1.5 A subtracção de dois números simétricos é _____ .

2. Observa a tabela com as temperaturas registadas em seis cidades diferentes.

Máxima	Mínima	Cidade
+ 4	− 19	M
+ 11	+ 5	N
− 6	− 19	P
+ 11	− 11	Q
− 5	− 23	R
+ 35	+ 24	S

2.1 Em que cidade se observou a menor temperatura mínima?

2.2 Em que cidade se observou a maior temperatura máxima?

2.3 Em que cidade se observou uma maior variação de temperatura?

Adição algébrica

Às expressões que têm operações de adição e subtracção chamamos **somas algébricas**.

Calcula o número representado pelas seguintes somas algébricas:

1. $(-4)+(-7)-(+3)$
2. $(-3)-(+5)-(-8)-[(+11)-(-12)]$
3. $(+2)-(-1)+(-2)-(+3)-(+18)$
4. $(-3)+0-(-7)-(+7)+(-1)$

Resolução:

1. $(-4)+(-7)-(+3)=(-4)+(-7)+(-3)=$
$=(-11)+(-3)=-14$

2. $(-3)-(+5)-(-8)-[(+11)-(-12)]=$
$=(-3)+(-5)+(+8)-[(+11)+(+12)]=$
$=(-8)+(+8)-(+23)=$
$=0+(-23)=$
$=-23$

3. $(+2)-(-1)+(-2)-(+3)-(+18)=$
$=(+2)+(+1)+(-2)+(-3)+(-18)=$
$=(+3)+(-23)=-20$

4. $(-3)+0-(-7)-(+7)+(-1)=$
$=(-3)+0+(+7)+(-7)+(-1)=$
$=(-3)+(-1)+0+0=$
$=(-4)+0=$
$=(-4)$

Simplificação de expressões algébricas

Uma vez que a soma algébrica (+ 4) + (− 5) + (− 8) + (+ 6) + (+ 7) só tem adições, podemos decidir não escrever os sinais de adição nem os parêntesis, mantendo apenas os sinais dos números relativos, de forma a simplificar a expresssão:

$+4 \quad -5 \quad -8 \quad +6 \quad +7$

Como se faz então a simplificação de uma expressão algébrica? Repara nas seguintes expressões:

$+(+4) = +4$

$-(+5) = -5$

$+(-8) = -8$

$-(-6) = +6$

$+(+7) = +7$

Conclusão:

A dois sinais iguais faremos corresponder um sinal +
A dois sinais diferentes faremos corresponder um sinal −.

Uso de parêntesis

O número representado pela expressão − 9 + 4 (− 4 + 1) pode ser calculado de duas formas diferentes:

$-9 + (-4 + 1) =$	ou	$-9 + (-4 + 1)$
$= -9 + (-3) =$		$= -9 - 4 + 1$
$= -12$		$= -13 + 1$
		$= -12$

No segundo cálculo, suprimimos o parêntesis juntamente com o sinal de adição que o precede. Chamamos a este processo «desembaraçar de parêntesis».

No caso de termos uma subtracção, por exemplo:

$-9-(-4+1)$

faremos:

$-9-(-4+1)$		$-9-(-4+1)$
$=-9-(-3)$	ou	$=-9+(+4-1)$
$=-9+(+3)$		$=-9+3$
$=-6$		$=-6$

Se tivermos um sinal + antes de um parêntesis, podemos retirar o referido parêntesis, mantendo os sinais que estiverem dentro do parêntesis.

Se tivermos um sinal – antes de um parêntesis, podemos retirar esse sinal e o parêntesis, desde que se troquem os sinais das parcelas que estiverem dentro do parêntesis.

Assim, vamos desembaraçar de parêntesis e, em seguida, efectuar a adição algébrica:

- $13-(-8+1-5)+(-3+2)=13+8-1+5-3+2=$

  $=13+8+5+2-3-1=21+7-4=$

  $=28-4=24$

- $-3-[(4+7)-1]=-3+[-(4+7)+1]=$

  $=-3+(-4-7)+1=$

  $=-3-11+1=-13$

Actividades

1. Transforma as subtracções em adições e usa as propriedades da adição para calcular:

1.1 $(-12)+(+17)-(-13)-(+17)-(-12)$

1.2 $(+14)+(-7)+(+6)-(-7)+(-5)-(+6)$

2. Completa a tabela.

x	y	z	y − z	x + y − z	−x − y + z	x − y − z
− 5	+ 7	− 1,5				
+ 0,4	− 0,5	+ 1,6				

3. Que números inteiros relativos «escondem» as letras ?

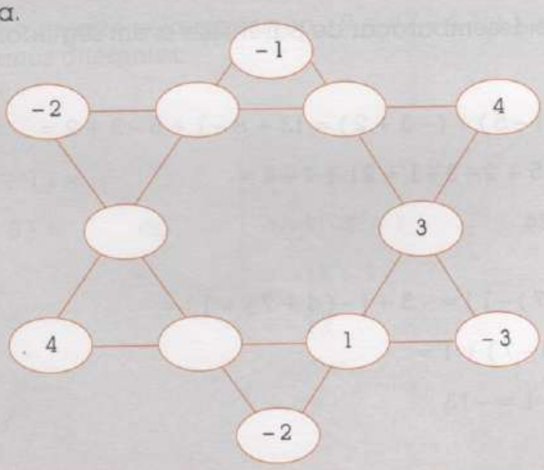
3.1 $(+15)+a=+8$

3.2 $(-20)+b=+5$

3.3 $(-17)+c=-34$

4. Pretende-se que a estrela seguinte seja mágica, isto é, a soma dos quatro números de cada linha seja a mesma.

Completa-a.



Actividades

5. Um rei Faraó do Egipto nasceu em – 1290 e morreu em – 1224. Quantos anos viveu?

6. Qual o número que deves subtrair a – 15 para obter o simétrico de – 3 ?

6.1 E qual é o número que, adicionado a + 12 dá o mesmo que (– 3) + (– 7)?

7. Usa o método de que gostares mais para calcular as seguintes somas:

7.1 – 25 – (21 + 24)

7.2 200 – (– 400 + 100 – 70) + (300 – 580)

7.3 – (2 – 3 + 1) – [20 – (– 2 + 20)]

7.4 1 – [– 5 + (2 – 3) + 1]

7.5 – 20 + [– 51 – (31 – 33)] – (– 72)

7.6 5 – (– 8) + (– 14) – (+ 2)

8. Calcula:

8.1 6 – [3 – (– 2 – 3) – (7 – 12)]

8.2 – 3 – [– 2 – (– 4 + 7 – 8)]

8.3 3 – | – 2 | + 5 + | -7 |

8.4 | – 3 + 2 – 5 | – | 4 – 6 + 7 |

8.5 | 3 – (8 – 4) | – 5 – (– 2 + 7)

A.3.6 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO EM Z

Agora já tens bastante prática a somar e subtrair números inteiros relativos. Por isso, quando trabalhas com números positivos, por vezes «esqueces» o seu sinal. Para o efeito, fazes a seguinte correspondência:

$$+1 \longrightarrow 1$$
$$+2 \longrightarrow 2$$
$$+3 \longrightarrow 3$$

Neste caso, dizemos que os **conjuntos IN e Z^+ são idênticos** e escrevemos:

$$IN = Z^+ \text{ e } IN_o = Z_o^+$$

Multiplicação em Z

Será, então, natural que a multiplicação em Z_o^+ seja semelhante à que se conhecia em IN^o?

Então qual será o resultado de $(+3) \times (+5)$?

É também natural que se mantenham as propriedades já conhecidas.

Comutatividade:

$(+3) \times (+5) = (+5) \times (+3)$

Associatividade:

$[(+3) \times (+5)] \times (+2) = (+3) \times [(+5) \times (+2)]$

(+1) é o elemento neutro:

$(+4) \times (+1) = (+1) \times (+4) = +4$

0 é o elemento absorvente:

$(+4) \times 0 = 0 \times (+4) = 0$

Distributividade em relação à adição:

$(+3) \times [(+5) + (+2)] = [(+3) \times (+5)] + [(+3) \times (+2)]$

Com o surgimento dos números negativos, Z^-, e a sua consequente utilização, pretendemos que a multiplicação mantenha todas estas propriedades e, para tal, temos que definir o produto de dois quaisquer elementos de Z, de modo a que isso se verifique.

Qual será o resultado de $(+3) \times (-5)$?

Como a soma de dois números simétricos é sempre zero, este é o elemento absorvente da multiplicação. Podemos então escrever:

$$(+4) + (-4) = 0 \quad \text{e} \quad (+5) \times 0 = 0$$

Logo:

$$(+5) \times 0 = (+5) \times [(+4) + (-4)]$$

Recorda que pretendemos manter a Propriedade Distributiva. Se a aplicarmos aqui, obtém-se:

$$(+3) \times 0 = (+3) \times [(+5) + (-5)]$$

$$0 = [(+3) \times (+5)] + [(+3) \times (-5)]$$

$$0 = (+15) + [(+3) \times (-5)]$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, os números $(+15)$ e $[(+3) \times (-5)]$ devem ser simétricos, logo $(+3) \times (-5) = -15$.
A Propriedade Distributiva permite-nos escrever $(-5) \times (+3) = -15$.

Por fim, vamos usar o mesmo processo para saber qual deve ser o resultado de $(-5) \times (-3)$.

Escrevendo:

$$0 = (+3) + (-3)$$

Virá: $(-5) \times 0 = (-5) \times [(+3) + (-3)]$

$$0 = [(-5) \times (+3)] + [(-5) \times (-3)]$$

$$0 = -15 + [(-5) \times (-3)]$$

Logo:

$(-15) + [(-5) \times (-3)]$ devem ser simétricos, o que dá $(-5) \times (-3) = +15$

O produto de dois números inteiros relativos com o mesmo sinal é sempre positivo.
O produto de dois números inteiros com sinais diferentes é sempre negativo.
As propriedades da multiplicação em IN°, mantêm-se em Z.

$(+a) \times (+a) = +a$

$(-a) \times (-a) = +a$

$(-a) \times (+a) = -a$

Nota como é fácil a multiplicação em Z, fazendo estes cálculos simples:

1. Calcula.

1.1 $(+5) \times (+1)$

1.2 $(-4) \times 2 + 3 \times (-5)$

1.3 $(-1) \times (-9) - 9$

1.4 $(+5) \times (-1)$

1.5 $(-100) \times (-1) + (+800) \times 0$

1.6 $-(-3+1) \times (-4+3)$

2. Completa o quadro seguinte:

x	+ 2	+ 2	− 2	− 2
y	+ 3	− 3	+ 3	− 3
z	+ 4	+ 4	− 4	− 4
y × x				
(y × x) × z				

2.1 Compara os sinais dos números da última linha com os sinais de x, y e z. Relaciona o sinal do produto com o número de factores negativos. Consegues tirar alguma conclusão?

3. Dá um exemplo de um produto de quatro factores negativos. Qual é o sinal desse produto ?

4. Dá um exemplo de um produto de cinco factores que seja negativo e outro que seja positivo.

O sinal de um produto de números inteiros relativos é:

- **Positivo (+), se o produto contém um número par de factores negativos ou se os factores são todos positivos.**
- **Negativo (–), se o produto contém um número ímpar de factores negativos.**

$(+a) \times (+a) = +a$
$(-a) \times (-a) = +a$
$(-a) \times (-a) \times (-a) = -a$

Divisão em Z

Desde o estudo do conjunto dos números naturais IN, aprendeste que a divisão é a operação inversa da multiplicação e vice-versa.

É natural que as regras utilizadas para a multiplicação de números inteiros relativos também se mantenham na divisão dos referidos números.

Assim, considera os seguintes exemplos e a solução dos exercícios indicados.

	A solução será:
1. $(+16) \div (+2)$	**1.** $(+16) \div (+2) = +8$
2. $(+16) \div (-2)$	**2.** $(+16) \div (-2) = -8$
3. $(-16) \div (+2)$	**3.** $(-16) \div (+2) = -8$
4. $(-16) \div (-2)$	**4.** $(-16) \div (-2) = +8$
5. $0 \div (-2)$	**5.** $0 \div (-2) = 0$
6. $(-2) \div 0$	**6.** $(-2) \div 0 =$ impossível e indeterminado.

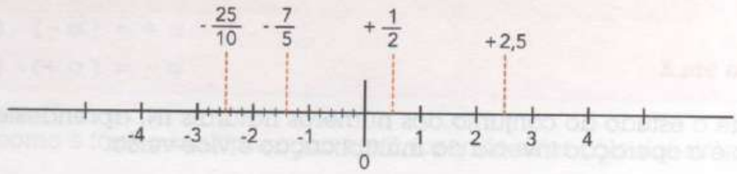
Como já se disse, é fácil concluir que as regras dos sinais que aprendeste para a multiplicação são as mesmas que para a divisão.

É positivo o quociente de dois números inteiros não nulos com o mesmo sinal.
É negativo o quociente de dois números inteiros não nulos de sinais contrários.
Se dividirmos zero por qualquer número não nulo, obtemos zero.
Não é possível dividir por zero.

A.4 CONJUNTO Q DOS NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

No eixo em que representamos os elementos de Z, podemos colocar ainda outros números.

Se aos números fraccionários e decimais já conhecidos associarmos um sinal + ou –, obtemos novos números, tais como:



Como já sabes simplificar fracções, podes dizer que os números abaixo indicados se podem escrever de outra forma.

Completa as igualdades:

$$\frac{-40}{10} = \frac{-1}{} \; ; \; \frac{+8}{2} = \_\_ \; ; \; \frac{0}{3} = \_\_ \; ; \; \frac{-27}{9} = \_\_$$

Podemos também concluir que os **números inteiros relativos também se representam na forma de fracção.**

O conjunto dos números inteiros e fraccionários, positivos e negativos, chama-se **conjunto dos números racionais relativos** e representa-se por **Q**.

O conjunto Q tem também dois subconjuntos importantes:

Q^- = {números racionais negativos}

Q^+ = {números racionais positivos}

$N \subset Z \subset Q$

Actividades

1. Completa as igualdades abaixo indicadas de modo a que se tornem verdadeiras.

$Q_0^- = Q^- \cup$ ___ $\qquad Q_0^+ = Q^- \cup$ ___ $\cup$ ___

2. Analisa as proporções abaixo indicadas e diz qual é o seu valor lógico (verdadeiro ou falso), depois corrige as falsas.

$Z \subset Q \qquad Z^- \subset Q^+$

$Z \cap Q = Z \qquad Q \cap \left\{-4, +\frac{1}{5}\right\} \subset Z$

$Z_0^+ \cup Q_0^+ = Z^+$

3. Usa um eixo para te ajudar a escrever em extensão os conjuntos e recorda também o que aprendeste sobre valor absoluto de um número inteiro.

$A = \{x \in Z \div |x| \leq 4\}$

$B = \{x \in Z_0^- \div |x+1| = 3\}$

$C = \{x \in Q \div |x| = -5\}$

4. Considera o conjunto.

$P = \left\{+5, -9, +\frac{2}{5}, -0{,}7\right\}$

Escreve em extensão o conjunto R 5 tal que:

$R = \{x \in Q : x$ tem como simétrico um elemento de $P\}$

5. Diz qual é o significado de:

5.1 N_0 $\qquad$ 5.2 Q^- $\qquad$ 5.3 Z_0^+ $\qquad$ 5.4 Q_0^+

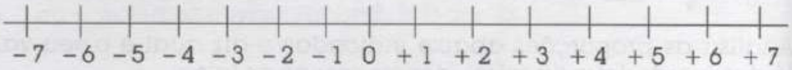
6. Completa com um dos símbolos $\in$ ou $\notin$.

6.1 $\frac{1}{3}$ ___ Q^+ $\qquad$ 6.3 $-2{,}7$ ___ Z^- $\qquad$ 6.5 $-1{,}2$ ___ Q

6.2 -3 ___ N_0 $\qquad$ 6.4 $0{,}02$ ___ Q^+ $\qquad$ 6.6 $(3{,}2-0{,}2)$ ___ N

A.4.1 ORDENAÇÃO EM Q

Recorda que o eixo em que representamos os números inteiros é uma recta orientada, de modo que os números crescem da esquerda para a direita.



Baseado na figura anterior e recordando o que aprendeste no conjunto Z, podes observar que:

$-3 < -2$; $-2 < 0$; $0 < +1$;
$+1 < +3$; $-1 > -3$; $+2 < +4$; $+2 > -4$

1. Completa com os sinais < e > as expressões:

1.1 $+5$ ___ $+8$
1.2 -5 ___ 0
1.3 0 ___ $+14$
1.4 -145 ___ -99
1.5 $+30$ ___ $+20$

A comparação entre números relativos é bastante simples, mas quando se trata de números fraccionários já não é tão fácil. Vamos recordar algumas regras para comparar números racionais positivos, resolvendo o exercício 2.

2. Escreve os sinais < e > entre os pares de números abaixo indicados. Começa por reduzir ao mesmo denominador.

2.1 $\frac{5}{7}$ ___ $\frac{14}{7}$ **2.3** $\frac{7}{3}$ ___ $\frac{7}{15}$ **2.5** $\frac{8}{3}$ ___ $\frac{5}{3}$

2.2 $0{,}02$ ___ $0{,}21$ **2.4** 8 ___ $\frac{40}{3}$

Concluis que as regras são as mesmas, já vistas na comparação de números inteiros.

3. Agora podes aplicar estas técnicas e aquelas regras para ordenar os seguintes números:

$(+2);\ \left(-\frac{1}{5}\right);\ (-3);\ \left(+\frac{2}{3}\right);\ \left(-\frac{5}{2}\right).$

Começa pelos números positivos:

$\left(+\frac{2}{3}\right) < +2$

Compara:

$\left(-\frac{1}{5}\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{2}{10}\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{25}{10}\right)$, logo $\left(-\frac{1}{5}\right) > \left(-\frac{5}{2}\right)$

Porquê? Porque reduzindo as fracções ao mesmo denominador, verifica-se que $-2 > -25$, logo $\left(-\frac{1}{5}\right) > \left(-\frac{5}{2}\right)$.

$(-3) = \left(-\frac{6}{2}\right)$, logo $(-3) < \left(-\frac{5}{2}\right)$.

Finalmente, ordena os números por ordem crescente.

$(-3) < \left(-\frac{5}{2}\right) < \left(-\frac{1}{5}\right) < \left(+\frac{2}{3}\right) < (+2)$

Escreve os mesmos números ordenados por ordem decrescente.

________ > ________ > ________ > ________ > ________

Actividades

1. Escreve em extensão os conjuntos.

$A = \{ x \in Z \div (-5) < x < (+4) \}$

$B = \{ x \in Q \div (-5) < x < (-4) \in x$ escreve-se com uma casa decimal $\}$

2. Escreve por ordem crescente os números racionais relativos:

$(+4{,}2); (-5{,}85); (-7); (+4{,}002); (+7{,}1); 0$

3. Escreve por ordem decrescente os números.

$(-8{,}3); (+8{,}3); (0); \left(+\frac{25}{3}\right); \left(-\frac{26}{3}\right).$

4. Dados os conjuntos:

$M = \{ x \in Z \div (-7) < x < (+3)$

$N = \{ x \in Z \div (-9) < x < (-1) \}$

Escreve em compreensão os conjuntos:

$M \cap N$ e $M \cup N$

5. Considera dois números x e y, tais que $x \in Q^+$ e $y \in Q^+$.

Se $x > y$, qual dos dois números, x ou y, é maior? Dá um exemplo.

6. Se $a \in Q^+$ e $b \in Q^-$, escreve uma desigualdade entre eles. Qual dos números $|a|$ e $|b|$ é menor ?

A.4.2 ADIÇÃO ALGÉBRICA EM Q

Adição em Q

Como já sabes somar números inteiros relativos, vamos calcular algumas somas de números racionais relativos:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=+\frac{7}{3};$$

$$(+0{,}1)+\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(+\frac{1}{10}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(-\frac{2}{10}\right);$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)+(-3)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{9}{3}\right)=\left(-\frac{11}{3}\right);$$

$$(-2)+\left(+\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{4}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)=\left(+\frac{1}{2}\right).$$

Actividades

1. Usa as regras estudadas para efectuar as adições seguintes:

1.1 $\left(+\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)$

1.2 $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$

1.3 $\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$

1.4 $(-2)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

1.5 $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)$

1.6 $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{9}{12}\right)$

1.7 $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$

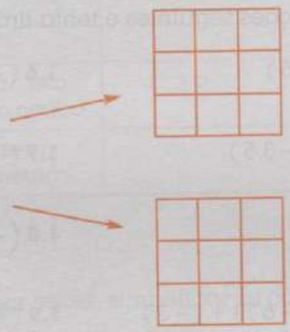
2. Completa o quadro.

+	(+ 5)	(– 3)	(+ 2,3)	0	(– 1,1)
(– 3,5)					
$\left(+\frac{3}{10}\right)$					
(– 5,2)					

Actividades

3. Verifica se o quadrado que se encontra em baixo é um quadrado mágico.

8	3	4
1	5	9
6	7	2



3.1 Constrói dois outros quadrados, somando a cada elemento (– 7) e (– 5,5). Usa a calculadora para o segundo.

3.2 Verifica se os quadrados obtidos ainda são mágicos.

Propriedades da adição em Q

A adição em Q_0^+ tem propriedades já tuas conhecidas, que são a comutatividade, a associatividade e a existência de elemento neutro, o zero.

Será que quando adicionamos elementos de Q ainda se mantêm estas propriedades ?

1. Efectua as adições seguintes e tenta tirar conclusões.

1.1 $(-3)+(-5)$

1.2 $(-2{,}8)+(-3{,}5)$

1.3 $\left(+\frac{1}{3}\right)+0$

1.4 $[(+4)+(-6)]+(-3)$

1.5 $(+35{,}7)+(-35{,}7)$

1.6 $(-5)+(+3)$

1.7 $(-3{,}5)+(-2{,}8)$

1.8 $\left(-\frac{5}{7}\right)+0$

1.9 $(+4)+[(-6)+(-3)]$

1.10 $\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{4}{3}\right)$

Conclusões

A adição de números racionais relativos é comutativa.
O elemento neutro da adição é o zero.
Todos os elementos de Q têm simétricos.
A soma de um número racional relativo com o seu simétrico é zero.

Propriedades da adição em Q (resumo)

Propriedade comutativa	$a+b=b+a$ com a e $b \in Q$
Propriedade associativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ com a, b e $c \in Q$
Existência de elemento neutro	$a+0=0+a=a$ com $a \in Q$
Existência de elemento simétrico	$a+(-a)=(-a)+a=0$ com $a \in Q$

Completa o quadro que se segue, onde se resumem as propriedades da adição em vários conjuntos.

IN	IN_0	Z	Q
A adição é comutativa			
A adição é associativa			A adição é associativa
	A adição tem elemento neutro		
	Só o zero tem simétrico		

Estas propriedades podem, por vezes, simplificar os cálculos.

Observa os cálculos que se seguem e procura perceber quais são as propriedades usadas.

1. $(+26)+(-37)+(+14)+(-3)=$

$=[(+26)+(+14)]+[(-37)+(-3)]=$

$=(+40)+(-40)=$

$=0$

2. $\left(-\frac{11}{15}\right)+(+8)+(-5)+\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{7}{3}\right)=$

$=\left[\left(-\frac{11}{15}\right)+\left(+\frac{3}{15}\right)\right]+\left[(+8)+(-5)\right]+\left(-\frac{7}{3}\right)=$

$=\left[\left(-\frac{10}{15}\right)+\left(-\frac{7}{3}\right)+(+3)\right]=$

$=-\frac{43}{15}+(+3)=$

$=+\frac{2}{15}$

Actividades

1. Utiliza as propriedades comutativa e associativa para efectuares rapidamente as seguintes adições:

1.1 $(-6{,}2) + (-4) + \left(-\frac{1}{4}\right) + (+6{,}2) + \left(+\frac{2}{8}\right) + (+4{,}1)$

1.2 $\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{12}{14}\right)$

2. Coloca no rectângulo o número que torna verdadeira cada uma das seguintes igualdades:

2.1 $\boxed{} + (+4) = +3$

2.2 $(+3) + \boxed{} = -7$

2.3 $\boxed{} + (-4) = +3$

2.4 $(+0{,}2555) + \boxed{} = 0$

2.5 $\boxed{} + (-2{,}002) = +4{,}004$

2.6 $\left(-\frac{1}{8}\right) + \boxed{} = +\frac{1}{2}$

3. Calcula.

3.1 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

3.2 $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{7}{3}$

3.3 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

3.4 $2{,}36 - 5{,}2 + \frac{1}{3}$

Actividades

3.5 $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)-1{,}34-(-3)$

3.6 $-\frac{1}{4}+\left(-\frac{11}{8}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)+1{,}84$

4. Copia para o teu caderno a tabela e completa-a:

a	b	c	a + b − c	a − b − c
− 2	1,3	− 4		
− 2,4	$\frac{1}{4}$	− 0,5		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{28}$		

5. Completa o quadrado mágico de modo a que as somas de cada coluna, de cada linha e de cada diagonal sejam iguais a (− 6).

− 5		+ 3
	− 2	
		+ 1

A.4.3 SUBTRACÇÃO EM Q

As regras da subtracção em Z vão manter-se em Q.

Assim, se a subtracção de dois números inteiros se pode sempre transformar em adição, então em Q, também é fácil subtrair.

Vamos resolver alguns exemplos:

1. $\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{2}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=0$

2. $(+3)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{10}\right)=\left(+\frac{6}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(+\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)=$

$=\left(\frac{35}{10}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{32}{10}=+\frac{16}{5}$

Propriedades da subtracção em Q

De todas as propriedades da adição que estudámos, quais as que se mantêm na subtracção?

$(+5)-(+3)=+2$ $\quad$ $(+3)-(+5)=-2$

Podemos já dizer que a **subtracção não é comutativa**.

Efectua as operações que se seguem, respeitando os parêntesis:

$[(+7)-(+9)]-(-2)$

$(+7)-[(+9)-(-2)]$

O que podes concluir?

A subtracção em Q é sempre possível. A subtracção em Q não é comutativa nem associativa.

Actividades

1. Efectua as operações seguintes:

1.1 $\left(-\frac{13}{7}\right)-\left(-\frac{5}{7}\right)$

1.2 $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)$

1.3 $\left(+\frac{9}{3}\right)-(-3)$

1.4 $(-0{,}75)-(+1{,}625)-(+0{,}375)$

1.5 $(0{,}733)-(+6)+(-2{,}377)$

1.6 $(-12)-\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$

1.7 $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)$

2. Diz em que número se transforma a expressão $a + b - (c + d)$, quando:

$a = +\frac{2}{3}$; $b = -\frac{7}{4}$; $c = -\frac{3}{8}$; $d = +2$

3. Determina os valores das variáveis.

3.1 $(+15) + a = +8$

3.2 $b - (+7) = -3$

3.3 $(-20) + c = -40$

3.4 $(-0{,}30) + d = -0{,}03$

3.5 $\left(+\frac{7}{3}\right) + e = +5$

3.6 $f - \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{5}{3}$

4. Calcula:

4.1 $\bigcirc - (+4) = -5$

4.2 $\bigcirc - (-4) = -9$

4.3 $(+7{,}8) - \bigcirc = +8{,}8$

4.4 $\left(-\frac{1}{3}\right) - \bigcirc = +\frac{1}{9}$

4.5 $\bigcirc - 1{,}45 = -1{,}456$

4.6 $10 - \bigcirc = 9{,}9$

A.4.4 MULTIPLICAÇÃO EM Q

Conforme já viste em outras operações, a multiplicação em Q é també[m] uma extensão natural da multiplicação em Z. Assim, vamos resolver o[s] exemplos que se seguem.

1. $(-3{,}8) \times (+2)$
2. $\left(+\frac{3}{10}\right) \times +\frac{5}{3}$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-0{,}5)$
4. $(-4) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$
5. $\left(+\frac{8}{7}\right) \times \left(+\frac{7}{8}\right)$

Resolução:

1. $(-3{,}8) \times (+2) = (-7{,}6)$
2. $\left(+\frac{3}{10}\right) \times \left(+\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-0{,}5) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{10}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
4. $(-4) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$
5. $\left(+\frac{8}{7}\right) \times \left(+\frac{7}{8}\right) = \frac{56}{56} = 1$

Então, tal como já verificaste para o conjunto Q^+:

Se $a \in Q \setminus \{0\}$, o seu inverso é $\frac{1}{a}$.
O produto de dois números inversos é 1.
O zero não tem inverso.

Exemplos:

O inverso de $+5$ é $+\frac{1}{5}$.

O inverso de -5 é $-\frac{1}{5}$.

O inverso de $+\frac{4}{3}$ é $+\frac{3}{4}$.

O inverso de $-\frac{2}{3}$ é $-\frac{3}{2}$.

Se calculares o produto de cada número pelo seu inverso, necessariamente o resultado deve dar 1.

Propriedades da multiplicação em Q (resumo)

Quaisquer que sejam os números racionais a, b, e c:

$a \times b = b \times a$	Propriedade comutativa
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	Propriedade associativa
$a \times 1 = 1 \times a = a$	Existência de elemento neutro, 1 é o elemento neutro
$a \times 0 = 0 \times a = 0$	Existência de elemento absorvente, 0 é o elemento absorvente
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição
$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1 \quad a \neq 0$	Existência de elemento inverso

3.4.5 VALORES APROXIMADOS

Com a prática que já adquiriste relativamente ao inverso ou recíproco dos números racionais, aconselhamos-te a adquirir uma máquina calculadora para calcular os inversos de alguns números decimais.

- O inverso de 2 é $\frac{1}{2} = 0,5$.
- O inverso de $-0,2$ é -5.

Mas o inverso de 1,3 é aproximadamente 0,769.

Se quisermos um valor exacto, podemos usar fracções: $1,3 = \frac{13}{10}$ e o seu inverso é $\frac{10}{13}$.

Verifica que 1,3, e 0,769 não são inversos, calculado o seu produto.

Calcula agora $1,3 \times 0,770$. Podes concluir que não consegues obter exactamente 1.

Se a tua máquina de calcular tem a tecla $\boxed{1/x}$, podes usá-la para calcular o inverso de um número; se não tem, terás que usar a seguinte potência para calculares, por exemplo, o inverso de 4:

$\boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{=}$ 0,25

Para qualquer outro número, por exemplo x, a sequência seria:

$\boxed{x}\ \boxed{\div}$

$\boxed{-3}\ \boxed{1/x} \longrightarrow -0,333333$

$\boxed{-3}\ \boxed{\div}\ \boxed{1/x} \longrightarrow 0,333333$

Actividades

1. Que número representam as multiplicações seguintes?

1.1 $(-8)\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

1.2 -1×4

1.3 $6\times(-0{,}5)$

1.4 $-8\times\left(-\frac{9}{4}\right)$

1.5 $-0{,}2\times 0{,}5$

1.6 $-3{,}5\times(-2)$

1.7 $0\times(-1{,}234)$

1.8 $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{6}\right)$

1.9 $(-1{,}3)\times\frac{10}{13}$

1.10 $\frac{4}{3}\times(-0{,}75)$

2. Usa a calculadora, e o processo atrás descrito, para calcular o inverso dos números dados na forma decimal e fraccionária. Diz quando os valores obtidos são aproximados.

$a = 40$

$b = -\frac{1}{5}$

$c = -0{,}00032$

$d = 0{,}09$

$e = -\frac{77}{88}$

3. Em cada alínea, calcula $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$. Compara os resultados.

3.1 $x = 3$ e $y = 1$

3.2 $x = \frac{5}{4}$ e $y = \frac{4}{5}$

3.3 $x = \frac{1}{4}$ e $y = 4$

3.4 $x = 0{,}25$ e $y = 0{,}5$

3.5 $x = y = \frac{2}{9}$

Analisa 3.4 e 3.5. O que concluis? Dá outros exemplos inventados por ti.

Actividades

4. O quadro que se segue faz um resumo das propriedades da multiplicação. Completa-o.

IN	IN°	Z	Q
É comutativa			
	É associativa		
		Tem elemento neutro	
		Tem elemento absorvente	
			É distributiva em relação à adição algébrica

5. Verifica se o quadrado seguinte é multiplicativamente mágico.

– 1	– 4	30
6	– 2,5	2
10	6	– 0,5

6. Diz se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

- Dois inversos têm sempre sinais contrários.
- Dois simétricos têm sempre sinais diferentes.
- O inverso de $\frac{1}{7}$ é $\frac{-1}{-7}$.
- Se a e b são dois números não nulos, o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$.

A.4.6 DIVISÃO EM Q

Lembra-te de como calcular a **divisão de números fraccionários e decimais** e, ao mesmo tempo, aplicar as **«regras dos sinais»**:

Resolve:

$12 \div : (-6) = -2$

$-\frac{2}{3} \div (-5) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}$

$-\frac{1}{3} \div -\frac{2}{5} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{6}$

$-0{,}45 \div 0{,}9 = -0{,}5$

$-0{,}28 \div 4 = -0{,}07$

O quociente de dois números racionais relativos não nulos obtém-se multiplicando o dividendo pelo inverso do divisor.

- $20 \div 4 = 5$
- $(-20) \div (-4) = 5$

O quociente de dois números com o mesmo sinal é positivo.

- $20 \div (-4) = -5$
- $(-20) \div 4 = -5$

O quociente de dois números com sinais contrários é negativo.

Actividades

1. Efectua as divisões.

1.1 $-5 \div (-9)$

1.2 $\frac{6}{7} \div \frac{7}{6}$

1.3 $1 \div (-4)$

1.4 $\left(-\frac{5}{3} \div (-4)\right) \div \frac{2}{12}$

1.5 $(-7{,}5) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$

2. O Panzo só sabe que a letra R representa um número negativo, mas mesmo assim diz que consegue simplificar as expressões que se seguem. Tenta tu também.

2.1 $\frac{15}{R} + \frac{18}{R}$

2.2 $\frac{15}{R} - \frac{18}{R}$

2.3 $\frac{15}{R} \div \frac{18}{R}$

2.4 $\frac{15}{R} \times \frac{18}{R}$

2.5 $\frac{R}{-5} + \frac{R}{3}$

2.6 Diz ainda se os resultados obtidos são positivos ou negativos.

3. O soalho de um quarto rectangular foi forrado com mosaicos quadrados de 12 cm de lado. Sabendo que o soalho mede 4,44 m por 5,28 m, quantos mosaicos foram necessários?

4. Com dois triângulos iguais, cujos lados medem 3 cm, 4 cm, e 5 cm, formou-se um triângulo isósceles.

4.1 Qual é a área do novo triângulo?

4.2 Qual é o seu perímetro? (Há duas respostas possíveis)

4.3 Se com os triângulos iniciais formarmos um rectângulo, qual é a sua área? E o seu perímetro?

Actividades

5. Um quadrado mede 3,23 dm de lado.

5.1 Qual é a sua área?

5.2 Formou-se um novo quadrado duplicando a medida dos lados. Que relação existe entre as áreas dos dois polígonos?

5.3 Obteve-se um terceiro quadrado inicial. Qual é a sua área? Que relação existe entre as áreas do quadrado maior e do menor?

6. Analisa a comutatividade e associatividade da divisão em Q, completando as igualdades:

6.1 $(-8) \div (+4) =$

6.2 $[(-8) \div (-5)] : \left(+\frac{3}{5}\right) =$

6.3 $(+4) \div (-8) =$

6.4 $\left(-\frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{9}\right) =$

6.5 $(-8) \div (-5) \div \left(+\frac{3}{5}\right) =$

6.6 $\left(-\frac{1}{9}\right) \div \left(-\frac{1}{3}\right) =$

6.7 O que concluis?

7. Determina o valor de cada expressão.

7.1 $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times (-3) + \frac{7}{5}$

7.2 $\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) \div \frac{1}{4}$

7.3 $\dfrac{-6 \div (-3) + (-6) \div (-1)}{-(-8+7) \div (-5) + 1}$

7.4 $1 - \frac{1}{2} - \left(\left(\frac{3}{2} - 3\right) + 2\right)$

7.5 $\dfrac{9 - (1 - (8 - 4 \times 0{,}25))}{4 \times (-3) \div (-12)}$

7.6 $\dfrac{\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}}{2 + \left[2 + \left(1 - \frac{6}{5}\right)\right]}$

7.7 $\dfrac{2 - \frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9}}$

Actividades

8. Encontra o número que é preciso colocar em cada triângulo, de modo a que as igualdades seguintes sejam verdadeiras:

8.1 $\triangle \div (-2{,}5) = -4$

8.2 $\left(+\frac{1}{4}\right) \div \triangle = -\frac{5}{4}$

8.3 $(-8) \div \triangle = 0{,}5$

8.4 $\triangle + 1 \div (-3) = -\frac{2}{3}$

8.5 $\triangle \times (-3{,}3) \div (-3{,}3) = +2$

8.6 $\triangle \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 0$

8.7 $\frac{\triangle}{2} + 3 = 0$

9. Uma cassete de vídeo com 3h 15 minutos tem já ocupados $\frac{1}{2}$ com um programa de música e $\frac{2}{5}$ com um filme.
O Ned quer gravar um programa recreativo da Televisão Pública de Angola (TPA), cuja duração é 1 hora. Terá espaço suficiente?

10. O senhor Capusso é proprietário de um restaurante, algures em Luanda, e vai engarrafar o seu bom vinho em garrafas de 0,75 litros para melhor servir os seus clientes.

10.1 Como tem 350 litros de vinho, de quantas garrafas precisa?

10.2 O senhor Capusso já tem 256 garrafas. Se comprar as que lhe faltam por Kz 12.50 cada, quanto tem de gastar?

11. A juventude de um determinado bairro resolveu plantar 450 árvores em três etapas.
Na primeira etapa foram plantadas $\frac{2}{3}$ das plantas disponíveis, tendo sido plantadas na segunda etapa $\frac{3}{5}$ das restantes.
Quantas árvores foram plantadas em cada etapa?

A.4.7 POTENCIAÇÃO EM Q

Como já é do teu conhecimento, a potência de um número natural pode ser definida como o produto de vários factores iguais.

Exemplos:

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Vamos aplicar esta definição ao conjunto Q:

$(+2)^2 = (+2) \times (+2) = +4$

$(+2)^3 = (+2) \times (+2) \times (+2) = +8$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

Tenta prever que sinais se obtêm quando se calcula:

$(+2)^5$; $(+2)^6$; $(-2)^5$; $(-2)^6$

Se a base de uma potência é positiva, então a potência é positiva.
Se a base é negativa e o expoente é par, a potência é positiva.
Se a base é negativa e o expoente é ímpar, a potência é negativa.

Calculemos algumas potências cujas bases são elementos de Q.

- $(-5)^2 = +25$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$
- $(0,3)^2 = 0,09$

Atenção:

$(-5)^2 = 25$, mas $-5^2 = -25$

Actividades

1. Calcula o número representado pela potência.

1.1 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

1.2 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3 $\frac{-2^3}{(3)^2}$

1.4 0^{25}

1.5 $-\frac{4^2}{3}$

1.6 $(-0{,}8)^2$

1.7 $(-1)^{1998}$

1.8 $(-1)^{2003}$

1.9 1^{1999}

1.10 $(-0{,}1)^5$

2. Completa com os sinais > ou <, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

2.1 $(-3)^{21}$ _______ 0

2.2 $(0{,}1)^{76}$ _______ 0

2.3 $\left(\frac{1}{10}\right)^{101}$ _______ 0

2.4 $\left(-\frac{1}{10}\right)^{101}$ _______ 0

2.5 $\left(-\frac{11}{151}\right)$ _______ 0

2.6 $\left(-\frac{3}{313}\right)^{2000}$ _______ 0

2.7 $(0{,}345)^{10}$ _______ $(-0{,}345)^{11}$

2.8 $(0{,}1)^4$ _______ $(0{,}1)^6$

As regras de cálculo que já conheces são também extensivas ao conjunto Q. Verifica.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{5} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{8} \qquad \left(-\frac{5}{7}\right)^{15} \div \left(-\frac{5}{7}\right)^{5} = \left(-\frac{5}{7}\right)^{10}$$

$$(+0{,}5)^{20} \times (-0{,}3)^{20} = (-0{,}15)^{20} \qquad (-4{,}8)^{31} \div (+0{,}6)^{31} = (-8)^{31}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{100} \div \left(\frac{5}{6}\right)^{98} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \qquad \left((-2)^{5}\right)^{8} = (-2)^{40}$$

Regras de cálculo em Q:

Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Q}$

$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$

$a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$

$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$ se $a \neq 0$ e $m > n$

$a^{m} \div b^{m} = (a \div b)^{m}$ se $b \neq 0$

$(a^{m})^{n} = a^{m \times n}$

Aplicando a regra das operações com potências, calcula:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$

2. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$

3. $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{8}\right)^{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right)^{22}$

4. $\left(-\frac{8}{3}\right)^{3} \div \left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

5. $\left(3-\frac{2}{3}\right)^{15} \div \left(\frac{7}{3}\right)^{6} \left(-\frac{7}{3}\right)^{9}$

6. $\left(\frac{4}{5} : \frac{4}{5^{2}}\right)^{2} \div (-5)^{2} - 1^{2}$

7. $(3)^{6} \times \left((-1)^{3}\right) \div \left((-1)^{5}\right)^{2}$

8. $\dfrac{\left(\frac{3}{8}\right)^{5} \div \left(2-\frac{13}{8}\right)^{2}}{\left((2-1)^{3}\right)^{15} \div \left((-1-1)^{7}\right)^{6}}$

9. $\left(2-\frac{2}{3}\right)^{2} \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$

10. $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{3} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \times \left(-5-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{3}\right]$

11. $(-1)^{100} + (-1)^{101} - (-1)^{102} - (-1)^{103}$

12. $(-2)^{3} \div \left((3^{2}-5^{2})\right)$

A.5 EQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Um pouco de História

O uso de letras em Matemática consistiu sempre motivo de importância para esta ciência. Podemos até dizer que foi graças às letras que a Matemática conheceu o seu desenvolvimento ao longo dos tempos, embora a sua utilização para representar números evoluísse mais lentamente.

Matemáticos como Euclides (séc III a.C.) já utilizavam as letras para representar figuras geométricas, mas todo o mérito coube a Viéte (matemático francês, 540 – 1603) que trabalhou com equações, utilizando vogais para representar números supostos desconhecidos e consoantes para representar supostos números conhecidos, surgindo assim a diferença entre **conceito de parâmetro e de incógnita**. Como exemplo, naquele tempo a actual equação $a x + b = c$, escrevia-se :

$$B A + C = D$$

MONÓMIOS

Vamos rever alguns conhecimentos sobre números já vistos anteriormente.

Considera as seguintes expressões matemáticas, cujas variáveis representam números.

$$2 \times a \quad e \quad 3 \times b$$

Por simplificação de escrita, podemos escrever $2 \times a = 2a$ e $3 \times b = 3b$.

Estas expressões 2a e 3b designam-se por monómios. Assim, **monómio é um produto de números racionais em que alguns são representados por letras.**

Outros exemplos:

$a\,b\,c$;

$4\,a^3 \times y^2$;

$-2\,p^5$;

$\frac{1}{3}\,a^2 x^3\, y$

A parte do monómio constituído pelas letras chama-se **parte literal** e a parte representada pelo número é chamada coeficiente ou apenas **parte numérica.**

2 a

→ **parte literal**

→ **coeficiente ou parte numérica**

Vamos considerar os seguintes monómios:

$2\,a^3 b$ → têm a mesma parte literal.

$-7\,a^3 b$

$2\,a\,b^3$ → não têm a mesma parte literal, porque:

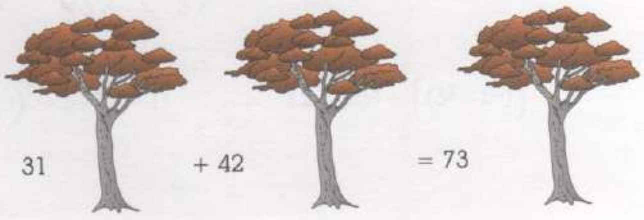
$-7\,a^3 b$

$2\,a\,b^3 = 2 \times a \times b \times b \times b$ e $-7\,a^3\,b = -7 \times a \times a \times a \times b$

Podemos concluir que:

Monómios que possuem a mesma parte literal chamam-se monómios semelhantes.

Vamos supor que os alunos do período da manhã de uma escola do Ensino Secundário plantaram 31 árvores na área da periferia e os do período da tarde plantaram 42. Queremos saber quantas árvores foram plantadas ao todo.



Representemos as árvores pela letra a:

$31a + 42a = 73a$

É possível adicionar-se monómios semelhantes de forma idêntica .

Vamos resolver:

$-9x^3 + 25x^3 = 16x^3$ **porque** $-9 + 25 = 16$

$5y^2 - \frac{7}{2}y^2 = \frac{3}{2}y^2$ **porque** $5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$

$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x - \frac{4}{3}x = -\frac{10}{15}x + \frac{9}{15}x - \frac{20}{15}x = -\frac{21}{15}x$

A5.1. NOÇÃO DE EQUAÇÃO

A Senhora Júlia Candimba foi ao talho e comprou frangos no valor de Kz 900,00 e carne para bife por Kz 1500,00, tendo ainda regressado a casa com Kz 1000,00.

Para sabermos quanto dinheiro a Senhora Júlia levou ao talho, vamos considerar como x a quantidade de dinheiro que desconhecemos. Esta será a incógnita.

Então, teremos:

$x - 900{,}00 - 1500{,}00 = 1000{,}00$

O valor de x que torna a igualdade verdadeira é 3400,00; portanto x = 3400,00 é a **raiz ou solução do problema**. Assim, podemos dizer que a Senhora Júlia levou ao talho Kz 3400,00.

A igualdade que escrevemos chama-se **equação**. A letra que aparece na equação representa a **incógnita**.

Uma igualdade em que figura pelo menos uma variável representada por letras cujo valor numérico se desconhece chama-se equação.
A variável da equação representada por letras chama-se incógnita.
A expressão que está à esquerda do sinal = (igual) é o primeiro membro da esquerda; a expressão à direita é o segundo membro.
Cada membro de uma equação é composto por um ou mais monómios, a que chamamos termos. Os termos que não têm incógnita chamam-se termos independentes.

Na equação:

termos

$\boxed{x - 900 + 1500} = \boxed{1000}$

incógnita — 1.º membro — 2.º membro

x – 900 + 1500 é a soma de três termos; dizemos «soma», pois a subtracção x – 900 pode ser também escrita em forma de soma x + (– 900) + 1500. O segundo membro apenas possui um termo que é 1000.

Considera as equações que se seguem e completa os espaços vazios com verdadeiro (v) ou falso (f):

$3 \times 2 - 2 = 4$ (____)	$2 \times 2 = 2 + 1$ (____)	$5\,(2-5) = 5 \times 2 - 25$ (____)
$3 \times 3 - 2 = 4$ (____)	$2 \times 3 = 3 + 1$ (____)	$5\,(3-5) = 5 \times 3 - 25$ (____)

Uma equação impossível não tem nenhuma solução.
Uma equação possível tem pelo menos uma solução.
Uma equação indeterminada tem infinitas soluções.

- Equações
  - Possíveis
    - Determinadas
    - Indeterminadas
  - Impossíveis

A.5.2 EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Apenas concluiremos que determinadas equações são equivalentes, ou não, após encontradas as suas soluções e tomando como referência um dado conjunto.

Diz quais são os pares de equações que têm a mesma solução no conjunto x = {–2, –1, 0, 1, 2 }.

1. $2x = -5$

2. $2x + 3(-x + 1) = 5$

3. $3x + 4 = 7$

4. $-\frac{3}{2}x = -3$

5. $-4 + 2x = -2$

6. $x + 4 + 2 = 8$

7. $\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$

Completa:

A equação $7 \times y = 105$ tem como solução ou raiz ______; o seu primeiro membro é ______________ e o segundo é ____________ .

Chamam-se soluções ou raízes de uma equação, a todos os elementos de um dado conjunto que a transformem numa igualdade verdadeira.
Uma equação diz-se impossível num certo conjunto se não tem solução ou raiz nesse conjunto. Se tem pelo menos uma raiz ou solução, a equação é possível.
Quando todos os elementos de um conjunto dado são raízes de uma equação, dizemos que a solução é indeterminada nesse conjunto.

Verifica se os elementos do conjunto S = {2, 3} são soluções das equações que se seguem:

$3x - 2 = 4$ $\qquad$ $2x = x + 1$ $\qquad$ $5(x - 5) = 5x - 25$

Depois de teres resolvido as equações verificaste, certamente, que algumas têm a mesma solução no conjunto dado.

Diz-se que duas equações são equivalentes num dado conjunto, se têm, nesse conjunto, as mesmas soluções.

A.5.3 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM UMA INCÓGNITA

No presente ano vais aprender a trabalhar com equações com uma incógnita (as equações do primeiro grau) cujo expoente é a unidade ($x^1 = x$).

Em qualquer actividade humana existem sempre regras ou critérios a serem observados. O mesmo acontece com a resolução de equações. Para aprender estas regras vamos começar por resolver equações muito simples, tais como:

$x + 6 = 8$

$$\boxed{x + 6 = 8}$$
$$\downarrow -6 \quad \downarrow -6$$
$$\boxed{x = 2}$$

$7 \times y = 105$

$$\boxed{7 \times y = 105}$$
$$\downarrow \div 7 \quad \downarrow \div 7$$
$$\boxed{y = 15}$$

Vamos em seguida apresentar-te algumas equações já resolvidas:

$$x-3=10 \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x-3&=10\\ x&=10+3\\ x&=13\end{aligned}$$

(adiciona-se +3) $\boxed{+3}$ $\boxed{+3}$

$$x = 13$$

$$x+12=-5 \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x+12&=-5\\ x&=-5-12\\ x&=-17\end{aligned}$$

(adiciona-se −12) $\boxed{-12}$ $\boxed{-12}$

$$x = -17$$

$$4\times x=20 \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 4\times x&=20\\ x&=20\div 4\\ x&=5\end{aligned}$$

(divide-se por 4) $\boxed{\div 4}$ $\boxed{\div 4}$

$$x = 5$$

$$x\div\frac{1}{3}=5 \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x\div\frac{1}{3}&=5\\ x&=5\times\frac{1}{3}\\ x&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{multiplica-se por }\frac{1}{3}\right)$ $\boxed{\times\frac{1}{3}}$ $\boxed{\times\frac{1}{3}}$

$$x = \frac{5}{3}$$

Se adicionarmos o mesmo termo a ambos os membros de uma equação, obtemos outra equação equivalente à dada.
Se multiplicarmos ou dividimos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à dada.
Se mudarmos um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal, obtemos uma equação equivalente à dada.

Vamos resolver a equação que se segue:

$$\begin{aligned} 2x&=-21-5x\\ 2x+5x&=-21-5x+5x\\ 7x:7&=-21\div 7\\ x&=-3\end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2x&=-21-5x\\ 2x+5x&=-21\\ 7x&=-21\\ x&=-21\div 7\\ x&=-3\end{aligned}$$

Conclusão:

Adicionar (+ 5x) a ambos os membros da equação é o mesmo que mudar o termo (– 5x) do segundo membro para o primeiro, trocando-lhe o sinal.

Numa equação podemos mudar um termo de um membro para o outro se lhe trocarmos o sinal.

A Cacilda resolveu a seguinte equação, que a sua professora escreveu no quadro, da forma que se segue:

$4x + 12 = 18$
$x + 12 = 18 - 4$
$x + 12 = 14$
$x = 14 - 12$
$x = 2$

1. Verifica, por substituição, se 2 é solução da equação.
2. Encontra o erro da Cacilda.
3. Resolve a equação correctamente.

Resolução:

1. $4 \times (2) + 12 = 18$
   $8 + 12 = 18$
   $16 = 18$
   2 não é solução da equação.
2. A 2.ª equação está incorrecta. A Cacilda passou o 4 para o 2.º termo trocando-lhe o sinal. Este termo estava a multiplicar no 1.º termo, logo nunca poderia ter passado a somar, trocando-lhe o sinal.
3. $4x + 12 = 18$
   $4x = 18 - 12$
   $4x = 6$
   $\frac{4x}{4} = \frac{6}{4}$
   $x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Actividades

1. Resolve cada uma das seguintes equações:

1.1 $2 + x = 8$

1.2 $\frac{x}{3} = -6$

1.3 $12x - 4 = 3$

1.4 $4x + 2 = 14$

1.5 $x + 2 = 4 + 2x - 8$

1.6 $20x + 6 = 2x - 4$

1.7 $12x + 2 = 8$

1.8 $x + 4 = 2x - 8$

1.9 $20x + 5 = 15$

1.10 $16x + 4 = 8x - 16$

1.11 $16x - 8x = -16 - 4$

1.12 $22x + 4 = -2x - 2$

1.13 $15x + 20 = 25$

1.14 $36x + 6 = -30$

1.15 $100x + 75 = -150x - 25$

1.16 $12x - 4 = -24x + 26$

1.17 $-48x + 12 = -24$

Tema B Estatística

Nota histórica

A utilização da Estatística para estudar assuntos de Estado remonta a tempos muito antigos.

O Livro IV do Antigo Testamento refere que Moisés foi instruído por Deus para fazer um levantamento dos homens de Israel que estivessem aptos a guerrear. Também na época do Imperador César Augusto foi ordenada a realização de um censo em todo o Império Romano.

No século XVII, a Estatística sofre um grande desenvolvimento com a contribuição de estudiosos Alemães e Ingleses. De entre eles, destaca-se John Graunt (1620-1674) que realizou a primeira investigação estatística sobre a mortalidade, como consta de uma memória que apresentou à Real Sociedade de Londres em 1661. A partir dessa altura a Estatística não mais deixou de se desenvolver, atingindo hoje em dia a generalização a quase todos os campos da actividade humana.

Importância da Estatística

A Estatística é cada vez mais reconhecida como importante parte na vida de todos os dias.

A Estatística proporciona o desenvolvimento das capacidades para formular e resolver problemas e facilita também a manifestação do espírito crítico, introduzindo rigor na comunicação.

A partir do século XIX, com o intuito de melhor conhecerem a população e as suas necessidades, os governos de quase todos os países, recorrem à Estatística.

O INE (Instituto Nacional de Estatística de Angola) tem a seu cargo a tarefa de elaboração de estudos estatísticos, de modo a informar o governo sobre as mais variadas características do povo.

Um estudo estatístico pode ser um recenseamento ou uma sondagem.

A maior parte dos estudos estatísticos são sondagens. Numa sondagem faz-se um estudo estatístico, usando apenas uma parte finita do universo total de pessoas, instituições ou objectos, com o objectivo de estudar uma ou mais características tal como elas se apresentam no universo considerado.

Nas eleições nacionais ou autárquicas as sondagens são muito utilizadas para fornecerem informações acerca da forma como os candidatos aos cargos políticos se posicionam perante a opinião pública e como devem orientar os seus discursos com o objectivo de atingir a vitória.

Assim, pode dizer-se que a Estatística é uma Ciência que tem por objectivo fornecer as técnicas para tirar conclusões a partir de dados, com vista a obter uma melhor compreensão das situações que representam.

Para que os dados fornecidos por uma sondagem sejam credíveis é necessário que a amostra seja bem seleccionada.

População e amostra

As **tabelas** e os **gráficos** são formas de resumir as informações obtidas nos mais diversos ramos de actividade.

Para construir tabelas e gráficos deve, em primeiro lugar, proceder-se à recolha de dados. Em certos estudos estatísticos é muito fácil obter dados com segurança, por exemplo, saber no universo de uma turma:

- A idade dos alunos.
- A altura dos alunos.
- O sexo.
- O número de irmãos ou irmãs.
- A profissão.

Mas há outros estudos em que não é muito fácil obter dados seguros. Por exemplo, saber qual é o músico angolano preferido em Angola. Em casos como estes não é possível inquirir toda a população. Por isso, desenvolveram-se técnicas de selecção de uma parte da população a que se chama «amostra». Estuda-se a amostra e generaliza-se à população.

Chama-se população a um conjunto de elementos do qual se estudam as propriedades.
Amostra é o subconjunto finito da população.

Quando num estudo estatístico se usa uma amostra, existe sempre uma margem de erro. O sucesso do estudo de uma amostra depende da escolha da mesma. Se a amostra fôr mal escolhida, obtêm-se resultados muito diferentes da realidade.

B.1 APROFUNDAMENTO DOS CONHECIMENTOS DA 6.ª CLASSE

B.1.1 RECOLHA DE DADOS

Toma como exemplo o seguinte caso:

No início do ano lectivo, o Director de uma Escola do 1.º Ciclo do Ensino Secundário perguntou a 27 alunos a sua idade, tendo registado os seguintes **dados**:

12, 14, 16, 13, 12, 12, 16, 15, 14

14, 12, 13, 14, 15, 13, 12, 16, 13

14, 15, 13, 16, 15, 13, 12, 13, 16

Os 27 alunos constituem o **universo estatístico ou população** em que se trabalhou.

A partir deste quadro podemos determinar com facilidade o número de alunos que tiver a idade 12?

De acordo com os dados apresentados, não é fácil responder a esta pergunta.

Porém, vamos procurar organizá-los.

B.1.2 ORGANIZAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE DADOS

Tabelas de distribuição de frequências

Na resolução dos problemas que se apresentam em Estatística, após a recolha dos dados, estes têm de ser analisados. Para o efeito, é necessário apurar o que vamos dar em seguida.

Frequências absolutas

Tendo a informação de quantos alunos existem para cada idade, é possível determinar as «frequências absolutas» de cada valor da variável, tomando o valor entre 12 e 16.

Frequência absoluta de um valor x é o número de vezes que o valor aparece na lista de dados. Representa-se por f.

Para facilitar a contagem do números de vezes que cada idade aparece, conta-se em grupos de cinco traços: quatro verticais e o último sobre os outros quatro.

Frequências Absolutas das idades

Idades	Contagem	Frequências absolutas
12	~~IIII~~ I	6
13	~~IIII~~ II	7
14	~~IIII~~	5
15	IIII	4
16	~~IIII~~	5
Total		27

Frequências relativas

Frequência relativa do valor x é o quociente entre a frequência absoluta de x e o número total de dados (n). Representa-se por fr.

$$\text{Frequência relativa} = \frac{\text{Frequência Absoluta}}{\text{Número total de elementos}}$$

$$fr = \frac{f}{n}$$

Na tabela seguinte estão representadas as frequências relativas dos valores dados.

Idades	Frequências absolutas	Frequências relativas	Percentagens %
12	6	6/27 = 0,222	22,2
13	7	7/27 = 0,259	25,9
14	5	5/27 = 0,185	18,5
15	4	4/27 = 0,15	15
16	5	5/27 = 0,185	18,5
Totais	27	≈ 1	100

Frequências acumuladas

Frequência absoluta acumulada do valor x é a soma das frequências absolutas de todos os valores anteriores a x, adicionada a frequência absoluta de x. Representa-se por F.

Frequência relativa acumulada do valor x é a soma das frequências relativas de todos os valores anteriores a x adicionada à frequência relativa de x. Representa-se por Fr.

Nas seguintes tabelas estão representadas as frequências acumuladas relativamente aos valores dados.

Idades	f	fr	F	Fr
12	6	0,222	6	0,222
13	7	0,259	13	0,481
14	5	0,185	18	0,666
15	4	0,15	22	0,816
16	5	0,185	27	$1{,}001 \approx 1$
Totais				

Pode verificar-se que a última casa de uma tabela de frequências absolutas acumuladas é sempre igual ao número de elementos da população.

Procura resolver os seguintes exercícios:

1. O Daniel estava na paragem da Igreja Santo António e começou a contar o número de passageiros que desciam dos autocarros que se dirigiam a São Paulo.

Registou os seguintes valores:

4 3 2 5 3 3 6

1 3 5 5 3 3 2

1.1 Constrói a tabela de frequências absolutas, relativas e acumuladas para este conjunto de dados e tira conclusões.

Agrupamento de dados em classes

No início do ano lectivo mediu-se a altura dos alunos da 7.ª classe A. Constatou-se que as alturas situam-se entre 136 cm e 164 cm.

Neste caso, a contagem física ficaria facilitada se se agrupassem em classes, por exemplo, de 5 cm de amplitude.

Assim, a primeira classe a considerar é de 135 a 140, incluindo o primeiro e excluindo o segundo, ou seja o intervalo [135; 140[.

As alturas registadas foram as seguintes:

139 138 157 140 137 160 143 147

159 160 139 152 138 151 137 142

153 136 161 164 158 143 162 152

A partir destas medidas procede-se à contagem e à elaboração do quadro.

Alturas dos alunos da 7.ª classe A

Alturas em centímetros	Contagem	Frequências absolutas acumuladas	Frequências relativas	Frequências relativas acumuladas
[135;140[	~~IIII~~ II	7	7/24	7/24
[140;145[	IIII	11	4/24 = 1/6	11/24
[145;150[	I	12	1/24	12/24
[150;155[	IIII	16	4/24 = 1/6	16/24 = 2/3
[155;160[	III	19	3/24 = 1/8	19/24
[160;165[	~~IIII~~	24	5/24	24/24 = 1

Tendo por base este quadro, procura responder às seguintes perguntas:

1. Quantos alunos têm menos de 155 cm?

2. Quantos são os que têm pelo menos 160 cm?

3. Qual a classe com maior número de alunos?

4. Qual a percentagem de alunos com alturas entre 150 cm e 160 cm?

5. Qual é a classe com menor percentagem de alunos?

Solução:

A simples leitura do quadro permite responder a estas questões:

1. Há 16 alunos com menos de 155 cm.

2. Dois alunos.

3. A classe com maior número de alunos é [135;140[.

4. A percentagem de alunos com alturas entre 150 cm e 160 cm é 29,1%.

5. As classes com menos alunos são [145; 150[e [155; 160[.

Procura resolver os exercícios que te propomos à medida que expomos a matéria e confirma depois se sabes, consultando as soluções na **página 140.**

1. As alturas registadas dos alunos da 7.ª classe B são as seguintes:

138 142 157 149 161 137 143 150

159 160 152 155 141 147 153 154

146 144 163 161 152 158 148 154

148 156

1.1 Organiza um quadro com os dados agrupados em classes com 5 cm de amplitude.

1.2 Completa o quadro com os seguintes dados: contagem, frequências absolutas e acumuladas, frequências relativas e acumuladas.

2. De um grupo de 20 alunos procurou saber-se qual o número de sapatos que os alunos calçam.
Os dados obtidos foram os seguintes:

30 25 28 30 26 32 25 28 32 30

30 33 25 26 30 33 25 28 30 29

2.1 Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas.

3. Quatro amigos, Pedro, Afonso, Isabel e Diogo estiveram a jogar aos dados. Cada um fez 10 lançamentos. Os resultados dos lançamentos foram anotados na tabela seguinte:

Pedro	3 2 5 6 1 3 3 4 3 1
Afonso	5 4 1 3 1 5 3 2 1 6
Isabel	1 1 3 1 5 6 2 2 4 4
Diogo	6 4 4 3 4 6 2 5 4 1

3.1 Quem marcou mais pontos?

3.2 Qual foi o número que saiu mais vezes?

3.3 Quem marcou menos pontos?

4. O Pedrito esteve na berma de uma estrada, próxima de sua casa, para contabilizar as cores das viaturas que por ali passavam. A contagem feita pelo Pedrito foi a seguinte:

Branco	IIIIIIIIIIIIII
Cinzento	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
Vermelho	IIIIIIIIIIIIIIIIII
Verde	IIIIIIII
Preto	IIII
Azul	IIIIIIIIIIIIIII

4.1 Escreve, numa tabela, as frequências absolutas e as frequências relativas das cores observadas.

4.2 Qual é a cor da viatura que apareceu mais vezes?

4.3 Qual é a cor que apareceu menos vezes?

4.4 Quantas viaturas contou o Pedrito?

5. No restaurante da Dona Maria cozinha-se os seguintes pratos:

- Funge de calulú;
- Arroz com frango;
- Arroz com carne;
- Batata frita com churrasco;
- Massa com bife;
- Sopa;
- Cozido à portuguesa.

Estes pratos são servidos de segunda a sábado. Registando os pratos comidos diariamente, obtemos a tabela seguinte:

Pratos	Seg.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sáb.
Funge de calulú	12	15	13	10	16	18
Arroz com frango	6	3	9	7	1	12
Arroz com carne	4	6	10	1	5	3
Batata frita com churrasco	10	5	6	8	7	15
Massa com bife	2	4	3	6	1	12
Sopa	2	4	7	15	2	12
Cozido à portuguesa	10	8	3	2	5	6

5.1 Constrói a tabela de frequências absolutas e a tabelas de frequências relativas dos pratos que se comeram durante toda semana.

5.2 Qual é o prato preferido?

5.3 Qual o prato menos pedido?

As tabelas também podem ajudar a resolver problemas simples do dia-a-dia, como por exemplo:

6. A Tatiana vende refrigerantes, mas tem algumas dificuldades em saber como fazer a encomenda de modo a que, aos seus clientes, nunca faltem as variedades preferidas.

Ela vende os seguintes refrigerantes: refrigerante de morango, de laranja, de ananás, coca-cola, limonada e água tónica. Durante a semana e no final de cada dia a Tatiana registou o número de refrigerantes de cada variedade vendidos. No final da semana tinha o seguinte registo:

Variedade	Seg.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sáb.	Total
Morango	10	15	16	9	18	17	85
Laranja	5	12	15	19	20	8	79
Ananás	13	9	11	14	21	24	92
Coca-Cola	5	3	15	6	8	9	46
Limonada	6	10	4	5	7	8	40
Água-tónica	15	5	16	11	5	15	67

6.1 Representa, numa tabela, as frequências absolutas e relativas e as frequências acumuladas.

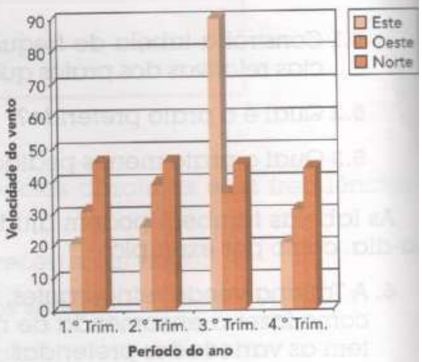
6.2 Tira as respectivas conclusões.

B.2 GRÁFICOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO

Quando pretendemos evidenciar as diferentes modalidades de um atributo qualitativo, usamos gráficos circulares, pictogramas ou gráficos de barras.

B.2.1 GRÁFICO DE BARRAS

O gráfico ao lado chama-se gráfico de barras e ilustra a velocidade do vento registada ao longo do ano.



O gráfico de barras é uma forma de apresentar dados por meio de barras e é construído mantendo constante a largura das barras e fazendo variar a altura de acordo com a respectiva frequência, quer absoluta, quer relativa

Para representar um dado por meio de barras utiliza-se um **sistema de eixos perpendiculares**. No eixo horizontal assinalam-se os valores possíveis da variável. No eixo vertical, as frequências absolutas ou relativas. Sobre cada valor da variável desenham-se rectângulos (barras) de área proporcional às frequências.

Para ler um gráfico de barras, deve proceder-se da seguinte forma:

1.º Ler o título para conhecer o assunto tratado.

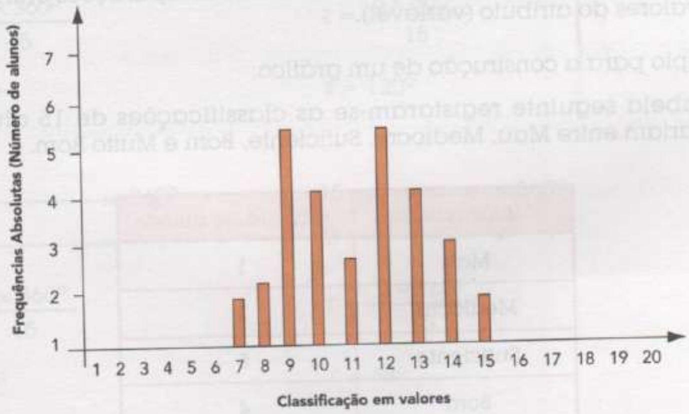
2.º Ler o que cada um dos eixos indica.

3.º Observar como é que o eixo está graduado.

4.º Determinar o número representado por cada barra, lendo no eixo o número que corresponde ao seu comprimento.

Exemplo:

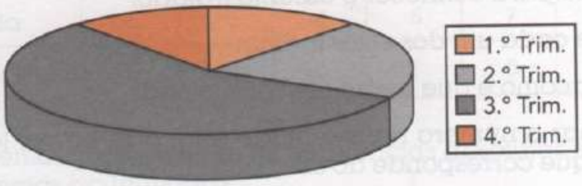
Vamos representar as notas obtidas pelos alunos da 7.ª classe A, através de um gráfico de barras.



B.6.2 GRÁFICO CIRCULAR

Um gráfico circular é representado por um círculo que está dividido em sectores, cujas amplitudes são proporcionais à frequência correspondente.

Para construir o gráfico circular tem de conhecer-se a amplitude d cada ângulo ao centro que define o sector circular correspondente. O tot dos valores corresponde ao círculo que é um ângulo ao centro com un amplitude de 360°.



Desenho de um gráfico circular.

Geralmente, o desenho gráfico circular utiliza-se quando o número categorias para a variável é pequeno (normalmente, menor ou igual a e é especialmente adequado para estabelecer comparações entre os di rentes valores do atributo (variável).

Exemplo para a construção de um gráfico:

Na tabela seguinte registaram-se as classificações de 15 alunos, quais variam entre Mau, Medíocre, Suficiente, Bom e Muito Bom.

Classificação	Número de alunos
Mau	1
Medíocre	3
Suficiente	5
Bom	4
Muito Bom	2

Vamos aprender a construir o respectivo gráfico circular.

Para obter o ângulo ao centro correspondente a cada frequência, estabelecem-se regras de três simples.

Alunos	Graus
15 →	360°
3 →	x

$$x = \frac{3 \times 360^\circ}{15} \qquad x = 72^\circ$$

Assim, os alunos com a classificação de Mediocre serão representados por um sector circular a que corresponde um ângulo ao centro de 72°.

Seguindo a mesma regra, obtêm-se os restantes resultados:

$15 \longrightarrow 360^\circ$

$1 \longrightarrow j$

$$j = \frac{1 \times 360^\circ}{15}$$

$j = 24^\circ$

$15 \longrightarrow 360^\circ$

$5 \longrightarrow z$

$$z = \frac{5 \times 360^\circ}{15}$$

$z = 120^\circ$

$15 \longrightarrow 360^\circ$

$4 \longrightarrow t$

$$t = \frac{4 \times 360^\circ}{15}$$

$t = 96^\circ$

$15 \longrightarrow 360^\circ$

$2 \longrightarrow r$

$$r = \frac{2 \times 360^\circ}{15}$$

$r = 48^\circ$

À classificação Mau corresponde um ângulo de 24°, ao Medíocre um de 72°, ao Suficiente um de 120°, ao Bom um de 96° e ao Muito Bom um de 48°

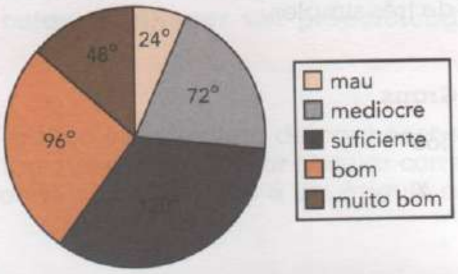


Gráfico circular das notas registadas pelos 15 alunos.

Na elaboração de gráficos circulares deve ter-se em atenção o seguinte

- O gráfico deve ter um título.
- A área de cada sector é proporcional à frequência.
- A legenda pode ser inserida no interior de cada sector, assim como percentagem ou a frequência absoluta.

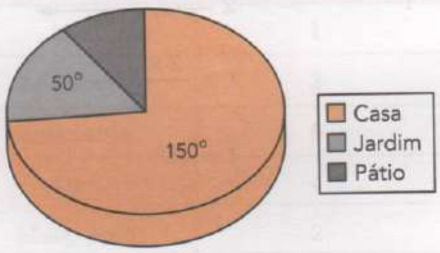
Procura, agora, resolver mais este grupo de exercícios, conferindo as soluções respectivas na página 142.

Relativamente a gráficos de uma distribuição:

7. Num quintal de 720 m², foi construída uma casa e o restante terreno foi reservado para o jardim e o pátio.

O gráfico circular indica a área correspondente às três partes do quintal.

7.1 Calcula a área do pátio.



8. Na turma da 7.ª classe, 2 alunos têm 16 anos; 8 têm 15 anos; 5 têm 12 anos; 10 têm 13 anos; 7 têm 14 anos.

8.1 Constrói uma tabela de frequências absolutas e acumuladas.

8.2 Representa as frequências absolutas através de um gráfico de barras.

9. Numa turma, perguntou-se a cada aluno a sua idade. Os dados recolhidos foram resumidos na seguinte tabela.

Idade (em anos)	Contagem
12	|||| ||
13	|||| |||
14	|||| ||||
15	||||
16	|||
17	|

9.1 Completa a tabela acima com frequências absolutas acumuladas e frequências relativas acumuladas.

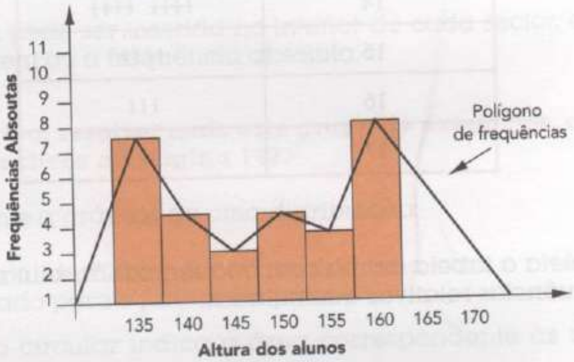
8.2.3 HISTOGRAMAS

Um histograma é um gráfico de barras que representa uma distribuição relativa a uma variável contínua.
Este gráfico é constituído por rectângulos cujas áreas representam os efectivos ou frequências das classes.

O histograma tem as seguintes características:

- Deve ter um título.
- Os dados estão agrupados em classes (variável contínua ou discreta).
- A área da barra é proporcional à frequência.
- Os diferentes valores da variável estão representados no eixo horizontal que está dividido numa escala contínua como um eixo cartesiano.
- No eixo vertical estão representadas as frequências das classes.
- As barras são desenhadas verticalmente e correspondem a cada uma das classes em que os valores foram agrupados.
- Não há espaços entre as barras.

Vamos apresentar as alturas dos alunos da 7.ª classe B num histograma.



Polígono de frequências

Unindo os pontos médios de cada uma das bases superiores dos rectângulos do histograma através de um segmento de recta, obtém-se uma outra representação gráfica: **«o Polígono de Frequências»**.

Resolve mais este grupo de exercícios que te propomos e testa os teus conhecimentos, consultando as soluções nas páginas 143 a 145.

10. Numa turma de 22 alunos o professor recolheu os seguintes dados:

Nome do aluno	Nº de irmãos	Nome do aluno	Nº de irmãos
Costa	5	Matondo	4
Afonso	3	Laura	1
Daniel	7	Jamira	6
Makiesse	4	Suzana	4
Roberto	6	Sandra	1
Jaqueline	9	Cláudia	5
Pedro	7	Lito	4
Helder	4	Casimiro	5
Milton	3	Diogo	2
André	1	Celina	8
Dias	2	Maria	4
Isabel	6		

10.1 Constrói a tabela de frequências absolutas e relativas.

10.2 Representa os dados num gráfico de barras.

11. Num jogo, ao lançar-se 20 vezes um dado, obtiveram-se os seguintes resultados:

5, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 6, 6, 2, 5, 5, 1, 1, 3, 3, 1, 2, 1.

11.1 Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas.

11.2 Representa, em forma de percentagem, os resultados obtidos.

11.3 Constrói o gráfico de frequências acumuladas.

12. Foi feito um inquérito entre alunos da 7.ª classe de uma escola, para saber quanto tempo gastavam (em minutos) no percurso casa-escola. Os resultados foram agrupados na tabela de frequência que se segue:

Tempo gasto no percurso casa-escola	Nº de alunos (frequência) absoluta
Menos de 5 minutos	4
Entre 5 e 10 minutos	7
Entre 10 e 20 minutos	16
Entre 20 e 25 minutos	19
Entre 25 e 30 minutos	8

12.1 A partir destes dados constrói o gráfico de barras.

12.2 Quanto demora a maior parte dos alunos a chegar à escola?

12.3 Qual é a demora menos frequente no percurso?

13. Dada a seguinte tabela das frequências absolutas das notas dos alunos duma turma da 7.ª classe, resolve as questões.

Notas	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
7	1	1
8	3	3 + 1 = 4
9	3	3 + 4 = 7
10	8	8 + 7 = 15
11	4	4 + 15 = 19
12	4	4 + 19 = 23
13	5	5 + 23 = 28
14	4	4 + 28 = 32
15	3	3 + 32 = 35
16	1	1 + 35 = 36
Total	36	

13.1 Completa a tabela com as frequências relativas e as suas percentagens respectivas.

13.2 Constrói o gráfico das frequências relativas.

B.3 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

A **média**, a **mediana** e a **moda** já foram estudadas na 6.ª classe. A estas medidas chamam-se **medidas de localização** ou **medidas de tendência central**, pois representam os fenómenos pelos seus valores centrais. São simples valores numéricos que são usados para representar, de uma forma global, o conjunto de dados.

Eles funcionam como um centro para todos os dados, de modo a serem utilizados para os representar.

Exemplo:

O Luís obteve as seguintes notas em Matemática durante os testes do primeiro trimestre:

7, 3, 5, 6, 4, 7, 5, 7, 10.

Com estes dados vamos aprender a calcular a média, a mediana e a moda.

Média

$$\text{Média} = \frac{7+3+5+6+4+7+5+7+10}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

6 é a média. A média representa-se por $\overline{x}$. Logo, $\overline{x} = 6$.

A média de um conjunto de dados numéricos obtém-se dividindo a soma do valor de dados pelo número total de dados.

Por vezes os valores repetem-se, por exemplo:

$$\frac{3+6+4+2\times 5+3\times 7+10}{9} = 6$$

O número de vezes que o valor se repete é designado por **«peso»** ou **«coeficiente de ponderação»**, daí este cálculo ser conhecido por **«média ponderada ou média pesada»**.

Mediana

Mediana é o valor que ocupa a posição central num conjunto de valores ordenados de modo crescente ou decrescente.

A mediana obtém-se do seguinte modo:

1.º Escreve-se os dados por ordem crescente: 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 10;

2.º Retira-se de cada lado um valor de cada vez. No exemplo anterior, retirando quatro valores de cada lado, fica o 6.
O valor 6 chama-se mediana. A mediana representa-se por $\tilde{x}$ ou Md.
Mas se tivermos um número par de dados, por exemplo, 7, 3, 5, 6, 7, 5, 7, escrevendo por ordem crescente os dados e retirando de cada lado o mesmo número de dados, ficamos com dois valores: 5 e 6.
3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7,

$$x = \frac{5 + 6}{2} = 5{,}5$$

Para calcular a mediana, começa-se por escrever os dados por ordem crescente ou decrescente.
Se o número de dados for ímpar, a mediana é o valor do dado que ocupa a posição central. Se o número de dados for par, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais.

Moda

O Senhor Domingos vende sapatilhas azuis, brancas e castanhas. As cores estão representadas pelas letras: azuis (a), brancas (b), castanhas (c).

O número de sapatilhas vendidas é dado pela seguinte lista:

a, a, b, b, c, c, b, b, b, a, b, c, a.

Ao contar o número de sapatilhas vendidas consoante a cor, podes ob-
ervar que o Sr. Domingos vendeu mais sapatilhas de cor branca.

Isto significa que as sapatilhas brancas estão na moda, por isso, a moda
a sapatilha branca.

Agrupamos o número de cada cor e obteremos o seguinte registo:

Azul (a)	Branca (b)	Castanha (c)
4	6	3

Através dos dados apresentados, verificas que o valor que aparece com
naior frequência é o 6.

Chama-se moda de um grupo de dados, ao dado que ocorre com maior frequência. A moda apresenta-se por Mo.

Moda
- **na tabela de frequências absolutas ou relativas, é o elemento que apresenta o maior valor para a frequência.**
- **no registo de barras, é o elemento que apresenta a maior barra.**
- **no diagrama circular, é o elemento que tem o maior sector.**

Uma distribuição diz-se bimodal no caso de ter duas modas e diz-se multimodal, caso tenha mais do que duas modas. Se a distribuição não tem moda, diz-se amodal.

- Exemplo 1:

Dados
7, 8, 5, 4, 7, 6, 8, 5 — A moda é 5. 8 é a bimodal.

- Exemplo 2:

5, 9, 4, 6, 7, 8, 3, — Não tem moda (amodal).

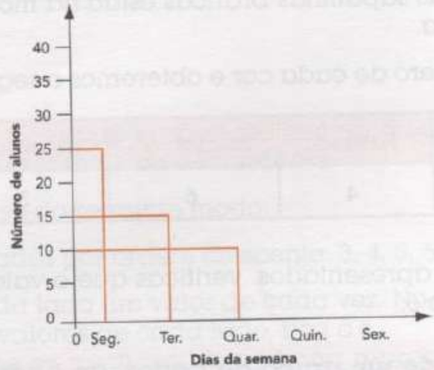
Resolve os exercícios abaixo e vê se sabes a matéria, comparando as tuas respostas com as soluções da página 140.

14. Um grupo de quatro trabalhadores recebe em média Kz 2000,00 e dezasseis trabalhadoras recebem Kz 1500,00.

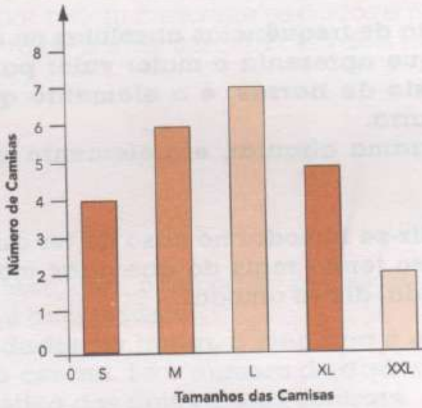
14.1 Quanto recebem os trabalhadores e as trabalhadoras?

14.2 Qual é a quantia média que a empresa paga às trabalhadoras?

15. Observa o gráfico seguinte que ilustra o número de alunos presentes na sala de aula de segunda a sexta-feira e, de acordo com os dados, indica o número de alunos presentes na terça-feira.



16. Observa o gráfico que representa a venda de camisas, segundo o seu tamanho.



16.1 Quantas camisas foram vendidas ao todo?

16.2 Qual o tamanho de camisas que mais se vendeu?

16.3 Qual a designação estatística da alínea anterior?

16.4 Qual é o tamanho mediano do conjunto de dados?

16.5 Constrói uma tabela de frequências relativas, em percentagem, de acordo com os dados do gráfico.

17. Calcula a média dos seguintes números:

17.1 5, 6, 3, 2, 0, 4.

17.2 1, 3, 2, 4, 3, 4, 5, 4.

17.3 30%, 50%, 20%, 70%, 30%

17.4 $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{15}, \frac{5}{6}$

18. Calcula a mediana dos seguintes conjuntos de dados:

18.1 5, 3, 4, 5, 4, 2, 1

18.2 5, 5, 4, 5, 4, 4, 2, 1

18.3 8, 7, 5, 5, 13, 16, 9

19. Indica a moda dos seguintes conjuntos:

19.1 3, 4, 4, 5, 6

19.2 a, e, i, i, i, o, u

19.3 5, −10, −7, 5, 6, 5, 1, 5

20. Num parque de carros entraram em 6 dias, o seguinte número de viaturas.

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
6	5	8	8	9	12

20.1 Determina a média, a mediana e a moda.

21. Indica a moda dos seguintes conjuntos de dados:

21.1 a, b, c, d, a, o, c, a, i

21.2 −2, 1, 2, −3, −2

21.3 1, 2, 2, 3, 2, 1, 0

22. Determina a média, a mediana e a moda dos seguintes conjuntos de números:

22.1 6, 6, 7, 8, 1, 4, 5, 5

22.2 4, 0, 1, 2, 6, 1, 5, 3, 1

22.3 3, 1, 1, 5, 8, 2, 3, 1, 4

23. Numa viagem de 100 km, um carro gastou em média 0,15 ℓ por km. Quantos litros gastou na viagem?

24. Um inquérito sobre a altura de 50 pessoas produziu os seguintes resultados (em cm):

148	162	156	160	158	165	142	180	181	147
153	150	139	176	178	162	163	174	171	170
162	159	161	163	161	170	188	157	165	167
160	163	158	157	159	170	171	168	156	154
150	158	156	152	160	172	173	180	157	159

24.1 Classifica estes dados em classes de 5 cm [135; 140[

24.2 Calcula as frequências absolutas e relativas.

24.3 Calcula as frequências acumuladas.

25. Uma empresa organizou um teste para preenchimento dos seus quadros. Apresentaram-se 50 candidatos. A cotação era de 20 valores. Os resultados obtidos foram os seguintes:

3	10	8	12	13	9	12	12	11	
11	11	15	13	14	14	6	12	16	
7	11	10	10	2	15	12	10	1	14
11	7	8	10	13	9	13	9	7	13
11	19	9	4	10	8	9	6	7	14

25.1 Representa os resultados, agrupando-os em classes de 5 valores.

25.2 Calcula as frequências absolutas e relativas.

25.3 Calcula as frequências acumuladas.

25.4 Quantos candidatos obtiveram notas compreendidas entre 5 e 20?

25.5 Qual a proporção dos candidatos que obtiveram uma nota menor do que 10 e maior ou igual a 15?

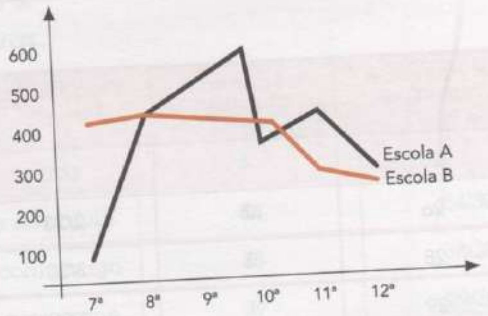
26. Alusivo ao aniversário da Jornada da Juventude, organizou-se uma actividade desportiva para as festas locais. Perguntou-se a 130 alunos qual das actividades propostas era a preferida. Na tabela seguinte encontram-se as resposta obtidas:

Basquetebol	44
Futebol	53
Andebol	20
Natação	13
Total	130

Constrói um gráfico circular que mostre a informação obtida.

27. Observa o seguinte gráfico que mostra como se distribuem, por anos, os alunos de duas escolas de uma cidade.

27.1 Qual das duas escolas tem mais alunos na 11.ª classe?



27.2 Na 8.ª classe, quantos alunos tem a escola B a mais do que a escola A?

27.3 Representa numa tabela, o número de alunos de cada escola, em cada ano.

27.4 Calcula o número total de alunos que frequentam cada uma das escolas.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

1.1 As alturas situam-se entre 137 e 163. Agrupamos em classes de 5 cm de amplitude.

Alturas dos alunos da 7.ª classe

Altura em centímetros	Contagem	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[135;140[	II	2	2	2/26	2/26
[140;145[	IIII	4	6	4/26	6/26
[145;150[	~~IIII~~	5	11	5/26	11/26
[150;155[	~~IIII~~ I	6	17	6/26	17/26
[155;160[	~~IIII~~	5	22	5/26	22/26
[160;165[	IIII	4	26	4/26	26/26

2.1

Número de sapatos	Frequência absoluta	Frequência relativa
25	4	4/20
26	2	2/20
28	3	3/20
29	1	1/20
30	6	6/20
32	2	2/20
33	2	2/20
	total = 20	

3.1 O Diogo com 39 pontos.

3.2 O número que saiu mais foi o 1.

3.3 A Isabel, com 29 pontos.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

4.1

Cores observadas	Contagem	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa
Branco	卌 卌 ||||	14	14	14/81
Cinzento	卌 卌 卌 卌 ||	22	36	36/81
Vermelho	卌 卌 卌 |||	18	54	54/81
Verde	卌 |||	8	62	62/81
Preto	||||	4	66	66/81
Azul	卌 卌 卌	15	81	81/81=1

4.2 Cinzento

4.3 Preto 4,8 %

4.4 81 viaturas.

5.1

Pratos	Frequência absoluta	Frequência relativa
Funge de calulú	84	84/306
Arroz com frango	38	38/306
Arroz com carne	29	29/306
Batata frita com churrasco	51	51/306
Massa com bife	28	28/306
Sopa	42	42/306
Cozido à portuguesa	34	34/306

5.2 O prato preferido é o funge de calulú.

5.3 O prato menos pedido é a massa com bife.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

6.1

Variedade	Frequências absolutas	Frequências relativas	Frequências absolutas acumuladas	Frequências relativas acumuladas
Morango	85	85/409	85	85/409
Laranja	79	79/409	164	164/409
Ananás	92	92/409	256	256/409
Coca-cola	46	46/409	302	302/409
Limonada	40	40/409	342	342/409
Água tónica	67	67/409	409	409/409 = 1
Total	409			

6.2 Observando a tabela, a Tatiana concluiu o seguinte:

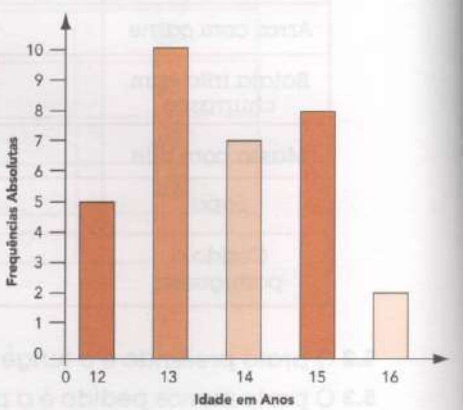
- Os refrigerantes mais vendidos foram o de ananás e o de morango.
- Os menos vendidos foram a limonada e a Coca-cola.

7.1 A área do pátio é de 320 m².

8.1

Idade em anos	Freq. absol.	Freq. absol. acum.	Freq. rel.	Freq. rel. acum.
12	5	5	5/32	5/32
13	10	15	15/32	20/32
14	7	22	22/32	44/32
15	8	30	30/32	74/32
16	2	32	32/32	106/32

8.2



SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

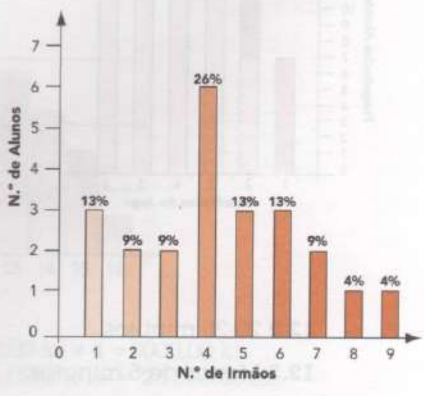
9.1

Idade (anos)	Contagem	Frequências absolutas acumuladas	Frequências relativas acumuladas
12	~~IIII~~ II	7	7/33
13	~~IIII~~ III	15	15/33
14	~~IIII~~ ~~IIII~~	25	25/33
15	IIII	29	29/33
16	III	32	32/33
17	I	33	33/33

10.1

Número de irmãos	Frequências absolutas	Frequências relativas
1	3	3/23 = 0,13
2	2	2/23 = 0,09
3	2	2/23 = 0,09
4	6	6/23 = 0,26
5	3	3/23 = 0,13
6	3	3/23 = 0,13
7	2	2/23 = 0,09
8	1	1/23 = 0,04
9	1	1/23 = 0,04
Total	23	

10.2

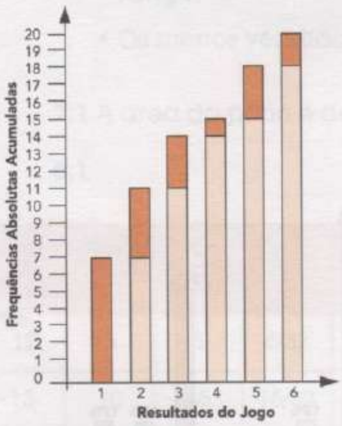


SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

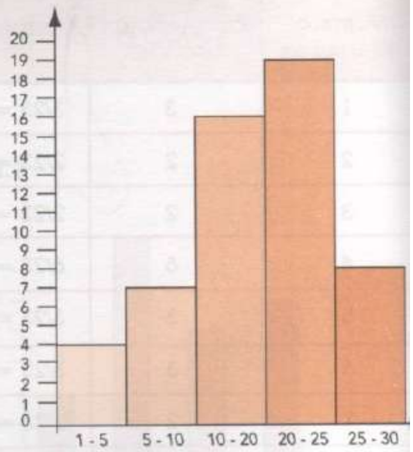
11.1 **11.2**

Resultados do jogo	Frequências absolutas	Frequências relativas	Percentagem	Frequências absolutas acumuladas
1	7	7/20 = 0,35	35%	7
2	4	4/20 = 0,20	20%	11
3	3	3/20 = 0,15	15%	14
4	1	1/20 = 0,05	5%	15
5	3	3/20 = 0,15	15%	18
6	2	2/20 = 0,1	10%	20
Total	20	20/20 = 1	100%	

11.3



12.1



12.2 20-25 minutos

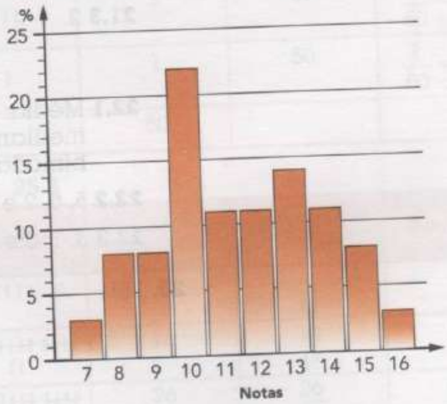
12.3 Menos de 5 minutos.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

13.1

Notas	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa	Percentagens
7	1	1	1/36 = 0,03	3%
8	3	4	3/36 = 0,08	8%
9	3	7	3/36 = 0,08	8%
10	8	15	8/36 = 0,22	22%
11	4	19	4/36 = 0,11	11%
12	4	23	4/36 = 0,11	11%
13	5	28	5/36 = 0,14	14%
14	4	32	4/36 = 0,11	11%
15	3	35	3/36 = 0,08	8%
16	1	36	1/36 = 0,03	3%
Total	36	36	≈ 1,000	≈ 100%

13.2



14.1 Os trabalhadores recebem 2000,00 kz × 4 =8000,00 kz.
As trabalhadoras recebem 1500,00kz × 16 = 24 000,00 kz.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

14.2 A empresa paga 8000,00 kz + 24 000,00 = 32 000,00kz.

15. Na terça-feira houve 15 alunos presentes.

16.1 24 camisas. **16.2** O tamanho L. **16.3** Moda. **16.4** O tamanho L.

16.5

N.º de camisas	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa em percentagem
S	4	4/24	17%
M	6	6/24	25%
L	7	7/24	29%
XL	5	5/24	21%
XXL	2	2/24	8%

17.1 3,33
17.2 3,25
17.3 40%
17.4 0,39

18.1 $\bar{x} = 4,5$
18.2 $\bar{x} = 4,5$
18.3 $\bar{x} = 5$

19.1 Mo = 4
19.2 Mo = 1
19.3 Mo = 5

20. Média = 8
Mediana = 8
Moda = 8

21.1 a
21.2 bimodal –2 e 2
21.3 2

22.1 Média: 5,25; mediana: 4,5; bimodal 5 e 6.
22.2 5, 5, 2 e 1
22.3 3, 1, 3 e 1

23. 15ℓ.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DAS PÁGINAS 121 A 139

24.1; 24.2; 24.3

Alturas	Contagem	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
(135; 140(	I	1	1	$\frac{1}{50} = 0{,}02$	$\frac{1}{50} = 0{,}02$
(140; 145(	I	1	2	$\frac{1}{50} = 0{,}02$	$\frac{2}{50} = 0{,}04$
(145; 150(	II	2	4	$\frac{2}{50} = 0{,}04$	$\frac{4}{50} = 0{,}08$
(150; 155(	IIII	5	9	$\frac{5}{50} = 0{,}10$	$\frac{9}{50} = 0{,}18$
(155; 160(	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	21	$\frac{12}{50} = 0{,}24$	$\frac{21}{50} = 0{,}42$
(160; 165(	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	32	$\frac{11}{50} = 0{,}22$	$\frac{32}{50} = 0{,}64$
(165; 170(	IIII	4	36	$\frac{4}{50} = 0{,}08$	$\frac{36}{50} = 0{,}72$
(170; 175(	~~IIII~~ III	8	44	$\frac{28}{50} = 0{,}56$	$\frac{44}{50} = 0{,}88$
(175; 180(	II	2	46	$\frac{32}{50} = 0{,}64$	$\frac{46}{50} = 0{,}92$
(180; 185(	III	3	49	$\frac{13}{50} = 0{,}26$	$\frac{49}{50} = 0{,}98$
(185; 190(	I	1	50	$\frac{1}{50} = 0{,}02$	$\frac{50}{50} = 1$
Total		50			

25.1; 25.2; 25.3

Limite	Contagem	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada
(0; 5(	IIII	4	$\frac{4}{48}$	4	$\frac{4}{48}$
(5; 10(	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	14	$\frac{14}{48}$	18	$\frac{18}{48}$
(10; 15(	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	26	$\frac{26}{48}$	44	$\frac{44}{48}$
(15; 20(	IIII	4	$\frac{4}{48}$	48	$\frac{48}{48}$

25.4 44 candidatos obtiveram notas compreendidas entre 5 e 20 valores.

25.5 18 candidatos obtiveram notas menores do que 10; 4 candidatos obtiveram notas superiores ou iguais a 15.

26.

Basquetebol $\longrightarrow \dfrac{360° \times 44}{130°} = 122°$

Futebol $\longrightarrow \dfrac{360° \times 53}{130°} = 147°$

Andebol $\longrightarrow \dfrac{360° \times 20}{130°} = 55°$

Natação $\longrightarrow \dfrac{360° \times 13}{130°} = 36°$

27.1 A escola A tem mais alunos na 11.ª classe.

27.2 Nessa classe as escolas têm o mesmo número de alunos.

27.3

Classes	Escola A Número de alunos	Escola B Número de alunos
7.ª	150	400
8.ª	410	410
9.ª	500	400
10.ª	350	390
11.ª	400	280
12.ª	280	250
Total	2090	2130

27.4 A escola A tem 2090 alunos.
A escola B tem 2130 alunos.

Tema C Geometria

C.1 SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

Nota histórica

A Geometria é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e as relações entre pontos, rectas, curvas e superfícies, no plano e no espaço. Etimologicamente, a palavra geometria significa medida (metria) e Terra (geo).

Inicialmente, o estudo desta ciência teve como objectivo a medição (da terra), como foi conhecida no Antigo Egipto, pela necessidade de medir terrenos, pois as cheias do rio Nilo impediam a utilização de marcos de delimitação.

Os nossos antepassados reconheceram e sentiram a necessidade de fazer estudos muito aprofundados sobre a Geometria. Estudos científicos provaram que vários povos se destacaram nesta ciência, entre eles: os Babilónios, os Mesopotâmios e os Egípcios.

Um estudo realizado por esses povos mostrou semelhança dos polígonos, principalmente os triângulos.

C.1.1 AMPLIAÇÃO E REDUÇÃO DE FIGURAS

Existem vários tipos de figuras:

- Figuras semelhantes;
- Figuras iguais;
- Figuras diferentes;
- Figuras semelhantes na linguagem não matemática, ou seja, em linguagem corrente.

Figuras semelhantes: moedas de Kwanzas.

Figuras iguais: abacaxis do mesmo tamanho.

Figuras diferentes: um carro, um camião, uma bicicleta e uma caixa.

Figuras semelhantes na linguagem não matemática: duas figur
muito parecidas, mas com uma diferença entre si.

Duas figuras dizem-se semelhantes quando têm a mesma forma.

É o caso das moedas de Kwanzas, que apenas diferem no tamanho.

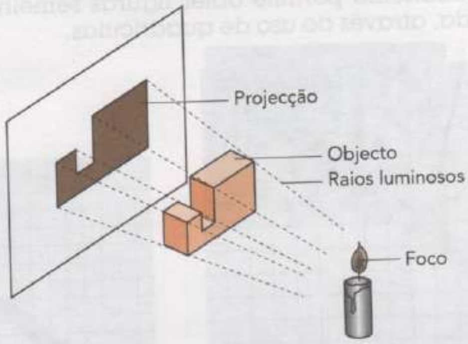
Métodos

Existem outras formas de analisar a semelhança das figuras, nomeadamente através dos seguintes métodos:

- método de projecção;
- método de quadrícula;
- método da homotetia;
- método de pantógrafo.

Método de Projecção

Neste método, utiliza-se um foco de luz e projecta-se a figura.

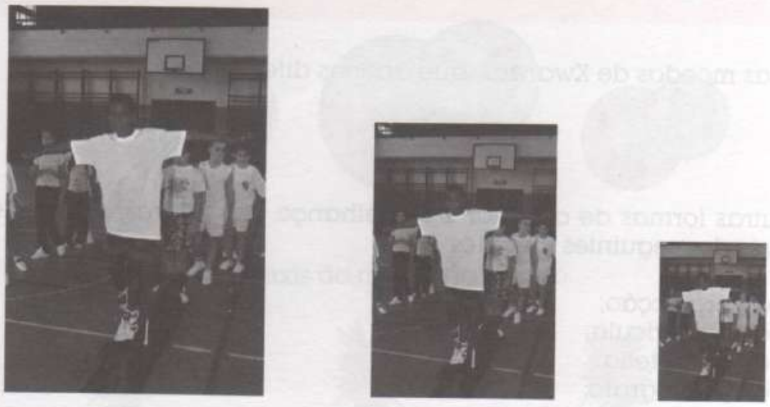


Conclusão:

Duas figuras dizem-se semelhantes quando são geometricamente iguais, ou então, uma delas é a ampliação da outra.

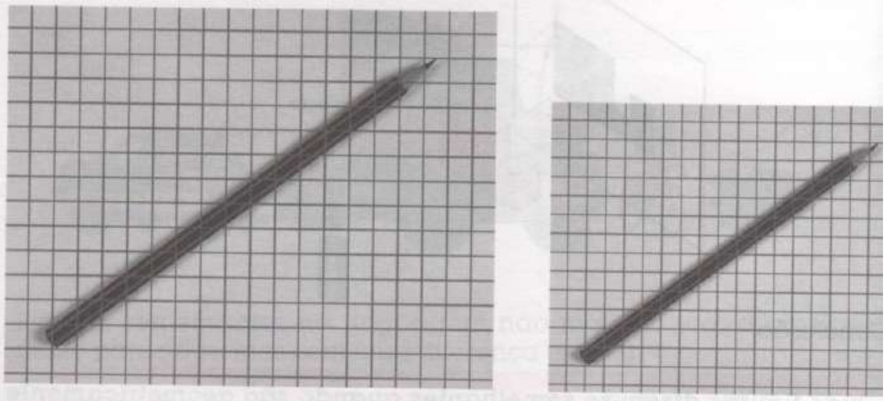
Figuras semelhantes são geometricamente iguais.
Podem obter-se figuras semelhantes por **redução e por ampliação de figuras geometricamente iguais.**

Figuras semelhantes:



Método de quadrícula

O método de quadrícula permite obter figuras semelhantes a deter
nada figura dada, através do uso de quadrículas.



Podes então concluir:

Ao usar uma quadrícula mais pequena obtém-se uma redução da figu
apesar de não se ter afectado o número de quadrículas.

Para consolidares o que aprendeste, observa e verifica se sabes.

1. Usa quadrículas diferentes para obter figuras semelhantes.

Um palhaço.

Figura semelhante à figura anterior, mas ampliada (utilização de uma quadrícula maior).

Figura semelhante às figuras anteriores, mas reduzida (utilização de uma quadrícula menor).

2. Representa no teu caderno figuras semelhantes às que aqui te sugerimos, usando quadrículas de diferentes tamanhos.

Um carro.

Um vaso.

Método da Homotetia

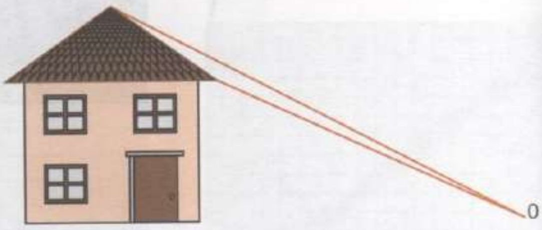
• Figuras rectilíneas

A palavra «homotetia», de origem grega, significa «mesma posição».
Em Matemática podem obter-se figuras semelhantes, mantendo-se mesma forma e a mesma posição.

Vê o seguinte exemplo, procurando executar o exercício.

1.º Desenha no teu caderno uma casa, de modo a que a parte superi seja um triângulo e a parte inferior um rectângulo.

2.º Traça um ponto qualquer exterior à casa. (0)



3.º A partir do ponto 0, traça rectas que passem pela casa.
Decerto que as rectas tocam a casa em determinados pontos.

4.º Marca os pontos como sendo A, B e C.

5.º Com um compasso, marca os pontos A', B' e C'.

6.º Unindo os pontos A', B' e C', obténs a nova figura, que é semelha a A, B e C.

• Figuras não rectilíneas

Para o exemplo da homotetia de figuras não rectilíneas, pode considerar-se uma árvore.

1.° Desenha, no teu caderno, uma árvore.

2.° Traça um ponto exterior à árvore (ponto 0).

3.° A partir do ponto 0, traça rectas que passem pela árvore.

4.° Decerto que encontraste pontos que tocam a árvore. Marca esses pontos, por exemplo A e B.

5.° A partir dos pontos A e B, marca os pontos equivalentes A' e B'.

6.° Como podes verificar, obtiveste uma figura semelhante à original mas de tamanho mais reduzido.

A árvore obtida pelo método da homotetia também pode ser obtida usando uma quadrícula .

Figura original.

Figura semelhante reduzida.

Método do Pantógrafo

O pantógrafo é um instrumento mecânico usado a partir do século XVII, para obter figuras semelhantes.

Para a construção do pantógrafo, necessita-se de tiras de cartão e barras de metal perfuradas, para permitir a sua mobilidade, isto é, para abrir e fechar.

Para obteres figuras semelhantes por ampliação

1.º Desenha no teu caderno uma borracha.

2.º Traça um ponto, o ponto 0, exterior à borracha.

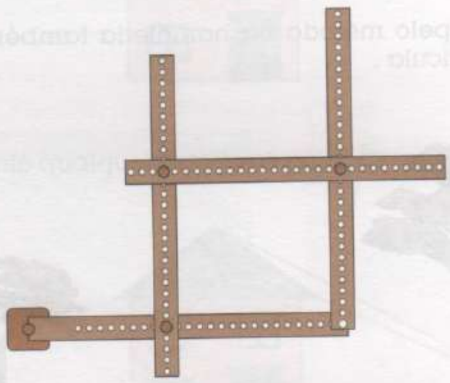
3.º Marca o ponto P na figura.

4.º Marca o ponto P´ para obtenção da figura a ser ampliada.

5.º Coloca o pantógrafo fixo no ponto 0, coloca o lápis em P'.

6.º Com o vértice em P, contorna a figura obtendo a ampliação.

O pantógrafo serve para reduzir ou ampliar figuras, obtendo figuras semelhantes.



Um pantógrafo.

Para obteres figuras semelhantes por redução

1.º Desenha no teu caderno uma borracha.

2.º Traça um ponto 0 exterior à borracha.

3.º Marca o ponto P' na figura.

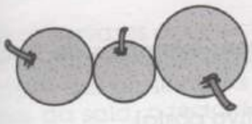
4.º Marca o ponto P para obtenção da figura reduzida.

5.º Fixa no ponto 0 o pantógrafo e coloca o lápis em P. Contorna a figur com o vértice em P', obtendo-se, assim, a figura semelhante reduzid

Exercícios:

Observa com muita atenção as seguintes figuras.

A

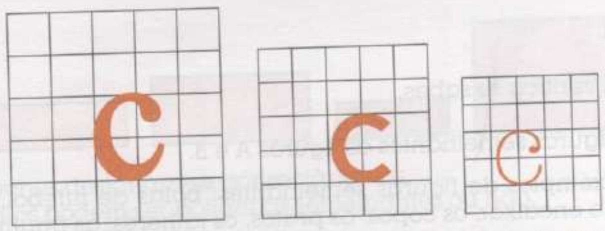


Três laranjas iguais, em posições diferentes e de tamanhos diferentes.

B

Três vasos com flores iguais, na mesma posição, e de tamanhos diferentes.

C



Três letras desenhadas em quadrículas completamente diferentes.

D

Quatro esferográficas: dois grupos diferentes.

1. Qual das figuras são figuras semelhantes?

1.1 Dá exemplos de outras figuras semelhantes que existam na escola, na tua casa, ou pelo caminho por onde passas, quando te diriges para a escola.

1.2 Desenha algumas figuras semelhantes através do método da quadrícula, por ampliação ou redução.

2. Diz em quais das alíneas seguintes se referem exemplos de figuras semelhantes:

2.1 Uma fotografia tipo passe e o seu respectivo postal.

2.2 Um autocarro e o respectivo modelo no catálogo.

2.3 A projecção de uma casa.

2.4 Várias letras do alfabeto.

2.5 Números de 5 a 10.

2.6 Desenho de uma flor e a sua imagem num espelho plano.

Soluções:

Agora, verifica se sabes.

1. São figuras semelhantes as figuras A e B.

1.1 Exemplos de figuras semelhantes: bolas de futebol, os bonecos de encaixar, os copos, os pratos, os talheres, as agulhas.

1.2 Desenhar algumas figuras, em quadrículas de tamanhos diferentes, com o objectivo de as ampliar ou reduzir.

2. Figuras semelhantes:

2.2; 2.3; 2.6.

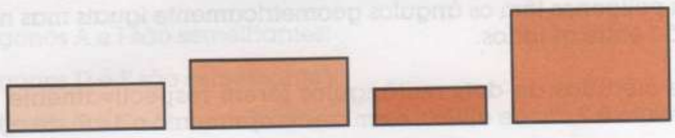
C.1.2 POLÍGONOS SEMELHANTES

Um polígono é um conjunto de pontos do plano, limitado por uma linha fechada e formado por sucessivos segmentos.

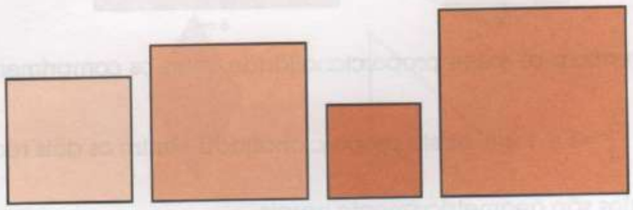
Se observares os objectos que se encontram na sala de aula, decerto que irás encontrar muitos polígonos, como sejam: o quadro da sala de aula, os tampos das carteiras, a parte superior da secretária da professora, as paredes da sala, o tecto da sala, os cadernos diários dos alunos, a parte superior das cadeiras onde os alunos se sentam e tantos outros.

Muitos destes objectos fazem lembrar polígonos já estudados em anos anteriores, como os rectângulos e os quadrados.

Por exemplo, as figuras abaixo que polígonos são?

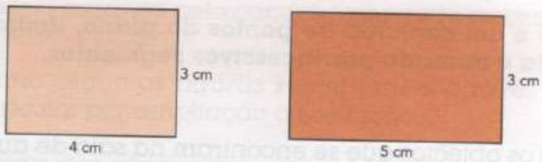


Estes polígonos designam-se por rectângulos.
Os rectângulos podem ser polígonos semelhantes ou não.



Estes polígonos designam-se por quadrados.
Os quadrados são sempre polígonos semelhantes.

Os rectângulos abaixo, têm de lado, respectivamente, 4 cm de comprimento e 3 cm de altura; 5 cm de comprimento e 3 cm de altura.



Vamos verificar se existe proporcionalidade entre os comprimentos dos lados:

$\frac{4}{3} = 1{,}33$; $\frac{5}{3} = 1{,}66$ logo: $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{3}$ então,

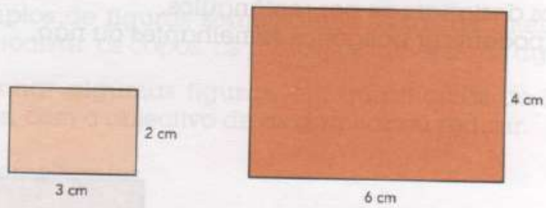
Quanto aos lados, não existe proporcionalidade entre os comprimentos dos lados dos dois rectângulos.

Quanto aos ângulos, os ângulos dos dois rectângulos são geometricamente iguais.

Conclusão:

Os dois polígonos têm os ângulos geometricamente iguais mas não existe proporção entre os lados.

E se as medidas de dois rectângulos forem respectivamente 3 cm de comprimento e 2 cm de altura, 6 cm de comprimento e 4 cm de altura?



Vamos verificar se existe proporcionalidade entre os comprimentos dos lados.

$\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{6}{4} = 1{,}5$ logo, existe proporcionalidade entre os dois rectângulos.

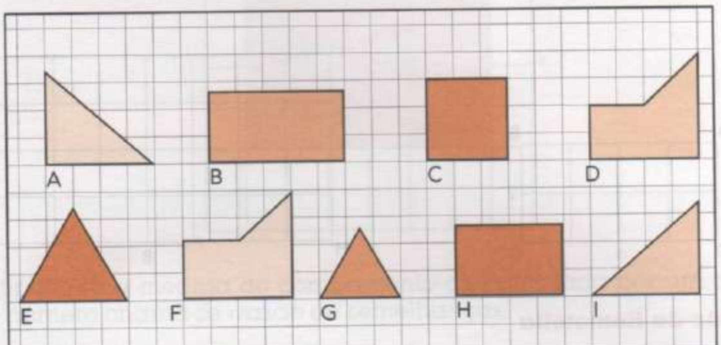
Os ângulos são geometricamente iguais.

Conclusão:

Os dois polígonos têm os ângulos geometricamente iguais e os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais.

Diz-se que dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos geometricamente iguais e os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais.

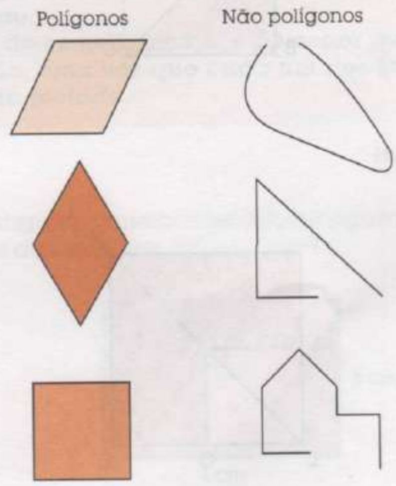
Verifica se os polígonos seguintes são semelhantes:



Os polígonos A e I são semelhantes;

Os polígonos D e F são semelhantes;

Os polígonos E e G são semelhantes.

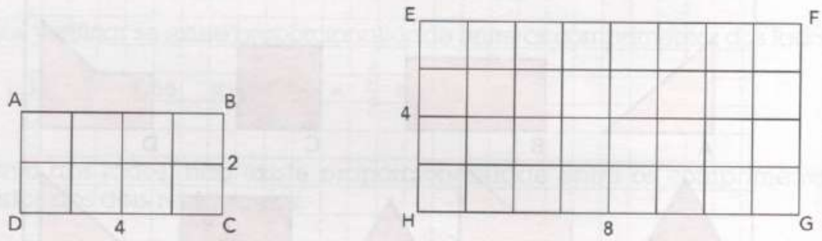


C.1.3 RAZÃO DE SEMELHANÇA DE FIGURAS

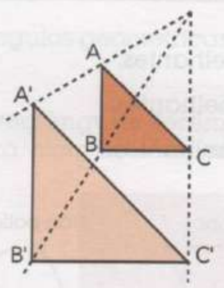
Para calcular a razão de semelhança, deves primeiro saber construir um polígono semelhante.

Para construir um polígono semelhante, existem vários métodos:

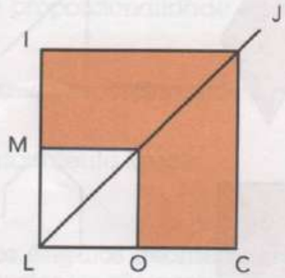
Método da Razão de Semelhança



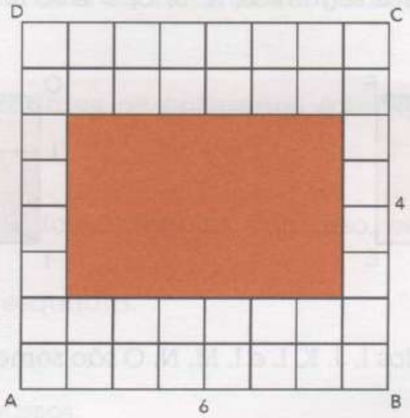
Método da Homotetia



Método da Diagonal



Vamos ver como se processa o **método da razão de semelhança**.
Dado o seguinte rectângulo, vamos construir dois rectângulos semelhantes:



Multiplica-se a medida do comprimento de cada lado por um número. A esse número chama-se «razão de semelhança».

1. Constrói, então, dois rectângulos semelhantes no papel milimétrico, considerando as seguintes razões de semelhança.

1.1 2 **1.2** $\frac{1}{2}$ – O que concluis?

Quando a razão de semelhança é > 1 (maior do que 1), obtém-se um polígono ampliado, uma vez que cada um dos lados duplicou o seu comprimento.
Quando a razão de semelhança é < 1 (menor que 1), obtém-se um polígono reduzido, uma vez que cada um dos lados reduziu o seu comprimento para metade.

Exercícios:

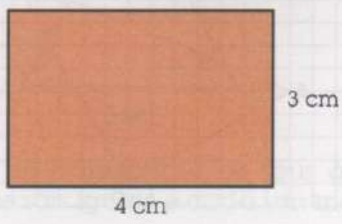
1. Constrói rectângulos semelhantes aos da figura, considerando as seguintes razões de semelhança:

1.1 $r = 2$

1.2 $r = \frac{1}{2}$

1.3 $r = 3$

1.4 $r = \frac{3}{2}$

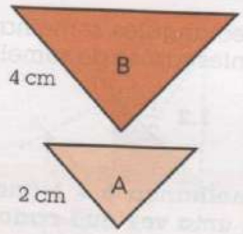


2. Observa as figuras.

2.1 Os rectângulos seguintes, A, B, C, D e A, E, F, G são semelhantes. Porquê?

2.2 Os rectângulos I, J, K, L e I, M, N, O são semelhantes? Porquê?

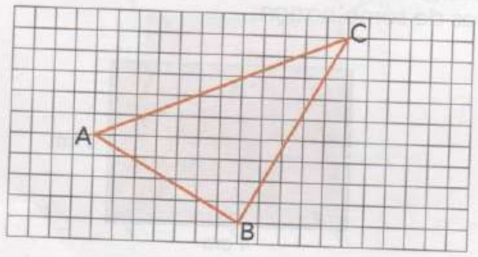
3. Observa a figura seguinte.



3.1 Qual a razão de semelhança que transforma B em A?

3.2 Constrói um outro triângulo, C, semelhante aos triângulos A e B. Indica a razão de semelhança que utilizaste.

4. Usa o método de Homotetia para construir um polígono semelhante ao da figura abaixo, sendo a razão de semelhança 2.



C.1.4 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Decerto que já ouviste falar de triângulos em classes anteriores. Para que te lembres:

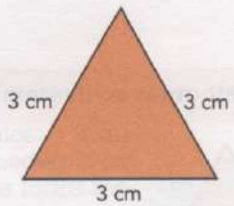
Designam-se triângulos os polígonos que têm três lados e três ângulos.

Vais então construir dois triângulos. Para isso, necessitas do seguinte material:

- Uma régua ou um esquadro.
- Um transferidor.

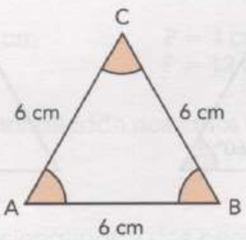
Segue os seguintes passos:

1.º Começa por traçar um triângulo cujos lados medem 3 cm;



2.º Com ajuda do transferidor mede os seus ângulos.
Decerto que cada ângulo mede 60°. O que podes concluir?
O triângulo tem os lados e os ângulos iguais.

3.º Com o mesmo material, constrói um triângulo com 6 cm de lado.



4.º Mede, com a ajuda do transferidor, os seus ângulos. Os lados são iguais, os três ângulos são iguais e cada um mede 60°.

O que podes concluir acerca dos dois triângulos?

- A razão de semelhança é 2;
- Os lados dos dois triângulos são directamente proporcionais;
- Os ângulos dos dois triângulos são iguais.

Dois triângulos são semelhantes quando têm os três ângulos iguais.

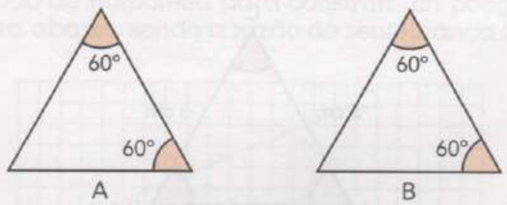
Dois triângulos têm dois ângulos iguais; necessariamente terão o terceiro ângulo igual.

Conclusão:

Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos iguais.

Exemplo:

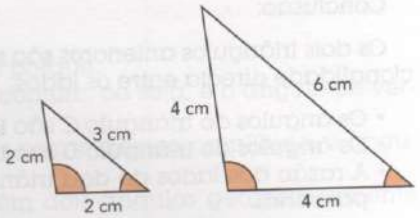
Com a ajuda de um transferidor, mede os ângulos dos triângulos A e B.
Decerto que cada ângulo mede 60°.
O que podes concluir?



Os triângulos A e B são semelhantes.

C.1.4.1 Critérios de semelhança

Aprendeste que os triângulos que são semelhantes são aqueles que têm os ângulos geometricamente iguais e têm os comprimentos dos lados correspondentes directamente proporcionais.



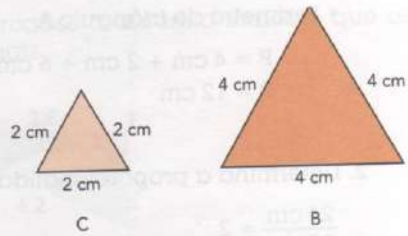
C.1.4.2 Razão entre perímetros de triângulos semelhantes

Já estudaste os polígonos semelhantes. Aprendeste a verificar quando existe semelhança de triângulos. Aprendeste também, em classes anteriores, a determinar o perímetro dos sólidos geométricos, isto é, a soma de todos os lados.

Agora vais aprender a determinar a razão entre perímetros de triângulos semelhantes, acompanhando os seguintes exemplos.

Exemplo:

1.º Constrói dois triângulos: o triângulo C, cujos lados medem 2 cm e o triângulo D, cujos lados medem 4 cm.



2.º Calcula o perímetro.

Triângulo C

$P = 2\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2\text{ cm}$
$P = 6\text{ cm}$

Triângulo B

$P = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm}$
$P = 12\text{ cm}$

3.º Determina a proporcionalidade dos lados dos dois triângulos.

$$\frac{4}{2} = 2$$

4.º Determina a proporcionalidade dos perímetros dos dois triângulos.

$$\frac{12}{6} = 2$$

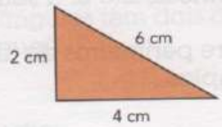
Conclusão:

Os dois triângulos anteriores são semelhantes, uma vez que existe proporcionalidade directa entre os lados.

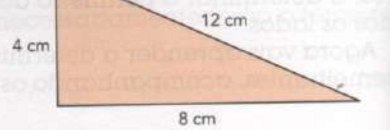
- Os ângulos do triângulo C são iguais, uma vez que os lados são iguais;
- Os ângulos do triângulo D são iguais, uma vez que os lados são iguais;
- A razão dos lados de dois triângulos semelhantes é directamente proporcional.

Exemplo:

1. Dados dois triângulos A e B, determina a razão dos perímetros dos triângulos semelhantes .



A



B

- Perímetro do triângulo A

  P = 4 cm + 2 cm + 6 cm
  P = 12 cm

- Perímetro do triângulo B

  P = 12 cm + 8 cm + 4 cm
  P = 24 cm

2. Determina a proporcionalidade entre os perímetros.

$$\frac{24\text{ cm}}{12\text{ cm}} = 2$$

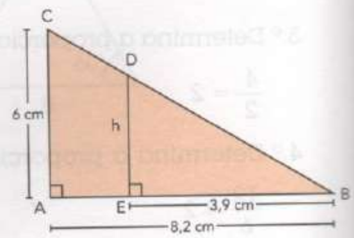
A razão entre os perímetros é 2.

Agora resolve:

1. Dados os triângulos ABC e EBD, com as respectivas medidas em cm:

   1.1 Diz, justificando, se os triângulos são semelhantes.

   1.2 Calcula h.



Resolução:

1.1 Os triângulos são semelhantes porque:
Os triângulos têm um ângulo comum, ou seja, é o ângulo de vértice B;
Os triângulos têm dois ângulos com o mesma amplitude, o ângulo recto CAB e DEB.
Os triângulos (ABC) e (EBD) têm dois ângulos geometricamente iguais, logo são semelhantes.

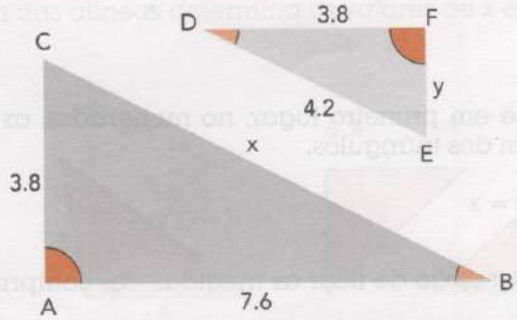
1.2 h = DE

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}$$

$$\frac{6}{8,2} = \frac{\overline{DE}}{3,9} \qquad \overline{DE} = \frac{6 \times 3,9}{8,2} \qquad h = 2,85 \text{ cm}$$

A altura é de 2,85 cm.

2. Na figura abaixo, os vértices marcados a amarelo indicam que os ângulos são geometricamente iguais.



2.1 De acordo com as dimensões indicadas, determina os valores de x e y.

2.2 Diz, justificando a tua resposta, se os triângulos são semelhantes.

Resolução:

2.1 $\frac{7,6}{3,8} = \frac{3,8}{y}$ $y = \frac{3,8 \times 3,8}{7,6} = 1,9$

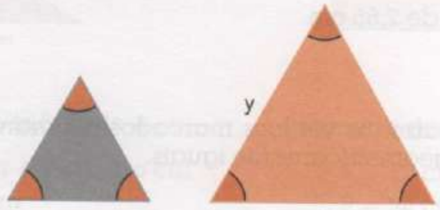
$\frac{3,8}{1,9} = \frac{x}{4,2}$ $x = \frac{3,8 \times 4,2}{1,9} = 8,4$

X = 8,4 cm
y = 1,9 cm

2.2 Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos geometricamente iguais.

3. Os triângulos da figura abaixo não foram feitos à escala.
Os símbolos indicam que os ângulos são geometricamente iguais.

3.1 Determina o valor de x e de y.



Resolução:

3.1 Escreve-se em primeiro lugar, no numerador, as medidas dos lados de um dos triângulos.

$\frac{4,3}{y} = 2,8 = x$

No denominador terão de ficar as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes.

$\frac{4,3}{y} = \frac{2,8}{3,5} = x$

$y = \frac{3,5 \times 4,3}{2,8}$

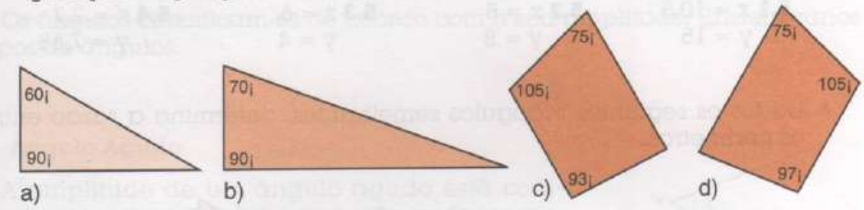
$y = 5,62$

$x = \frac{2,8 \times 5}{3,5}$

Resposta:

x = 4 cm
y = 5,62 cm

4. Dados os polígonos das figuras seguintes, diz justificando se existe algum par de polígonos semelhantes.



Sabe-se que a soma dos ângulos dos triângulos é de 180° e dos quadriláteros é de 360°.

Resolução para os triângulos:

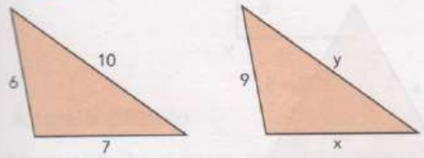
Calculando o ângulo para o polígono a) verifica-se que é de 30° e para o polígono b) é de 20°. Por isso os polígonos a) e b) não são semelhantes porque não têm dois ângulos geometricamente iguais.

Resolução para os quadriláteros:

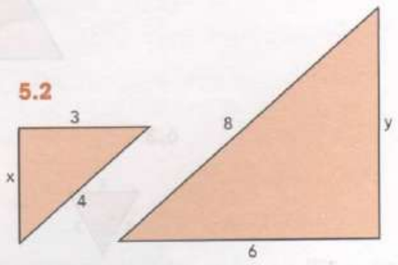
No polígono c), o ângulo mede 87º; no polígono d, o 4º ângulo mede 83º.

5. Em cada uma das alíneas determina os valores de x e de y.

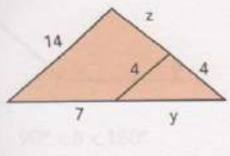
5.1



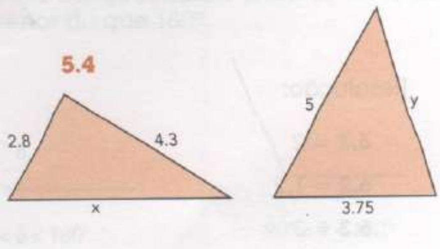
5.2



5.3

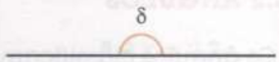


5.4



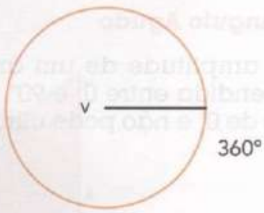
Ângulo Raso

A amplitude de um ângulo raso é de 180°.



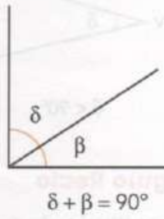
Ângulo Giro

A amplitude de um ângulo giro é de 360°.



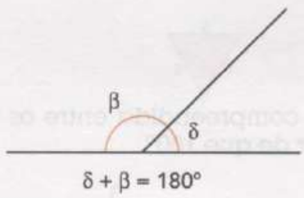
Ângulos Complementares

Dois ângulos ∂ e ß, são complementares se a soma das suas amplitudes for de 90°, ou seja, é igual à amplitude do ângulo recto.



Ângulos Suplementares

Dois ângulos são suplementares se a soma das suas amplitudes for de 180°, ou seja, é igual à amplitude do ângulo raso.

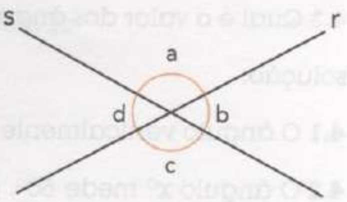


Conclusão:

- A amplitude de um ângulo complementar é de 90°.
- A amplitude de um ângulo suplementar é de 180°.

C.2.1 ÂNGULOS VERTICALMENTE OPOSTOS

Desenha duas rectas concorrentes **r** e **s**.



Como podes verificar, com a intersecção das duas rectas obtêm-se quatro ângulos iguais dois a dois.

Os ângulos a e c são verticalmente opostos.

Os ângulos b e d são verticalmente opostos.

Os ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais, logo, têm a mesma amplitude.

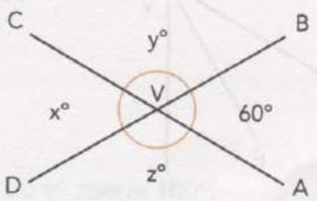
Exercícios:

1. Desenha no teu caderno duas rectas concorrentes e identifica-as.

2. Mede a amplitude dos ângulos formados pela intersecção das referidas rectas. Não te esqueças de usar um transferidor para a medição dos ângulos.

3. Desenha dois ângulos verticalmente opostos e diz qual a amplitude de cada um deles.

4. Observa a figura.



4.1 Qual é o ângulo verticalmente oposto ao ângulo CVD?

4.2 Qual o valor do ângulo x°?

4.3 Qual é o valor dos ângulos DVA e CVB? Porquê?

Resolução:

4.1 O ângulo verticalmente oposto ao ângulo CVB é o ângulo DVA.

4.2 O ângulo x° mede 60°, por ser um ângulo verticalmente oposto ao ângulo CVD.

4.3 Os quatro ângulos medem 360° porque as duas rectas formam dois ângulos suplementares.

Os ângulos $x° + 60° + z° + y° = 360°$
Como o ângulo $z° = y°$, pode escrever-se $2z°$ ou $2y°$.

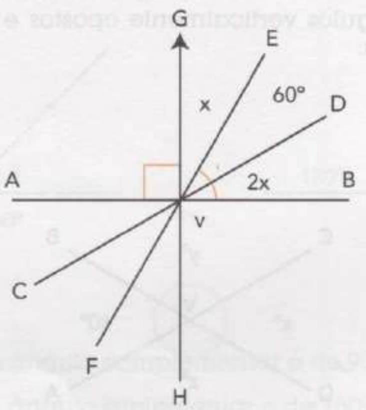
$120° + 2y° = 360°$

$2y° = 360° - 120°$

$y° = 120°$

Os ângulos Y° e Z° são iguais por serem verticalmente opostos, ou seja DVA e CVB medem, cada um, 120°.

5. Observa a figura e determina o valor do ângulo x.



Resolução:

5. O ângulo EVB é verticalmente oposto ao ângulo CVH, então o ângulo EVB = CVH = 60°

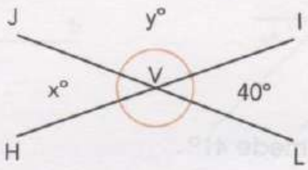
Como o ângulo GVB é recto e mede 90° então:

$(2x^\circ) + x^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$x^\circ = 30^\circ$

Resposta: o ângulo x mede 30°.

6. Dada a figura abaixo, responde:



6.1 Quais os ângulos opostos a JVI e IVL?

6.2 Qual o valor do ângulo x°? Porquê?

6.3 Determina o valor do ângulo y°.

Resolução:

6.1 O ângulo aposto a JVI é o ângulo HVL.
O ângulo oposto a IVL é o ângulo JVH.

6.2 O ângulo x mede 40° porque é o ângulo verticalmente oposto ao ângulo IVL.

6.3 $2x^\circ + 2y^\circ = 360^\circ$

$2(40^\circ) + 2y^\circ = 360^\circ$

$80^\circ + 2y^\circ = 360^\circ$

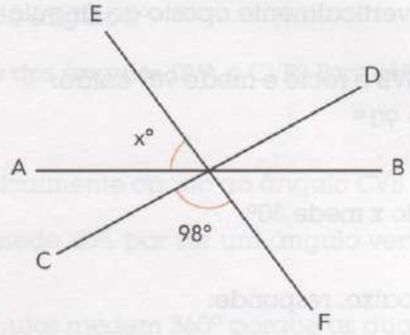
$2y^\circ = 360^\circ - 80^\circ$

$2y^\circ = 280^\circ$

$y^\circ = 140^\circ$

Resposta: o ângulo y° mede 140°.

7. Dada a figura abaixo, determina o valor de x°.



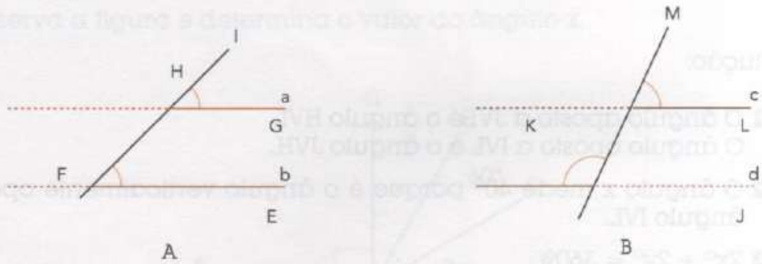
Resolução:

7. $2x + 98° = 180°$
$2x = 180° - 98°$
$x = 41°$

Resposta: o ângulo x° mede 41° .

C.2.2 ÂNGULOS DE LADOS PARALELOS

Tendo duas rectas paralelas, pode obter-se as seguintes figuras:



Os ângulos assinalados a cor em cada uma das figuras são designados por ângulos de lados paralelos, porque na figura A os lados dos ângulos são paralelos.

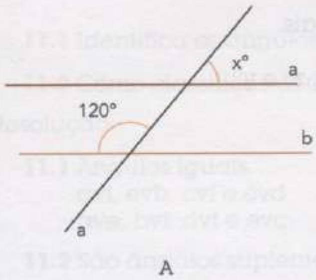
Na figura B, os ângulos são paralelos porque pertencem também às rectas paralelas.

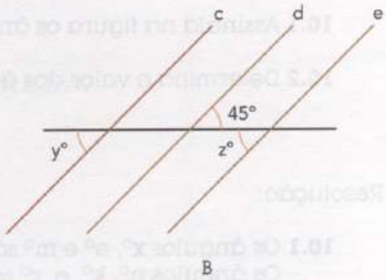
Conclusão:

Se os dois ângulos têm os lados paralelos, ou são iguais ou são suplementares.

Na figura A os ângulos são iguais.
Na figura B os ângulos são suplementares.

Observa as figuras:





8. Determina a amplitude do ângulo x°.

9. Determina a amplitude dos ângulos y° e z°.

Resolução:

8. As rectas a e b são paralelas, os ângulos ou são complementares ou são suplementares.

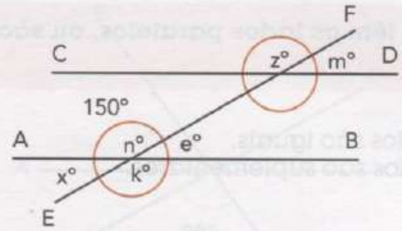
Através da figura A, conclui-se que os ângulos são suplementares.
Então:

$120° + x° = 180°$
$x° = 180° - 120°$
$x° = 60°$

Resposta: o ângulo x° mede 60°.

9. Na figura B os ângulos pertencem a rectas paralelas.
De acordo com o estudado anteriormente, dois ângulos que têm os lados paralelos ou são iguais ou são suplementares.
Os ângulos de acordo com a figura não são suplementares, por isso são iguais, então, o valor dos ângulos y° e z° é de 45°.

10. Observa com atenção a figura e responde.



10.1 Assinala na figura os ângulos iguais.

10.2 Determina o valor dos ângulos k°, z° e y°.

Resolução:

10.1 Os ângulos x°, e° e m° são iguais.
Os ângulos n°, k° e z° são iguais.

10.2 Os ângulos k°e z° são iguais e medem cada um 150°.

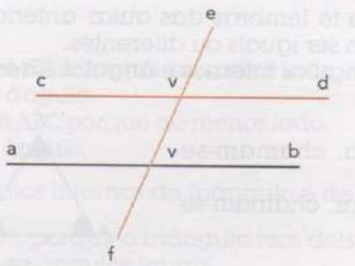
As rectas AB e CD são paralelas e os ângulos de lados paralelos ou são iguais ou são suplementares.

Então:

Como o ângulo $n^\circ = 150^\circ$
$x^\circ + n^\circ = 180^\circ$
$x^\circ = 180^\circ - 150^\circ$
$x^\circ = 30^\circ$

O ângulo x° mede 30°.

11. Dada a figura abaixo:



11.1 Identifica os ângulos iguais.

11.2 Como classificas os ângulos avf e bvf?

Resolução:

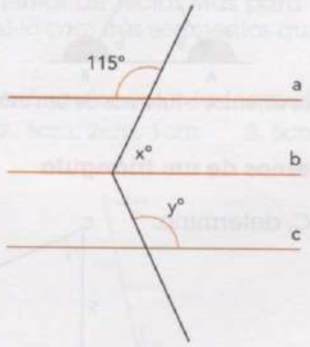
11.1 Ângulos iguais
avf, evb, cvf e evd
ave, bvf, dvf e evc

11.2 São ângulos suplementares.

12. Na figura, determina:

12.1 Os ângulos x° e y°.

12.2 Os ângulos x° e 115° formam um ângulo suplementar. Porquê?



Resolução:

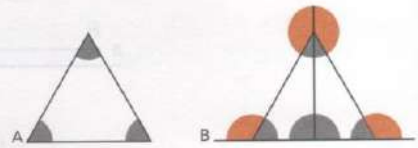
12.1 O ângulo x° mede 65° e o ângulo y mede 115°.

12.2 Os ângulos x° e 115° formam um ângulo suplementar, porque a soma dos dois ângulos é de 180°.

C.2.3 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

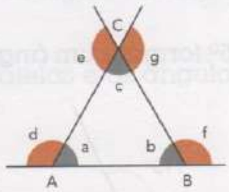
Um triângulo, como te lembras das aulas anteriores, é um polígono de três lados, que podem ser iguais ou diferentes.
Um triângulo tem ângulos internos e ângulos externos.

Os ângulos a cinza, chamam-se ângulos internos.
Os ângulos amarelos, chamam-se ângulos externos.



Num triângulo há três ângulos internos e três ângulos externos. Geralmente, quando se diz «ângulos de um triângulo», refere-se ângulos internos.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180°.

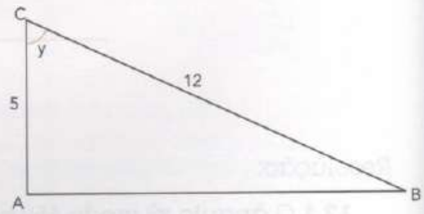
Os ângulos *d, f, e,* e *g* denominam-se ângulos externos do triângulo. Através da figura podes concluir que, num triângulo, a soma da amplitude de um ângulo interno com a amplitude do ângulo externo respectivo é 180°. Logo, os ângulos são suplementares.



Ângulos externos e internos de um triângulo.

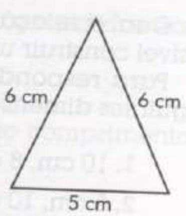
Soma dos ângulos internos de um triângulo

1. Dado o triângulo ABC, determina:



1.1 O maior ângulo e o menor ângulo, justificando a tua resposta.
1.2 A soma dos ângulos internos do triângulo.

2. Dado o triângulo ao lado, diz qual o valor do ângulo y°, justificando a tua resposta.



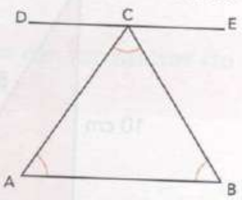
Resolução:

1.1 O ângulo maior é CÂB porque ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
O menor ângulo é AB̂C porque ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

1.2 A soma dos ângulos internos do triângulo é de 180°.

2. O ângulo y mede 65°, porque o triângulo tem dois lados iguais e a dois lados iguais opõem-se ângulos iguais.

3. Dada a figura, identifica os ângulos paralelos e determina a soma total dos ângulos.



Resolução:

3. Os ângulos CAB e DCA são agudos e de lados paralelos;
Os ângulos CBA e ECB são agudos e de lados paralelos;
A soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180°, então:
DCE = CAB + CBA + ACB

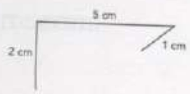
C.3 TRIÂNGULOS

Aprendeste em anos anteriores que um triângulo é uma figura geométrica constituída por três segmentos de recta. Mas para obter um triângulo nem sempre é possível construí-lo com três segmentos quaisquer.

Exemplos

Experimenta construir triângulos cujos lados medem:

1. 18cm, 6cm, 3cm **2.** 6cm, 2cm, 1cm **3.** 5cm, 2cm, 1cm



Conclusão: com três segmentos de recta nem sempre é possível construir um triângulo.

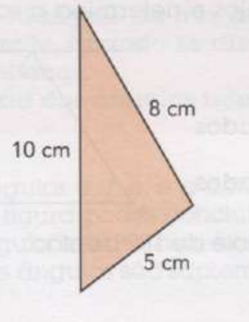
Qual a relação que deve existir entre as medidas dos lados para ser possível construir um triângulo?

Para responder a esta questão, vamos construir triângulos com as seguintes dimensões:

1. 10 cm, 8 cm, 5 cm;
2. 5 cm, 10 cm, 5 cm
3. 4 cm, 3 cm, 8 cm

Resolução:

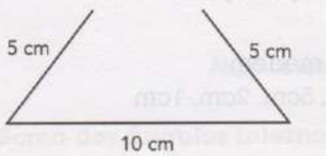
1.



Conclusão:

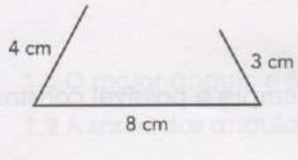
É possível construir o triângulo com as medidas dadas em 1.

2.



Não é possível construir o triângulo com as medidas dadas em 2.

3.



Não é possível construir o triângulo com as medidas dadas em 3.

Qual a razão de só ser possível construir o triângulo com as medidas dadas em 1?

No ponto 1:
O comprimento do lado maior é menor do que a soma do comprimento dos outros dois lados.

No ponto 2:
O comprimento do lado maior é igual a soma do comprimento dos outros dois lados.

No ponto 3:
O comprimento do lado maior é maior do que a soma do comprimento dos outros dois lados.

Num triângulo, o comprimento do lado maior tem de ser menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

C.3.1 DESIGUALDADE TRIÂNGULAR

Como já viste, na construção de um triângulo, o comprimento do lado maior tem de ser menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Exercícios:

1. Diz se será possível construir um triângulo cujos lados medem:

1.1 0,06 m ; 0,4 dm ; 10,1 dm

1.2 Num triângulo (DEF), sabe-se que:

$\overline{DE} = 13$ cm
$\overline{EF} = 6{,}5$ cm

Entre que valores pode variar $\overline{DF}$?

2. Constrói, se possível, um triângulo cujos lados meçam:

2.1. 3,5 cm; 7 cm; 8 cm

2.2. 0,2 m; 1,2 dm; 7 cm

2.3. 80 mm; 120 mm; 30 cm

3. Diz, justificando, se é possível construir um triângulo cujos lados medem:

3.1. 2,5 cm; 3,5 cm; 5 cm

3.2. 4,2 cm; 23,3 cm; 15,2 cm

3.3. Num triângulo [ABC] sabe-se que $\overline{AC}$ = 180 mm; $\overline{BC}$ = 130 mm, determina entre que valores pode variar $\overline{AB}$.

C.3.2 CRITÉRIOS DE IGUALDADE DE TRIÂNGULOS

Já estudaste, no início da unidade, a semelhança de triângulos.

Duas figuras são iguais quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões.

Em Matemática diz-se igualmente que dois triângulos são iguais ou geometricamente iguais quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões.

Exemplo:

1.º Constrói um triângulo, no teu caderno diário, com umas medidas quaisquer e identifica-as com letras.

2.º Ao lado constrói outro com as medidas do primeiro triângulo.

3.º Usando papel vegetal ou outro papel transparente, copia as duas figuras desenhadas e sobrepõe-as.

O que podes concluir ?

Decerto que concluis que os triângulos são geometricamente iguais ou são triângulos iguais.

Conclusão

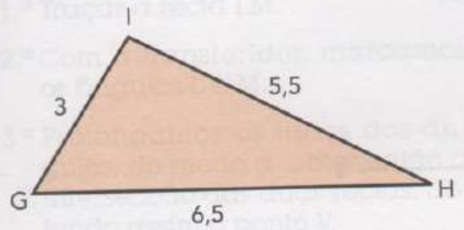
AC = A`C`; AB = A`B`; BC = B`C`.

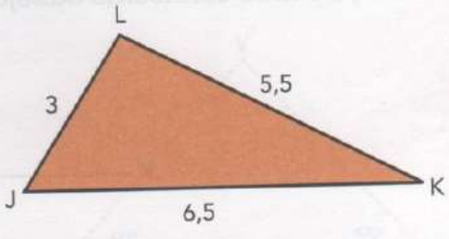
Em linguagem matemática, por uma questão de simplificação, pode dizer-se «triângulos iguais» em vez de «triângulos geometricamente iguais».

Para verificação desta igualdade, existem três possibilidades.

1.ª possibilidade – conhecidos os três lados, vamos desenhar dois triângulos, GHI e JKL com os seguintes comprimentos:

GH = 6,5 cm; HI = 5,5 cm; GI = 3 cm.
JK= 6,5 cm; KL =5,5 cm; JL = 3cm.





Com um transferidor, mede os respectivos ângulos. Decerto que obtiveste os seguintes valores:

G=53º H=24º I=110º J=53º K=24º L= 110º

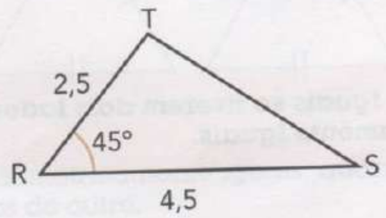
Conclusão:
Os dois triângulos são iguais, porque têm os lados e os ângulos iguais.

Dois triângulos são iguais se os três lados de um dos triângulos são iguais aos três lados do outro triângulo.

Exercício:

Resolve o exemplo anterior, mas muda a posição de um dos triângulos.

2.ª possibilidade – conhecidos dois lados e um ângulo.



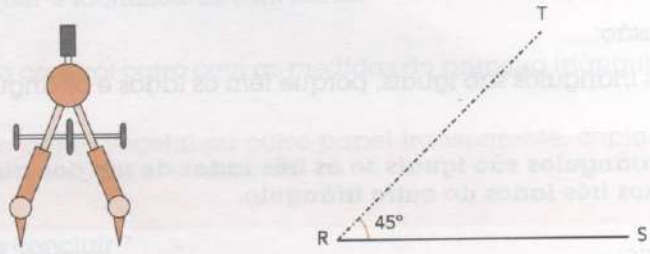
No triângulo RST, o lado RS mede 4,5 cm, o lado RT mede 2,5 cm e o ângulo TRS mede 45°.

Vamos traçar o triângulo com rigor, ou seja, à escala. Para isso necessitas do seguinte material: uma régua, um transferidor e um compasso

Como vais proceder?

1.° Traça o lado conhecido ou seja (RS).

2.° Com o transferidor, marca um ângulo de 45° com o vértice em R. Em seguida, utilizamos o compasso para medir o comprimento de RS.



3.° Utiliza o compasso para desenhar o arco com centro em R e abertura até S e que intersecta o lado do ângulo desenhado, definindo então o ponto T.
Com a recta desenhada, o ângulo e o ponto T, estamos em condições de desenhar o triângulo (RST).

Dois triângulos são iguais se tiverem dois lados, e o ângulo por eles formado, respectivamente iguais.

3.ª possibilidade – conhecidos dois ângulos e um lado, considera-se o triângulo (LMV) e sabe-se que:

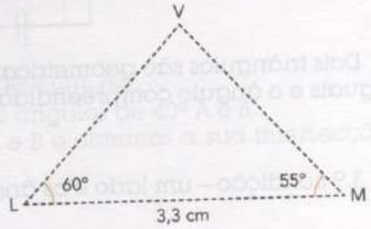
L = 60°, M = 55° e LM = 3,3cm

Vamos traçar o triângulo.

1.° Traçar a recta LM.

2.° Com o transferidor, marcamos os ângulos L e M.

3.° Prolongamos os lados dos ângulos, de modo a obter então a intersecção das duas rectas, obtendo assim o ponto V.



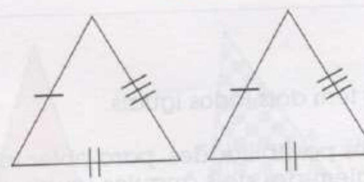
O triângulo pode ser desenhado noutra posição, mas deve ser igual ao desenhado anteriormente.

Dois triângulos são iguais se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes a esse lado respectivamente iguais.

Dois triângulos são geometricamente iguais quando se cumprem as seguintes condições:

1.ª condição – os três lados iguais.

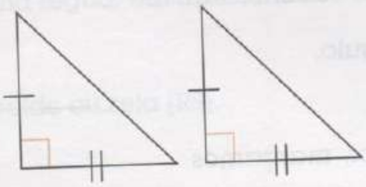
l. l. l



Dois triângulos são geometricamente iguais, quando os três lados de um são iguais aos três lados do outro.

2.ª condição – dois lados, e o ângulo por eles formado, iguais.

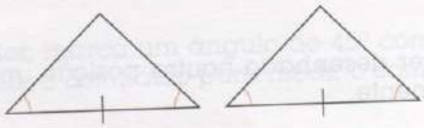
ℓ. a. ℓ



Dois triângulos são geometricamente iguais quando têm dois lados iguais e o ângulo compreendido entre eles também igual.

3.ª condição – um lado e os ângulos adjacentes a esse lado iguais.

a. ℓ. a



Dois triângulos são geometricamente iguais quando têm um lado igual os dois ângulos adjacentes a esse lado, também iguais.

Exemplo:

Num triângulo isósceles (DEF), sabe-se que um dos lados mede 4 cı
Dois ângulos iguais medem 40°.

É possível obter um triângulo igual com estas medidas? Diz, justifican
a tua resposta.

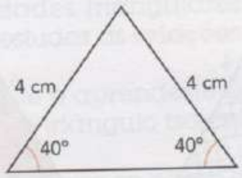
Resolução:

O triângulo isósceles tem dois lados iguais.

De acordo com as três possibilidades, para obter triângulos iguais, é ı
cessário definir, para além dos dois ângulos iguais, o lado adjacente ı
eles formado.

Então o enunciado não está correcto, pois teremos duas possibilidades.

1.ª possibilidade



2.ª possibilidade.

Com a régua, vamos desenhar a recta de 4 cm, AB.

- Com o transferidor vamos desenhar os ângulos de 40º A e B.
- Prolongamos as rectas dos ângulos A e B e obtemos a sua intersecção e o ponto C.

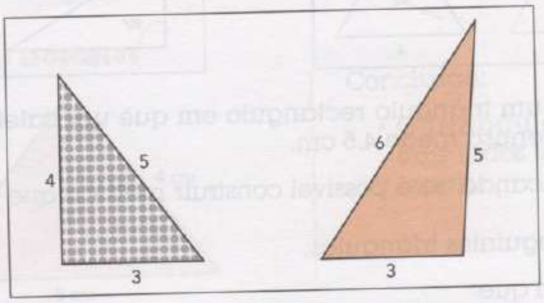
Conclusão:

Como o enunciado não está correcto, existem duas hipóteses de construção de triângulos iguais.

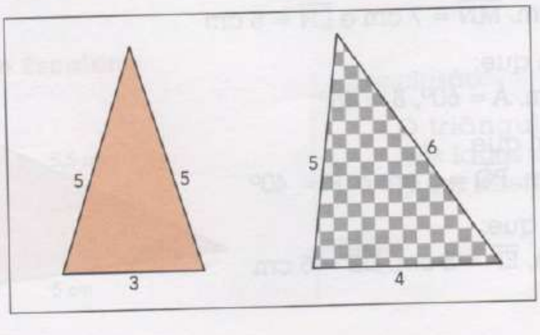
Exercícios de igualdade de triângulos:

1. Diz, justificando, se são iguais os seguintes pares de triângulos.

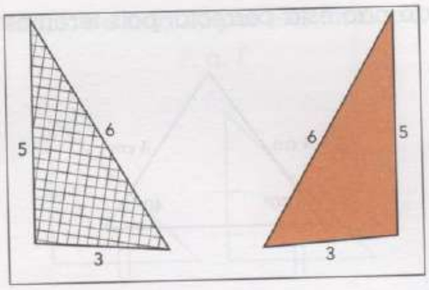
1.1



1.2

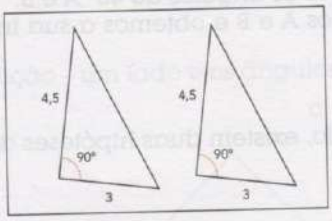


1.3

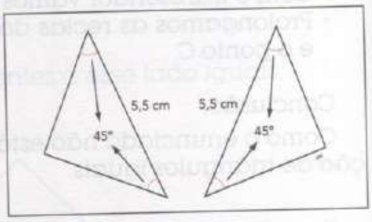


2. Diz, justificando, se são iguais os seguintes pares de triângulos.

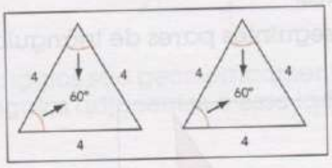
2.1



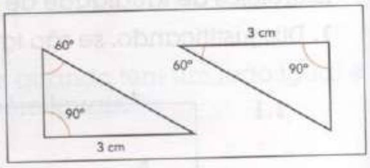
2.2



2.3



2.4



3.1. Constrói um triângulo rectângulo em que um cateto mede 4 cm e a hipotenusa mede 4,5 cm.

3.2. Diz, justificando, se é possível construir mais do que um triângulo.

4. Constrói os seguintes triângulos.

4.1. [LMN] em que:
$\overline{LM} = 3$ cm, $\overline{MN} = 7$ cm e $\overline{LN} = 5$ cm

4.2. [ABC] em que:
$\overline{AB} = 6$ cm, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$

4.3. [OPQ] em que
$\overline{OP} = 4$ cm, $\overline{PQ} = 5$ cm e $\hat{P} = 40^\circ$

4.4. [DEF] em que:
$\overline{DE} = 5$cm, $\overline{EF} = 5$ cm, $\overline{DE} = 5$ cm
$\hat{E} = 60^\circ$

C.3.3 RELAÇÃO ENTRE OS LADOS E OS ÂNGULOS

Já estudaste as desigualdades triangulares e os critérios de igualdade de triângulos. Agora vamos estudar as **relações entre os lados e os ângulos.**

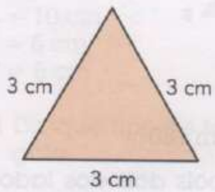
Em anos anteriores estudaste e aprendeste que existem três tipos de triângulos: o triângulo equilátero, o triângulo isosceles e o triângulo escaleno.

Vamos verificar igualmente o que se passa com os mesmos triângulos em relação aos ângulos.

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

1. Triângulo Equilátero

Determinemos a amplitude dos ângulos com um transferidor.

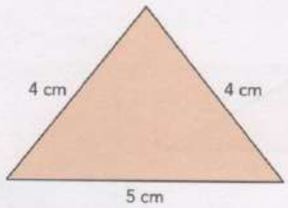


Cada ângulo do triângulo equilátero mede 60º.

Conclusão:

- Possui três lados iguais.
- Possui três ângulos iguais.

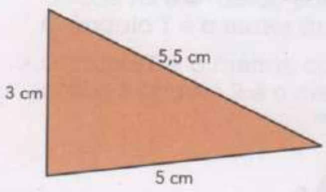
2. Triângulo Isósceles



Conclusão:

- O triângulo isósceles possui dois lados iguais, dois ângulos iguais.

3. Triângulo Escaleno



Conclusão:

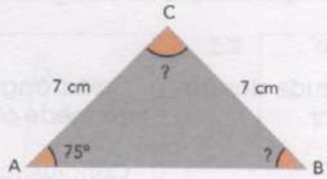
- O triângulo escaleno possui três lados diferentes e três ângulos diferentes.

Os triângulos possuem as seguintes propriedades:

- a lados iguais, opõem-se ângulos iguais e a ângulos iguais, opõem-se lados iguais.
- ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
- ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

Exercícios:

1. Determina os valores dos ângulos da figura que se segue.



Resolução:

1. Num triângulo, os ângulos internos medem 180°.

O triângulo da figura acima é isósceles, pois dois dos lados medem respectivamente 7 cm.

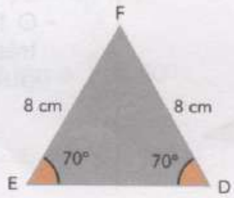
A lados iguais opõem-se ângulos iguais, então o lado AC é igual ao lado BC.

O ângulo A é igual ao ângulo B.

$\hat{A} = 75°$; $\hat{B} = 75°$
O ângulo C = $180° - (\hat{A} + \hat{B})$
$\hat{C} = 180° - 150°$
$\hat{C} = 30°$

O ângulo B= 75°; C= 30°.

2. Determina o valor do lado DF e do ângulo F da figura abaixo.



Resolução:

2. O triângulo é isósceles porque os ângulos D e E são iguais e medem respectivamente 70°.

A lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa, então o lado EF é igual ao lado DF e medem 8 cm respectivamente.

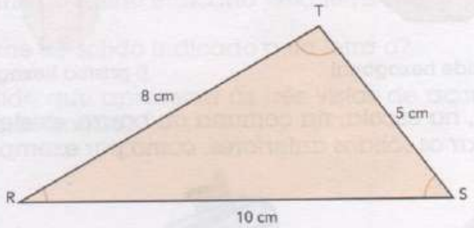
- Os ângulos internos do triângulo medem 180°, então:

$\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180°$
$(70° + 70°) + F = 180°$
$F = 140° - 180°$
$F = 40°$

3. No triângulo RST, os lados medem, respectivamente:

RS = 10 cm
ST = 5 cm
RT = 8 cm

3.1 Diz que tipo de triângulo se trata e indica o maior e o menor ângulo.



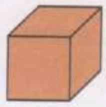
- Como o triângulo tem os lados todos diferentes, trata-se de um triângulo escaleno.
- O lado RS é o maior, portanto ao maior lado opõe-se o maior ângulo. O ângulo T é o maior ângulo.
- O lado ST é o menor, como ao lado menor opõe-se o menor ângulo, então o ângulo R é o menor ângulo.

C.4 GEOMETRIA NO ESPAÇO

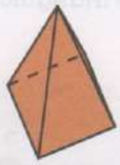
C.4.1 SÓLIDOS COM FACES TRIANGULARES E QUADRANGULARES

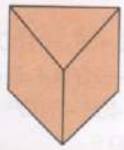
Já estudaste vários sólidos, mas decerto que nem todos possuem faces triangulares e rectangulares.

Observa os seguintes sólidos :


a) cubo


b) cilindro


c) pirâmide quadrangular

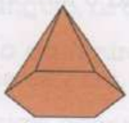

d) prisma triangular


e) pirâmide triangular


f) esfera


g) prisma quadrangular


h) cone


i) pirâmide hexagonal


j) prisma hexagonal

Ao sair de casa, na escola, na comuna ou bairro, existem vários objectos que fazem lembrar os sólidos anteriores, como por exemplo:



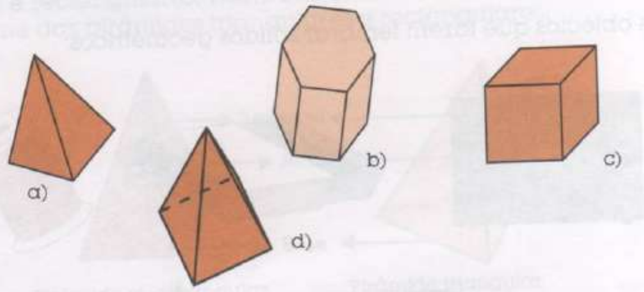



1. Dos sólidos anteriores, quais os que têm faces triangulares? E quadrangulares?

Resolução:

1. Sólidos com faces triangulares: prisma triangular, pirâmide triangular. Sólidos com faces quadrangulares: cubo, pirâmide quadrangular, prisma quadrangular.

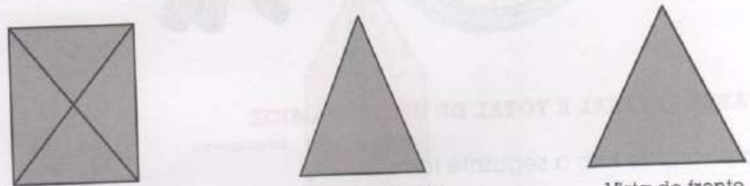
2. Observa agora os sólidos da figura seguinte:



2.1 Qual o nome do sólido indicado pela letra a?

2.2 Qual o nome do sólido indicado pela letra d?

2.3 Qual o sólido que apresenta as três vistas de acordo com a figura abaixo representada?



Vista de cima | Vista da direita | Vista de frente

Resolução:

2.1 Pirâmide triangular.

2.2 Pirâmide quadrangular.

2.3 Pirâmide quadrangular.

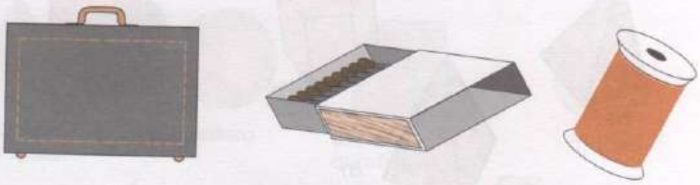
C.5 ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS

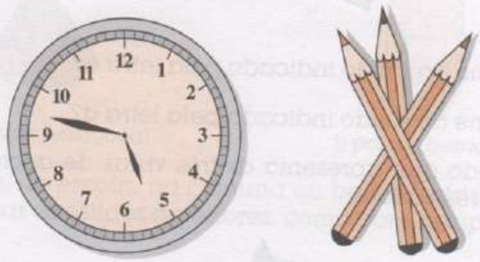
Neste subtema vamos apenas estudar a pirâmide e o cone.

Para calcular áreas e volumes de sólidos, necessita-se, antes de mais, de conhecer os elementos dos sólidos.

Para proceder a estes cálculos, deve usar-se a caixa de sólidos, caso haja na escola, ou objectos que façam lembrar sólidos geométricos, como por exemplo, a caixa de fósforos, o funil, o pacote de sumo, a caixa de sapatos, o tampo de uma secretária, um vaso de flores, uma lata de leite, uma lata de sumo concentrado, um carro de linhas, um relógio de parede, um conjunto de lápis e outros objectos usados no dia-a-dia.

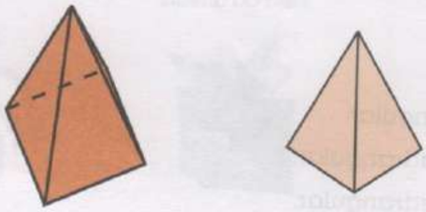
Alguns objectos que fazem lembrar sólidos geométricos:





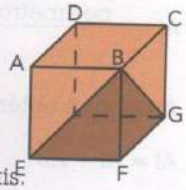
C.5.1 ÁREA LATERAL E TOTAL DE UMA PIRÂMIDE

Uma pirâmide tem a seguinte forma:



Como podes observar, a base da pirâmide quadrangular é igual à base de um cubo.

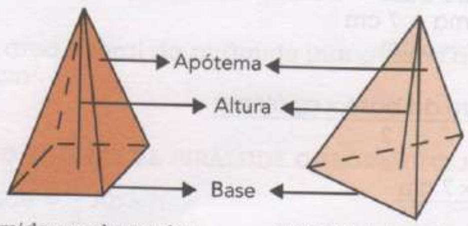
Desenhando no cubo a pirâmide EFGB, pode compreender-se facilmente que é possível desenhar na base do cubo mais duas pirâmides iguais.



Conclusão:

A partir de um cubo podem obter-se três pirâmides iguais.

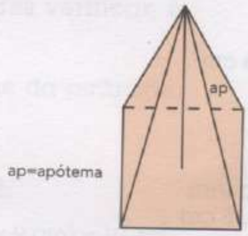
No subtema anterior relembramos alguns sólidos geométricos com faces triangulares e rectangulares. Neste subtema vamos aprender a calcular a área e volume das pirâmides triangulares e rectangulares.



Pirâmide quadrangular. Pirâmide triangular.

Pirâmide quadrangular

Uma pirâmide quadrangular tem a seguinte forma geométrica



Como calcular a área lateral e total de uma pirâmide?

A pirâmide só tem uma base que, neste caso, é quadrangular.
Como aprendeste na 6.ª classe, a área do quadrado, por ter os lados todos iguais, obtém-se multiplicando lado × lado.
O perímetro obtém-se somando os quatro lados.

Então, a área lateral (Al) da pirâmide quadrangular é obtida da seguinte forma:

$$Al = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{apótema}}{2}$$

Área total obtém-se somando a área lateral com a área da base (Ab).

$$At = Al + Ab$$

Exercício:

1. Calcula a área lateral (Al) e a área total (At) de uma pirâmide quadrangular com as seguintes medidas:

Lado da base = 5 cm
Apótema = 7 cm
Altura = 6 cm

$$Al = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{apótema}}{2}$$

$$Al = \frac{4 \times 5\text{cm} \times 7\text{ cm}}{2}$$

$$Al = 70\text{ cm}^2$$

Resposta: A área lateral é de 70 cm^2

A área da base = $5 \times 5 = 25\text{ cm}^2$

$$\begin{aligned} At &= Al + Ab \\ &= 70\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2 \\ &= 95\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

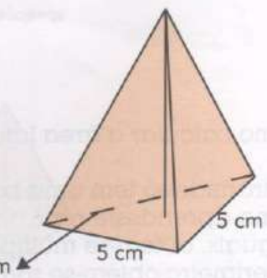
Resposta: a área total é de 95 cm^2.

Pirâmide triangular

A pirâmide triangular da figura tem 7 cm de apótema, de lados 8 cm, 5 cm e 5 cm e de altura 6 cm.

Vamos calcular a área lateral e total desta pirâmide triangular.

$$Al = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{apótema}}{2}$$



$Al = \frac{18\ cm \times 7\ cm}{2}$ perímetro da base = 8 + 5 + 5 = 18 cm

$Al = 63\ cm^2$

$At = Al + Ab$

Área da base $= \frac{b \times h}{2}$

área da base $= \frac{8\ cm \times 6\ cm}{2} = 24\ cm^2$

$At = Al + Ab$

$At = 63\ cm^2 + 24\ cm^2$

$At = 87\ cm^2$

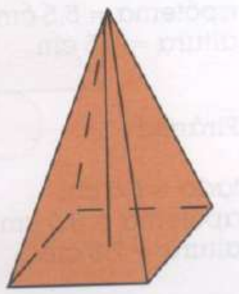
Resposta: A área lateral da pirâmide triangular é de $63\ cm^2$ e a área total é de $87\ cm^2$.

C.5.2 CÁLCULO DO VOLUME DA PIRÂMIDE QUADRANGULAR

Volume da pirâmide $= \frac{1}{3} Ab \times h$

Em que
Ab = área da base
h = altura

A pirâmide da figura ao lado tem de lado 9 cm e de altura 10 cm.
A base, como podes verificar, é quadrada.



Pirâmide quadrangular

Determina o volume da pirâmide.

Resolução:

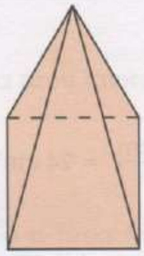
$$Vpirâmide = \frac{Ab \times h}{3} = \frac{(9cm \times 9\ cm) \times 10\ cm}{3}$$

$$Vpirâmide = \frac{81\ cm \times 10\ cm}{3} = 270\ cm^3$$

Resposta = O volume da pirâmide é de $270\ cm^3$.

Aplica os teus conhecimentos.

A figura ao lado representa uma pirâmide regular de 5 cm de altura e de 7 cm de base.



1. Calcula o volume da pirâmide.

2. Desenha, no teu caderno diário, um cubo com 4 cm de aresta.

3. Desenha uma pirâmide e mede a sua altura.

3.1 Determina a área da pirâmide.

4. Calcula a área total, área lateral e o volume das seguintes pirâmides quadrangulares:

Pirâmide A

lado = 3,5 cm
apótema = 5,5 cm
altura = 4,5 cm

Pirâmide B

lado = 6,5 cm
apótema = 8,5 cm
altura = 7,5 cm

Pirâmide C

lado = 3,5 cm
apótema = 7,5 cm
altura = 5,5 cm

4.1 No teu caderno diário, desenha as pirâmides A, B e C.

C.5.3 ÁREA LATERAL E TOTAL DO CONE

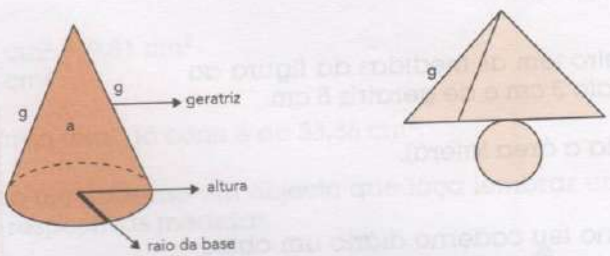
Um dos objectos que tens em casa para encher garrafas de água é, de certeza, um funil, que pode ser de plástico ou de outro material.

Desenha um funil com a parte superior de cor verde escuro e a inferior de cor verde claro. Decerto que a figura geométrica faz lembrar um cone.

Figuras que lembram um cone.

Área lateral do cone

Dos conhecimentos adquiridos em classes anteriores, verificaste que um cone tem a seguinte representação:



Para calcular a área lateral do cone procede-se de acordo com a seguinte fórmula:

$$Al = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{geratriz}}{2}$$

A base do cone, de acordo com a figura acima, tem a forma de uma circunferência.

O perímetro da circunferência é calculado pela seguinte fórmula: πr

Então, a área lateral do cone é:

$$A \text{ lateral} = \frac{\pi r \times \text{geratriz}}{2} \quad \text{ou} \quad Al = \frac{\pi r \times g}{2}$$

Exercícios:

1. A Senhora Maria tem um vaso na sua sala de aulas com o feitio de um cone. O vaso tem as seguintes medidas:

Geratriz do cone = 15 cm
Diâmetro do cone = 16 cm

1.1 Calcula a área lateral do cone.

$$\text{Raio} = \frac{\text{diâmetro}}{2} = 8 \text{ cm}$$

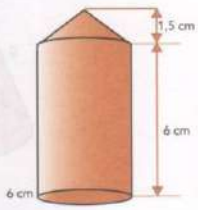
$$Al = \frac{Pb \times g}{2}$$

$$Al = \frac{\pi r \times g}{2}$$

$$Al = \frac{3{,}14 \times 8 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}}{2}$$

$$Al = 188{,}4 \text{ cm}^2$$

2. Um paliteiro tem as medidas da figura ao lado de raio 3 cm e de geratriz 5 cm.



2.1 Calcula a área lateral.

3. Desenha no teu caderno diário um objecto qualquer, por exemplo, um candeeiro, para colocar no teu quarto.
Repara na semelhança entre a parte superior do candeeiro e metade de um cilindro. Nesse cilindro pode estar contido um cone.

3.1 Atribui as respectivas medidas e determina a sua área lateral.

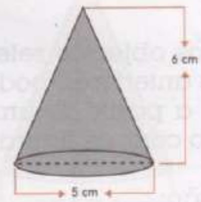
Área total do cone

De acordo com as figuras anteriores, a base do cone é uma circunferência, por isso é dada pela seguinte fórmula:

$$At = Al + A\ base$$

$$Al = \frac{\pi r + g}{2}$$

$$Ab = \pi r^2$$



1. Calcula a área total de um cone com as seguintes dimensões:

geratriz = 6 cm
raio = 2,5 cm

$$At = Al + Ab$$

$$Al = \frac{\pi \times 2{,}5\ cm \times 6\ cm}{2}$$

$$Ab = \frac{3{,}14 \times 2{,}5^2\ cm}{2}$$

$$Ab = 9{,}81\ cm^2$$

$$Al = \pi \times 2{,}5\ cm \times 3\ cm$$
$$Al = 23{,}55\ cm^2$$
$$Ab = \pi r^2$$

$$At = 23{,}55\ cm^2 + 9{,}81\ cm^2$$
$$At = 33{,}36\ cm^2$$

Resposta: a área total do cone é de $33{,}36\ cm^2$.

2. Desenha no teu caderno um objecto que faça lembrar um cone e atribui-lhe as respectivas medidas.

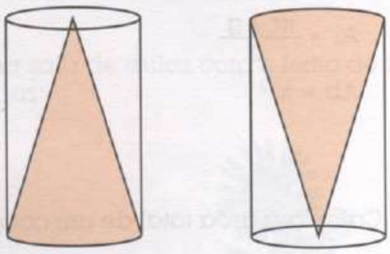
2.1 Calcula a sua área total.

Sugerimos-te o chapéu deste palhaço.

C.5.4 VOLUME DO CONE

Já aprendeste a calcular as áreas laterais e totais de um cone. Agora vamos aprender a calcular o volume de um cone.

Além dos objectos referidos nos exemplos anteriores, pode obter-se um cone a partir de um cilindro, de acordo com as figuras ao lado.



Conclusão:

A partir de um cilindro podem obter-se três cones com a mesma base e a mesma altura.

O volume do cone (V) é um terço do volume do cilindro.

$$V = \frac{1}{3} Ab \times h$$

Ab = área da base
h = altura

1. Calcula o volume de um cone tendo de altura 8 cm e de diâmetro 6 cm.

Resolução:

$$V = \frac{1}{3} Ab \times h$$

$$Ab = \pi r^2$$

$$= 3{,}14 \times 3\ cm^2$$

$$Ab = 28{,}26\ cm^2$$

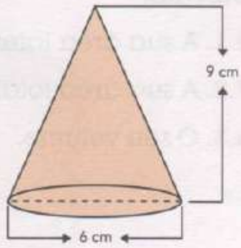
$$V = \frac{28{,}26\ cm^2}{3} \times 8\ cm$$

$$V = 75{,}36\ cm^3$$

Resposta: O volume do cone é de 75,36 cm^3.

2. Na figura está representado um cone com altura de 9 cm e 3 cm de raio da base.

2.1 Calcula o volume do cone.



$$V = \frac{1}{3} Ab \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \text{ cm}^2 \times 9 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi \times 9 \text{ cm}^2}{3} \times 9 \text{ cm}$$

$$V = 84{,}78 \text{ cm}^3$$

Resposta: O volume do cone é de 84,78 cm^3.

Exercícios:

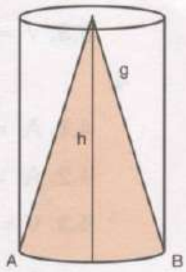
1. Na figura ao lado está representado um cilindro e no seu centro, um cone.

Sabendo que:
$Ab = 20 \text{ cm}^2$
Altura = 50 cm
Geratriz = 55 cm

$$Al = \frac{\text{Perímetro} \times \text{geratriz}}{2}$$

$Al = \pi r g$

$V = 1/3\ Ab \times h$



Determina:

1.1. A área lateral do cone.

1.2. A área total do cone.

1.3. o volume do cone.

2. Desenha duas pirâmides, uma com face triangular, outra com face quadrangular.

3. Uma pirâmide quadrangular tem de área da base 36 cm^2, de altura 10 cm e apótema 12 cm.

Calcula:

3.1. A área lateral da pirâmide.

3.2. A área total da pirâmide.

3.3. O volume da pirâmide.

4. Uma pirâmide quadrangular tem de área da base 16 cm^2, a altura é de 9 cm e a apótema é de 11 cm.

Calcula:

4.1. A sua área lateral.

4.2. A sua área total.

4.3. O seu volume.

Soluções:

1.

1.1. At = 17,27 cm^2

1.2. Al = 17,27 cm^2 porque só tem uma base.

1.3. V = 15700 cm^3

3.

3.1. Al = 144 cm^2

3.2. At = 60 cm^2

3.3. V = 120 cm^2

4.

4.1. Al = 88 cm^2

4.2. At = 104 cm^2

4.3. V = 58,67 cm^2