# SEBENTA DE MATEMÁTICA

**COM APONTAMENTOS E EXERCÍCIOS**

COOPTÉCNICA
GUSTAVE EIFFEL

António Lima

## FICHA TÉCNICA

**Título:** Sebenta de Matemática
**Autor:** António Lima
**Coordenação:** Augusto Guedes e António Lima
**Design:** Carla Pereira
**Processamento de Texto:** Susana Alves, Vasco Silva e Joana Quintas
**Revisão e correcção:** Vanessa Leal e Joana Quintas
**Notas de Apoio e Orientações:** Apontamentos e Exercícios de Matemática

Edições Cooptécnica Gustave Eiffel
Rua Elias Garcia 29, Venda Nova
2700-312 Amadora
214 996 440 | www.cooptecnica.pt

---



Esta sebenta não segue as normas do novo Acordo Ortográfico.

1.ª edição: Março de 2023
Depósito legal: ISBN: 978-972-8326-55-5

# SEBENTA DE

# MATEMÁTICA

Edições Cooptécnica Gustave Eiffel

# PRÓLOGO

Com esta Sebenta, constituída por três partes: - 1.ª Parte – Álgebra, Trigonometria, Geometria; 2.ª Parte – Estatística; 3.ª Parte – Cálculo vectorial -, não se pretendeu tratar as matérias de forma exaustiva. Procurou-se, simplesmente, proporcionar aos utentes os mecanismos essenciais ao seu entendimento de maneira a que compreendam sem esforço e consigam atingir, com resultados positivos, a forma de resolver o que, para muitos, se torna difícil de ultrapassar.

Estou certo que os nossos alunos conseguirão apreender com mais facilidade e, a pouco e pouco, nutrirão pela Matemática a necessária simpatia que os motivará para o estudo com vontade e empenho de que resultará, sem dúvida, um trabalho consciente e profícuo.

Assim seja!

O Autor.

# PREFÁCIO

O Autor desta Sebenta, disponibilizou-nos toda a sua experiência de docente da disciplina de Matemática, principalmente na prática de lecionação desta disciplina ao nível dos cursos profissionais.

Conhecedor das dificuldades, fragilidades e sentimento de desmotivação que os alunos, em geral, nutrem por esta disciplina quando chegam ao ensino secundário, o Autor pretendeu realizar uma abordagem de consolidação e aperfeiçoamento de conhecimentos, assente, fundamentalmente, nas temáticas de técnicas de cálculo, modelos matemáticos e geometria.

Para tal, apostou num formato, organizado e metódico, de apresentação dos conteúdos abordados, recorrendo a um grafismo "leve" e apelativo e privilegiando a simplicidade na linguagem utilizada, embora sempre rigorosa.

Estou convicto de que este formato utilizado, baseado numa estrutura de apresentação/informação sobre cada tema, composta por:

1. Explicação/Introdução sobre o conteúdo a abordar;

2. Demonstração através de exemplos de exercícios resolvidos;

3. Disponibilização de propostas de exercícios para resolver/praticar facultando, em muitos deles, as respetivas soluções;

4. Colocação, em destaque, dos principais conceitos a reter/realçar, como sejam: conclusões; propriedades; definições; teoremas; regras; princípios; fórmulas; etc.;

é o mais indicado para desmistificar a ideia de grande complexidade dos conteúdos desta disciplina, bem como de promover a motivação para a sua aprendizagem e de estimular a criatividade na utilização do raciocínio científico para resolução de problemas/desafios simples e concretos, estabelecendo "pontes" para a sua aplicação prática.

Por fim, resta-me agradecer, enquanto Diretor Pedagógico da Escola Profissional Gustave Eiffel, o contributo do Autor para o ensino da Matemática, num exercício de humildade e altruísmo ao disponibilizar esta "ferramenta" de apoio, tão útil para o desenvolvimento da competência matemática, tanto para os alunos, como para os próprios professores.

Pedro Rodrigues

# PARTE 1

# *ÁLGEBRA, TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA*

# ÁLGEBRA

## RAZÕES E PROPORÇÕES

Num jogo de futebol entre o Porto e o Sporting, verificou-se que o Porto marcou 3 golos e o Sporting marcou 2 golos.

Por isso, dizemos que o Porto ganhou o jogo por 3 a 2.

Comparando o número de golos marcados pelo Porto com o número de golos marcados pelo Sporting, podemos traduzir esta comparação da seguinte forma:

$$3 \div 2 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

Assim:

$3 \div 2$ ou $\frac{3}{2}$ é a razão de $3$ para $2$ ou a razão entre $3$ e $2$.

$3$ e $2$ são termos de razão

$3$ é o antecedente

$2$ é o consequente

Mas poderíamos exprimir o resultado do jogo escrevendo a razão entre os golos marcados pelo Sporting e os golos marcados pelo Porto.

Nesse caso seria:

$$2 \div 3 \text{ ou } \frac{2}{3}$$

Assim:

$2 \div 3$ ou $\frac{2}{3}$ é a razão de $2$ para $3$ ou a razão entre $2$ e $3$.

$2$ e $3$ são termos da razão

$2$ é o antecedente

$3$ é o consequente

Nota:

É importante conhecer a ordem, segundo a qual os termos da razão são escritos.

Então, concluímos que:

A razão entre os números $a$ e $b$ $(b \neq 0)$ é:
em que

$a$ e $b$ são termos da razão
$a$ é o antecedente
$b$ é o consequente

Ex.:

Representa as razões:

1. De $15$ para $12$. R.: $\frac{15}{12}$ …antecendente …consequente

2. De $18$ para $15$. R.: $\frac{18}{15}$

3. De $4$ para $12$. R.: $\frac{4}{12}$

4. De $15$ para $25$. R.: $\frac{15}{25}$

Nota:

A razão de dois números e quociente desses números são expressões sinónimas.

## PROPORÇÃO

Dados os números $8$ e $6$, se estabelecermos a razão dos dois números teremos:

$$\frac{8}{6}$$

Dados outros dois números $12$ e $9$, se estabelecermos a razão teremos:

$$\frac{12}{9}$$

Se escrevermos a igualdade:

$\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$ podemos afirmar que as duas razões são iguais porque:

$$8 \div 6 = 1{,}333 \ldots$$

$$12 \div 9 = 1{,}333 \ldots$$

Quando isto acontecer, podemos afirmar que a igualdade é uma proporção.

Então:

Chamamos proporção à igualdade obtida entre duas razões iguais.

Ex.:

A igualdade $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ é uma proporção?

Vejamos:

$$4 \div 5 = 0{,}8$$

$$12 \div 15 = 0{,}8$$

É uma proporção, porque as razões são iguais.

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

Assim:

Se as razões $\frac{a}{b}$ $e$ $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0 \; e \; d \neq 0)$ são idênticas.

Então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a \div b = c \div d$ é uma proporção.

$a, b, c$ e $d$ são os termos da proporção, respectivamente o 1.º, 2.º, 3.º e 4.º.

$a \; e \; d$ são os extremos.

$b$ e $c$ são os meios.

Ex.:

$$\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$$

As duas razões são $\frac{7}{5}$ (7 é o antecedente e o 5 é o consequente) e $\frac{21}{15}$ (21 é o antecedente e 15 é o consequente); por ordem escrita dos termos das duas razões.

7 e 15 são os extremos.

5 e 21 são os meios.

Então como devemos enunciar a proporção?

Da seguinte forma:

7 está para 5, assim como 21 está para 15.

Ex.:

A igualdade seguinte será uma proporção?

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$$

Vejamos:

1.º $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{5}$$

2.º $$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Como as razões são iguais, a igualdade é uma proporção em que:

$\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são os antecedentes

$\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ são os consequentes

$\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ são os extremos

$\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{5}$ são os meios

Exercícios:

1. Dada a igualdade seguinte, verifica se é uma proporção. Se for, indica todos os elementos que a compõem:

$$\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

2. Completa as proporções seguintes:

a) $\frac{25}{20} = \frac{}{4}$ R.: 5

b) $\frac{}{27} = \frac{5}{9}$ R.: 15

# PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

> Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \qquad \begin{array}{l} 6 \times 12 = 72 \\ 8 \times 9 = 72 \end{array}$$

Ex.:

Completa as expressões:

$$\frac{6}{8} = \frac{\phantom{0}}{4}$$

R.: $6 \times 4 = 24$

$24 \div 8 = 3$ R.: 3

$$\frac{9}{12} = \frac{\phantom{0}}{4}$$

R.: $9 \times 4 = 36$

$36 \div 12 = 3$ R.: 3

Ex.:

O desenho representa um jardim e foi feito à escala $1{:}200$ ou $\frac{1}{200}$

Calcula o comprimento e a largura do jardim.


Para calculares o comprimento e a largura do jardim, através da planta (desenho), tens de conhecer as dimensões correspondentes no desenho. Com o auxílio de uma régua graduada, podes verificar que o comprimento é de $8\ \text{cm}$ e a largura é de $4\ \text{cm}$.

Então, podemos calcular:

$$\frac{1}{200} = \frac{8}{c} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{200} = \frac{4}{l}$$

$$\begin{aligned} 1 \times \mathrm{c} &= 200 \times 8 \\ \mathrm{c} &= 1600cm \\ \mathrm{c} &= 16m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 \times l &= 200 \times 4 \\ l &= 800cm \\ l &= 8m \end{aligned}$$

# PERCENTAGEM

Consideremos algumas fracções cujos denominadores são iguais a $100$:

$\frac{15}{100} = 15 \div 100 = 0{,}15 \rightarrow$ quinze centésimas ou quinze por cento $(15\%)$.

$\frac{36}{100} = 36 \div 100 = 0{,}36 \rightarrow$ trinta e seis centésimas ou trinta e seis por cento $(36\%)$.

$\frac{3}{100} = 3 \div 100 = 0{,}03 \rightarrow$ três centésimas ou três por cento $(3\%)$

Então:

$$\frac{15}{100} = 15\% = \text{ou } 0{,}15$$

$$\frac{36}{100} = 36\% = \text{ou } 0{,}36$$

$$\frac{3}{100} = 3\% = \text{ou } 0{,}33$$

Então, concluímos que:

> As fracções decimais de denominador igual a $100$ têm o nome de Percentagens.

Exercícios:

1. Exprime em percentagem cada uma das seguintes fracções:

   1.1 $\frac{3}{4}$ R.: $0{,}75 = 75\%$

   1.2 $\frac{7}{25}$ R.: $0{,}28 = 28\%$

   1.3 $\frac{4}{5}$ R.: $0{,}8 = 80\%$

2. Dos $250$ alunos duma escola, há $50$ que jogam futebol.
   Que percentagem são, no conjunto dos alunos, os jogadores de futebol?

   R.: $0{,}2 = 20\%$

## Outros problemas de aplicação:

1. Um comerciante de ovos reparou que, em $600$ ovos há três dúzias que se partem.

   1.1. Qual é a percentagem de ovos que se partem?
   Sabemos que três dúzias são $36$ ovos. Então, temos:

   $$\frac{36}{600} = 0{,}06 = \frac{6}{100} = 6\%$$

   R.: A percentagem é de $6$.

   1.2. Qual será, provavelmente, o número de ovos que o comerciante perderá numa encomenda de $4.800$ ovos?
   Como sabemos que, provavelmente, se perdem $6\%$, então temos:

   $$6\% \times 4800 = 288$$

   $$0{,}06 \times 4800 = 288$$

   Também podemos usar uma regra de três simples:

   $$\begin{array}{ccc} \text{ovos} & & \text{perdas} \\ 100 & \text{———————} & 6 \\ 4800 & \text{———————} & x \end{array}$$

   $$x = \frac{4800 \times 6}{100} = 288$$

   $x = 288$ ovos

# PROPORCIONALIDADE DIRECTA

Consideremos as tabelas abaixo, que constituem os dados respeitantes a duas torneiras que deitam a mesma quantidade de água <u>por minuto</u> para copos de formas diferentes:

Copo A 

Copo B 

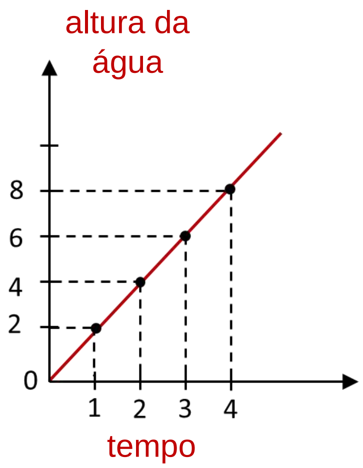
| Tempo (em minutos) | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Altura da água (em cm) | 2 | 4 | 6 | 8 | |

(1)

| Tempo (em momentos) | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Altura da água (em cm) | 1,4 | 2 | 2,4 | 2,8 | |

(2)

Na tabela (1), podemos passar da 1.ª para a 2.ª linha, multiplicando por <u>2.</u>



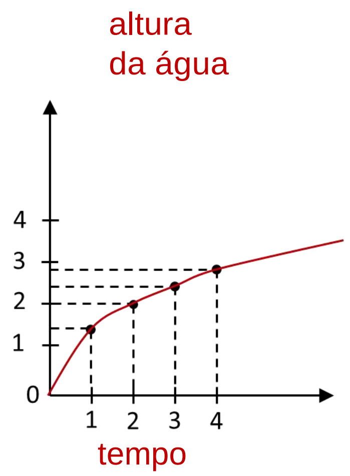

1. No gráfico obtemos uma recta que passa pela origem.
2. A altura da água no copo é directamente proporcional ao tempo.

   A constante de proporcionalidade é <u>2</u>.

   Assim:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

Na tabela (2), não podemos passar da 1ª para a 2ª linha, multiplicando por um número.




1. No gráfico, não obtemos uma recta que passa pela origem.
2. Não existe proporcionalidade directa.
3. Quanto mais tempo cai água no copo maior é a altura da água, mas os crescimentos não se operam sempre na mesma proporção.

   Assim:

$$\frac{1{,}4}{1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{2{,}4} \neq \frac{4}{2{,}8}$$

Nota:

A grandeza $\underline{a}$ é directamente proporcional a uma grandeza $\underline{b}$ se existir um número $\underline{c}$ (constante de proporcionalidade), tal que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = c, c \neq 0}$$

Nota:

Se duas variáveis estão relacionadas por uma proporcionalidade directa, uma obtém-se da outra multiplicando uma delas por uma constante não nula.

Assim:

Consideremos $x$ e $y$ duas grandezas directamente proporcionais.

Teremos:

$$y = kx, k \neq 0$$

À função $f: x \curvearrowright y = kx,\ k \neq 0$, dá-se o nome de função de proporcionalidade directa.

Exercícios:

1. Sendo $x$ e $y$ duas grandezas directamente proporcionais, determinar os valores de $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ da tabela seguinte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $a$ | 3 | 2 | $c$ |
| $y$ | 20 | 12 | $b$ | 10 |

R.: $\frac{12}{3} = 4 \longrightarrow$ Constante de proporcionalidade

Então:

$$\frac{20}{a} = 4 \qquad \frac{b}{2} = 4 \qquad \frac{10}{c} = 4$$

$$a = 5 \qquad b = 8 \qquad c = 2{,}5$$

2. Um aparelho eléctrico consome numa hora 15 kw. Quanto consumirá se estiver ligado 5h?

R.: 1h ——— 15

5h ——— $x$

$$x = \frac{15 \times 5}{1} = \frac{75}{1} = 75\ kwh$$

3. O João depositou $400.000€$ no banco, tendo recebido $42.000€$ de juros, no final do ano.

   Supondo que a taxa de juro não se alterou, quanto receberia se tivesse depositado $600.000€$?

R.: $400.000€$ ——— $42.000€$
$600.000€$ ——— $x$

$$x = \frac{600.000€ \times 42.000€}{400.000€} = \frac{25.200.000.000€}{400.000€} = 63.000€$$

4. Numa loja de informática fazem descontos a estudantes.
   a. Se um computador custava $250€$ e passou a custar $200€$, qual foi o desconto?

R.: $250 - 200 = 50$

$250$ ——— $100$
$50$ ——— $x$

$$x = \frac{100 \times 50}{250} = \frac{5000}{250} = 20 = 20\%$$

   b. Se uma pen com desconto de $10\%$ custou $2€$, quanto custava sem desconto?

R.: $100 - 10 = 90$

$2$ ——— $90$
$x$ ——— $100$

$$x = \frac{2 \times 100}{90} = \frac{200}{90} = 2{,}22€$$

5. Depois de ser aumentado 25% ao seu salário, o João passou a ganhar $1150€$. Qual era o seu salário antes do aumento?

R.: $100 + 25 = 125$

$1150$ ——— $125$
$x$ ——— $100$

$$x = \frac{1150 \times 100}{125} = \frac{115000}{125} = 920 = 920€$$

6. Um comerciante comprou uma camisa a 5€ e vendeu-as a 6€. Qual foi a percentagem de lucro?

R.: $6 - 5 = 1$

$$\begin{array}{l} 5 \text{ ——— } 100 \\ 1 \text{ ——— } \ \ x \end{array} \qquad x = \frac{1 \times 100}{5} = \frac{100}{5} = 20 = 20\%$$

## PROPORCIONALIDADE INVERSA

Outras vezes duas variáveis estão relacionadas e quando uma cresce a outra decresce.

Ex.: Se a velocidade aumenta, diminui o tempo de uma viagem.

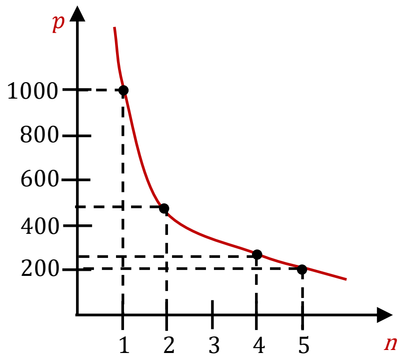
Ex.: Se tenho certa quantidade de arroz, quanto mais gastar menos me fica.

Nota:

Se houver esta relação entre duas variáveis, mas ela se verifique na mesma proporção, dizemos que são inversamente proporcionais.

Ex.: Consideremos a tabela que representa a relação entre o número de vezes que se vai cozinhar e a quantidade de arroz que se vai usar, em gramas:

| Nº de vezes que Vou cozinhar (n) | Quantidade de Arroz em gramas (p) |
|---|---|
| 1 | 1000 |
| 2 | 500 |
| 4 | 250 |
| 5 | 200 |




$$n \times p = 1000$$

Observando a tabela e o gráfico, verificamos que o produto dos valores é constante.

Então:

> Duas variáveis são Inversamente Proporcionais se o seu produto for constante.

Se $x$ e $y$ são inversamente proporcionais, teremos:

$$y = \frac{k}{x}\ , k \neq 0$$

Daqui que:

$$k = x \times y \quad \vee \quad x = \frac{k}{y}$$

À função $f : x \curvearrowright y = \frac{k}{x}\ , k \neq 0$ chamamos função da proporcionalidade inversa.

Exercícios:

1. Sendo $x$ e $y$ duas grandezas inversamente proporcionais, completa a tabela:

| $x$ | 0,6 | 4 | 3 | $\frac{1}{2}$ | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10 | 1,5 | 2 | 12 | 15 |

R.: $3 \times 2 = 6$

$6 \div 0{,}6 = 10 \Leftrightarrow 10 \times 0{,}6 = 6$

$6 \div 1{,}5 = 4 \Leftrightarrow 4 \times 1{,}5 = 6$

$6 \div \frac{1}{2} = 12 \Leftrightarrow 12 \times \frac{1}{2} = 6$

$6 \div 15 = 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}4 \times 15 = 6$

2.

2.1. Seis homens demoram 10 dias a pintar um prédio. Se fossem 12 homens quantos dias demoravam?

R.: $6$ ——— $10$
$12$ ——— $x$

$$x = \frac{6 \times 10}{12} = \frac{60}{12} = 5\ dias$$

2.2. Quantos homens eram necessários para pintar o prédio em 4 dias?

R.: $6$ ——— $10$
$x$ ——— $4$

$$x = \frac{6 \times 10}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ homens}$$

# NÚMEROS RELATIVOS

## CLASSIFICAÇÃO

Inteiros Relativos

- Positivos — São precedidos do sinal $(+)$
  Ex.: $+3;\ +5;\ +100;\ \ldots$

e

- Negativos — São precedidos do sinal $(-)$
  Ex.: $-3;\ -5;\ -100;\ \ldots$

Nota: O zero $(0)$ nem é positivo, nem é negativo.

## CONJUNTOS

Inteiros Relativos $\longrightarrow$ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +\cdots\}$

Inteiros Positivos $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +\cdots\} = \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ Conjunto dos N.os Naturais

Inteiros Negativos $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}^-\{\ldots, -3, -2, -1\}$

Inteiros não Positivos $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}_0^- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

Inteiros não Negativos $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, +1, +2, +3, +\cdots\} = \mathbb{N}_0$

## ORDENAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

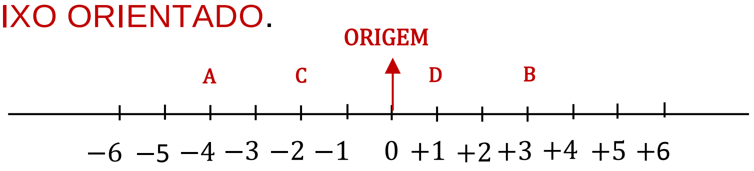
### ORDEM CRESCENTE

Do menor para o maior
Ex.: $+1, +2, +5, +9, +\cdots$

### ORDEM DECRESCENTE

Do maior para o menor
Ex.: $+9, +5, +2, +1, +\cdots$

Os números relativos representam-se num eixo horizontal, graduado a que chamamos EIXO ORIENTADO.




Nota: Cada um destes números pode representar a abcissa de um ponto.

Como podes verificar:

O ponto $A$ tem abcissa $(-4)$ ou ao $A$ Corresponde $-4$

O ponto $B$ tem abcissa $(+3)$ ou ao $B$ Corresponde $+3$

O ponto $C$ tem abcissa $(-2)$ ou ao $C$ Corresponde $-2$

O ponto $D$ tem abcissa $(+1)$ ou ao $D$ Corresponde $+1$

## MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO de um número relativo é o número que se obtém quando lhe tiramos o sinal que o precede.

SÍMBOLO DE MÓDULO usa-se o seguinte **| |**

Ex.: $|-3| = 3$ e $|+3| = 3$

Nota:

Em módulo, qualquer número positivo ou negativo têm o mesmo valor, como se verificou no exemplo anterior.

## NÚMEROS SIMÉTRICOS OU OPOSTOS

São os números de sinais diferentes. Têm o mesmo valor absoluto.

Ex.: $+3$ e $-3 \longrightarrow$ São simétricos

Mas

$|+3| = 3$ e $|-3| = 3 \longrightarrow$ Valor absoluto

Ex.: $-5 \; e \; +5 \longrightarrow$ São simétricos

Mas

$|-5| = 5$ e $|+5| = 5 \longrightarrow$ Valor absoluto

Nota: O simétrico de zero é o próprio zero.

# RELAÇÃO DE ORDEM

Maior Que ( $>$ )

Menor Que ( $<$ )

Nota:

Qualquer número é maior que qualquer outro situado à sua esquerda e é menor que qualquer outro situado à sua direita.

Ex.: $+3 < +5$ ; $0 > -4$ ; $+1 > -1$ ; $-3 < -2$

Obs.: Se representares estes números na recta orientada verificarás que é verdade.

# OPERAÇÕES

## ADIÇÃO

Para somar dois números relativos de sinais iguais, somo os seus valores absolutos e dou ao resultado o sinal comum.

Ex.: $(+3) + (+5) = +8$

$(-3) + (-5) = -8$

Nota:

Nos exemplos anteriores deve-se dizer mais três com mais cinco dá mais oito; menos três com menos cinco dá menos oito.

Então o sinal de adição $(+)$ diferencia-se dos sinais que precedem os números.

> Para somar dois números relativos de sinais diferentes, subtraio os seus valores absolutos e dou ao resultado o sinal da parcela de maior valor absoluto.

Ex.: $(+3) + (-5) = -2$

$(-5) + (+20) = +15$

Exercício:

1. $\underbrace{(+7) + (-3)}_{(+4)} + (-8) =$

$$\underbrace{(+4) + (-8)}_{-4} = -4$$

2. $(+7) + (-5) + (+1) + (-7) + (+5) =$

$$= \underbrace{(+7) + (+1) + (+5)}_{(+13)} + \underbrace{(-5) + (-7)}_{(-12)} =$$

$$\underbrace{(+13) + (-12)}_{+1} =$$

Trocando a ordem das parcelas e juntando os números de sinais iguais.

## ↳ PROPRIEDADES

### COMUTATIVA

> Trocando a ordem das parcelas obtenho o mesmo resultado

Ex.: $\underbrace{10 + 5}_{15} = \underbrace{5 + 10}_{15}$

$15 = 15$

Então:

$$\boxed{a + b = b + a}$$

Nota:

Os números relativos positivos podem escrever-se sem o sinal $(+)$.

## ASSOCIATIVA

Associando duas ou mais parcelas, obtenho o mesmo resultado.

Ex.: $\underbrace{5+3+4}_{12} = \underbrace{\underbrace{(5+3)}_{8}+4}_{12} = \underbrace{5+\underbrace{(3+4)}_{7}}_{12} = \underbrace{\underbrace{(5+4)}_{9}+3}_{12}$

Então:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

## ELEMENTO NEUTRO

Na *adição*, o zero $(0)$ é um elemento *neutro.*

Ex.: $\underbrace{6 + 0}_{6} = \underbrace{0 + 6}_{6} = 6$

Então:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

## ELEMENTO OPOSTO OU SIMÉTRICO

Na adição, todo o elemento tem simétrico ou oposto.

Ex.: $(\cancel{6}) + (\cancel{-}6) = 0$

Então:

$$a + (-a) = 0$$

## SUBTRACÇÃO

Se te recordares, nos teus tempos de aluno da Escola Primária efectuavas uma subtracção do seguinte modo:

$$9 - 3 = 6$$

$9$ → Aditivo ou Diminuendo

$-3$ → Subtractivo ou Diminuidor

$6$ → Resto ou diferença

Como te recordas, também, para tirarmos a prova real efectuamos uma soma:

$$\begin{array}{r} 9 \\ -3 \\ \hline 6 \end{array} \quad +$$

A soma de $3$ com $6$ dá-nos o $9$.
A subtracção está correta.

Assim:

> A subtracção é a operação inversa da adição.

> A diferença de dois números relativos obtém-se adicionando ao aditivo o simétrico do subtractivo.

Ex.:1. $(+4) - (+7) = 4 - 7 =$ porque os positivos não usam o sinal.

$4 + (-7) = -3$

2. $(+3) - (-5) =$

$3 + (+5) = 8$

Nota:

Na prática, trocamos o sinal de subtracção ($-$) pelo sinal de adição ($+$) e também trocamos o sinal que precede o número imediatamente a seguir.

Exercício:

$(-5) - (+2) + (-3) - (+7) =$

$\underbrace{(-5) + (-2)} + \underbrace{(-3) + (-7)} =$

$\underbrace{-7 + (-10)}$

$-17$

## MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{Z}$

Numa multiplicação de números relativos, primeiro multiplico os sinais e, depois, multiplico os números.

**Assim:**

$$\begin{array}{c}
(+) \overset{\text{Por}}{\times} (+) \overset{\text{Dá}}{=} (+) \\
(-) \times (-) = (+) \\
(+) \times (-) = (-) \\
(-) \times (+) = (-)
\end{array}$$

Então:

1. Se os sinais são iguais, o resultado é positivo;
2. Se os sinais são diferentes, o resultado é negativo.

Ex.:
$$\left.\begin{array}{l}
3 \times 5 = 15 \text{ mas } (-3) \times (-5) = 15 \\
-4 \times (-3) = 12 \text{ mas } 4 \times 3 = 12
\end{array}\right\} \text{Sinais iguais}$$

Ex.:
$$\left.\begin{array}{l}
3 \times (-5) = -15 \text{ mas } -3 \times 5 = -15 \\
4 \times (-3) = -12 \text{ mas } -4 \times 3 = -12
\end{array}\right\} \text{Sinais diferentes}$$

## MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Para multiplicarmos fracções, multiplicamos os numeradores e também os denominadores.

Temos uma fracção: $\frac{2}{3}$ → Numerador, → Denominador

Então:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{6}{15}$$

$$-\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{6}{15}$$

$$-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{15}$$

Nota:

Chama-se a atenção para o mecanismo usado na adição e na multiplicação.

Assim:

$$\overset{\text{com}}{(+3)\ +}\ \overset{\text{dá}}{(-5)\ =}\ -2 \rightarrow \text{Adição}$$

$$\overset{\text{por}}{(+3)\ \times}\ \overset{\text{dá}}{(-5)\ =}\ -15 \rightarrow \text{Multiplicação}$$

Nota:

Todo o número relativo tem o seu inverso ou recíproco.

Ex.: $\frac{2}{3}\ e\ \frac{3}{2}$ São inversos

$3\ e\ \frac{1}{3}$ São inversos

## PROPRIEDADES

### COMUTATIVA

> Trocando a ordem dos factores, obtemos o mesmo resultado.

Ex.: $\underbrace{3 \times (-4)}_{-12} = \underbrace{-4 \times 3}_{-12}$

Ex.: $\underbrace{-\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}_{-\frac{6}{15}} = \underbrace{\frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)}_{-\frac{6}{15}}$

### ASSOCIATIVA

> Associando dois ou mais factores, obtemos o mesmo resultado.

Ex.: $\underbrace{\underbrace{3 \times (-4)}_{-12} \times 5}_{-60} = \underbrace{\underbrace{[3 \times (-4)]}_{-12} \times 5}_{-60} = \underbrace{3 \times \underbrace{[(-4) \times 5]}_{(-20)}}_{-60}$

### DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO

Ex.: $3 \times (-4 + 5) = -12 + 15 = 3$ ou

$$\begin{array}{r} -4 + 5 \\ \times\ 3 \\ \hline \underbrace{-12 + 15}_{3} \end{array}$$

Ex.: $-5 \times (4 - 3) = -20 + 15 = -5$ ou

$$\begin{array}{r} 4 - 3 \\ \times (-5) \\ \hline \underbrace{-20 + 15}_{-5} \end{array}$$

Ex.: $(3 + 2) \times (4 - 3) = 12 - 9 + 8 - 6 = 5$ ou

$$\begin{array}{r} 3 + 2 \\ \times\, 4 - 3) \\ \hline +12 + \underbrace{8 - 9 - 6}_{5} \end{array}$$

# DIVISÃO EM $\mathbb{Z}$ E $\mathbb{Q}$

Nota:

Como já é conhecido, para se calcular o quociente entre duas fracções procede-se de forma a aplicar a operação inversa (multiplicação).

Ex.: $\frac{1}{3} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{4}{6}$

$$-\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{12}$$

Nota:

Relativamente aos sinais procede-se da mesma maneira que para a multiplicação.

## PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

> Numa divisão, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, adicionando-se-lhe o resto.

Se recordarmos:

$235 \div 3 = 78$

$r = 1$

Dividendo $(D)$

$$\begin{array}{r|l} 235 & \underline{3} \rightarrow \text{divisor (d)} \\ 25 & 78 \rightarrow \text{quociente (q)} \\ 1 & \end{array}$$

resto $(r)$

Aplicando a fórmula da Propriedade Fundamental

$$\boxed{D = d \times q + r}$$

Teremos:

$$235 = 3 \times 78 + 1$$

$$235 = 234 + 1$$

$$235 = 235$$

Então, concluímos que:

A Divisão é a operação inversa da Multiplicação.

## ADIÇÃO E SUBTRACÇÃO EM $\mathbb{Q}$

Como adicionamos fracções?

1. Se têm denominadores iguais, somamos os numeradores e damos ao resultado o denominador comum:

   Ex.:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4+2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{4}{6}=\frac{-3+2-4}{6}=\frac{-5}{6}=\ -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{-4+2}{5}=\frac{-2}{5}=\ -\frac{2}{5}$$

2. Se têm denominadores diferentes, temos de as reduzir ao mesmo denominador. Para isso, calculamos o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre os denominadores.

$$\underset{(4)}{\frac{2}{6}}+\underset{(3)}{\frac{3}{8}}=$$

$$24\div 6=4 \qquad 24\div 8=3$$

$$\frac{4\times 2}{4\times 6}=\frac{3\times 3}{3\times 8}=$$

$$\frac{8}{24}+\frac{9}{24}=$$

$$\frac{17}{24}$$

$$\begin{aligned} m.m.c.\,(6,8) &= 2^3\times 3\\ &= 8\times 3\\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2\\ 4 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & \end{array}$$

$$6=2\times 3$$

$$8=2^3$$

## Exercícios:

1. Efectua as seguintes operações:

a) $5 - 4 + 3 - 7$

b) $-24 + 32 - 17 - 6 + 11$

c) $7 - (-2) - 4$

d) $6 - [3 - (-2 - 3) - (7 - 12)]$

2. Calcula:

a) $3 - |-2| + 5 + |-7|$

b) $|1 - 2| - |3 - 5|$

c) $|-3 + 2 - 5| - |4 - 6 + 7|$

3. Determina o número designado por:

a) $\left(-\frac{3}{10}\right) + \frac{1}{5}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)$

c) $6 + \left(-\frac{9}{2}\right)$

d) $(-1{,}3)+(0{,}4)$

e) $\frac{7}{2} + (-3{,}47)$

4. Calcula:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8}$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{13}{8}\right) - \left(\frac{5}{16}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right)$

c) $8\left[-\frac{5}{2} - \left(-2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$

5. Calcula:

a) O Produto de $\underline{a}$ pelo inverso de $\underline{b}$, sendo:

$$a = -3 \qquad \text{e} \qquad b = -\frac{3}{8}$$

b) O Produto de $-\frac{1}{2}$ pelo seu simétrico

c) O Produto do simétrico de 4 pelo inverso de $-\frac{3}{8}$

d) O Inverso do produto de $-\frac{2}{3}$ por $\frac{9}{4}$.

e) $\dfrac{-\frac{5}{8}}{-\frac{3}{4}}$

f) $\dfrac{2 - \frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9}}$

g) $\dfrac{2 - [-3 \times (-2)]}{3 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)}$

# POTÊNCIAS DE EXPOENTE EM $\mathbb{Z}$

$2^3 \longrightarrow$ Potência

$2^3$ → Expoente, → Base

O que significa $2^3$? Significa que a base se repete as vezes que o seu expoente indica.

Assim: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

O mesmo acontece quando a base é uma fracção.

Então: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

E se a base é negativa? Procedo de igual modo.

Assim: $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

Nota:

Devemos sempre ter em consideração os sinais.

Ex.: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

$-(2)^2 = -4$ porque $-(2 \times 2) = -4$

## BASE 10

Representação de números sob a forma $a \times 10^n$ em que:

$$1 \leq a < 10 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Nota:

Há necessidade de escrever um número com a forma de um produto de dois factores em que:

O 1.º factor é um número do intervalo $[1,10[$ e o 2.º factor é uma potência de base $10$ e expoente inteiro.

Como fazer?

Se atendermos a que:

$$10 = 10^1$$

$$100 = 10^2$$

$$1000 = 10^3$$

veremos que $\underbrace{10 \ldots 10}_{n \text{ zeros}} = 10^n$

Veremos que:

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \quad \text{e} \quad 0{,}0 \ldots 0{,}1 = 10^{-n}$$

Isto é possível se atendermos que:

> Uma potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente simétrico.

Então:

$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 ; \ 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} ; \ \left(\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^5$$

Então, concluímos que;

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Continuando o raciocício anterior:

$$200 = 2 \times 100 = 2 \times 10^2 \ \text{e} \ 0{,}02 = 2 \times 10^{-2}$$

$$5400 = 5{,}4 \times 1000 = 5{,}4 \times 10^3 \ \text{e} \ 0{,}0054 = 5{,}4 \times 0{,}001 = 5{,}4 \times 10^{-3}$$

$$43{,}7 = 4{,}37 \times 10^1 = 4{,}37 \times 10$$

Outros problemas de aplicação:

$$5400 \times 0{,}00035 = 5{,}4 \times 10^3 \times 3{,}5 \times 10^{-4} = (5{,}4 \times 3{,}5) \times (10^3 \times 10^{-4})$$

$$3{,}2 \times 10^{-3} + 0{,}5 \times 10^{-4} = 3{,}2 \times 10^{-3} + 0{,}5 \times 10^{-4} \times 10^{-3} \ldots$$

Nota:

Após as regras das operações, veremos como se fazem os cálculos.

# MULTIPLICAÇÃO

## REGRAS:

1. Para multiplicar potências de <u>bases iguais</u> e <u>expoentes diferentes</u>, damos a base comum e somamos os expoentes.

Ex.: $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

Ex.: $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{4+2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$

2. Para multiplicar potências de <u>bases diferentes</u> e <u>expoentes iguais</u>, multiplicamos as bases e damos o expoente comum.

Ex.: $2^3 \times 2^4 = (2 \times 4)^3 = 8^3$

Ex.: $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{9}\right)^3$

Ex.: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times (-1)^5 = \left(-\frac{6}{6}\right)^3 \times (-1)^5 = (-1)^3 \times (-1)^5 =$

$= (-1)^8 = +1 = 1$

# DIVISÃO

## REGRAS:

1. Para dividirmos potências com <u>bases iguais</u> e <u>expoentes diferentes</u>, damos a base comum e subtraímos os expoentes.

Ex.: $4^6 \div 4^2 = 4^{6-2} = 4^4$

Ex. $\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{5-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$

Ex.: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-(-5)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$

2. Para dividirmos potências com <u>bases diferentes</u> e <u>expoentes iguais</u>, dividimos as bases e damos o expoente comum.

Ex.: $4^6 \div 2^6 = (4 \div 2)^6 = 2^6$

Ex.: $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \div \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{7} \div \frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{7} \times \frac{3}{1}\right)^5 = \left(\frac{6}{7}\right)^5$

Ex.: $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \div \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3} \div \frac{2}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3} \times \frac{4}{2}\right)^3 = \left(-\frac{4}{6}\right)^3$

## OUTRAS REGRAS

1. A potência de uma potência de um número é outra potência cujo expoente é igual ao produto dos expoentes.

Ex.: $[(2)^3]^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$

Ex.: $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$

2. Uma potência cujo expoente seja nulo (igual a zero) é sempre igual à unidade.

Ex.: $1^0 = 1$ ; $3^0 = 1$ ; $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

$(-3)^0 = 1 \text{ mas } -3^0 = -1$

3. Uma potência de <u>expoente negativo</u> é igual ao inverso da potência de expoente simétrico.

Ex.: $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ ; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(-\frac{3}{2}\right)^5$

Exercícios:

1. $2^3 + \frac{2^0}{-1}$

2. $5^0 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{3^{-5}} - 15^0$

3. $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left[\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}\right]^3 \div 6^3$

4. $\frac{3^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}} + 2$

5. $\frac{3^{-4} \div 3^{-5}}{2 \times \frac{3}{2}} - 4^0$

6. $\frac{3^2 \times 2^2 \div 3^2}{3 + 5^0}$

7. $(4^{-5})^2 \div (2^{-2})^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

8. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3} \div 3^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

9. $\frac{(3^{-2})^3 \times 3^4 \div 6^{-2}}{4 \times 3^0}$

10. $3^0 + 2 \times 3^{-1} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} - 3 \times 3^{-3}$

11. $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} \div (0{,}5)^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^0}$

# RAIZ QUADRADA

Sabemos que:

$$3^2 = 9 \text{ porque } 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

Então:

A raiz quadrada de $9$ é o número que elevado ao quadrado dá $\underline{9}$, ou seja, é o $\underline{3}$.

$$4^2 = 16 \text{ porque } 4^2 = 4 \times 4 = 16$$

Então:

A raiz quadrada de $16$ é $4$, isto é, o número que elevado ao quadrado dá $\underline{16}$ é o $\underline{4}$.

Então, concluímos que:

> A Raiz Quadrada de um número positivo $P$ é um número $x$, cujo quadrado é $P$.

Então:

$$\boxed{\text{Raiz Quadrada de } P = x, \text{ se } x^2 = P.}$$

$\sqrt{\phantom{x}} \longrightarrow$ sinal de raiz

Nota:

1. Presentemente só falaremos em raiz quadrada de um número positivo.
2. Em $\mathbb{Q}$, cada número positivo passa a ter duas raízes quadradas.

Ex.:
$36$ admite como raízes quadradas os números $6$ e $-6$ . Porquê?

$$6^2 = 36, \text{ mas } (-6)^2 = (-6) \times (-6) = 36$$

então:

$$\sqrt{36} = \pm 6 = \left\langle \begin{array}{l} +6 \\ \wedge \\ -6 \end{array} \right.$$

# ALGORITMO DA RAIZ QUADRADA

Como calcular a raiz quadrada de um número que possua mais de dois algarismos?

Ex.: Calcular a raiz inteira do número $134$.

1. Represento o número em forma de raiz:

$$\sqrt{134}$$

2. Divido o número em classes de dois algarismos a partir da direita:

$$\sqrt{1.\underbrace{34}}$$

3. Calculo a raiz inteira do número da classe mais à esquerda, isto é, do $1$. Calculo o seu quadrado e subtraio:

$$1^2 = 1 \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.34} & 1 \\ \cline{2-2} \underline{-1\phantom{.34}} & \\ 0\phantom{.34} & \end{array}$$

4. Baixo a classe dos dois algarismos seguintes e calculo o dobro da raiz inteira e coloco por baixo dela:

$$1^2 = 1 \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{134} & 1 \\ \cline{2-2} \underline{-1\phantom{34}} & 2 \\ 034 & \end{array} \qquad 1 \times 2 = 2$$

5. Coloco, junto do dobro, o número que multiplicado por si próprio e também pelo $2$ (dobro), me dê $34$ ou inferior e subtraio:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{134} & 1 \\ \cline{2-2} \underline{-1\phantom{34}} & 2\ 1 \\ 034 & \times\ 1 \\ \cline{2-2} \underline{-21} & 2\ 1 \\ 13 & \end{array}$$

6. Junto ao número (raiz inteira) o encontrado agora ($1$):

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{134} & 1\ 1 \\ \cline{2-2} \underline{-1\phantom{34}} & 2\ 1 \\ 034 & \times\ 1 \\ \cline{2-2} \underline{-21} & 2\ 1 \\ 13 & \end{array}$$

Então:

$$\sqrt{134} = 11 \quad \text{por defeito}$$

$$r = 13 \qquad 11 < \sqrt{134} < 12$$

# RAIZ QUADRADA APROXIMADA A MENOS DE UMA UNIDADE DECIMAL

Ex.: Calcular $\sqrt{41}$ com aproximação às décimas:

1. Acrescenta-se ao número dois zeros, separados por uma vírgula:

$$\sqrt{41{,}00}$$

2. Procede-se, no cálculo, da forma anteriormente estudada:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{41{,}00} & \\
-36 & \underline{64} \\
\hline
5{,}00 & 124 \\
 & \underline{\times\, 4} \\
 & 496 \\
-496 & \\
\hline
004 &
\end{array}
$$

3. Coloca-se uma vírgula na raiz $6{,}4$ e duas no resto $0{,}04$:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{41{,}00} & \\
-36 & \underline{6{,}4} \\
\hline
5{,}00 & 124 \\
 & \underline{\times\, 4} \\
 & 496 \\
-496 & \\
\hline
0{,}04 &
\end{array}
$$

Porquê assim?

Porque: $41{,}00 = (6{,}4)^2 + 0{,}04$

$= 40{,}96 + 0{,}04$

$41{,}00 = 41{,}00$

Nota:

1. Para o cálculo com aproximação às centésimas, acrescentamos quatro casas decimais.
2. Para o cálculo com aproximação às milésimas, acrescentamos seis casas decimais.

## ERRO ABSOLUTO – MAJORANTE DO ERRO

1. Quando estudámos a raiz quadrada e o seu algoritmo, verificámos que os valores de alguns números eram exactos e de outros não.
2. No cálculo das inexactas, fazíamos as aproximações e víamos os resultados por defeito e por excesso.

Ex.: $\sqrt{21} \cong 4{,}582$ por defeito e $\cong 4{,}583$ por excesso

Desta forma, estávamos a determinar o minorante e o majorante.

## MINORANTE DE UM VALOR APROXIMADO

MINORANTE de um número $n$ é qualquer número igual ou menor que $n$.

Ex.: Determinar um minorante de $\sqrt{98}$

$9{,}899 < \sqrt{98} < 9{,}900$

minorante por exemplo $\underline{9}$

## MAJORANTE DE UM VALOR APROXIMADO

MAJORANTE de um número $n$ é qualquer número igual ou maior que $n$ .

Ex.: Determinar um majorante de $\sqrt{98}$.

$9{,}899 < \sqrt{98} < 9{,}900$

majorante por exemplo $\underline{10}$

## ERRO ABSOLUTO

ERRO ABSOLUTO é a diferença, em módulo, entre o valor exacto e o valor aproximado.

Erro Absoluto = |valor exacto – valor aproximado|

Ex.: $\sqrt{7} = 2{,}6$ a menos de uma décima

Então:

2,6 é o valor aproximado de $\sqrt{7}$ , por defeito, com erro inferior a $0{,}1$ (uma décima).

Logo:

$$|\sqrt{7} - 2{,}6| < 0{,}1$$

Valor exacto valor aproximado

Quando isto acontece, dizemos que $0{,}1$ é o majorante do erro.

Ou ainda:

$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ isto é, $\sqrt{7}$ está entre $2{,}6$ e $2{,}7$

$2{,}7 - 2{,}6 = 0{,}1$ Erro inferior a $0{,}1$

O majorante do erro é qualquer número maior ou igual a $0{,}1$.

Outros exemplos:

1. $\sqrt{24} = 4{,}8$ por defeito.

Então:

$$4{,}8 < \sqrt{24} < 4{,}9$$

$4{,}9 - 4{,}8 = 0{,}1$ majorante do erro $0{,}1$

Erro

2. $\sqrt{36} = 6$ Raiz exacta

   Obs.: Não tem majorante.

3. $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

Tomando $\sqrt{2}$ a menos de $0{,}1$, teremos:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Então:

$$\underbrace{1{,}4 + 0{,}5}_{1{,}9} < \sqrt{2} + 0{,}5 < \underbrace{1{,}5 + 0{,}5}_{2{,}0}$$

$$\underbrace{1{,}9 < \sqrt{2} + 0{,}5 < 2{,}0}_{0{,}1}$$

Assim:

$\sqrt{2} + 0{,}5 \cong 1{,}9$ a menos de $0{,}1$ por defeito

$\sqrt{2} + 0{,}5 \cong 2{,}0$ a menos de $0{,}1$ por excesso

Se tomarmos $\sqrt{2}$ a menos de $0{,}01$, teremos:

$$\underbrace{1{,}41 + 0{,}5} < \sqrt{2} + 0{,}5 < \underbrace{1{,}42 + 0{,}5}$$

$$\underbrace{1{,}91 < \sqrt{2} + 0{,}5 < 1{,}92}_{0{,}01}$$

majorante do erro $0{,}01$

4. $\left(\frac{15}{37}, \sqrt{32}\right) \xrightarrow{+} \frac{15}{37} + \sqrt{32}$

$$\frac{15}{37} = 0{,}405 \qquad e \qquad \sqrt{32} = 5{,}656$$

Tomando ambas a menos de 0,1, teremos:

$$0{,}4 < \frac{15}{37} < 0{,}5 \qquad \text{e} \qquad 5{,}6 < \sqrt{32} < 5{,}7$$

Então:

$$\begin{array}{rcl} 0{,}4 < & \frac{15}{37} & < 0{,}5 \\ 5{,}6 < & \sqrt{32} & < 5{,}7 \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{6{,}0 < \frac{15}{37} + \sqrt{32} < 6{,}2}_{0{,}2}$$

$\boxed{\text{6,0 e 6,2 são valores aproximados com erro inferior a 0,2.}}$

5. $\pi + \sqrt{3} + \frac{5}{6}$

$$\pi = 3{,}141\ldots \qquad \sqrt{3} = 1{,}732\ldots \qquad \frac{5}{6} = 0{,}8(3)$$

Se considerarmos a menos de 0,01, teremos:

$$
\begin{array}{rcll}
3{,}14 < & \pi & < 3{,}15 & \\
1{,}73 < & \sqrt{3} & < 1{,}74 & \big\downarrow + \\
0{,}83 < & \dfrac{5}{6} & < 1{,}74 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\underbrace{5{,}70 < \pi + \sqrt{3} + \frac{5}{6} < 5{,}73}_{0{,}03}$$

5,70 e 5,73 são valores aproximados com erro inferior a 0,03.

6. $\pi \times \sqrt{3}$

Como $\pi = 3{,}141 \ldots$ e $\sqrt{3} = 1{,}732 \ldots$

Se considerarmos valores aproximados a menos de $0{,}001$, vem:

$$
\begin{array}{rcll}
3{,}141 < & \pi & < 3{,}142 & \\
1{,}732 < & \sqrt{3} & < 1{,}733 & \big\downarrow \times \\
\hline
\end{array}
$$

$$\underbrace{5{,}440212 < \pi \times \sqrt{3} < 5{,}445086}_{0{,}004874}$$

## Exercícios:

1. Tomando valores aproximados a menos de $0{,}1$, calcula os valores aproximados por defeito e por excesso, calculando o majorante do erro:

1.1 $4 + \sqrt{3}$

1.2 $\frac{1}{3} + \sqrt{5}$

1.3 $\frac{1}{2} + \pi$

1.4 $\frac{7}{6} + \sqrt{7} + \pi$

2. Faz o mesmo do exercício anterior, mas com valores aproximados a menos de 0,01:

2.1 $4 \times \sqrt{3}$

2.2 $\frac{1}{3} \times \sqrt{5}$

2.3 $2\pi \times \sqrt{6}$

# RADICAIS

Chama-se raiz de índice $n$ (natural) de um número $P$, ao número que elevado a $n$ produz $P$.

$$\left(\sqrt[n]{P}\right)^n = P$$

Ex.:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque } 3^3 = 27$$

$$\sqrt[2]{9} = 3 \text{ porque } 3^2 = 9$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^3 = 3$$

Índice do radical

sinal de raiz

$$\sqrt[n]{P^n}$$

expoente do radicando

radicando

RADICAL

## ÍNDICE ÍMPAR

### RADICANDO POSITIVO

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque se fizermos } x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

Raiz única positiva

### RADICANDO NEGATIVO

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \text{ porque se fizermos } x^5 = -32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Raiz única negativa

# ÍNDICE PAR

## RADICANDO POSITIVO

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \vee x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Duas raízes simétricas

## RADICANDO NEGATIVO

$x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \sqrt{-9}$ É impossível

Não tem raiz

## PROPRIEDADES

1.

O valor de um Radical não se altera quando se multiplicam ou dividem, simultaneamente, o índice do radical e os expoentes do radicando, pelo mesmo número diferente de zero.

Ex.: $\sqrt[4\div 2]{x^{2\div 2}} = \sqrt[2]{x^1}$

$\sqrt[2\times 3]{x^{3\times 3}} = \sqrt[6]{x^9}$

$\sqrt[8\div 2]{3^{4\div 2}\, a^{2\div 2}} = \sqrt[4]{3^2 a^1}$

2.

O radical que não apresente índice significa um radical de índice 2.

Ex.: $\sqrt{a^3} = \sqrt[2]{a^3}$

3.

O radical cujo índice é a unidade tem como resultado o valor do seu radicando.

Ex.: $\sqrt[1]{a^2} = a^2$

$\sqrt[1]{5} = 5$

# SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Na resolução de radicais devo, sempre que possível, decompor os radicandos em factores e depois aplicar a propriedade n.º 1.

Ex.: $\sqrt[12]{36} = \sqrt[12]{2^2 \times 3^2} = \sqrt[6]{2 \times 3} = \sqrt[6]{6}$

# REDUÇÃO DE RADICAIS AO MESMO ÍNDICE

Para reduzir radicais ao mesmo índice, devo determinar o m.m.c. entre eles. Depois, afecto os índices e os expoentes do radicando.

Relembrando o processo de redução de fracções ao mesmo denominador, verificamos que usaremos um processo idêntico para os radicais.

Assim: $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{5}$ ; $\frac{1}{10}$ $\quad$ $\text{m.m.c.}\,(2, 5, 10) = 10$

$\underset{(5)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$ $\quad$ $\underset{(1)}{\frac{1}{10}} = \frac{1 \times 1}{10 \times 1} = \frac{1}{10}$

$\underset{(2)}{\frac{1}{5}} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$

Então:

$\sqrt[(5)]{3^{(5)}}$ ; $\overset{(2)}{\sqrt[5]{2^{3(2)}}}$ ; $\overset{(1)}{\sqrt[10]{5^{2(1)}}}$ $\quad$ $\text{m.m.c.}\,(2, 5, 10) = 10$

$\sqrt[10]{3^5}$ ; $\sqrt[10]{2^6}$ ; $\sqrt[10]{5^2}$

Ex.:

$\overset{(8)}{\sqrt[3]{2^{(8)}}}$ ; $\overset{(6)}{\sqrt[4]{3^{2(6)}}}$ ; $\overset{(3)}{\sqrt[8]{4^{3(3)}}}$ $\quad$ $\text{m.m.c.}\,(3, 4, 8) = 24$

$\sqrt[24]{2^8}$ ; $\sqrt[24]{3^{12}}$ ; $\sqrt[24]{4^9}$

Nota:

A Potência de expoente natural de qualquer raiz é igual à raiz do mesmo índice da potência do seu radicando.

Ex.: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^{1\times 3}} = \sqrt{2^3}$

$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^4 = \sqrt[3]{x^8}$

# MULTIPLICAÇÃO

1.

A raiz dum produto é igual ao produto das raízes do mesmo índice dos factores.

Ex.: $\sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$

$\sqrt[4]{x.y} = \sqrt[4]{x} \times \sqrt[4]{y}$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

2.

O produto de radicais do mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice, cujo radicando é o produto dos radicandos.

Ex.: $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6}$

$\sqrt[4]{x} \times \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{x \times y} = \sqrt[4]{x.y}$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[5]{\frac{1}{4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{12}}$$

Nota:

Na resolução de produtos os radicais terão de possuir índices iguais. Se isto não acontecer devemos reduzir ao mesmo índice.

Ex.:

$$\sqrt{4} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[8]{3} = \sqrt[8]{4^4} \times \sqrt[8]{3^2} \times \sqrt[8]{3} = \sqrt[8]{4^4 \times 3^2 \times 3} = \sqrt[8]{4^4 \times 3^3}$$

Nota:

Qualquer factor dum radical pode constituir factor do seu radicando (passar para dentro) desde que se multiplique o seu expoente pelo índice do radical.

Ex.:

$3^2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 3^6}$ $\qquad a^3\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^2 \times a^{15}} = \sqrt[5]{a^{17}}$

$2\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{2^4 x^2}$

Nota:

Se quisermos passar para fora qualquer factor do radicando, devemos dividir o seu expoente pelo índice do radical.

Ex.:

$\sqrt[3]{2 \times 3^6} = 3^2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{2a^8} = a^2\sqrt[4]{2}$

$\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \times a} = a^2\sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^9 \times x} = x^3\sqrt[3]{x}$

## DIVISÃO

1. O quociente de dois radicais com o <u>mesmo índice</u> é igual a um radical do mesmo índice, cujo radicando é o quociente dos radicandos do dividendo e do divisor.

Ex.:

$$\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{15}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^3}{a}} = \sqrt{a^2} = a\sqrt{1} = a \times 1 = a$$

2. A raiz de um quociente é igual ao quociente das raízes do <u>mesmo índice.</u>

Ex.:

$$\sqrt[4]{\frac{x^3}{x}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$$

## Nota:

> Quando os índices forem diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice.

## Exercícios:

1.

$$\frac{(\sqrt{a})^2 \times \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\overset{(2)}{\sqrt{a^2}} \times \overset{(1)}{\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\sqrt[4]{a^4 \times a^3}}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[4]{a^5}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{a^7}{a^5}} = \sqrt[4\div 2]{a^{2\div 2}} = \sqrt{a}$$

2.

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 \times \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\overset{(2)}{\sqrt[3]{x^6}} \times \overset{(1)}{\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x^{12}} \times \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x^{12} \times x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x^{13}}}{{}^{(2)}\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x^{13}}}{\sqrt[6]{x^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{x^{13}}{x^2}} = \sqrt[6]{x^{11}} = \sqrt[6]{x^6 x^5} = x\sqrt[6]{x^5}$$

3.

$$\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{12}}$$

4.

$$\frac{\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^3 \times \sqrt[8]{3a}}{\sqrt{3a}}$$

5.

$$\frac{\sqrt[6]{ax} \times \left(\sqrt[3]{a^2 x}\right)^2}{\sqrt[3]{a^3 x}}$$

## Nota:

> A raiz de índice $n$ da raiz de índice $p$ de um certo número $A$ é igual à raiz de índice $np$ do mesmo número $A$.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[np]{A}$$

Ex.: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$

$\sqrt{\sqrt[3]{2a}} = \sqrt[6]{2a}$

$\sqrt[3]{3\sqrt{3x}} = \sqrt[3]{\sqrt{3x \times 3^2}} = \sqrt[6]{3^3x}$

## RADICAIS SEMELHANTES

Dois radicais dizem-se semelhantes quando possuem iguais o índice e o radicando.

Ex.: $3\sqrt[4]{5}$ e $2\sqrt[4]{5}$ $\sqrt[2]{x}$ e $\sqrt{x}$ $\sqrt[3]{3a}$ e $\sqrt[3]{3a}$

## ADIÇÃO ALGÉBRICA DE RADICAIS

Para podermos efectuar uma soma algébrica, devemos considerar:

1. Os radicais têm de ser semelhantes;

2. Se os radicais forem semelhantes, somo os factores externos e dou ao resultado o radical comum;

   Ex.:

   $$7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = (7 + 2 - 5 - 1)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

   $$2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = (2 - 1 + 3)\ \sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

3. Se os radicais não forem semelhantes? Então devo procurar, passando para fora, ou simplificando ou reduzindo ao mesmo índice, torná-los semelhantes.

Ex.:

$$\sqrt[4]{9} + 2\sqrt{75} - 6\sqrt{27} =$$

1.º Decompondo os radicandos em factores:

$$\sqrt[4\div 2]{3^{2\div 2}} + 2\sqrt{3 \times 5^2} - 6\sqrt{3^3} =$$

2.º Simplifico e passo para fora o que puder:

$$\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3} - 6 \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 18\sqrt{3}$$

3.º Efectuo a soma:

$$\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 18\sqrt{3} = (1 + 10 - 18)\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$$

Exercícios:

Efectua e simplifica:

1. $\sqrt{24} + \sqrt{54} + \sqrt{6} - 3\sqrt{6}$

2. $\sqrt{a^5} - \sqrt{4a^3b^2} + \sqrt[6]{a^3b^{12}}$

3. $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} + 3$

4. $\dfrac{3\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}}$

5. $\left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right)^2$

6. $2\sqrt{3} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

8 $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

9. $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 - \dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{\sqrt{3^3}}}$

# MONÓMIOS E POLINÓMIOS

## MONÓMIOS

Chamamos monómio a um número relativo ou a um produto de números relativos (alguns representados por letras).

Ex.:

$-\frac{3}{4}$ é um monómio porque $-\frac{3}{4} \times 1 = -\frac{3}{4}$

$2x$ é um monómio porque $2 \times x = 2x$

$5\,x^2y^3$ é um monómio porque $5 \times x^2 \times y^3 = 5\,x^2y^3$

Coeficiente

2

Monómio

$2x$

Parte Literal

$x$

coeficiente

$2\ \ x$ parte literal

Monómios Semelhantes – se possuem a mesma parte literal.

Ex.: $5\,\underbrace{a^2b^4}$ e $-\frac{2}{3}\,\underbrace{a^2b^4}$ São Semelhantes

Monómios Simétricos – têm a mesma parte literal, mas os coeficientes são simétricos.

Ex.: $3x^3y$ e $-3x^3y$ São simétricos

Grau de um monómio – obtém-se pela soma dos expoentes das letras que nele figuram.

Ex.: $5\,a^6$ - Grau 6 ou 6.º grau
$3\,a^2b^4$ - Grau 6 ou 6.º grau
$3\,x$ - Grau 1 ou 1.º grau

Nota:

Se quisermos em relação a uma variável.

Ex.: $5\,x^2y^5$ Grau 2 relativamente a $x$

Grau 5 relativamente a $y$

## OPERAÇÕES

### ADIÇÃO

Para **somar** dois monómios, somo os coeficientes e mantenho a mesma parte literal.

Ex.: $3x + 2x = 5x$ porque $(3 + 2)x = 5x$

Nota:

Uma soma de monómios forma um polinómio.

### MULTIPLICAÇÃO

Para **multiplicar** dois monómios, multiplico os coeficientes e também as letras que constituem a parte literal.

Ex.: $(3x^2y^3)(7xy) = 21x^3y^4$

Nota:

Quando multiplico as letras, faço-o dando a mesma letra e somo os expoentes.

# POLINÓMIOS

## OPERAÇÕES

### ADIÇÃO

A soma de polinómios é um polinómio constituído pelos termos de todos eles.

Ex.: $A = 3x^2 - 5x + 1$ e $B = 4x^2 + 3x$

$$A + B = (3x^2 - 5x + 1) + (4x^2 + 3x)$$

$$3x^2 - 5x + 1 + 4x^2 + 3x$$

$$3x^2 + 4x^2 - 5x + 3x + 1$$

$$7x^2 - 2x + 1$$

## SUBTRACÇÃO

Ex.: $A = 3x^2 - 5x + 1$ e $B = 4x^2 + 3x$

$$A - B = (3x^2 - 5x + 1) - (4x^2 + 3x)$$

$$3x^2 - 5x + 1 - 4x^2 - 3x$$

$$3x^2 - 4x^2 - 5x - 3x + 1$$

$$-x^2 - 8x + 1$$

## MULTIPLICAÇÃO

### DE UM MONÓMIO POR UM POLINÓMIO

Usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Ex.: $2a(3x + 4y) = 6ax + 8ay$

$$3x(2x - 3y) = 6x^2 - 9xy$$

### DE DOIS POLINÓMIOS

Usamos também a propriedade distributiva.

Ex.: $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$

Ex.: $(4x + 3y)(1 - x) = 4x - 4x^2 + 3y - 3xy$

## CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO DE POLINÓMIOS

### QUADRADO DA SOMA

É igual ao quadrado do 1.º termo, mais o dobro do produto do 1.º pelo 2.º, mais o quadrado do 2.º termo.

Ex.:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2(a \times b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ou

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + \ b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ou

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{\times\, a+b} \\ +ba+b^2 \\ \underline{+a^2+\ ab\qquad} \\ +a^2+2ab+b^2 \end{array} \quad \downarrow +$$

## QUADRADO DA DIFERENÇA

É igual ao quadrado do 1.º termo, menos o dobro do produto do 1.º pelo 2.º, mais o quadrado do 2.º termo.

Ex.:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2(a \times b) + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ou

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + \ b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ou

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{\times\ a-b} \\ -ba+b^2 \\ \underline{+a^2-ab\qquad} \\ +a^2-2ab+b^2 \end{array} \quad \downarrow +$$

## DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Ex.: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Porque:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - a\cancel{b} - \cancel{b}a - b^2$$

$$a^2 - b^2$$

## Exercícios:

1. Dados os monómios $A = -2x^2$ ; $B = -3x^2$, calcula:

a) $A + B$;

b) $A - B$;

c) $A \times B$.

2. Dados os polinómios $A = x^3 - 3x^2 + 2$ ; $B = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ , calcula:

a) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$;

b) $\mathrm{A} - \mathrm{B}$;

c) $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

3. Efectua e simplifica:

a) $ab\,(2 - 3a) - 4a\,(ab + b - 1)$

b) $(x^2 + 2)(x + 3x^3)$

c) $(2 + 3m - n^2)(2m - 5n + mn)$

4. Sendo $A = 2x + \frac{1}{2}$ ; $B = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ ; $\mathrm{C} = -x^2 + 1$ , calcula:

a) $A^2$ , $B^2$ e $C^2$

b) $A^2 + 3B^2 - 2C^2$

5. Efectua e simplifica:

a) $(2x + 3)^2 - (2x - 5)^2$

b) $(a + 1)^2\,(3a - 1) - (a - 1)^2\,(a + 4)$

c) $2(y + 5)^2 - 3(y - 1)^2 - (y - 3)(y + 5)$

# DECOMPOSIÇÃO DE POLINÓMIOS EM FACTORES

1. As expressões $a\,(b + c)$ e $ab + ac$ são equivalentes.

   Como se verifica a 1.ª é um produto e a 2.ª é uma soma.

   Quando passamos de uma soma para um produto, estamos a factorizar.

Ex.: $a^2 + abc + a^3 = a\,(a + bc + a^2)$ colocamos em evidência o $\underline{a}$ (factor comum)

Ex.: $21a^2b + 7ab^2 = 7ab\,(3a + b)$ Como fizemos?

$$\frac{21a^2b}{7ab} = 3a$$

$$\frac{7ab^2}{7ab} = b$$

Ex.: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

Ex.:

$$(x+3)^2 - 2\,(x+3) =$$

$$(x+3)(x+3) - 2\,(x+3) = \overbrace{(x+3)}^{\text{factor comum}}(x+3-2) = (x+3)(x+1)$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x+3)}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}} = (x+3)$$

$$\frac{2\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}} = 2$$

Exercícios:

1. $16 - (x^2 - 3)^2$
2. $x^3 - 9x$
3. $x^2(x+1) - 9(x+1)$
4. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$

## LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO

Nota:

Um produto é nulo se e só se for nulo um dos factores, pelo menos.

Ex.: $0 \times 5 = 0 \quad \vee \quad 5 \times 0 = 0$

$\vee$ Ou = Disjunção

Ex.: $(x-4)(2x+5) = 0$

$x - 4 = 0 \quad \vee \quad 2x + 5 = 0$

$x = 4 \quad \vee \quad 2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

Exercícios:

1. $9x^2 - 16 = 0$
2. $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
3. $t^2 + 4t = 0$
4. $(2x+5)(x-3) = 0$
5. $(5x+1)^2 - 16 = 0$
6. Considera a expressão:

   $x^2 - 25 - 3\,(x-5)$

   6.1 Decompõe num produto de dois binómios.

   6.2 Resolve em $\mathbb{Q}$ a equação que se obtém, igualando-a a zero.

## DIVISÃO INTEIRA DE POLINÓMIOS

Dados os polinómios $A$ e $B$ em que $B > 0$, teremos:

Numa divisão inteira dos polinómios $A$ e $B$ em que este é de grau superior a $0$, pretendemos determinar dois outros polinómios $Q$ e $R$ de forma que:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline R & Q \end{array}$$

A- Dividendo

B- Divisor

C- Quociente

R- Resto

Em que $\begin{cases} A = B \times Q + R \\ R = 0 \ \vee \ R < \ grau\ de\ B \end{cases}$

Nota:

1. Numa divisão, o dividendo é igual ao produto do quociente pelo divisor adicionado do resto.

$$\boxed{D = d \times q + r}$$

2. Se $r = 0$, então dizemos que o dividendo é divisível pelo divisor.

Ex.:
$$\begin{array}{r|l} 135 & 4 \\ \underline{-12} & 33 \\ 15 & \\ \underline{-12} & \\ 3 & \end{array}$$

Na prática como se efectua:
$$\begin{array}{r|l} 135 & 4 \\ 15 & 33 \\ 3 & \end{array}$$

Verificamos que não é divisível, porque $\underline{r = 3}$.

Ex.:
$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 25 \\ 0 & \end{array}$$

Verificamos que é divisível, porque $\underline{r = 0}$.

## ALGORITMO DA DIVISÃO

Consideremos os polinómios: $A = 2x^3 - 3x$ e $B = x - 2$. Calculemos $\frac{A}{B}$

Então:
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 & x - 2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} & 2x^2 + \cdots \\ 0 \ + x^2 & \end{array}$$

$2x^3 \div x = 2x^2$

$Q = 2x^2 \quad r = x^2$

Ex.:
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & x - 2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & 2x^2 + x + 4 \\ 0 + x^2 + 2x + 1 & \\ \underline{-x^2 + 2x \quad} & \\ 0 + 4x + 1 & \\ \underline{-4x + 8} & \\ 0 + 9 & \end{array}$$

$Q = 2x^2 + x + 4 \qquad r = 9$

Ex.:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 - 4x^2 + 0 + 5 & x+3 \\
\cline{3-3}
 & -2x^3 - 6x^2 & 2x^2 - 2x + 6 \\
\cline{1-2}
 & 0 \quad - 2x^2 + 0 + 5 & \\
 & +2x^2 + 6\,x & \\
\cline{1-2}
 & 0 \quad + 6x + 5 & \\
 & -6x - 18 & \\
\cline{1-2}
 & 0 - 13 &
\end{array}
$$

$Q = 2x^2 - 2x + 6 \qquad r = -13$

## DIVISÃO DE UM POLINÓMIO POR UM BINÓMIO $(x - \alpha)$

### REGRA DE RUFFINI

Consideremos os polinómios do exemplo anterior:

$$A = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 5 \quad \text{e} \quad B = x + 3$$

Coloquemos o primeiro, segundo a ordem decrescente de $x$:

$$2\,x^3 + 4\,x^2 + \ldots + 5$$

Coloquemos o segundo de forma a termos um binómio do tipo $x - \alpha$:

Será $x + 3 = x - \alpha$ , logo $\alpha = -3$

Coloquemos os seus coeficientes segundo a sua ordem:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x^3 & x^2 & x & \\
 & 2 & +4 & +0 & +5 \\
 & \downarrow & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\
-3 & & -6 & +6 & -18 \\
\hline
\times & 2 & -2 & +6 & \boxed{-13}
\end{array}
$$

$$\underbrace{2 \quad -2 \quad +6}_{Q} \qquad \underbrace{-13}_{R}$$

e o $\alpha$ de forma a multiplicar:

Teremos:

$Q = 2\,x^2 - 2\,x + 6$

$R = -13$

Ex.:

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1 \quad \text{e} \quad x - 2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & +2 & +1 \\
 & & & & \\
2 & & 4 & 2 & 8 \\
\hline
\times & 2 & 1 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{9}
\end{array}$$

Teremos:

$Q = 2\,x^2 + x + 4$

$R = 9$

## TEOREMA DO RESTO

> O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por um binómio do tipo $(x - \alpha)$ é $P(\alpha)$, isto é, o valor que toma o dividendo quando se substitui $x$ por $\alpha$.

Ex.:

Calcular o resto da divisão de $P(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 5$ por $x + 3$.

Verifica-se que $\alpha = -3$.

Então:

$$\begin{aligned} R = P(-3) &= 2(-3)^3 + 4(-3)^2 + 5 \\ &= 2(-27) + 4(9) + 5 \\ &= -54 + 36 + 5 \\ &= -13 \end{aligned} \qquad R = -13$$

Nota:

1. Se $\alpha = 0 \Rightarrow P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$
2. Se $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \Rightarrow \alpha = 0$

Então:

> $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \Leftrightarrow \alpha$ é zero de $P(x)$.

## MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Consideremos as expressões seguintes:

$$A = x^2 - 5x + 6 \;;\; B = (x + 5) \times (2 - 3x) \;;\; C = \mathrm{m}\,x^2 + (n - 3)x + 4\mathrm{p}$$

Determina $\underline{m, n, p,}$ tais que: $A + B = C$

Indiquemos o que se pretende:

$$\underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{A} + \underbrace{[(x+5) \times (2-3x)]}_{B} = \underbrace{\boldsymbol{m}x^2 + (n-3)x + 4p}_{C}$$

1. Desembaracemos os parêntesis:

$$x^2 - 5x + 6 + (2x - 3\,x^2 + 10 - 15x) = \boldsymbol{m}x^2 + (n-3)x + 4p$$

$$x^2 - 5x + 6 + 2x - 3\,x^2 + 10 - 15x = \boldsymbol{m}x^2 + (n-3)x + 4p$$

2. Somemos os termos semelhantes:

$$-2x^2 - \mathbf{18}x + 16 = \boldsymbol{m}\,x^2 + (n-3)\,\boldsymbol{x} + \mathbf{4p}$$

3. O 1.º membro da Condição é igual ao 2.º membro.
   Então, os coeficientes também. Daí que tenhamos:

$$\begin{cases} m = -2 \\ n - 3 = -18 \\ 4p = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -2 \\ n = -18 + 3 \\ p = \dfrac{16}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -2 \\ n = -15 \\ p = 4 \end{cases}$$

Exercício:

Determina o quociente e o resto da divisão do polinómio

$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1$ pelo polinómio $x - 2$, aplicando:

1. O Algoritmo da Divisão;
2. O Método dos Coeficentes Indeterminados;
3. A Regra de Ruffini.

Resolução:

1.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2\cancel{x^3} & -\,3\,x^2 & +\,2x & +\,1 & x - 2 \\ \hline -2\cancel{x^2} & +\,4x^2 & & & 2x^2 + x + 4 \\ \hline & \cancel{x^2} & +\,2x & +\,1 & \\ & -\cancel{x^2} & +\,2x & & \\ \hline & & 4\cancel{x} & +\,1 & \\ & & -4\cancel{x} & +\,8 & \\ \hline & & & 9 & \end{array}$$

$\mathrm{Q} = 2\,x^2 + x + 4$ $\qquad$ $\mathrm{r} = 9$

2. Se o polinómio dividendo é do <u>3.º Grau</u> e o polinómio divisor é do <u>1.º Grau</u>, então o quociente é do <u>2.º Grau</u> e o resto é <u>zero</u>.

Então:

Temos de criar uma condição do tipo:

$$D = d \times q + r$$

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1 = (x-2) \times (ax^2 + bx + c) + d$$

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c + d$$

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1 = \underbrace{ax^3 + bx^2 - 2ax^2} + \underbrace{cx - 2bx} - 2c + d$$

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 2x + 1 = ax^3 + (b-2a)\,x^2 + (c-2b)\,x - 2c + d$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -3 \\ c - 2b = 2 \\ d - 2c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 2a - 3 \\ c = 2 + 2b \\ d = 1 + 2c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 - 3 \Leftrightarrow b = 1 \\ c = 2 + 2 \Leftrightarrow c = 4 \\ d = 1 + 8 \Leftrightarrow d = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 4 \\ d = 9 \end{cases}$$

Então:

$\mathrm{Q} = 2\,x^2 + x + 4$ $\quad$ $\mathrm{R} = 9$

3.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & +2 & +1 \\ 2 & & 4 & 2 & 8 \\ \hline \times & 2 & 1 & 4 & \boxed{9} \end{array}$$

$\mathrm{Q} = 2\,x^2 + x + 4$

$\mathrm{R} = 9$

Exercícios:

1. Calcula os quocientes e os restos de:

   1.1 $x^3 + 2x^2 + 1$ por $x + 3$

   1.2 $2x^4 - 3x - 2$ por $2x - 1$

2. Considera o polinómio $P(x) = (k-1)\,x^3 + 2kx + 3$

   2.1 Determina o polinómio que é divisível por $x + 1$.

Obs.: Aplica o teorema do resto e verifica que $k = \frac{4}{3}$ , então:

$$\left(\frac{4}{3} - 1\right)x^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)x + 3 \Leftrightarrow \cdots$$

2.2 Aplica a Regra de Ruffini e chegarás ao mesmo resultado.

Não te esqueças que $R = 0$.

3. Determina os números $\underline{a}$ e $\underline{b}$ de forma que:

3.1 $2x^3 - ax^2 + 2x + b$ se transforme num polinómio divisível por $x - 1$ e que dividido por $2x + 4$ dê resto $3$.

Obs.: Determina em $x - 1$ o valor de $\underline{x}$ e em $2x + 4$ o valor de $\underline{x}$, também.

Encontrarás:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 3 \end{cases}$$

Substitui e resolve o sistema.

$R.:\ a = -3 \text{ e } b = -13$

3.2 Aplica a Regra de Ruffini e encontrarás valores idênticos.

4. Sem determinar o quociente, calcula o resto de:

$P(x) = 2x^2 - x + 2$ por $x - 3$

5. Considera em $\mathbb{R}$ o polinómio $x^3 - 2x^2 - ax + 3b$

5.1 Determina $\underline{a}$ e $\underline{b}$, quando dividido por $x + 1$ e $x - 2$, dá restos, respectivamente, $20$ e $-10$.

# EQUAÇÕES

## EQUAÇÃO

É uma condição definida num universo, que relaciona duas expressões pelo sinal $(=)$.

Ex.: $\underbrace{x+2}_{\text{1.º membro}} = \underbrace{2x-7}_{\text{2.º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{2x-5-2(x+3)}_{\text{1.º membro}} = \underbrace{0}_{\text{2.º membro}}$

Como se verifica, as equações têm 1.º e 2.º membros. Estes possuem termos.

Assim:

Na 1.ª equação, o 1.º membro tem 2 termos e o 2.º membro tem também 2 termos.

Na 2.ª equação, o 1.º membro tem 3 termos e o 2.º membro tem 1 termo.

## CONJUNTO-SOLUÇÃO

É o conjunto dos valores do universo que a satisfazem.

Ex.: $3x + 2 = 4x$

Podemos verificar que 2 é solução da equação. Porquê?

$$\underbrace{3\,(2)} + 2 = \underbrace{4\,(2)}$$
$$\underbrace{6 + 2} = 8$$
$$8 = 8 \qquad \text{Verdadeira}$$

Mas 4 não é solução da equação. Porquê?

$$\underbrace{3\,(4)} + 2 = \underbrace{4\,(4)}$$
$$\underbrace{12 + 2} = 16$$
$$14 \neq 16 \qquad \text{Falsa}$$

# EQUAÇÕES EQUIVALENTES

São as que têm o mesmo conjunto-solução.

Duas equações equivalentes ligam-se pelo sinal de equivalência ($\Leftrightarrow$).

Ex.: $x + 3 = 5 \Leftrightarrow 5x = 10$ Porquê?

Se $x = 2$, teremos: $\underbrace{2 + 3}_{5} = 5$ $e$ $\underbrace{5\,(2)}_{10} = 10$

$$5 = 5 \qquad 10 = 10$$

# PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA

## PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Consideremos o problema:

Três moedas pesam tanto como duas moedas mais 5 gramas.

Qual é a massa de cada moeda?

Se $x$ = massa, teremos:

$3x = 2x + 5$

Se adicionarmos ou subtrairmos aos dois membros de uma equação o mesmo número ou expressão, obteremos uma equação equivalente.

Então:

$$\underbrace{3x - (2x)}_{x} = 2x - (2x) + 5$$

$$x = 5$$

R.: A massa é 5.

Na prática, poderemos passar um termo de um membro para o outro membro, trocando-lhe o sinal.

Assim:

$$3x = 2x + 5$$

$$\underbrace{3x - 2x}_{x} = 5$$

$$x = 5$$

Nota:

Quando uma equação é composta por termos fraccionários e/ou termos com parêntesis:

1.º - Desembaraçamo-nos dos parêntesis;

2.º - Desembaraçamo-nos dos denominadores.

Ex.:

$$2\,(x-1) = \frac{2x-1}{2}$$

$$\underset{(2)}{2x} - \underset{(2)}{2} = \frac{2x-1}{2_{(1)}}$$

$$2\,(2\,x) - 2\,(2) = 1\,(2x-1)$$

$$4x - 4 = 2x - 1$$

$$4x - 2x = -1 + 4$$

$$2\,x = 3 \longrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero), obtém-se uma equação equivalente.

## EQUAÇÕES LITERAIS

São as equações onde aparecem uma ou mais letras para além daquela que consideramos incógnita.

Ex.:

Consideremos a seguinte equação:

$$3x + 3a + b = 7x$$

Vamos resolvê-la em ordem a $x$:

$$3x - 7x = -3a - b$$

$$-4x = -3a - b$$

$$x = \frac{-3a-b}{-4}$$

$$x = \frac{3a+b}{4}$$

Resolvemos em ordem a $\underline{\boldsymbol{a}}$:

$$3x + 3a + b = 7x$$

$$3a = 7x - 3x - b$$

$$3a = 4x - b$$

$$a = \frac{4x-b}{3}$$

Ex.: $p, q$ e $r$ representam o número de moedas do Pedro, do Quim e da Rosa. Sabe-se que o número de moedas do Pedro é igual à soma do dobro das do Quim com o triplo das da Rosa.

Como saber o número de moedas de cada um, a partir do número dos outros.

1. Para o Pedro:

$$p = 2q + 3r$$

2. Para o Quim:

$$-2q = 3r - p$$

$$2q = p - 3r$$

$$q = \frac{p-3r}{2}$$

3. Para a Rosa:

$$-3r = -p + 2q$$

$$3r = p - 2q$$

$$r = \frac{p-2q}{3}$$

# SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU EM DUAS INCÓGNITAS

Equações do 1.º grau em duas incógnitas $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são as equações redutíveis, por equivalência à forma $ax + by = c$, em que $a$, $b$ e $c$ são números.

Ex.: $4x + 2y = 100$ $\qquad a = 4$

$b = 2$

$c = 100$

SOLUÇÃO é um par de números que a verificam.

Nota:

Um sistema é também uma conjunção de condições.

Ex.:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \quad \text{ou} \quad ax + by = c \;\wedge\; dx + ey = f$$

# RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS

## MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

Ex.:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} \boxed{x = 2 - 3y} \\ x + y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ (2 - 3y) + y = 6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ 2 - 3y + y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ -2y = 6 - 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ -2y = 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ 2y = -4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ y = -\dfrac{4}{2} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = -2 \end{cases}$

$$x = 2 - 3y$$
$$x = 2 - 3(-2)$$
$$x = 2 + 6$$
$$x = 8$$

$$S = \overset{x\quad y}{(8, -2)}$$

## MÉTODO MISTO

Ex.:

$\begin{cases} \boxed{x + 3y = 2} \\ x + y = 6 \end{cases} \longrightarrow -1(x + 3y = 2)$

ou seja, multiplicar a 1.ª equação por $(-1)$.

1. Eliminação de uma incógnita $\begin{cases} -\cancel{x} - 3y = -2 \\ \cancel{x} + y = 6 \end{cases} \downarrow +$

$$0 - 2y = 4$$
$$2y = -4$$
$$y = -\frac{4}{2}$$
$$y = -2$$

2. Após calcular o valor de uma incógnita, escolhemos uma das duas equações e substituímos, nessa equação, a incógnita pelo valor calculado: Assim:

$$x + y = 6$$
$$x + (-2) = 6$$
$$x - 2 = 6 \Leftrightarrow x = 6 + 2 \Leftrightarrow x = 8$$

$$S = (\overset{x}{8}, \overset{y}{-2})$$

## MÉTODO DA ADIÇÃO ORDENADA

Ex.:

$\begin{cases} \boxed{x + 3y = 2} \\ x + y = 6 \end{cases}$ → Multiplicando-se a 1.ª equação por $(-1)$

1. Eliminação de uma incógnita $\begin{cases} \cancel{-x} - 3y = -2 \\ \cancel{x} + y \;= 6 \end{cases}$

$$0 - 2y = 4$$
$$2y = -4$$
$$y = -\frac{4}{2}$$
$$y = -2$$

2. Elimina-se a outra incógnita $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ \boxed{x + y = 6} \end{cases}$ $(-3)$ $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -3x - 3y = -18 \end{cases}$

Multiplicando-se a 2.ª equação por $(-3)$

$$-2x = -16$$
$$2x = 16$$
$$x = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

$$S = (\overset{x}{8}, \overset{y}{-2})$$

Exercícios:

1. Dois números diferem de $5$ unidades e o maior é igual ao dobro do menor adicionado de $10$ unidades. Calcula os números:

1.1. Problema em equação:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 10 \end{cases}$$

1.2. Resolução:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x - y = 5} \ (-1) \\ x = 2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$-y = 5 \qquad y = -5$$

$$x - y = 5$$
$$x - (-5) = 5$$
$$x + 5 = 5$$
$$x = 5 - 5$$
$$x = 0$$

Os números são: $\underline{-5}$ e $\underline{0}$.

2. A soma de dois números é $32$ e a sua diferença é $8$. Calcula os números.

3. Um número é triplo de outro e a soma dos dois é $72$. Calcula os números.

4. Determina dois números que diferem de $3$ unidades, sabendo que o dobro do maior excede o menor em $7$ unidades.

5. A Teresa tem mais $3$ anos que a Isabel e a soma das suas idades é $39$ anos. Quantos anos têm a Teresa e a Isabel?

6. O perímetro de um rectângulo é $100$ cm. O dobro da diferença entre o comprimento e a largura é igual a $20$ cm. Determina o comprimento e a largura do rectângulo.

7. A soma de dois números é $24$. Se adicionarmos ao menor a semi-diferença entre eles, obteremos a sua semi-soma. Calcula os números.

# SISTEMAS DE TRÊS EQUAÇÕES A TRÊS INCÓGNITAS

Teremos de recorrer aos conhecimentos anteriores sobre sistemas de equações.

Então:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

1.º Escolhemos duas equações e eliminamos uma incógnita:

$$\begin{cases} \boxed{2x - 3y + z = 1} \;(2) \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 6y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \; +$$

$$\boxed{5x - 5y = 5} \quad \text{1.ª}$$

2.º Faremos o mesmo para a 3.ª equação e uma das outras:

$$\begin{cases} \boxed{x + y - 2z = 3} \;(-2) \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y + 4z = -6 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases} \; +$$

$$\boxed{x - 3y = -3} \quad \text{2.ª}$$

Obs.: Eliminamos sempre a mesma incógnita.

3.º Formamos um sistema com a 1.ª e a 2.ª e resolvemos:

$$\begin{cases} 5x - 5y = 5 \\ \boxed{x - 3y = -3} \;(-5) \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 5y = 5 \\ -5x + 15y = 15 \end{cases} \; +$$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

4.º Substituindo o valor $y$ numa das equações encontradas, teremos:

$x - 3y = -3$

$x - 3(2) = -3$

$x - 6 = -3 \Leftrightarrow x = -3 + 6 \Leftrightarrow x = 3$

5.º Tomando uma das equações do sistema inicial e substituindo os $x$ e $y$, teremos:

$x + y - 2z = 3$

$3 + 2 - 2z = 3 \Leftrightarrow -2z = 3 - 5 \Leftrightarrow -2z = -2 \Leftrightarrow 2z = 2$

$\Leftrightarrow \quad z = 1$

$S = \overset{x,y,z}{(3, 2, 1)}$

Exercícios:

1. Resolve os sistemas:

a) $\begin{cases} 6x + 4y = 13 + 5z \\ 3x - z = 3y - 5 \\ x - y = 2z \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x = 3z - 5 \\ y = 4 \\ 3x - \dfrac{5z}{2} = y - 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + 5z = y + 10 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$

# EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

Consideremos as equações:

1) $3x^2 - 2x - 5 = 0$ 2) $5x^2 + x = 0$ 3) $2x^2 - 8 = 0$

Todas as equações são do 2.º Grau em $(x)$ porque o maior expoente de $(x)$ é exactamente $(2)$.

Como se verifica, a 1) tem três termos, a 2) e a 3) têm 2 termos, cada uma.

Então, podemos classificar as equações do 2.º Grau em:

1. Equações Completas $ax^2 + bx + c = 0$

2. Equações Incompletas $\begin{cases} ax^2 + bx = 0 \\ \wedge \\ ax^2 + c = 0 \end{cases}$

Em que:

$a \rightarrow$ Coeficiente de $x^2$

$b \rightarrow$ Coeficiente de $x$

$c \rightarrow$ Termo independente

Assim:

1. Na equação $3x^2 - 2x - 5 = 0$

   $a = 3$

   $b = -2$

   $\mathrm{c} = -5$

2. Na equação $5x^2 + x = 0$

   $a = 5$

   $b = 1$

   $\mathrm{c} = 0$

3. Na equação $2x^2 - 8 = 0$

   $a = 2$

   $b = 0$

   $c = -8$

Então:

Uma equação do 2.º Grau em $x$ é toda a equação redutível à forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, mas $a \neq 0$.

Notas:

1. Na resolução das equações do 2.º Grau em $(x)$, temos de ter presente que elas têm de estar escritas na Forma Canónica. Isto significa que todos os termos têm de estar no 1.º membro e o 2.º membro será zero $(0)$.

2. Todas as equações do 2.º Grau em $(x)$ podem resolver-se, aplicando a Fórmula Resolvente.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

ou

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4\,(a \times c)}}{2 \times a}$$

Ex.:

$5x^2 + x = 0$

$x\,(5x+1) = 0$ aplicando a lei do anulamento do produto vem:

$x = 0 \ \vee \ 5x + 1 = 0$

$x = 0 \ \vee \ 5x = -1$

$x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{5}$

$S = \left\{-\frac{1}{5}, 0\right\}$

ou

$$5x^2 + x = 0$$
$$a = 5$$
$$b = 1$$
$$c = 0$$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4\,(a \times c)}}{2 \times a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4\,(5 \times 0)}}{2 \times 5}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(0)}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 0}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{10}$$

$$x = \frac{-1 \pm 1}{10} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+1}{10} = \frac{0}{10} = 0 \\ \\ \frac{-1-1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$S = \left\{-\frac{1}{5}, 0\right\}$$

Ex.:

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \qquad S = \{-2,2\}$$

ou

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$a = 2$$
$$b = 0$$
$$c = -8$$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a \times c)}}{2 \times a} = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4\,(2 \times (-8))}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-16)}}{2 \times 2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 64}}{4} = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{0 \pm 8}{4} = \begin{cases} \dfrac{0 + 8}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\[2ex] \dfrac{0 - 8}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

$$S = \{-2,2\}$$

Ex.:

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$a = 3$$
$$b = -2$$
$$c = -5$$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a \times c)}}{2 \times a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\left(3 \times (-5)\right)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\,(-15)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} \dfrac{2+8}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \\[2ex] \dfrac{2-8}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

$$S = \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$$

Exercícios:

Resolve as seguintes equações do 2.º grau:

1. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
2. $x^2 + \frac{4}{3}x = 5$
3. $2x^2 - 5x + 3 = 0$
4. $5x^2 = 7x$
5. $3y^2 - 36 = 0$
6. $6x^2 = -5x$
7. $25x^2 - 3 = 0$
8. $\frac{1}{2}y^2 = 4$
9. $(3x + 4)(3x - 4) = 7x$

# SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

1. Como certamente te lembras, quando estudámos as equações do 1.º Grau, verificámos que elas, quando não eram impossíveis, tinham uma raiz ou solução.

2. Como verificámos na resolução das equações do 2.º Grau, verificámos que elas, quando não eram impossíveis, tinham duas raízes ou soluções.

Mas, no caso das equações do 2.º Grau, podemos determinar se são possíveis ou impossíveis.

Se forem possíveis, podemos saber quantas raízes têm.

Para isso, basta utilizar o Binómio Discriminante que se obtém da Fórmula Resolvente, ou seja:

Binómio Discriminante

$$\boxed{b^2 - 4.a.c}$$

Assim:

1. Se $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ A equação tem 2 soluções (raízes) reais e distintas.
2. Se $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ A equação tem 1 solução (dupla) real.
3. Se $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ A equação não tem qualquer solução (raiz).

Ela é impossível em $\mathbb{R}$.

Ex.:

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$a = 2$
$b = -5$
$c = -3$

Binómio $= b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} &= (-5)^2 - 4(2 \times (-3)) \\ &= 25 - 4(-6) \\ &= 25 + 24 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Como $b^2 - 4ac = 49$, então:

$b^2 - 4ac > 0$

Logo, a equação tem duas soluções (raízes) reais e distintas.

Ex.:

$9x^2 - 24x + 16 = 0$

$a = 9$
$\mathrm{b} = -24$
$\mathrm{c} = 16$

Binómio $= b^2 - 4\mathrm{ac}$

$= (-24)^2 - 4(9 \times 16)$

$= 576 - 4(144)$

$= 576 - 576$

$=0$

Como $b^2 - 4\mathrm{ac} = 0$, então:
A equação tem uma solução (raiz) dupla, real.

Ex.:

$5x^2 - 3x + 1 = 0$

$\mathrm{a} = 5$
$\mathrm{b} = 3$
$\mathrm{c} = 1$

Binómio $= b^2 - 4ac$

$= (3)^2 - 4\,(5 \times 1)$

$= 9 - 4\,(5)$

$= 9 - 20$

$= -11$

Como $b^2 - 4ac = -11$, então:
$b^2 - 4\mathrm{ac} < 0$
Logo, a equação não tem soluções (raízes). É impossível em $\mathbb{R}$.

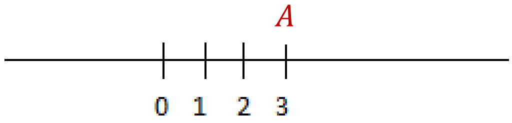
Exercícios:

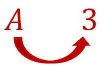
Determina o número de soluções (raízes), se as houver, das seguintes equações:

1. $8x^2 - 4x - 1 = 0$
2. $x^2 - 12x = 0$
3. $\frac{1}{2}x^2 = 2 - \frac{5}{3}x$
4. $10x^2 = -1$
5. $16x^2 + 8x = -5$
6. $49x^2 - 70x = -25$

# REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Quando temos um ponto A de abcissa 3, representamo-lo no eixo orientado, como já vimos.




Mas um ponto pode ser definido por um <u>par ordenado</u> de valores.

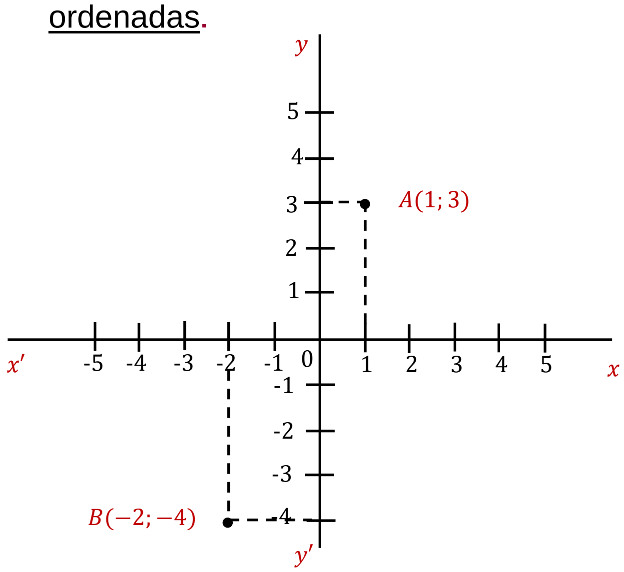
$x \ y$ $\qquad\qquad$ $x \ \ y$

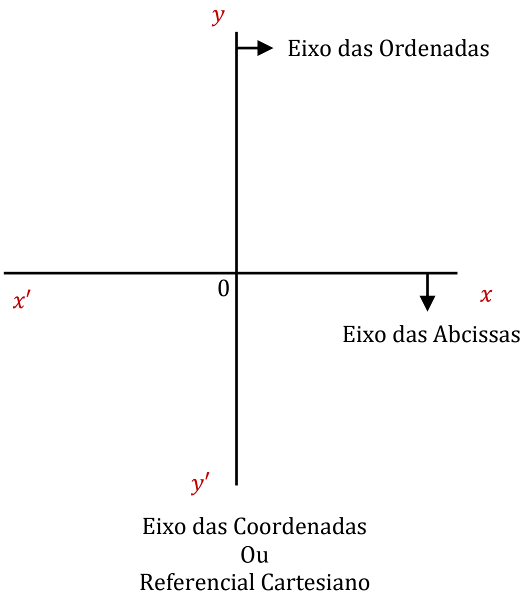
Ex.: $A\ (1{,}3) \rightarrow$ Coordenadas $\qquad$ $B\ (-2,-4)$

Como representá-lo num gráfico?

1. O <u>1</u> como é sabido representa a <u>abcissa</u>;
   O <u>3</u> vai representar a <u>ordenada.</u>

2. Construímos um sistema de eixos perpendiculares representando o Horizontal $(x, x')$ o eixo das abcissas e o vertical $(y, y')$ o eixo das <u>ordenadas</u>.




Vamos supor a equação seguinte:

$$\boxed{x + y = 3}$$

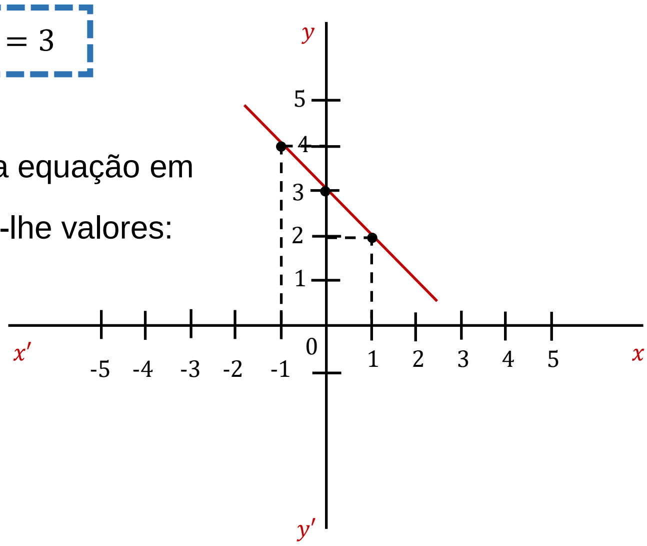
Como vamos representar?

1.º Preparamos uma tabela, resolvemos a equação em ordem a uma das incógnitas e atribuímos-lhe valores:

$$y = 3 - (-1)$$
$$y = 3 + 1 = 4$$
$$y = 3 - 0 = 3$$
$$y = 3 - 1 = 2$$

$$y = 3 - x$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | 4 |
| 0 | 3 |
| 1 | 2 |

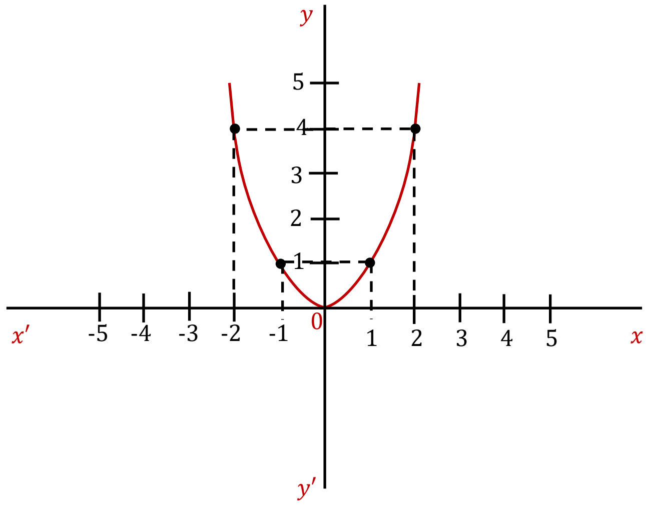


## GRÁFICO DA APLICAÇÃO

| $x$ | $x^2 = y$ |
|---|---|
| $-1$ | $1$ |
| $-2$ | $4$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $4$ |

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$




O gráfico representa uma Parábola.

## EQUAÇÕES DO TIPO $x^2 = k$

Ex.:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$

$\underline{x = 2} \quad \vee \quad \underline{x = -2}$

Ou então:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -2$

## INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Intervalo de N.os Reais

- Aberto ( ○ ) $>$ ou $<$
  - À Direita $x[$
  - À Esquerda $]x$

e

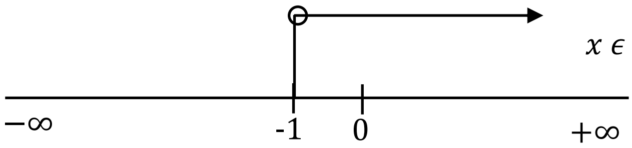
- Fechado (●) $\geq$ ou $\leq$
  - À Direita $x]$
  - À Esquerda $[x$

Nota:

> Nos infinitos $(+\infty\ ou - \infty)$, o intervalo é sempre aberto por não serem números reais.

Ex.: Intervalo Aberto à Esquerda

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x > -1\}$$

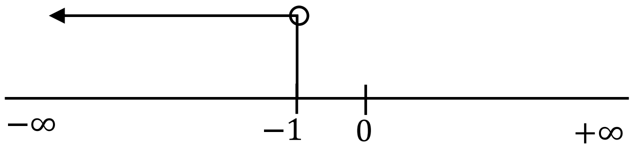



$x \in\ ]-1; +\infty[$

Ex.: Intervalo Aberto à Direita

$$B = \{x \in \mathbb{R}: x < -1\}$$

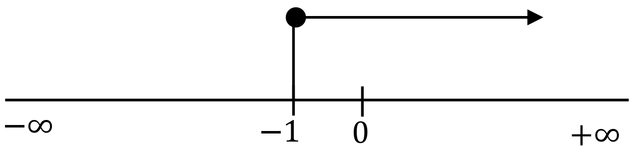
$x \in\ ]-\infty; -1[$




Ex.: Intervalo Fechado à Esquerda

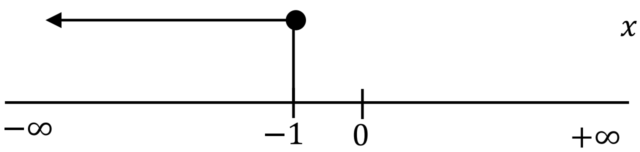
$C = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$

$x \in [-1; +\infty[$




Ex.: Intervalo Fechado à Direita

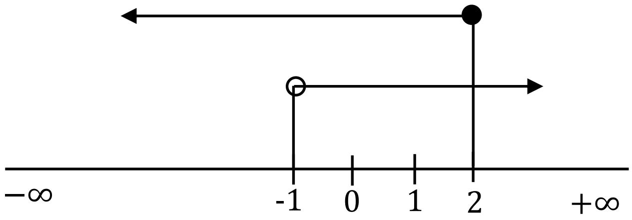
$D = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1\}$




$x \in ]-\infty; -1]$

Ex.: <u>Intervalo Aberto à Esquerda e Fechado à Direita</u>

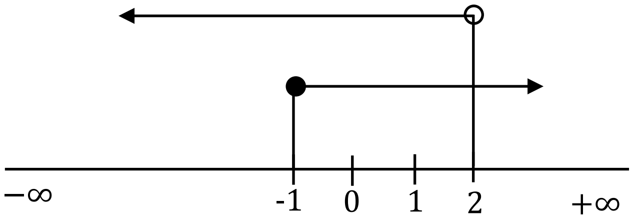
$E = \{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x \leq 2\}$




$x \in ]-1; 2]$

Ex.: <u>Intervalo Fechado à Esquerda e Aberto à Direita</u>

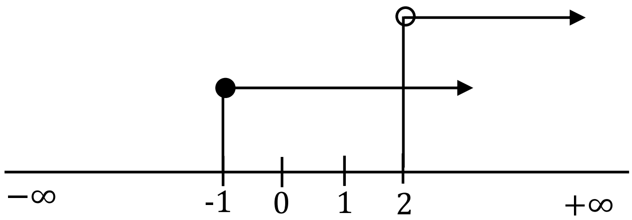
$F = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1 \wedge x < 2\}$




$x \in [-1; 2[$

Ex.: <u>Intersecção para a Direita</u>

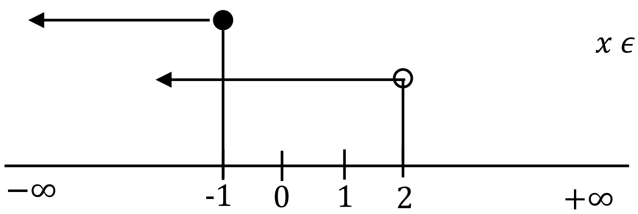
$G = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1 \wedge x < 2\}$




$x \in [2; +\infty[$

Ex.: <u>Intersecção para a Esquerda</u>

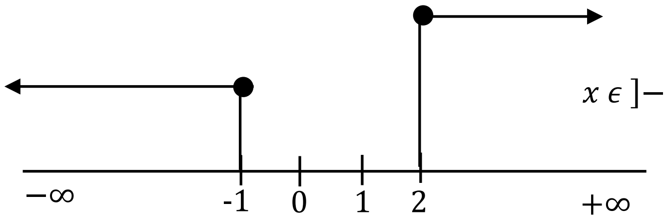
$H = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1 \wedge x < 2\}$




$x \in ]-\infty; -1]$

Ex.: <u>Sem Intersecção</u>

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \wedge x \geq 2\}$$




$x \in ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

<u>Nota:</u>

Como o zero não é positivo, nem é negativo, temos:

Em $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

Em $\mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[$

Em $\mathbb{R}_0^- = ]-\infty, 0]$

Em $\mathbb{R}^- = ]-\infty, 0[$

Em $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

# EQUAÇÕES FRACCIONÁRIAS

## DOMÍNIO

É o conjunto dos valores da variável, para os quais a expressão tem significado no universo considerado.

Ex.: Em $\mathbb{R}$, a expressão $\sqrt{x-2}$ só tem significado se $x - 2 \geq 0$.

Então: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad x \in [2; +\infty[$

Ex.: $\dfrac{3x+1}{4-x}$ só tem significado se $4 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$

$D = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Se atendermos a que:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$$

Teremos para todos os valores de $\underline{x}$ da equação:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: \mathrm{B}(x) \neq 0\}$$

Notas:

Na resolução das equações racionais fraccionárias, teremos em consideração:

1.º Determinação do Domínio;

2.º Redução da equação à forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$;

3.º Determinação dos zeros de $A\,(x)$.

Ex.: $\dfrac{x^2-2x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{x-1}$

$$\underset{(1)}{\frac{x^2-2x}{x-1}} = \underset{(x-1)}{-1} + \underset{(1)}{\frac{1}{x-1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-x+1+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Vem $x = 2 \vee x = 1$

Destes dois só o 2 é solução, porque $1 \notin D$. Logo, $S = \{2\}$

Ex.: $3(1-x)-\dfrac{x-2}{3}=1-x \Leftrightarrow \underset{(3)}{3}-\underset{(3)}{3x}-\underset{(1)}{\dfrac{x-2}{3}}-\underset{(3)}{1}+\underset{(3)}{x}=\underset{(3)}{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{9-9x-x+2-3+3x}{3}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-7x+8}{3}=0$ como $3 \neq 0$ então

$-7x+8=0 \Leftrightarrow -7x=-8 \Leftrightarrow 7x=8$ $\quad x=\dfrac{8}{7}$ Então, $\underline{D=\mathbb{R}}$

Ex.: $(x-1)(x^2+1)=0$

$x-1=0 \lor x^2+1=0$

$x=1 \lor x^2=-1$

$\underline{x=1} \lor x= \pm\sqrt{-1} \rightarrow$ Impossível

$S=\{1\}$

Ex.: $(3x+1)(x^2-3x-10)=0$

$3x+1=0 \lor x^2-3x-10=0$

$$3x=-1 \lor x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm 7}{2} \begin{cases} \dfrac{3+7}{2}=\dfrac{10}{2}=5 \\[2ex] \dfrac{3-7}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

$x=-\dfrac{1}{3} \lor x=5 \lor x=-2$

$$S=\left\{-2;-\frac{1}{3};5\right\}$$

Ex.:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2}{x^2-1} \Leftrightarrow \underset{(x+1)}{\frac{1}{x-1}}+\underset{(x-1)}{\frac{1}{x+1}}-\underset{(1)}{\frac{2x^2}{x^2-1}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1+x-1-2x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+2x}{x^2-1}=0$$

$$D=\{x \in \mathbb{R}: x^2-1 \neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$$

$$-2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$2x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$

$x = \frac{0}{2}$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \qquad\qquad\qquad S = \{0\}$

Ex.:

$\frac{5 + x^2}{x + 3} = 0 \qquad\qquad D = \{ \epsilon\, \mathbb{R}: x + 3 \neq 0 \} = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

$5 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-5} \longrightarrow$ Impossível

Exercícios:

1. Resolve em $\mathbb{R}$:

   1.1 $\frac{4 + x}{5 - x} = 2$

   1.2 $\frac{5}{x + 3} = 0$

   1.3 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 4} = \frac{5}{x^2 + 4x}$

   1.4 $\frac{6x}{x^2 - 9} + \frac{x}{3 - x} = \frac{x}{x + 3}$

2. Determina o Domínio em IR:

   2.1 $\frac{x - 3}{(x - 4)(x + 8)}$

   R.: $(x - 4)(x + 8) \neq 0$

   $x \neq 4 \vee x \neq -8$

   $D = \mathbb{R}\backslash\{-8,4\}$

2.2 $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$

R.: $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

$D = ]4,+\infty[$

2.3 $\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

R.: $5-x>0 \Leftrightarrow -x>-5 \Leftrightarrow x<5$

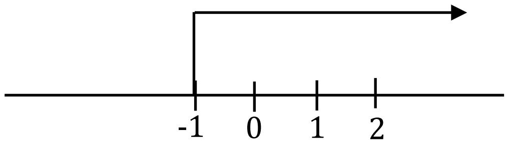
$D = ]-\infty,5[$

2.4 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x^2-4)}$

R.: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \ \wedge \ x+1 \neq 0 \vee x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \neq -1 \ \vee \ (x-2)(x+2) \neq 0$

$x \neq 2 \quad \vee \quad x \neq -2$



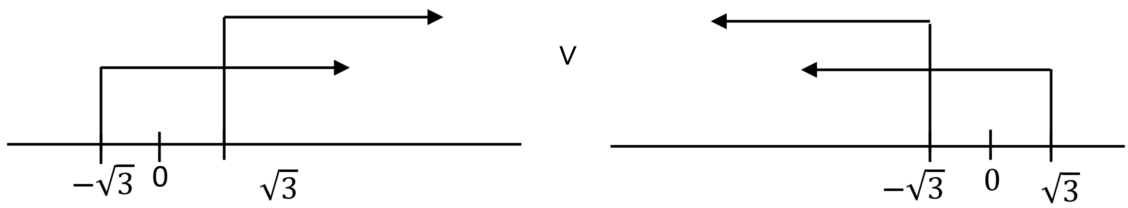

$D = ]-1,2[\cup]2,+\infty[$

2.5 $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-3}}$

R.: $x^2-3>0 \Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2>0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0$

$x-\sqrt{3}>0 \ \wedge \ x+\sqrt{3}>0 \ \vee \ x-\sqrt{3}<0 \ \wedge \ x+\sqrt{3}<0$

$x>\sqrt{3} \wedge x>-\sqrt{3} \quad \vee \quad x<\sqrt{3} \wedge \ x<-\sqrt{3}$




$x>\sqrt{3}$ $\qquad$ $x<-\sqrt{3}$

$D = ]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$

# INEQUAÇÕES

## INEQUAÇÕES

> São condições que relacionam expressões por meio dos sinais (>) ou (<), num dado universo.

Ex.:

$$\underbrace{x+2}_{\text{1.º membro}}\ \underbrace{<5}_{\text{2.º membro}} \qquad\qquad \underbrace{\frac{3x-2}{4}}_{\text{1.º membro}}\ \underbrace{>7x+3}_{\text{2.º membro}}$$

Nota: Como se pode verificar, tal como nas equações, as inequações possuem membros e estes são constituídos por termos.

## SOLUÇÃO

É um valor do universo que a satisfaz.

Nota: De uma maneira geral, uma inequação em $\mathbb{R}$ possui infinitas soluções. Por este motivo, para representar o seu conjunto solução, recorremos a intervalos de números reais.

Ex.: $x+2\ <5$ Como resolver?

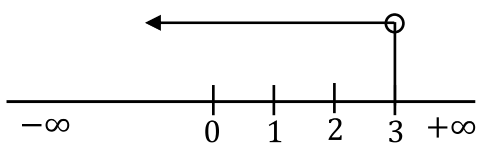
1. Usaremos os princípios estudados aquando do estudo das equações.

Assim:

$$x\ <5-2 \Leftrightarrow x\ <3 \qquad \text{Verificamos o quê?}$$

2. Que todos os valores de $\underline{x}$ inferiores a $\underline{3}$ são soluções. Mas o $\underline{3}$ não é, por Isso, será excluído.

3. Como representamos essas soluções?

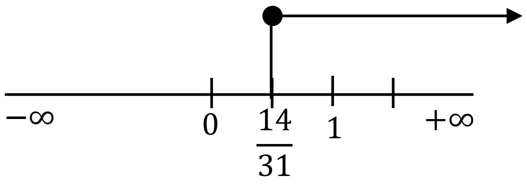



$$x \in\ ]-\infty, 3[$$

Ex.:

$$\frac{3x-2}{4} \geq -7x+3 \Leftrightarrow 3x-2 \geq -28x+12 \Leftrightarrow 3x+28x \geq 12+2 \Leftrightarrow 31x \geq 14 \Leftrightarrow x \geq \frac{14}{31}$$

(1) (4) (4)

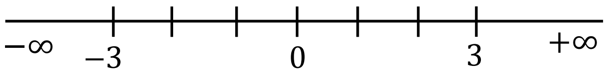



$$x \in \left[\frac{14}{31}, +\infty\right]$$

Atenção: Neste caso, a solução $\frac{14}{31}$ também satisfaz, logo é incluída, por isso o intervalo nesse ponto é fechado.

## INEQUAÇÕES COM MÓDULOS

Ex.: Quais os pontos que distam da origem <u>menos de três unidades?</u>




Verificamos que são os pontos que têm abcissas $-3$ e $3$.
Como representar o problema?

$$|x| < 3$$

$$x < 3 \quad \wedge \quad x > -3$$

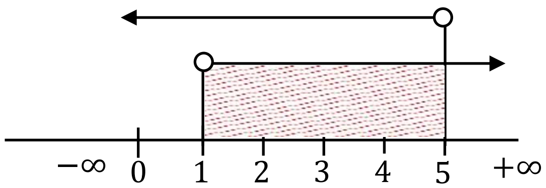
Então:

$$-3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in ]-3,3[$$

Ex.:

$$|x-3| < 2$$

$$x-3 < 2 \quad \wedge \quad x-3 > -2$$
$$x < 2+3 \quad \wedge \quad x > -2+3$$
$$x < 5 \quad \wedge \quad x > 1$$




$$x \in ]1,5[$$

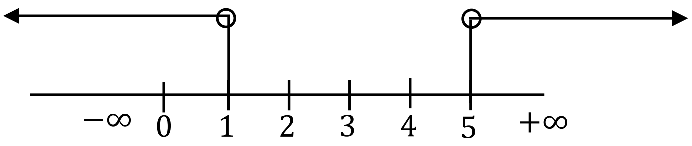
Ex.:

$|x-3| > 2$

$x-3>2 \quad \vee \quad x-3<-2$

$x>2+3 \quad \vee \quad x<-2+3$

$x>5 \quad \vee \quad x<1$




$x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]5, +\infty[$

Exercícios:

1. Determina em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução com a forma de um intervalo de números reais.

   1.1 $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{2\,(x-5)}{4}$

   1.2 $\dfrac{x-1}{3} > 3\,(x+1)$

   1.3 $2x + 3\,(x+5) \geq \dfrac{1}{2}$

2. Determina em $\mathbb{R}$, o conjunto dos valores de $\underline{x}$ para os quais:

   $\dfrac{x-1}{2} - 3\,(x+1)$ é:

   2.1 Positiva;

   2.2 Negativa;

   2.3 Menor ou igual a 5.

3. Determina em $\mathbb{R}$, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto-solução de:

   3.1 $|2x+1| \geq 5$

   3.2 $|-2z+1| > \dfrac{5}{2}$

   3.3 $\left|2 - \dfrac{7}{3}(x-3)\right| > 2$

4. Determina sob a forma de intervalo de $\mathbb{R}$ o conjunto solução das condições:

4.1 $\quad \dfrac{x-1}{4} - \dfrac{3}{2}x - 2 < \dfrac{1}{2} \wedge\ -2 \geq -3x + 3$

4.2 $\quad -3x + 1 \leq \dfrac{x-1}{2} \leq \dfrac{x-1}{3}$

4.3 $\quad \dfrac{-7x-3}{2} < 1 - 3x\ \wedge\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{x+1}{2} < 2{,}5 - x$

# SISTEMAS DE DUAS INEQUAÇÕES

Notas:

1. Na resolução de um sistema de duas inequações, resolvemos uma de cada vez.
2. Um sistema pode apresentar-se de duas formas diferentes:

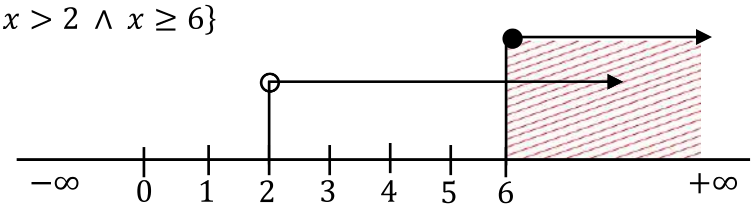
Ex.:

$(1)\ \begin{cases} 5(x-2) > 3x - 6 \\ \wedge \\ x + 4 \leq 3x - 8 \end{cases}$ Ou $5(x-2) - 3x - 6\ \wedge\ x + 4 \leq 3x - 8\ (2)$

Então resolvamos pela forma: $(2)$

$$\begin{array}{lcl}
5(x-2) > 3x - 6 & \wedge & x + 4 \leq 3x - 8 \\
5x - 10 > 3x - 6 & \wedge & x - 3x \leq -8 - 4 \\
5x - 3x > -6 + 10 & \wedge & -2x \leq -12 \\
2x > 4 & \wedge & 2x \geq 12 \\
x > \dfrac{4}{2} & \wedge & x \geq \dfrac{12}{2} \\
x > 2 \quad S_1 & \wedge & x \geq 6 \quad S_2
\end{array}$$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\ \wedge\ x \geq 6\}$




$x \in [6, +\infty[$

Ex.:

$$\frac{3(x+2)}{4} \geq x-1 \quad \wedge \quad \frac{2(x-3)}{3} < x-3$$

$$\frac{3x+6}{4} \geq x-1 \quad \wedge \quad \frac{2x-6}{3} < x-3$$

$(1) \quad (4) \quad (4) \qquad\qquad (1) \quad (3) \quad (3)$

$$1(3x+6) \geq 4(x) - 4(1) \quad \wedge \quad 1(2x-6) < 3(x) - 3(3)$$

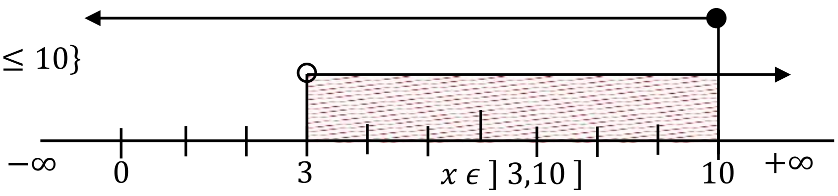
$$3x+6 \geq 4x-4 \quad \wedge \quad 2x-6 < 3x-9$$

$$3x-4x \geq -4-6 \quad \wedge \quad 2x-3x < -9+6$$

$$-x \geq -10 \quad \wedge \quad -x < -3$$

$$x \leq 10 \quad S_1 \quad \wedge \quad x > 3 \quad S_2$$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x > 3 \wedge x \leq 10\}$




Exercícios:

Resolve os sistemas de inequações, representando o conjunto-solução sob a forma de intervalo de números reais:

1. $\begin{cases} x+2 > 3 \\ 2x-1 < 3-x \end{cases}$

2. $2(x-1) < x \ \wedge \ x - 3\,(2\,x-5) < 0$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + 1 \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+5}{3} \geq \dfrac{x}{2} \end{cases}$

4. $4x - 5 \geq x \wedge 3 - \dfrac{3-2x}{5} < x$

5. $\begin{cases} 15y > 5 \\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{1+y}{2} > -1 \end{cases}$

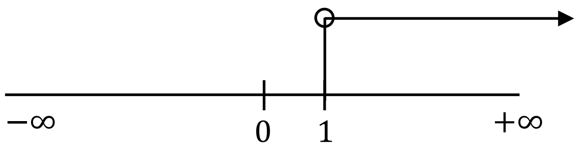
6. $3y - (y-1) > 3 \wedge \dfrac{2-3y}{4} - 3 < \dfrac{y}{2}$

Ex.:

$$2x + 3 > 5 \Leftrightarrow 2x > 5 - 3 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{2} \Leftrightarrow x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\}$$

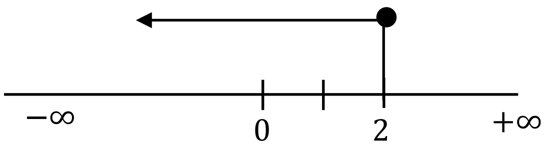
$$x \in \,]1, +\infty[$$




Ex.:

$$\underset{(1)}{\frac{2x+2}{4}} \geq \underset{(2)}{\frac{3x-3}{2}} \Leftrightarrow 1(2x+2) \geq 2\,(3x-3) \Leftrightarrow 2x + 2 \geq 6x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6x \geq -6 - 2$$

$$\Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow 4x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{4} \Leftrightarrow x \leq 2$$



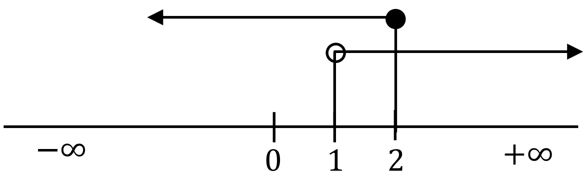

$$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$$

$$x \in \,]-\infty, 2]$$

Ex.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 3 > 5$ | | $\wedge$ | $3x + 2 \leq 8$ | |
| $2x > 5 - 3$ | | $\wedge$ | $3x \leq 8 - 2$ | |
| $2x > 2$ | | $\wedge$ | $3x \leq 6$ | |
| $x > \frac{2}{2}$ | | $\wedge$ | $x \leq \frac{6}{3}$ | |
| $x > 1$ | $S_1$ | $\wedge$ | $x \leq 2$ | $S_2$ |

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x > 1 \wedge x \leq 2\}$$




$$x \in \,]1,2]$$

Ex.:

$2x - 3 \geq 5 \qquad \wedge \qquad 3x - 2 > -8$

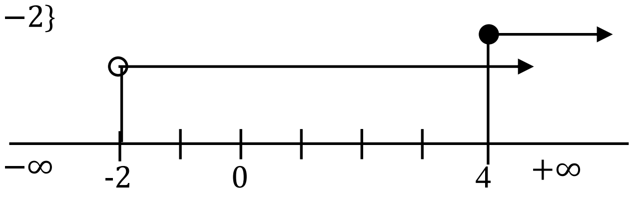
$2x \geq 5 + 3 \qquad \wedge \qquad 3x > -8 + 2$

$2x \geq 8 \qquad \wedge \qquad 3x > -6$

$x \geq \frac{8}{2} \qquad \wedge \qquad x > -\frac{6}{3}$

$x \geq 4 \quad S_1 \qquad \wedge \qquad x > -2 \quad S_2$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \, \epsilon \, \mathbb{R}: x \geq 4 \wedge x > -2\}$




$x \, \epsilon \, [4, +\infty[$

Ex.:

$2x - 3 < 5 \qquad \wedge \qquad 3x - 2 \leq -8$

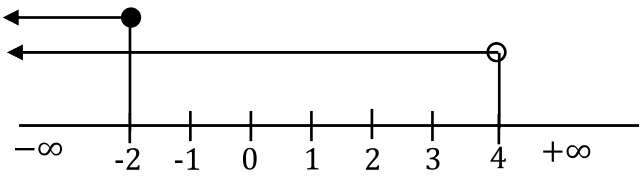
$2x < 5 + 3 \qquad \wedge \qquad 3x - 2 \leq -8$

$2x < 8 \qquad \wedge \qquad 3x \leq -6$

$x < \frac{8}{2} \qquad \wedge \qquad x \leq -\frac{6}{3}$

$x < 4 \quad S_1 \qquad \wedge \qquad x \leq -2 \quad S_2$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \, \epsilon \, \mathbb{R}: x < 4 \wedge x \leq -2\}$

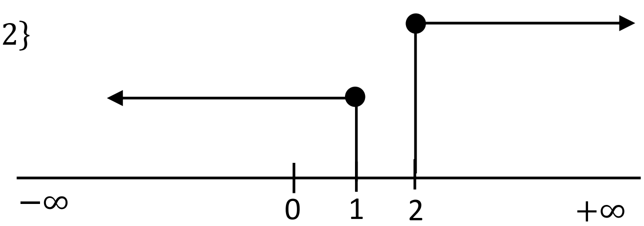



$x \, \epsilon \, ]-\infty, -2]$

Ex.:

$$
\begin{array}{lcl}
2x + 3 \leq 5 & \wedge & 2x - 2 \geq 2 \\
2x \leq 5 - 3 & \wedge & 2x \geq 2 + 2 \\
2x \leq 2 & \wedge & 2x \geq 4 \\
x \leq \frac{2}{2} & \wedge & x \geq \frac{4}{2} \\
x \leq 1 \quad S_1 & \wedge & x \geq 2 \quad S_2
\end{array}
$$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1 \wedge x \geq 2\}$




$x \in \,]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

# INEQUAÇÕES FRACCIONÁRIAS

## INEQUAÇÕES DO TIPO $A(x) \,.\, B(x) > 0$ ou $A(x) \,.\, B(x) < 0$

1. $A(x) \,.\, B(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$

2. $A(x) \,.\, B(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

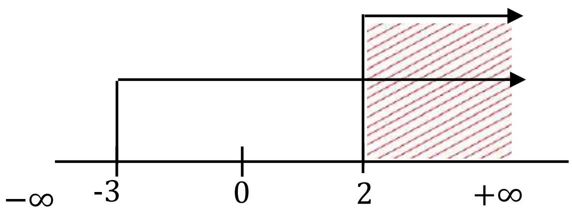
| $A(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
|---|---|---|---|---|
| $B(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $A(x) \,.\, B(x)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

Ex.:

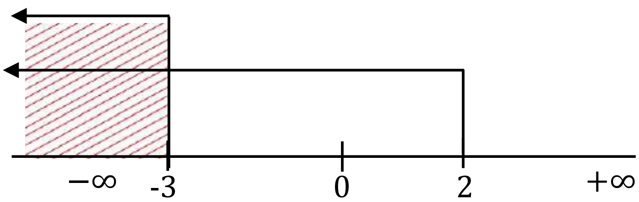
1. $(x + 3)(x - 2) > 0$

$x + 3 > 0 \;\wedge\; (x - 2) > 0 \;\vee\; x + 3 < 0 \;\wedge\; x - 2 < 0$

$x > -3 \;\wedge\; x > 2 \quad \vee\; x < -3 \quad \wedge\; x < 2$




$x > 2$




$x < -3$

| $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3).(x-2)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Como pretendemos $(x+3).(x-2) > 0$, teremos:

$$]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$$

2. $(x+3)\,(x-2) < 0$

$$x+3 > 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0 \qquad \vee \quad x+3 < 0 \quad \wedge \quad x-2 > 0$$

$$x > -3 \qquad \wedge \quad x < 2 \qquad \vee \quad x < -3 \qquad \wedge \quad x > 2$$

Pelo quadro acima referido, teremos:

$(x+3)\,(x-2) < 0$ então, será $]-3,2[$

## INEQUAÇÕES DO TIPO $(Ax/Bx) > 0$ e $(Ax/Bx) < 0$

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$

2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{A}(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\mathrm{B}(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

Ex.:

$$\frac{2}{x+1} \geq x \Leftrightarrow \frac{2}{\underset{(1)}{x+1}} - \underset{(x+1)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2-x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\overset{(-1)}{x^2+x-2}}{x+1} \leq 0$$

Então

$$\underbrace{x^2+x-2} \leq 0 \qquad \wedge \quad x+1 > 0 \quad \vee \quad \underbrace{x^2+x-2} \geq 0 \qquad \wedge \quad x+1 < 0$$

$$(x-1).(x+2) \leq 0 \quad \wedge \quad x+1 > 0 \quad \vee \quad (x-1).(x+2) \geq 0 \quad \wedge \quad x+1 < 0$$

$$x-1 \geq 0 \wedge x+2 \leq 0 \vee x-1 \leq 0 \wedge x+2 \geq 0 \vee (x-1) \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \vee x-1 \leq 0 \wedge x+2 \leq 0$$

$$\wedge \; x+1 > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \; x+1 < 0$$

Vamos determinar os zeros:

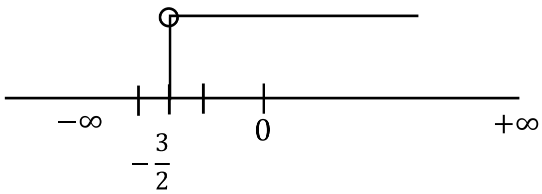
$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x^2+x-2}{x+1}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $s/s$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$$S=\left]-\infty,-2\right] \cup \left]-1,1\right]$$

Ex.: $\frac{3}{2x+3} \geq 0$

$2x+3>0 \Leftrightarrow 2x>-3 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$




$$S=\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$$

Ex.: $\frac{x-1}{2-3x} \geq 0$

Zeros: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$2-3x=0 \Leftrightarrow -3x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $2-3x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $\frac{-1}{2-3x}$ | $-$ | SS | $+$ | $0$ | $-$ |

$$S=\left]\frac{2}{3},1\right]$$

## Exercícios:

1. Resolve em $\mathbb{R}$:

1.1 $\frac{1}{3x+1} \geq \frac{1}{x}$

1.2 $\frac{x+2}{2-x} > 1$

1.3 $\frac{x^2}{x^{2-1}} \geq 0$

1.4 $\frac{x^2}{(x-3)(4+x)} \geq 0$

1.5 $\frac{1}{x} > x$

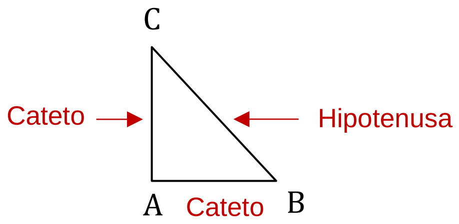
# TRIGNOMETRIA

## TRIGNOMETRIA

1. $\sqrt{144}; \sqrt{143}; \sqrt{2675}; \sqrt{8725}; \sqrt{475{,}3}; \sqrt{24{,}32}$

## TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos seus catetos. Determina a medida da hipotenusa.



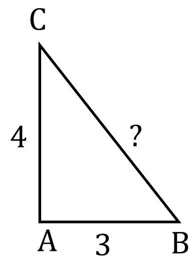

$[CA] \perp [AB] \Longrightarrow \hat{A} = 90º$ - Recto

$$\boxed{h^2 = c^2 + c^2}$$

Ex.:

Num triângulo rectângulo as medidas dos seus catetos são de 3 e 4 cm, respectivamente. Determinar a medida da hipotenusa.

1.



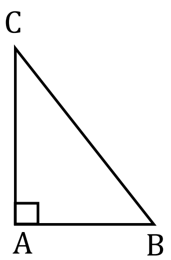

$\overline{AB} = 3cm$ $\quad h^2 = c^2 + c^2$

$\overline{AC} = 4cm$ $\quad h^2 = 4^2 + 3^2$

$\overline{CB} = ?$ $\quad h^2 = 16 + 9$

$h^2 = 25 \Leftrightarrow h = \sqrt{25} \Leftrightarrow h = 5$

2. Calcular $\overline{AC}$



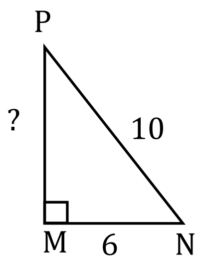

$\overline{BC} = 5cm$ $\quad h^2 = c^2 + c^2$

$\overline{AB} = 3cm$ $\quad 5^2 = 3^2 + c^2$

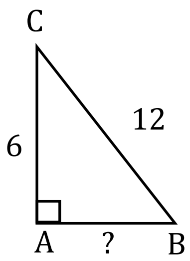
$\overline{AC} = ?$ $\quad 25 = 9 + c^2$

$c^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow c^2 = 16 \Leftrightarrow c = \sqrt{16} \Leftrightarrow c = 4$

3. Calcular $\overline{MP}$



4. Calcular $\overline{AB}$

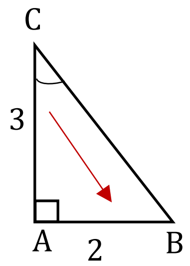



## TANGENTE (TG)

A tangente de um ângulo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente.

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adj}}$$

Ex.:




$\overline{AB} = 2cm$

$\overline{AC} = 3cm$

$tg\ \hat{c} = ?$

$$tg\ \hat{c} = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adj}$$

$$tg\ \hat{c} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\operatorname{tg} \hat{c} = \frac{2}{3}$$

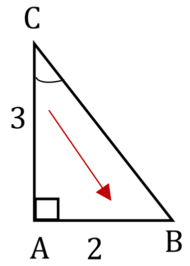
$$\operatorname{tg} \hat{c} = 0{,}6 \cong 0{,}7$$

## COTANGENTE (COTG)

A cotangente de um ângulo é igual ao quociente do cateto adjacente pelo cateto oposto.

$$\boxed{\cot g\alpha = \frac{cat.\ adj.}{cat.\ oposto}}$$

Ex.:




$\overline{AB} = 2cm$

$\overline{AC} = 3cm$

$cot\ g\ \hat{c} = ?$

$$cot\ g\ \hat{c} = \frac{cat.\ adj.}{cat.\ oposto}$$

$$cot\ g\ \hat{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$cot\ g\ \hat{c} = \frac{3}{2}$$

$$cot\ g\ \hat{c} = 1{,}5$$

Nota:

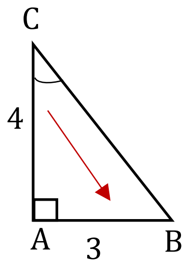
A cotangente e tangente são funções inversas.

## SENO (SEN)

O seno de um ângulo é igual ao quociente do cateto oposto pela hipotenusa.

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{cat.\ oposto.}{hipoten.}}$$

Ex.:




$\overline{AB} = 3cm$

$\overline{AC} = 4cm$

$sen\,\hat{c} = ?$

$$\operatorname{sen}\hat{c} = \frac{cat.\ \ oposto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\ \hat{c} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\operatorname{sen}\ \hat{c} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\hat{c} = 0{,}6$$

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$

$$h^2 = 16 + 9$$

$$h^2 = 25 \Leftrightarrow h\sqrt{25}$$

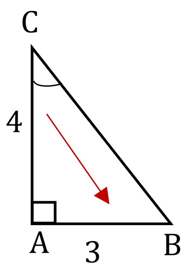
$$h = 5$$

## COSENO (COS)

O coseno de um ângulo é igual ao quociente do cateto adjacente pela hipotenusa.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cat.\ adj.}{hipotenusa}}$$

Ex.:




$\overline{AB} = 3cm$

$\overline{AC} = 4cm$

$cos\,\hat{c} = ?$

$$\cos\hat{c} = \frac{cat.\ \ adj.}{hipotenusa}$$

$$\cos\ \hat{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cos\ \hat{c} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\hat{c} = 0{,}8$$

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$

$$h^2 = 16 + 9$$

$$h^2 = 25 \Leftrightarrow h\sqrt{25}$$

$$h = 5$$

Notas:

1. A tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do seno pelo coseno do mesmo ângulo.

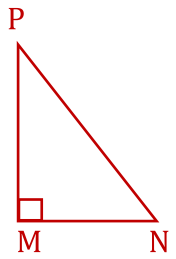
$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}}$$

2. A cotangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do coseno pelo seno do mesmo ângulo.

$$\boxed{\cot g\, \alpha = \frac{cos\ \alpha}{\text{sen}\, \alpha}}$$

Exercícios:

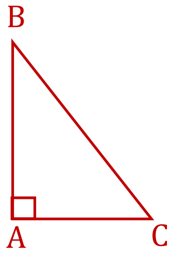
1. Considera o triângulo:




Se:

$\overline{PM} = 8cm$
$\overline{MN} = 6cm$
$sen\ \hat{P} = ?$
$cos\ \hat{P} = ?$
$tg\ \hat{P} = ?$
$cot\ g\ \hat{P} = ?$

2. Considera o triângulo:




Se:

$tg\ \hat{B} = \frac{3}{4}$

$cos\ \hat{B}?$

$sen\ \hat{B} = ?$

3. Considera o triângulo rectângulo em $\mathrm{C}$:

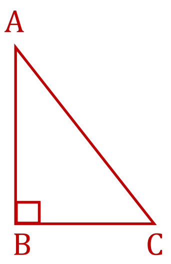
   $tg\ \hat{A} = 0{,}6$ e um dos catetos mede $3\mathrm{cm}$.

   Calcula:

   $sen\ \hat{A} = ?\,;\ cos\ \hat{B} = ?$

## ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos dizem-se complementares quando a soma das suas amplitudes for igual à amplitude de um ângulo recto = 90º.




$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$
$$\hat{A} + 90 + \hat{C} = 180°$$
$$\hat{A} + \hat{C} = 180 - 90$$
$$\hat{A} + \hat{C} = 90°$$

Logo, $\hat{A} + \hat{C} = 90°$ - $\hat{A}\ e\ \hat{C}$ são ângulos complementares.

1. O seno de um ângulo é igual ao coseno do seu complementar.

$$\boxed{sen\ \alpha = \cos(90 - \alpha)}$$

Ex.: Se:

$\alpha = 30°$

$sen\ 30° = \cos(90 - 30)$

$sen\ 30° = cos\ 60°$

2. O coseno de um ângulo é igual ao seno do seu complementar.

$$\boxed{cos\ \alpha = sen(90 - \alpha)}$$

Ex.: Se:

$\alpha = 45°$

$cos\ 45° = sen(90 - 45)$

$cos\ 45° = sen\ 45°$

3. A tangente de um ângulo é igual à cotangente do seu complementar.

Ex.: Se:

$$\boxed{tg\ \alpha = cot\ g\ (90 - \alpha)}$$

$\alpha = 35°$

$tg\ 35° = cot\ g\ (90 - 35)$

$tg\ 35° = cot\ g\ 55°$

4. A cotangente de um ângulo é igual à tangente do seu complementar.

Ex.: Se

$\alpha = 20°$

$$\boxed{cot\ g\ \alpha = tg(90 - \alpha)}$$

$cot\ g\ 20° = tg\ (90 - 20)$

$cot\ g\ 20° = tg\ 70°$

# FÓRMULA FUNDAMENTAL

A soma dos quadrados dos $sen$ e $cos$ é igual à unidade.

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha \qquad\qquad cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \qquad\qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Ex.: Se:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = ?$$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

$$sen^2\ 30° + cos^2\ 30° = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2\ 30° = 1$$

$$\frac{1}{4} + cos^2\ 30° = 1$$

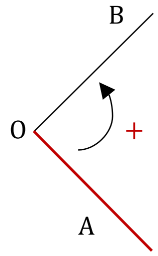
$$cos^2\ 30° = \frac{3}{4}$$

$$cos\ 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

# NOÇÃO DE ÂNGULO

## ÂNGULO POSITIVO

É o ângulo gerado, no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio, por uma semirecta rodando em torno da origem.



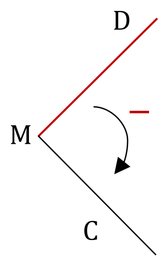

$\dot{O}A$ – Lado origem

$\dot{O}B$ – Lado extremidade

O ângulo representa-se por $(\dot{O}A, \dot{O}B)$.

## ÂNGULO NEGATIVO

É o ângulo gerado no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, por uma semi-recta rodando em torno da origem.



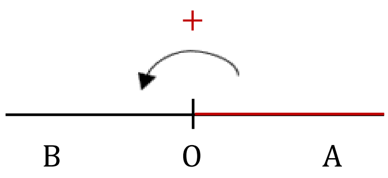

$\dot{M}D$ – Lado origem

$\dot{M}C$ – Lado extremidade

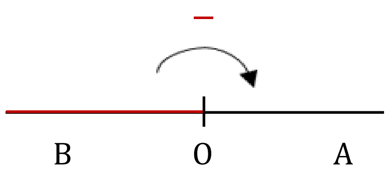
O ângulo representa-se por $(\dot{M}D, \dot{M}C)$.

## ÂNGULO RASO

Ângulo positivo ou negativo $= 180°$ ou $-180°$.



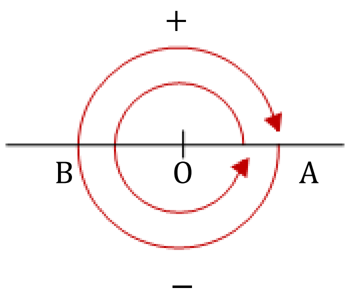

$\dot{O}A$ – Origem
$\dot{O}B$ – Extremidade
O ângulo representa-se por $(\dot{O}A, \dot{O}B)$.




$\dot{O}B$ – Origem
$\dot{O}A$ – Extremidade
O ângulo representa-se por $(\dot{O}B, \dot{O}A)$.

## ÂNGULO GIRO

Ângulo positivo ou negativo = 360º ou −360º.




Notas:

Estas convenções permitem considerar ângulos positivos superiores a 360º e negativos inferiores a – 360º.

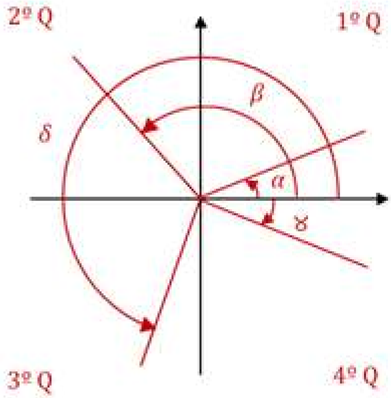
Consideremos um referencial ortogonal. Qualquer ângulo do plano pode colocar-se em posição normal em relação a este sistema de eixos.

Isto é:

- Vértice na origem;
- Lado origem coincidente com o semi-eixo positivo dos $\underline{xx}$.

Nota:

Em vez de <u>medida ou amplitude de um ângulo $\alpha$</u> , dir-se-á somente ângulo $\alpha$.




$\alpha \in 1.° \mathrm{Q}$

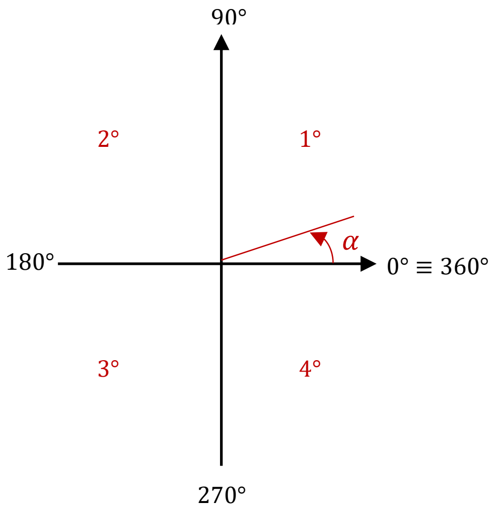
$\beta \in 2.° \mathrm{Q}$

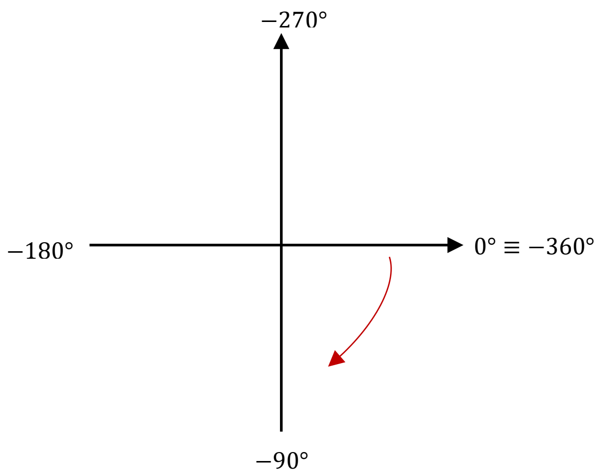
$\delta \in 3.° \mathrm{Q}$

ɣ $\in 4.° \mathrm{Q}$

Nota: O ângulo dir-se-á do 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrantes conforme o seu <u>lado extremidade</u> se situe no 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante.

Analisemos novamente:




Nota: A expressão geral da amplitude dos ângulos, que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade é:

$$\boxed{\alpha + n \times 360°} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Ex.: Têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade:

$750°$ e $30°$ Porquê?

$\alpha = 30°$

$750° = 30 + 2 \times 360° = 30 + 720 = 750°$

$750°$ é do 1.º Quadrante

$$\begin{array}{r|l} 750 & 360 \\ \hline \underbrace{030}_{\text{Ângulo do 1.º Q.}} & \underbrace{2}_{(n)} \end{array}$$

Ex.:

$1982°$

$$\begin{array}{r|l} 1982 & 360 \\ \hline \underbrace{182}_{\text{Ângulo do 3.º Q.}} & \underbrace{5}_{(n)} \end{array}$$

Então:

$$1982 = 182+5(360) = 132+1800 = 1982$$

Ex.:

$-265° + 360° = 95° \in 2.ºQ$

# SISTEMAS DE MEDIDA DE ÂNGULOS

## SISTEMA SEXAGESIMAL – GRAU

Nonagésima parte de um ângulo recto.

$1° = 60' \Rightarrow 1' = \frac{1}{60}$ do grau

$1' = 60'' \Rightarrow 1'' = \frac{1}{60}$ do minuto e portanto $\frac{1}{3600}$ do grau porque:

$$\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{3600}$$

## SISTEMA CENTESIMAL – GRADO

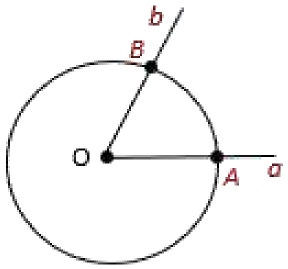
Centésima parte de um ângulo recto.

$1g = 100` \Rightarrow 1` = \frac{1}{100}$ do grado

$1g = 100`` \Rightarrow 1`` = \frac{1}{100}$ do minuto e, portanto, $\frac{1}{10000}$ do grau porque:

$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$

## SISTEMA CIRCULAR – RADIANO




O radiano é o ângulo tal que qualquer circunferência descrita com centro no seu vértice é intersectada pelos lados do referido ângulo segundo um arco que, rectificado, é igual ao raio com que foi descrito.

$\measuredangle$ a, b é um radiano se $\widehat{AB} = \overline{OA}$ (raio)

Como se calcula:

$$\frac{\text{medida de um radiano}}{\text{medida de um âng. giro}} = \frac{\widehat{AB}}{comprimento\ da\ circunferência}$$

Como $\mathrm{AB} = \mathrm{r}$ vem:

$\frac{med.radiano}{360°} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$ porque $2\ \pi r$ é o comprimento ou perímetro da

circunferência.

Então:

Um ângulo giro $(360°) = 2\pi$ radianos.

Logo:

$$360° = 2\ \pi radianos \Rightarrow \pi = \frac{360°}{2} = 180°$$

$$400g = 2\ \pi radianos \Rightarrow \pi = \frac{400}{2} = 200g$$

$$1\ radiano = \left(\frac{360°}{2\pi}\right) = 57°1´45´´(aproximadamente)$$

$$1\ \text{radiano} = \frac{400}{2\pi}g = 63g66`20``(\text{aproximadamente})$$

## PASSAGEM DUM SISTEMA PARA OUTRO SISTEMA

Usamos a fórmula:

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{l}{\pi}}$$

$S$ – $Sexagesimal\ (°)$

C – $Centesimal\ (g)$

$l$ – Circular (radiano)

Ex.:
Calcula nos sistemas sexagesimal e centesimal $\frac{5}{6}\pi$ radianos.

1. Como: $\frac{S}{180} = \frac{l}{\pi}$ $\qquad l = \frac{5}{6}\pi$

$$\frac{S}{180} = \frac{\frac{5}{6}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}$$

$$S = 180 \times \frac{5}{6} = \frac{900}{6} = 150° \qquad \frac{5}{6}\pi = 150°$$

2. Como: $\frac{C}{200} = \frac{l}{\pi}$

$$\frac{C}{200} = \frac{\frac{5}{6}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}$$

$$C = 200 \times \frac{5}{6} = 166{,}6666$$

$$C = 166g66`66``$$

Ex.:

Calcula nos sistemas sexagesimal e circular as medidas dos ângulos 75,45g.

1. $$\frac{S}{180} = \frac{C}{200}$$ $$C = 75{,}45g$$

$$\frac{S}{180} = \frac{75{,}45}{200}$$

$$S = \frac{180 \times 75{,}45}{200} = 67{,}905° = 67°54´18´´$$

2. $$\frac{C}{200} = \frac{l}{\pi}$$

$$\frac{75{,}45}{200} = \frac{l}{\pi}$$

$$l = \frac{75{,}45 \times \pi}{200} = 0{,}37725\pi \text{ radianos} = 1{,}19 \text{ radianos}$$

Ex.:

Calcula nos sistemas centesimal e circular as medidas do ângulo de 32º.

$$S = 32°$$

1. $$\frac{S}{180} = \frac{C}{200}$$

$$\frac{32}{180} = \frac{C}{200}$$

$$C = \frac{32 \times 200}{180} = \frac{6400}{1800} = 35.55g$$

2. $$\frac{S}{180} = \frac{l}{\pi}$$

$$\frac{32}{180} = \frac{l}{\pi}$$

$$l = \frac{32\pi}{180} = \frac{8}{45}\pi\, radianos = 0{,}57\, radianos$$

# GEOMETRIA

## MEIO PROPORCIONAL

Meio proporcional entre dois números é um dos meios de uma proporção contínua, onde esses números são os extremos.

$\overline{AB}$

$\overline{EF}$

$$\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{x}{\overline{EF}}$$

$$x.x = \overline{EF} \times \overline{AB}$$

$$x^2 = \overline{EF} \times \overline{AB}$$

Nota:

**Proporção contínua é a proporção que tem os meios exactamente iguais.**

Ex.:

Determina o meio proporcional entre 12 e 3:

$$\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$$

$$x^2 = 12 \times 3$$

$$x^2 = 36$$

$$x \pm \sqrt{36}$$

$$x = 6 \vee x = -6 //$$

Determina o meio proporcional entre 20 e 5:

$$\frac{20}{x} = \frac{x}{5}$$

$$x^2 = 20 \times 5$$

$$x^2 = 100$$

$$x \pm \sqrt{100}$$

$$x = 10 \quad \vee \quad x = -10 //$$

# QUARTO PROPORCIONAL

Quarto proporcional de três números dados é o quarto termo de uma proporção onde aqueles números são, por ordem, os três primeiros termos.

Ex.:

Determina o quarto proporcional dos números $12, 3$ e $4$:

$$\frac{12}{3} = \frac{4}{x}$$

$$x = \frac{4 \times 3}{12}$$

$$x = \frac{12}{12}$$

$x = 1$// $\longrightarrow$ Quarto proporcional é 1.

Nota: Se a proporção for contínua o quarto proporcional chama-se terceiro proporcional.

Ex.:

Determina o quarto proporcional entre os números 12 e 6.

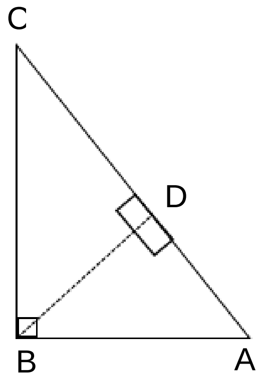
$$\frac{12}{6} = \frac{6}{x}$$ (6 contínuo)

$$x = \frac{6 \times 6}{12}$$

$$x = \frac{36}{12}$$

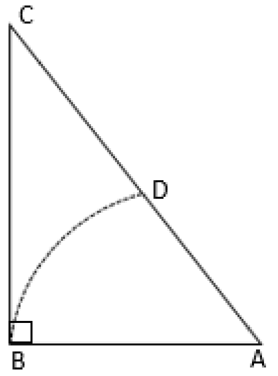
$x = 3$// $\longrightarrow$ Terceiro proporcional

1. Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que nela determina.

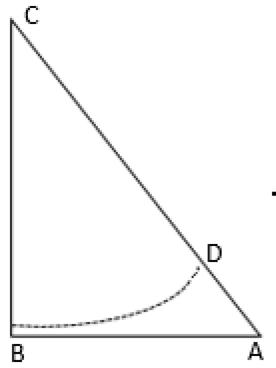



$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

2. Num triângulo rectângulo, qualquer cateto relativo à hipotenusa é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela.

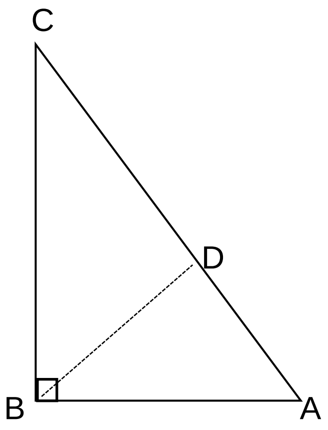



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$




$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

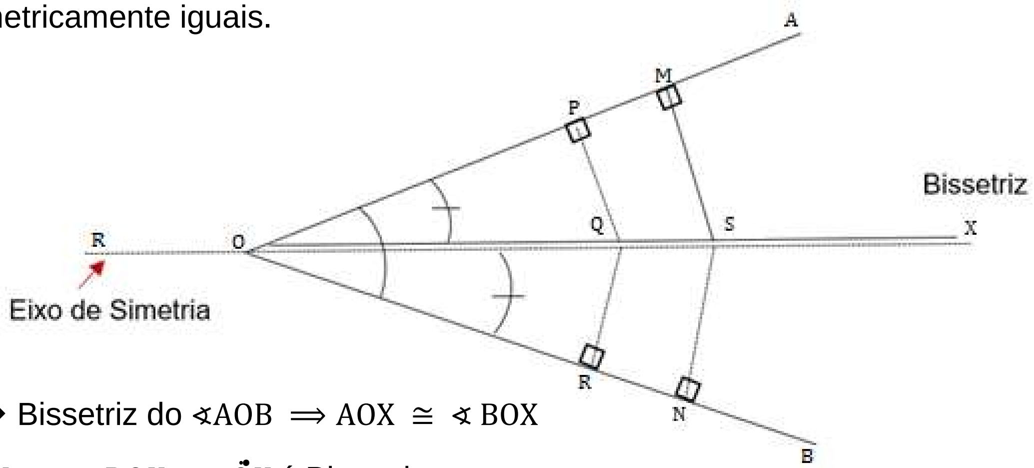
3. Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é quarto proporcional entre a hipotenusa e os dois catetos.




$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$$

## BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Bissetriz de um ângulo é a semi-recta que o divide em dois ângulos geometricamente iguais.




Se $\dot{O}X$ → Bissetriz do $\sphericalangle AOB \Longrightarrow AOX \cong \sphericalangle BOX$

Se $\sphericalangle AOX \cong \sphericalangle BOX \Longrightarrow \dot{O}X$ é Bissetriz

Notas:

A recta que contém a bissetriz de um ângulo chama-se eixo de simetria.

$\dot{O}\_X$ Se $\vec{O}X \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{O}X$ é Bissetriz

$\sphericalangle AOX \cong \sphericalangle BOX$

Qualquer ponto situado na bissetriz de um ângulo é equidistante (tem a mesma distância) dos lados desse ângulo.

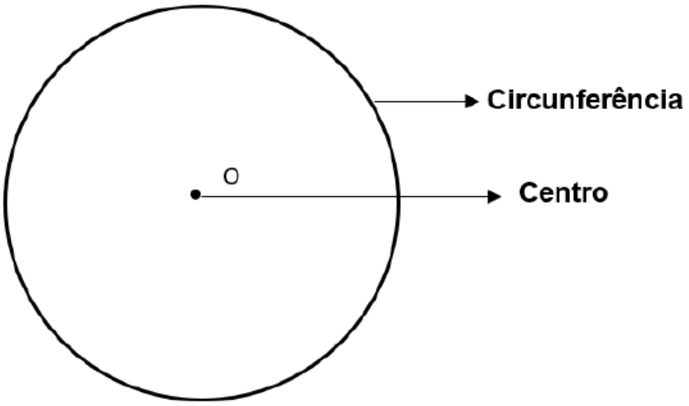
P_R Se $Q \in \vec{O}X \Longrightarrow \overline{PQ} = \overline{QR}$

M_N Se $S \in \vec{O}X \Longrightarrow \overline{SM} = \overline{SN}$

$\vec{O}$ = Onde começa a semi-recta

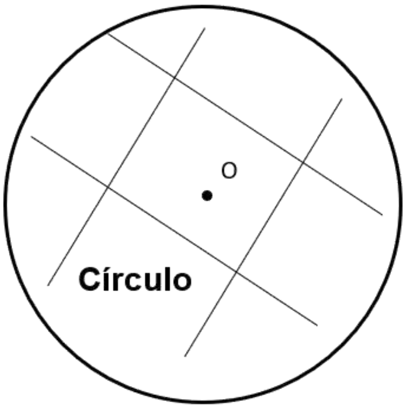
## CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano situados à mesma distância de um ponto fixo (centro) do mesmo plano.



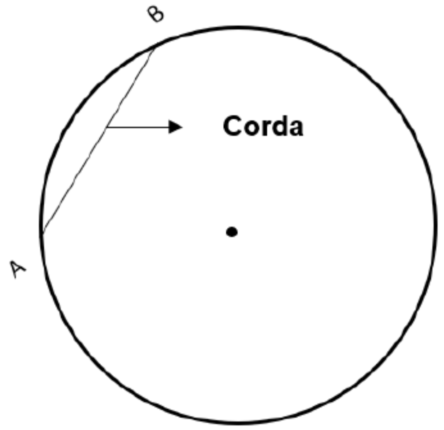

## CÍRCULO

Círculo é o conjunto de todos os pontos do plano limitados interiormente pela circunferência.



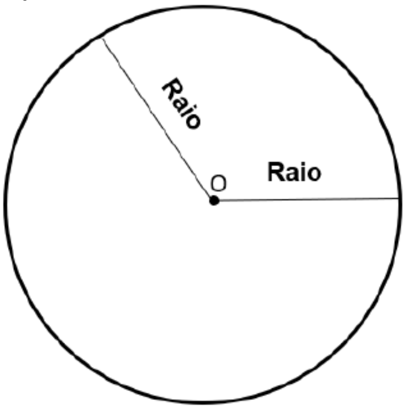
## CORDA

Corda é um segmento cujos extremos são pontos da circunferência.




## RAIO

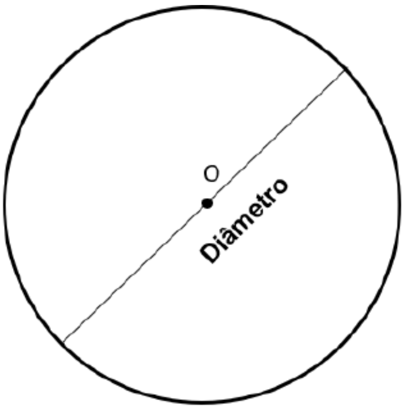
Raio é um segmento que mede a distância entre o centro da circunferência e qualquer um dos seus pontos.




## DIÂMETRO

Diâmetro é a maior corda que passa pelo centro da circunferência e a divide em duas semi-circunferências iguais.

$$\boxed{D = 2 \times R}$$

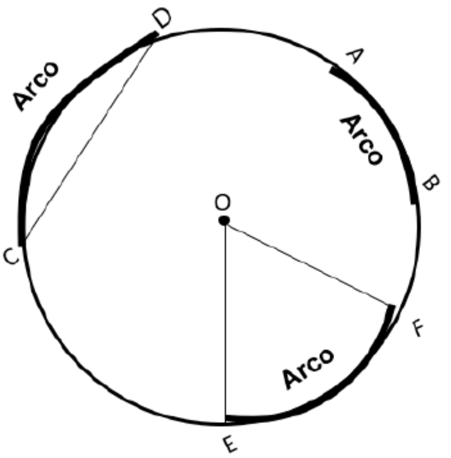



Nota:

A medida de um diâmetro é sempre igual ao dobro da medida de um raio.

# ARCO

Arco é uma porção de circunferência limitada por dois pontos da mesma circunferência ou pelos extremos de uma corda, ou pelos lados de um ângulo




**Arco B A**

**Arco D C**

**Arco E F**

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{BA}\\ \overset{\frown}{DC}\\ \overset{\frown}{EF}\end{array}\right\}$$ **Amplitude ou Medida**

Nota:

A amplitude de um arco é dada em graus ou grados.

A relação “ser geometricamente igual” no conjunto dos arcos de uma circunferência goza das seguintes propriedades:

1. Reflexiva

$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BA}$

2. Simétrica

Se $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{AB}$

3. Transitiva

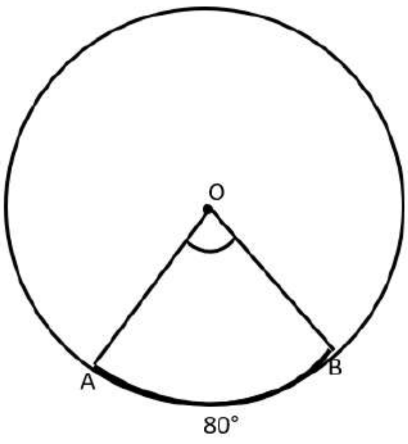
Se $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \wedge \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

Nota:

Dois arcos são geometricamente iguais se tiverem a mesma amplitude.

# ÂNGULO AO CENTRO

Ângulo ao centro é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.
A sua amplitude é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.




$\sphericalangle$ A 0 B → É ângulo ao centro

$A\hat{0}B = \overset{\frown}{AB}$

Se $\overset{\frown}{AB} = 80°$

$A\hat{0}B = 80°$

Nota:

A amplitude de uma circunferência é igual a 360°.

Ex.:

Se $\overset{\frown}{BA} = 290°$

$A\hat{0}B = ?$

$360° - 290° = 70°$
$A\hat{0}B = 70°$

**Sistema Centesimal**

$90°$______ $100g$

$70°$______ $x$

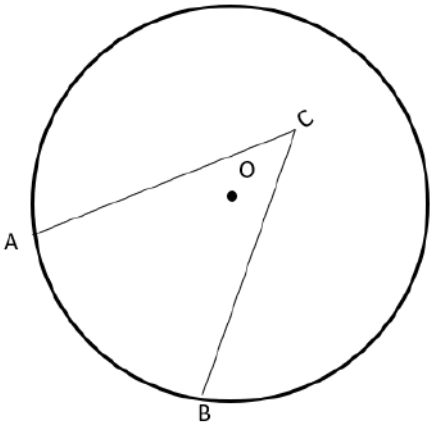
$$x = \frac{100 \times 70}{90}$$

$$x = \frac{7000}{90}$$

$x = 77, \ldots g$

# ÂNGULO EXCÊNTRICO

Ângulo excêntrico é o ângulo cujo vértice não coincide com o centro da circunferência.



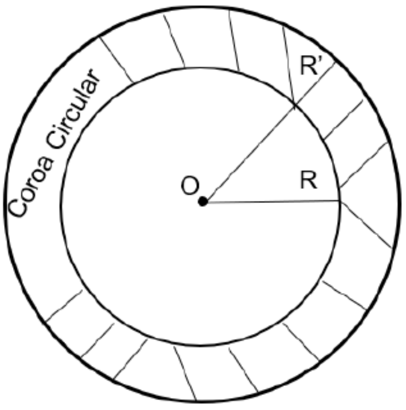

$\measuredangle ACB$ → É ângulo excêntrico

Nota:

Se duas circunferências têm raios iguais, elas são geometricamente e reciprocamente iguais.

# CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

Circunferências concêntricas são as circunferências que têm o mesmo centro, mas têm raios diferentes.



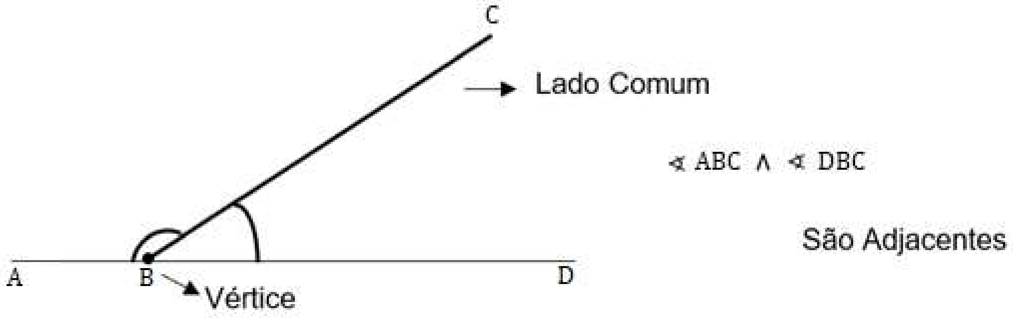

$R \neq R'$

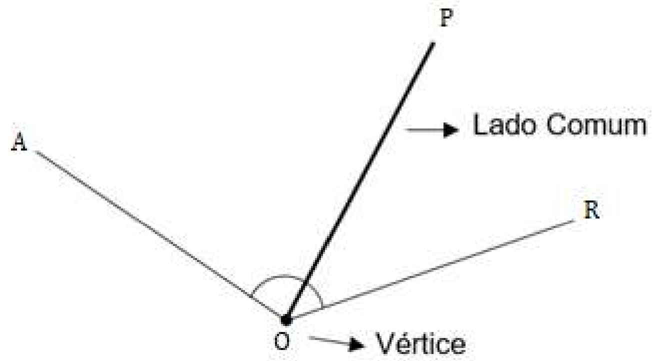
Nota:

Numa circunferência, ou em circunferências iguais, a ângulos ao centro iguais correspondem arcos iguais e reciprocamente.

# ÂNGULOS ADJACENTES

Ângulos adjacentes são os ângulos que têm o mesmo vértice e um lado comum.

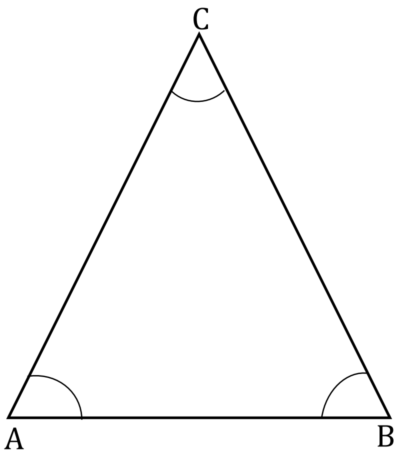



∢ AOP ∧ ∢ ROP São Adjacentes

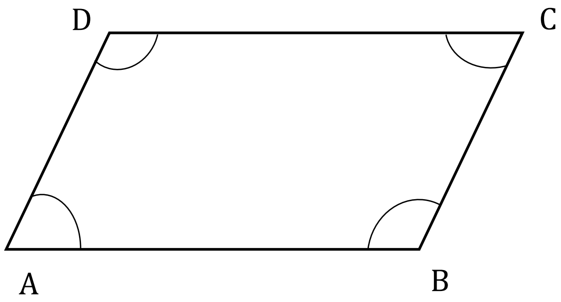
# DEFINIÇÕES DE ÂNGULOS INTERNOS

1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$.




$$\boldsymbol{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°}$$

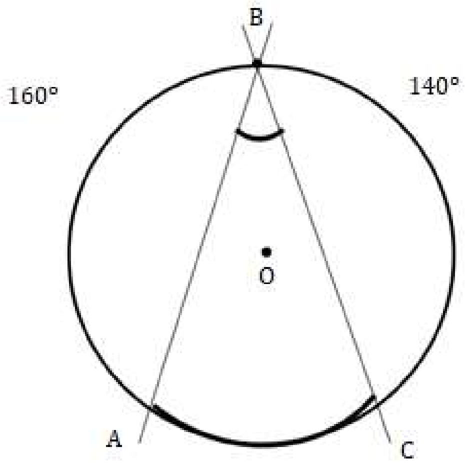
2. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a $360°$.




$$\boldsymbol{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°}$$

## ÂNGULO INSCRITO

1. Ângulo inscrito é o ângulo que tem o vértice num ponto da circunferência e os lados são duas secantes da mesma circunferência.




$\sphericalangle ABC \longrightarrow$ Ângulo Inscrito

A sua amplitude (medida) é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}}$$

Se:

$\overset{\frown}{CB} = 140°$

$\overset{\frown}{BA} = 160°$

$\widehat{ABC} = ?$

$\overset{\frown}{AC} = (360° - 300°)$

$\overset{\frown}{AC} = 60°$

$\widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\widehat{ABC} = \frac{60}{2}$

$\widehat{ABC} = 30°$

Ex.:

Se $\widehat{B} = 45°$

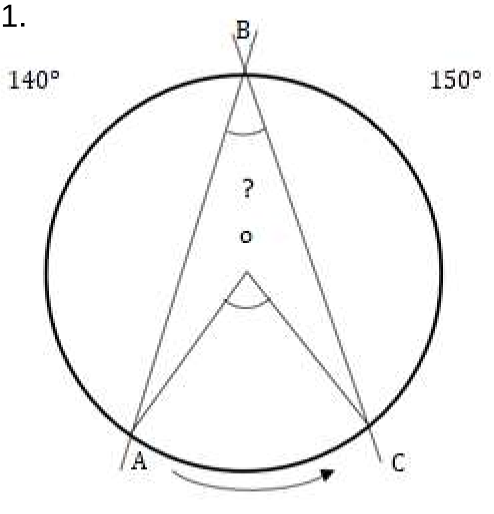
$\overset{\frown}{AC} = ?$

$45° \times 2 = 90°$

$\overset{\frown}{AC} = 90°$

Ex.:

1.




Se:

$\overset{\frown}{CB} = 150°$

$\overset{\frown}{BA} = 140°$

Determina:

$\widehat{ABC}$ e $\widehat{AOC}$

$\widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\overset{\frown}{AC} = (360° - 290°)$

$\overset{\frown}{AC} = 70°$

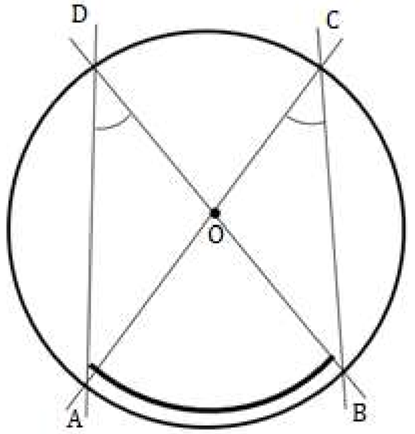
$\widehat{ABC} = \frac{70}{2}$

$\widehat{ABC} = 35°$

$\widehat{AOC} = \overset{\frown}{AC} \longrightarrow$ Ângulo ao centro logo, a medida do arco é a medida do ângulo.

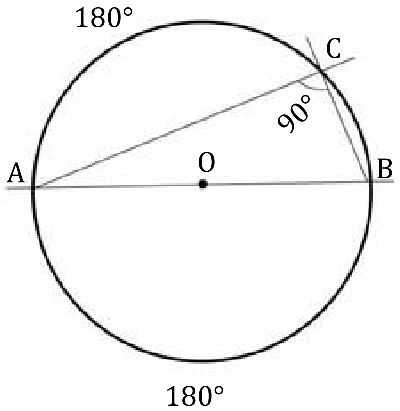
$\widehat{AOC} = 70°$

2. Dois ângulos inscritos no mesmo arco são iguais.




$$\left.\begin{array}{l} A\widehat{D}B = \dfrac{\widehat{AB}}{2} \\ A\widehat{C}B = \dfrac{\widehat{AB}}{2} \end{array}\right\} \quad A\widehat{D}B = A\widehat{C}B$$

3. Todo o ângulo inscrito numa semi-circunferência é recto. Logo, a sua amplitude é igual a 90°.




$[AB]$ é diâmetro

$\sphericalangle$ACB é inscrito

$A\widehat{C}B = 90°$

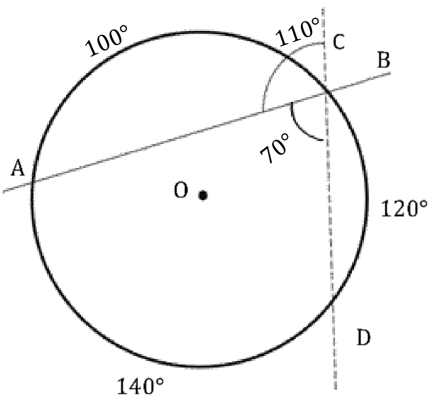
$$A\widehat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$A\widehat{C}B = \frac{180°}{2}$$

$A\widehat{C}B = 90°$

## ÂNGULOS EX-INSCRITOS

Ângulo ex-inscrito tem o vértice sobre a circunferência, a qual é interceptada por um dos lados e pelo prolongamento do outro lado.




$$\boxed{\boldsymbol{A\widehat{B}C = \frac{\widehat{BA} + \widehat{DB}}{2}}}$$

Nota:

A sua amplitude é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os prolongamentos dos mesmos.

Ex.:

Se:

$\overset{\frown}{BA} = 100°$

$\overset{\frown}{AD} = 140°$

$\widehat{ABC} = ?$

$$\widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DB}}{2}$$

$$\widehat{ABC} = \frac{100° + 120°}{2}$$

$$\widehat{ABC} = \frac{220°}{2}$$

$$\widehat{ABC} = 110°$$

ou

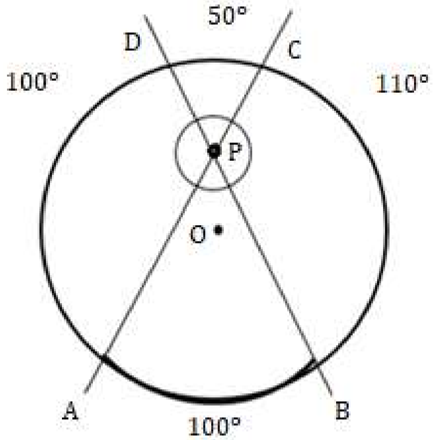
$$\widehat{ABC} = (180° - \widehat{ABD})$$

$$\widehat{ABC} = (180° - 70°)$$

$$\widehat{ABC} = 110°$$

## ÂNGULO COM O VÉRTICE NO INTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA

A sua amplitude é igual à semi-soma dos arcos compreendidos entre os seus lados e os prolongamentos dos mesmos.




$$\boldsymbol{\widehat{APB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\widehat{DPC} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Ex.:

Se:

$\overset{\frown}{BC} = 110°$

$\overset{\frown}{DA} = 100°$

$\overset{\frown}{CD} = 50°$

Determinar $\widehat{APB} = ?$

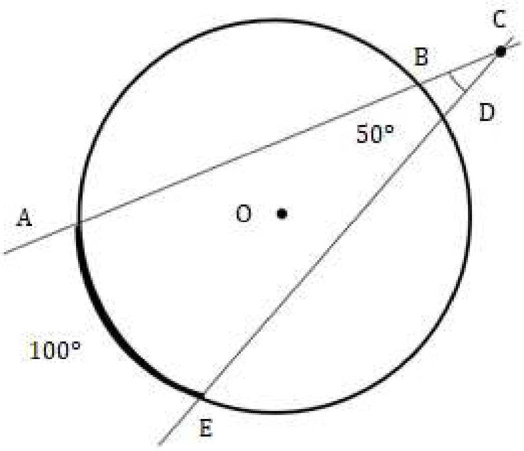
$$\widehat{APB} = \frac{100+50}{2}$$

$$\widehat{APB} = \frac{150}{2}$$

$$\widehat{APB} = 75°$$

# ÂNGULO COM O VÉRTICE NO EXTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA

A sua medida é igual à semi-diferença das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados.




C ⟶ Vértice no exterior da circunferência

$$\boldsymbol{\widehat{ACE} = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{DB}}{2}}$$

Ex.:

Se:

$$\overset{\frown}{AE} = 100°$$

$$\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AE}$$

$$\overset{\frown}{DB} = 50°$$

Determina:

$$\widehat{ACE} = ?$$

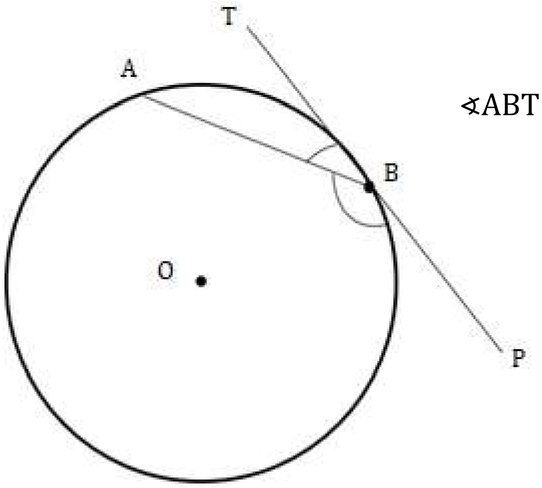
$$\widehat{ACE} = \frac{100° - 50°}{2}$$

$$\widehat{ACE} = \frac{50}{2}$$

$$\widehat{ACE} = 25°$$

# ÂNGULO DE UM SEGMENTO

Ângulo de um segmento é formado por uma corda e pela tangente num dos extremos dessa corda.




$[TP] \longrightarrow$ É tangente em B

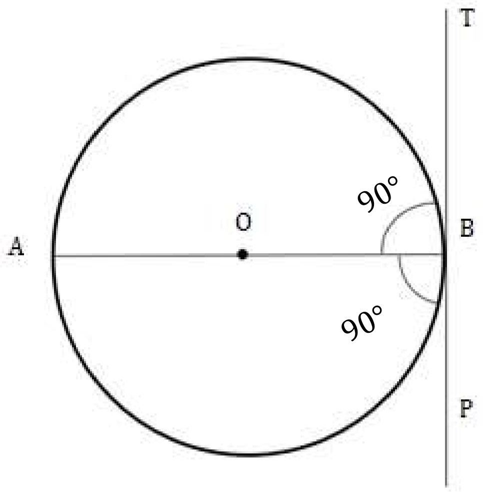
$\sphericalangle ABT \wedge \sphericalangle ABP \longrightarrow$ São ângulos de um segmento

A sua medida é igual a metade do arco compreendido entre os lados.

$$\boxed{\widehat{ABT} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}}$$

$$\boxed{\widehat{ABP} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

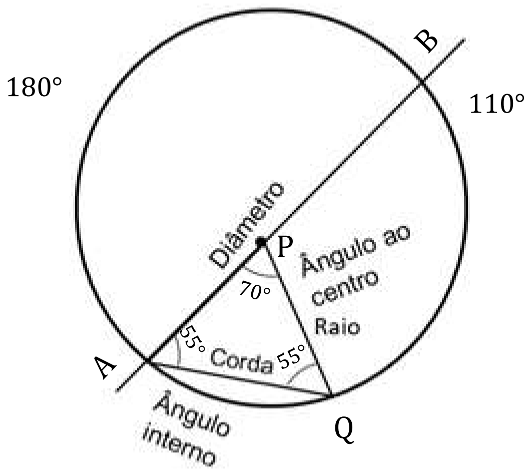
Qualquer tangente que toque num extremo de um raio, ou de um diâmetro, forma com eles ângulos rectos.




$[AB]$ é Diâmetro

$[TP]$ é Tangente em B

Ex.:




[AB] é diâmetro

[PQ] é raio

[AQ] é corda

$\widehat{QB} = 110°$

Determina a amplitude de cada ângulo interno do $\Delta\,[APQ]$.

$Se\ \widehat{AQ} = 70°\ Então\ \widehat{P} = 70°$

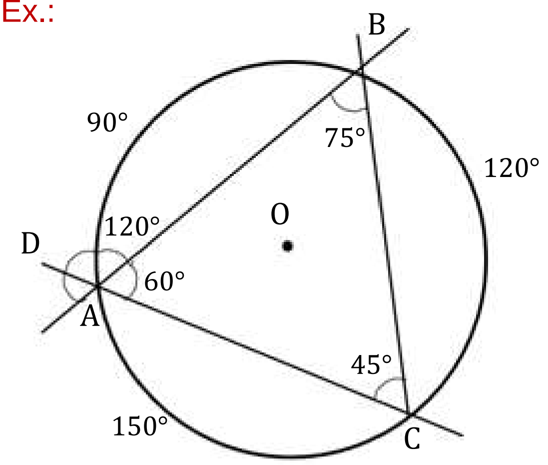
$Se\ \widehat{QB} = 110°\ Então\ \widehat{A} = 55°$

$\widehat{Q} = 180 - (70° + 55)$

$\widehat{Q} = 180 - 125$

$\widehat{Q} = 55°$

Ex.:




$\widehat{BA} = 90°$

$\widehat{CB} = 120°$

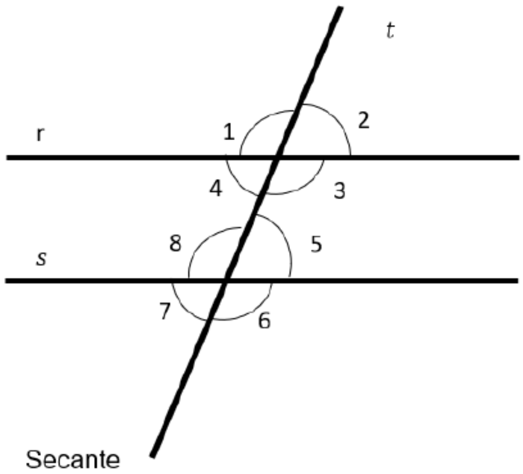
a) Determina as amplitudes dos ângulos internos do $\Delta[ACB]$.
b) Determina a amplitude do $\sphericalangle BAD$.

a) $\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = 60° \\ \widehat{B} = 75° \\ \widehat{C} = 45°\end{array}\right\} 180°$

b) A amplitude do $\sphericalangle BAD$ é $120°$ é um ângulo ex-inscrito.

# RELAÇÃO ENTRE ÂNGULOS EM RECTAS PARALELAS

Se tiver um sistema de rectas paralelas cortadas por uma secante (transversal), obtenho ângulos iguais e também ângulos suplementares.




$$\left.\begin{array}{l} 1\ e\ 2 \\ 2\ e\ 3 \\ 3\ e\ 4 \\ 1\ e\ 4 \\ 5\ e\ 8 \\ 6\ e\ 7 \\ 5\ e\ 6 \\ 7\ e\ 8 \end{array}\right\}$$ São ângulos suplementares

$$\left.\begin{array}{l} 1 \simeq 3 \\ 2 \simeq 4 \\ 5 \simeq 7 \\ 6 \simeq 8 \end{array}\right\}$$ São verticalmente opostos

$$\left.\begin{array}{l} 3 \simeq 8 \\ 4 \simeq 5 \end{array}\right\}$$ São alternos e internos

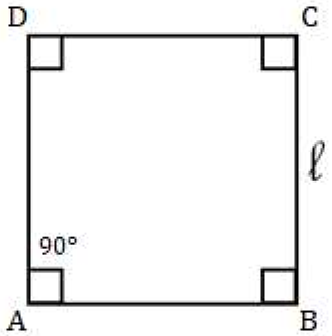
$$\left.\begin{array}{l} 2 \simeq 7 \\ 1 \simeq 6 \end{array}\right\}$$ São alternos e externos

$$\left.\begin{array}{l} 2 \simeq 5 \\ 1 \simeq 8 \\ 3 \simeq 6 \\ 4 \simeq 7 \end{array}\right\}$$ São ângulos correspondentes

# ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

## QUADRADO

Tem os lados iguais, paralelos dois a dois e perpendiculares entres si.



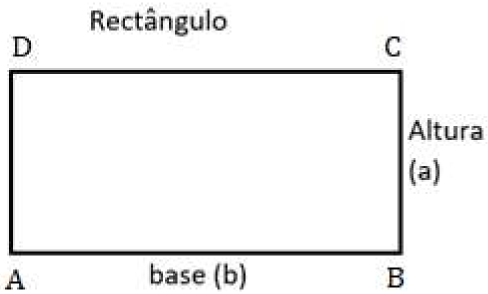

$$A = \ell \times \ell$$

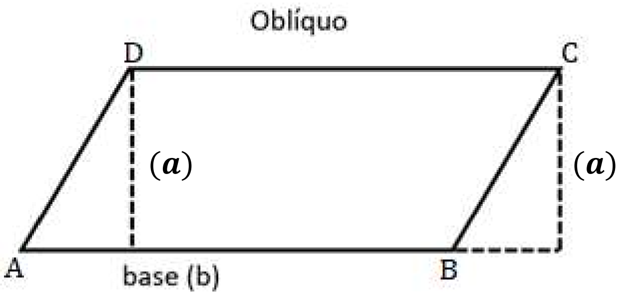
ou

$$A = \ell^2$$

## PARALELOGRAMO

Tem os lados iguais e paralelos dois a dois.



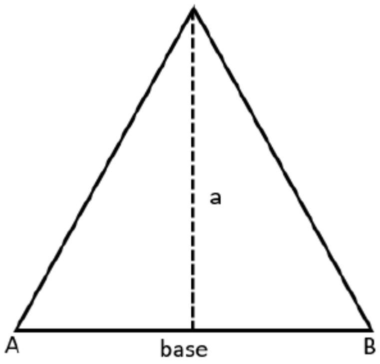

$$\boxed{A = b \times a}$$

ÁREA = BASE × ALTURA

$$\boxed{S = c \times l}$$

SUPERFÍCIE = COMPRIMENTO × LARGURA

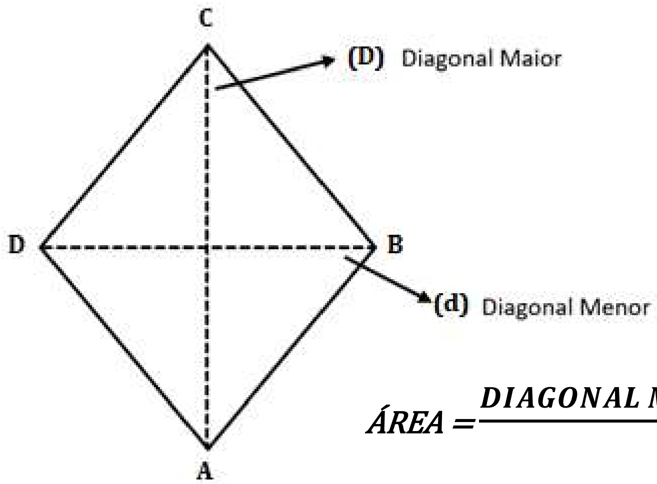
# TRIÂNGULO




$$\boxed{A = \frac{b \times a}{2}}$$

$$ÁREA = \frac{BASE \times ALTURA}{2}$$

# LOSANGO OU ROMBO

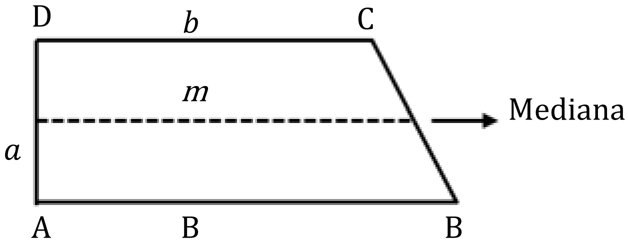



$$\boxed{A = \frac{D \times d}{2}}$$

$$ÁREA = \frac{DIAGONAL\ MAIOR \times DIAGONAL\ MENOR}{2}$$

# TRAPÉZIOS

**RETÂNGULO**

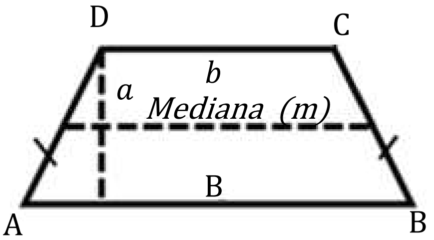



$$A = \frac{B + b}{2} \times a$$

B= Base Maior
$b$ = Base Menor
$a$ = altura
$m$ = mediana

$$AREA = \frac{BASE\ MAIOR + BASE\ MENOR}{2}$$

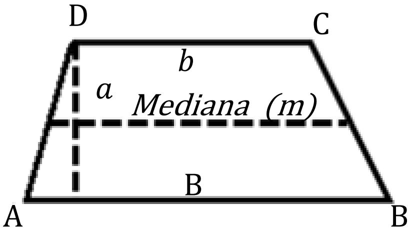
**ISÓSCELES**




$$m = \frac{B+b}{2}$$

$$MEDIANA = \frac{BASE\ MAIOR + BASE\ MENOR}{2}$$

**ESCALENO**




$$A = m \times a$$

$$\text{ÁREA} = MEDIANA \times ALTURA$$

Notas:

1. O trapézio tem dois lados paralelos chamados bases (Base Maior e Base Menor) e dois lados não paralelos.
2. Mediana é a linha que une o meio dos lados não paralelos. A mediana determina-se pela semi-soma das bases.

$$m = \frac{B+b}{2}$$

3. O trapézio isósceles tem os lados não paralelos iguais.
4. A fórmula de cálculo da Área de qualquer trapézio é igual a:

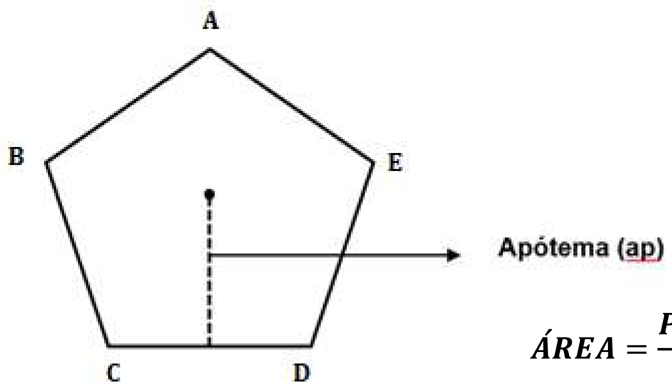
$$A = \frac{B + b}{2} \times a$$

# POLÍGONO REGULAR

Polígono regular tem os lados todos iguais.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Pentágono** | $\longrightarrow$ | **5** | **lados** |
| **Hexágono** | $\longrightarrow$ | **6** | **lados** |
| **Heptágono** | $\longrightarrow$ | **7** | **lados** |
| **Octógono** | $\longrightarrow$ | **8** | **lados** |
| **Eneágono** | $\longrightarrow$ | **9** | **lados** |
| **Decágono** | $\longrightarrow$ | **10** | **lados** |

# PENTÁGONO




$$\boxed{A = \frac{P}{2} \times ap}$$

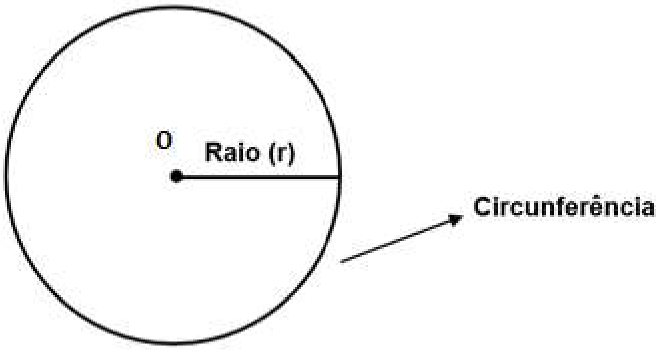
$$ÁREA = \frac{PERÍMETRO}{2} \times APÓTEMA$$

Notas:

1. O apótema é igual à medida do segmento de perpendicular baixado do centro do polígono para o meio de qualquer um dos seus lados.

2. O perímetro determina-se somando as medidas de todos os lados.

# CIRCUNFERÊNCIA




$$\pi = Pi = 3,14$$

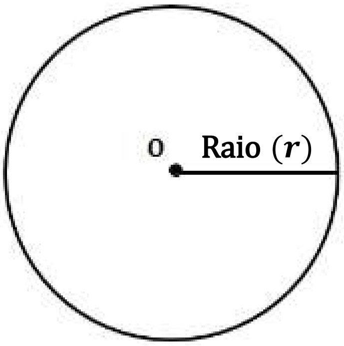
$$\boxed{P \odot = 2.\pi.r}$$

PERÍMETRO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA = 2 × PI × RAIO

<u>Nota:</u>

A circunferência nunca tem área, por se tratar de uma linha.

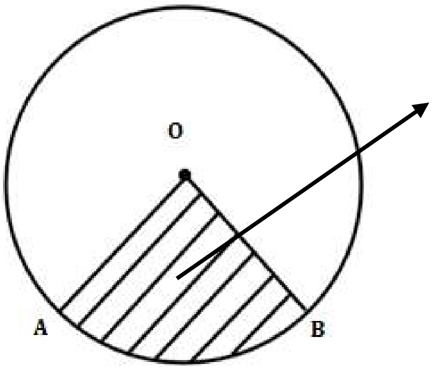
## CÍRCULO




$$A_{\circ} = \pi . r^2$$

*ÁREA DO CÍRCULO = PI × RAIO AO QUADRADO*

## SECTOR CIRCULAR



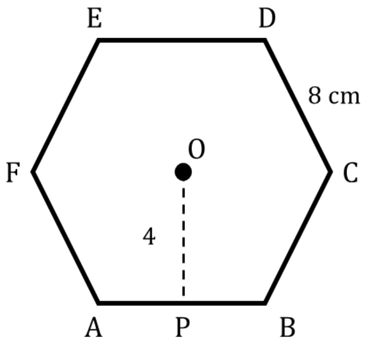

SECTOR CIRCULAR

$$A = \frac{\widehat{AB}}{360°} \times \pi \times r^2$$

$$ÁREA = \frac{ARCO\ DE\ \ AB}{360°} \times \ PI \times RAIO\ AO\ QUADRADO$$

Ex.:

Observa a figura que representa um hexágono regular.




Se $\overline{DC} = 8cm$

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\ \overline{FA}$$

Calcula $A$ (Área) = ?

$$ap = \frac{\overline{FA}}{2}$$

$$ap = \frac{8}{2}$$

$$\mathrm{ap} = 4\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{P} = 6 \times 8$$

$$P = 48cm$$

$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A = \frac{48}{2} \times 4$$

$$A = 24 \times 4$$

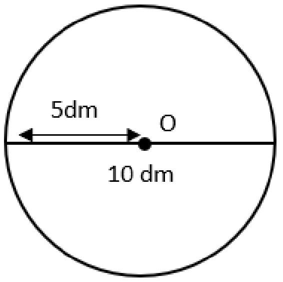
$$A = 96cm^2$$

Ex.:

Sabendo que o diâmetro de uma circunferência mede 10 dm, determina:

a) Perímetro dessa circunferência.

b) Área do círculo.




a) Perímetro da Circunferência

$$\mathrm{P} \odot = 2 \times \pi \times r$$

$$\mathrm{P} \odot = 2 \times 3{,}14 \times 5$$

$$\mathrm{P} \odot = 31{,}4\ dm$$

b) Área do Círculo

$$\mathrm{A} = \pi \times r^2$$

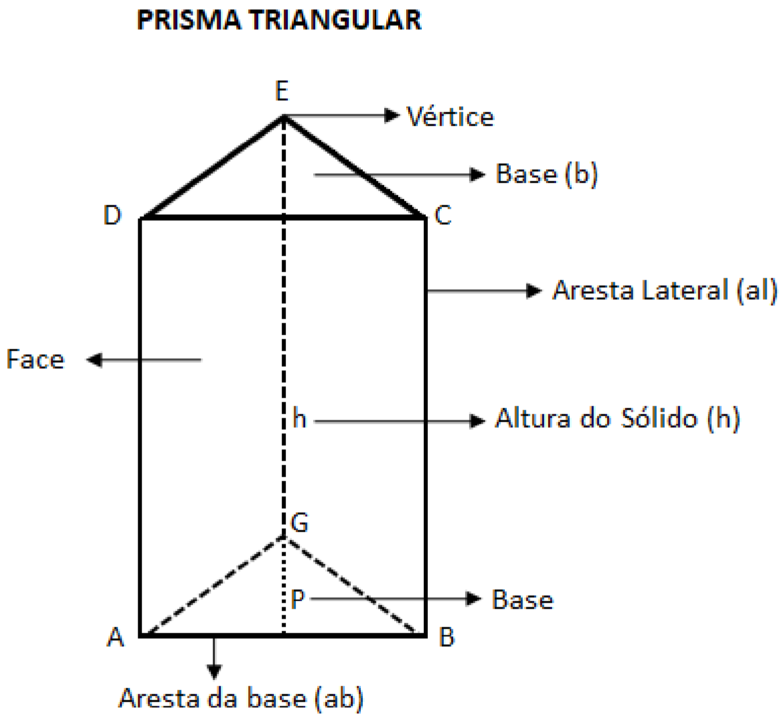
$$\mathrm{A} = 3{,}14 \times 5^2$$

$$\mathrm{A} = 3{,}14 \times 25$$

$$\mathrm{A} = 78{,}5\ dm^2$$

# ÁREAS E VOLUMES

## PRISMA




Nota:

No prisma, a sua altura é sempre igual à aresta lateral.

$$\boxed{Al = Pb \times h}$$

ÁREA LATERAL = PERÍMETRO BASE × ALTURA

$$\boxed{At = Al + (2 \times Ab)}$$

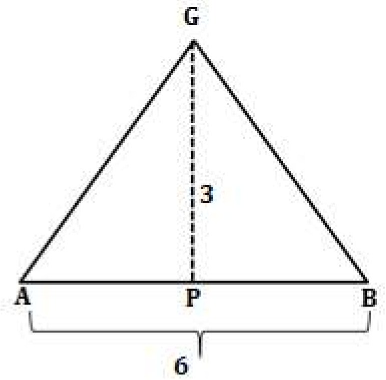
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + (2 × ÁREA BASE)

$$\boxed{V = Ab \times h}$$

VOLUME = ÁREA BASE × ALTURA

Ex.:

A figura representa um prisma triangular regular.




$\overline{\mathrm{AB}} = 6\ cm$

$h = 7\ cm$

$\overline{\mathrm{GP}} = 3\ cm$

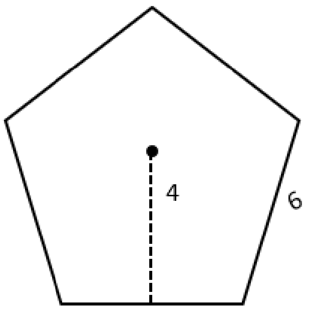
$At = ?$

$V = ?$

| | | |
|---|---|---|
| $Al = Pb \times b$<br>$Al = 18 \times 7$<br>$Al = 126\ \mathrm{cm}^2$<br>**Área lateral** | $\mathrm{Pb} = 3 \times 6$<br>$\mathrm{Pb} = 18\ \mathrm{cm}$<br>**Perímetro da base** | $Ab = \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{a}}{2}$<br>$Ab = \frac{6 \times 3}{2}$<br>$Ab = \frac{18}{2}$<br>$Ab = 9\ \mathrm{cm}^2$<br>**Área da base** |
| $At = Al + (2 \times Ab)$<br>$At = 126 + (2 \times 9)$<br>$At = 126 + 18$<br>$At = 144\ cm^2$<br>**Área total** | $V = Ab \times h$<br>$V = 9 \times 7$<br>$V = 63\ cm^2$<br>**Volume** | |

Ex.:

Determina a área total e volume de um Prisma Pentagonal em que:




al = h = 8 cm

$ab = 6\,cm$

$al = 8\,cm$

$ap = \frac{1}{2}\,al$

$ap = \frac{8}{2}$

$ap = 4\,cm$

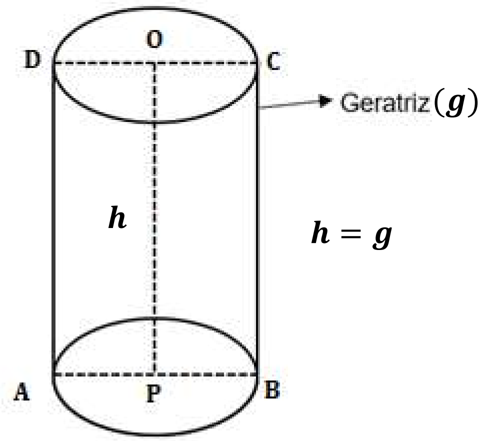
**Apótema**

<table>
<tr>
<td>$Al = Pb \times h$<br>$Al = 30 \times 8$<br>$Al = 240\,cm^2$<br>Área Lateral</td>
<td>$\mathrm{Pb} = 6 \times 5$<br>$Pb = 30\,cm$<br>Perímetro da Base</td>
<td>$Ab = \frac{P}{2} \times ap$<br>$Ab = \frac{30}{2} \times 4$<br>$Ab = 15 \times 4$<br>$Ab = 60\,cm^2$<br>Área da Base</td>
</tr>
<tr>
<td>$At = Al + (2 \times Ab)$<br>$At = 240 + (2 \times 60)$<br>$At = 240 + 120$<br>$At = 360\,cm^2$<br>Área total</td>
<td colspan="2">$V = Ab \times h$<br>$V = 60 \times 8$<br>$V = 480\,cm^3$<br>Volume</td>
</tr>
</table>

# CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Um cilindro de revolução é gerado por um rectângulo quando se tem o lado maior como eixo e se roda 360º.

A sua altura tem a mesma medida que a sua geratriz.




$$\boxed{Al = 2\pi.r.g}$$

$$ÁREA\ LATERAL = 2 \times 3,14 \times RAIO \times GERATRIZ$$

$$\boxed{At = 2\pi.r\,(g + r)}$$

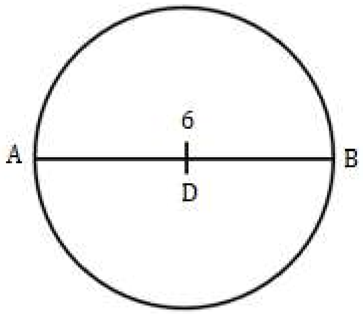
$$ÁREA\ TOTAL = 2 \times 3,14 \times RAIO \times (GERATRIZ + RAIO)$$

$$\boxed{V = \pi.r^2.g}$$

$$VOLUME = 3,14 \times RAIO^2 \times GERATRIZ$$

Ex.:

A figura representa um cilindro de revolução.




$h = g$

$g = 8\ dm$

$\overline{AB} = 6\ dm$

$\bar{h} = 8\ dm$

$At = ?$

$V = ?$

$$At = 2\pi r\ (g + r)$$

$$At = 2 \times 3{,}14\ \times 3\ (8 + 3)$$

$$At = 6{,}28 \times 3(11)$$

$$At = 6{,}28 \times 33$$

$$At = 207{,}24\ dm^2$$

$$V = \pi\, r^2 g$$

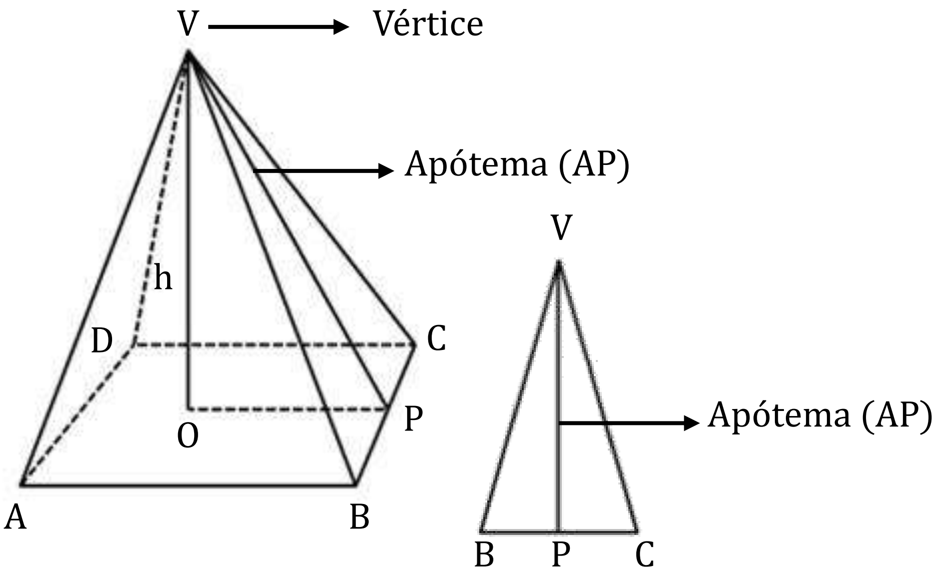
$$V = 3{,}14 \times 3^2 \times 8$$

$$V = 3{,}14 \times 9 \times 8$$

$$V = 28{,}26 \times 8$$

$$V = 226{,}08\ dm^3$$

# PIRÂMIDE




As faces de uma pirâmide são sempre triângulos e às alturas desses triângulos chamamos Apótema da pirâmide.

$$\boxed{Al = \frac{Pb \times Ap}{2}}$$

$$ÁREA\ LATERAL = \frac{PERIMETRO\ BASE \times APOTEMA}{2}$$

$$\boxed{At = Al + Ab}$$

$$ÁREA\ TOTAL = ÁREA\ LATERAL + ÁREA\ BASE$$

$$\boxed{V = \frac{Ab \times h}{3}}$$

$$VOLUME = \frac{ÁREA\ BASE \times ALTURA}{3}$$

Ex.:

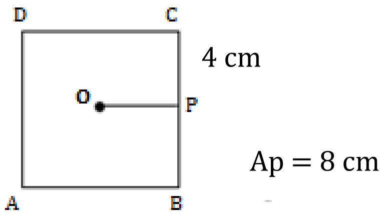
A figura representa uma pirâmide quadrangular regular.

$\overline{\mathrm{BC}} = 4cm$

$\overline{\mathrm{VP}} = 8cm$

$\mathrm{At} = ?$

$\mathrm{V} = ?$




$$Al = \frac{Pb \times AP}{2}$$

$$Al = 16 \times 82$$

$$\mathrm{Al} = \frac{128}{2}$$

$$Al = 64\mathrm{cm}^2$$

**Área Lateral**

$$Pb = 4 \times 4$$

$$Pb = 16\ cm$$

**Perímetro Base**

$$Ab = l^2$$

$$\mathrm{Ab} = 4^2$$

$$\mathrm{Ab} = 16\mathrm{cm}^2$$

**Área Base**

$$At = Al + Ab$$

$$At = 64 + 16$$

$$At = 80\ cm^2$$

**Área Total**

$$V = \frac{Ab \times h}{3}$$

$$V = \frac{16 \times 7{,}7}{3}$$

$$V = 41{,}06\mathrm{cm}^3$$

**Volume**

$$\mathrm{h}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathrm{c}^2$$

$$8^2 = 2^2 + c^2$$

$$64 = 4 + c^2$$

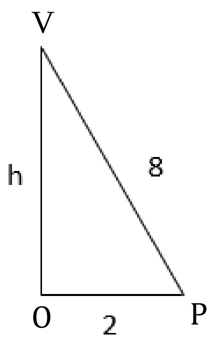
$$-c^2 = 4 - 64$$

$$-c^2 = -60$$

$$c^2 = 60$$

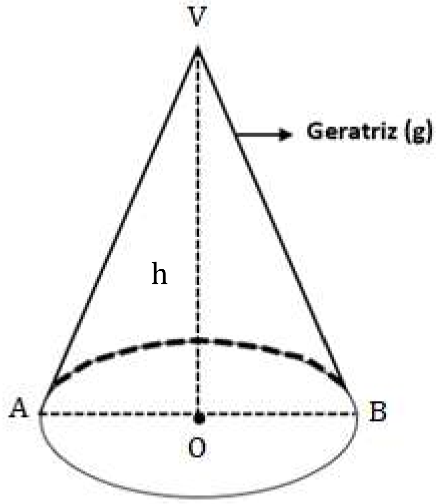
$$c = \sqrt{60}$$

$$c = \pm 7{,}7\mathrm{cm}$$




**Altura h**

# CONE DE REVOLUÇÃO




$$Al = \frac{2\pi\, r\, g}{2}$$

$$ÁREA\ LATERAL = \frac{2 \times PI \times RAIO \times GERATRIZ}{2}$$

$$At = \frac{2\pi\, r\, g}{2} + \pi r^2$$

$$\pi . r(g + r)$$

$$ÁREA\ TOTAL = ÁREA\ LATERAL + PI \times R^2$$

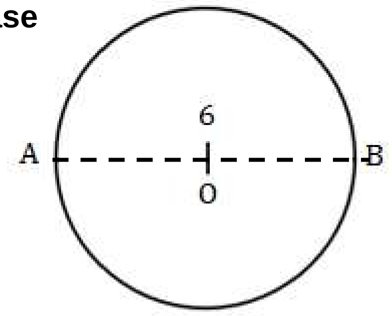
$$V = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$

$$VOLUME = \frac{PI \times RAIO^2 \times ALTURA}{3}$$

Ex.:

A figura representa um cone de revolução.

**Base**




$$g = 8cm$$

$$At = \pi r(g + r)$$

$$At = 3{,}14 \times 3(8 + 3)$$

$$At = 3{,}14 \times 3(11)$$

$$At = 3{,}14 \times 33$$

$$At = 103{,}62cm^2$$

**Área Total**

$$V = \frac{\pi\, r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{3{,}14 \times 3^2 \times 7{,}4}{3}$$

$$V = \frac{3{,}14 \times 9 \times 7{,}4}{3}$$

$$V = 69{,}708\ cm^3$$

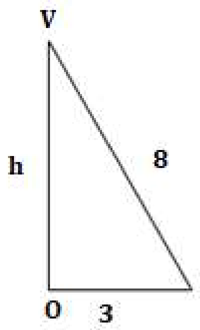
**Volume**

$$\overline{AB} = 6cm$$

$$\overline{VO} = 8cm = g$$

$$At = ?$$

$$V = ?$$




$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$8^2 = 3^2 + h^2$$

$$64 = 9 + h^2$$

$$h^2 = 64 - 9$$

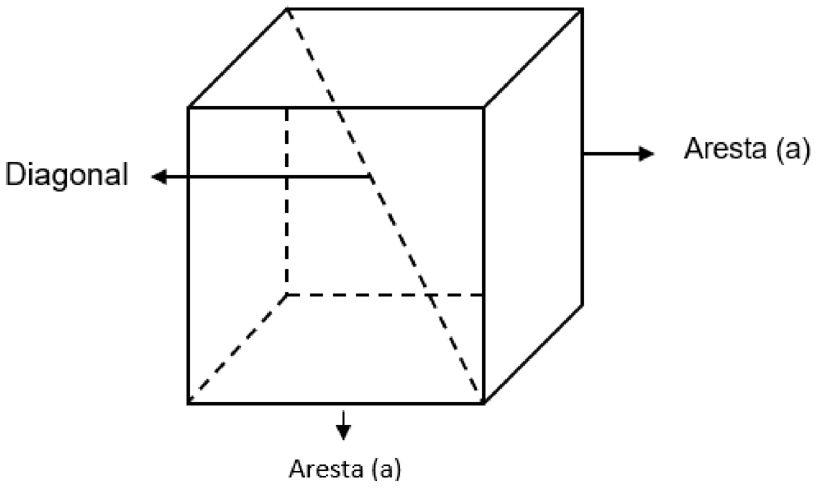
$$h^2 = 55$$

$$h = \sqrt{55}$$

$$h = 7{,}4$$

# CUBO

As suas faces são constituídas por quadrados.




$$\boxed{Al = 4 \, . \, a^2}$$

$$ÁREA\ LATERAL = \quad 4 \times ARESTA^2$$

$$\boxed{At = 6 \, . \, a^2}$$

$$ÁREA\ TOTAL = \quad 6 \times ARESTA^2$$

$$\boxed{V = a^3}$$

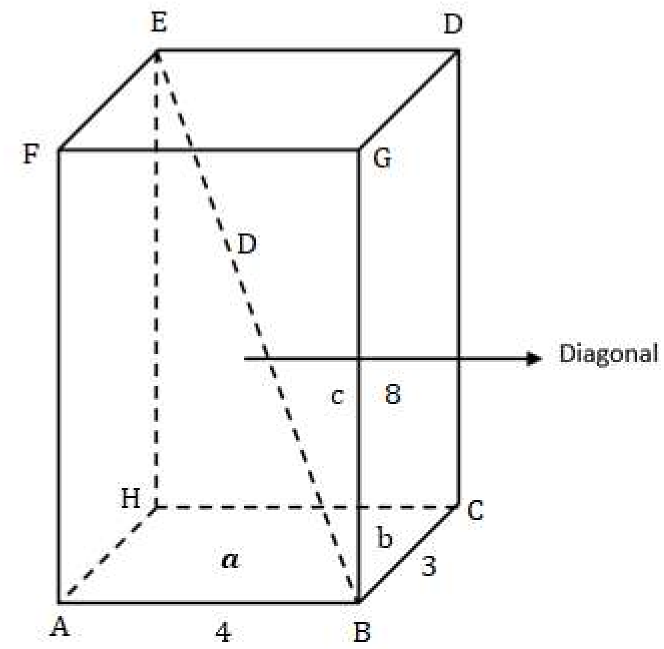
$$VOLUME = ARESTA^3$$

$$\boxed{D^2 = 3 \, . \, a^2}$$

$$\mathrm{DIAGONAL}^2 = 3 \times \mathrm{ARESTA}^2$$

# PARALELEPÍPEDO

As faces de um paralelepípedo são paralelogramos




$$\boldsymbol{Al = 2[(a \times c) + (b \times c)]}$$

*ÁREA LATERAL* $=$ $2\ (ARESTA\ a \times ARESTA\ c + ARESTA\ b \times ARESTA\ c)$

$$\boldsymbol{At = 2[(a \times c) + (b \times c) + (a \times b)]}$$

*ÁREA TOTAL* $=$ $2\ [(ARESTA\ a \times ARESTA\ c) + (ARESTA\ b \times ARESTA\ c) + (ARESTA\ a \times ARESTA\ b)]$

$$\boldsymbol{V = Ab \times h}$$

$$\boldsymbol{V = a \times b \times c}$$

$$\boldsymbol{D^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

Ex.:

A figura representa um paralelepípedo rectângulo.

$\overline{AB} = 4cm$

$\overline{BC} = 3cm$

$\overline{BG} = 8cm$

$Al = ?$

$At = ?$

$V = ?$

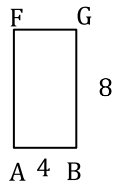
$Al = 64 + 48$

$Al = 112cm^2$

$A\square = b \times a$

$A\square = 4 \times 8$

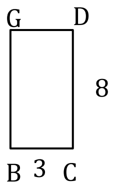
$A\square = 32cm^2$




$A\square = 3 \times 8$

$A\square = 24cm^2$

$24 \times 2 = 48cm^2$




$At = 64 + 48 + 24$

$At = 136cm^2$

$Ab = 4 \times 3$

$Ab = 12cm^2$

$12 \times 2 = 24cm^2$

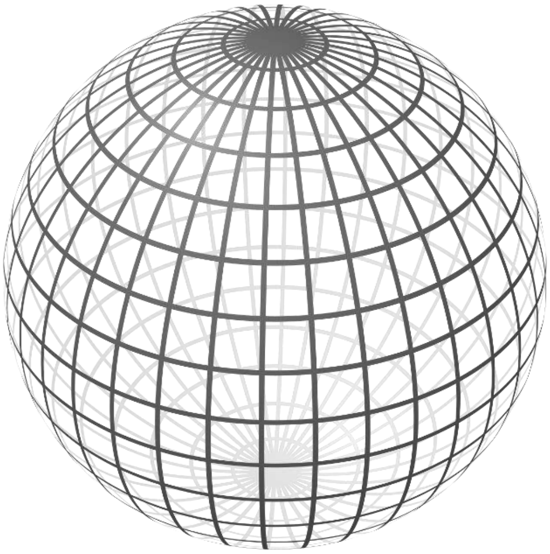
$V = a \times b \times c$

$V = 4 \times 3 \times 8$

$V = 12 \times 8$

$V = 96cm^3$

# ESFERA



$$\boxed{A = 4\pi\, r^2}$$

$$ÁREA = \quad 4 \times PI \times RAIO^2$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3}$$

$$VOLUME = \frac{4}{3} \times PI \times RAIO^3$$

# PARTE 2

## *ESTATÍSTICA*

# ESTATÍSTICA

O que se entende por estatística?

É o estudo das características comuns dos elementos de um conjunto. Parte-se da observação de conjuntos de elementos.

A Estatística foi buscar os seus elementos aos agrupamentos humanos. Daí os conjuntos se designarem por População ou Universo Estatístico., e os elementos se denominarem Indivíduo ou unidade estatística.

População ou Universo Estatístico é o conjunto de elementos, sobre os quais se faz o estudo estatístico.

Indivíduo ou Unidade Estatística é cada um dos elementos da população ou Universo Estatístico.

O Universo Estatístico pode ser:

- Finito – se tem um número finito de elementos
- e
- Infinito – se tem um número infinito de elementos

Universo Finito: todos os elementos do conjunto são observados.

Universo Infinito: Apenas uma parte dos elementos do conjunto são observados. Generaliza-se ao todo as conclusões do estudo parcial.

Nota:

Se incidirmos a observação a uma parte de População ou Universo Estatísticos, teremos uma amostra.

Caracter Estatístico: é a propriedade que se estuda ou observa nos elementos de uma população.

Os caracteres podem ser:

- Qualitativos – se os valores não são numéricos.
  Ex: cor das portas; raça; cidade; etc.
- Quantitativos – se os valores são numéricos.
  Ex: o peso; a idade; a altura;

Variável Estatística: é uma característica (caracter) quantitativa.

Dado Estatístico: é o valor que a variável assume.

As variáveis podem ser:

- Discretas – se o domínio é um conjunto finito ou numerável.
  Ex: número de elementos de um grupo.
- e
- Contínuas – se o seu domínio é um intervalo de números reais.
  Ex: a altura dos alunos.

Exemplos:

1. As alturas dos jogadores duma equipa de futebol de salão estão representadas no quadro seguinte

| Jogadores | Alturas (m) |
|---|---|
| 1 | 1,80 |
| 2 | 1,83 |
| 3 | 1,90 |
| 4 | 1,73 |
| 5 | 1,75 |

Então classifiquemos:

População: {jogadores}

Variável Estatística: altura.

Unidade Estatística: cada um dos jogadores.

Dado Estatístico: altura determinada de cada jogador.

Nota:

A variável (altura) é contínua porque pode ter qualquer valor no intervalo de variação.

2. Suponhamos que queremos agrupar os alunos duma turma tendo em conta o número de elementos de um agregado familiar.

Então:

Teremos:

População: {alunos da turma}.

Variável: número de elementos do agregado familiar

Unidade: cada aluno.

Dado: o número de elementos do agregado familiar de cada aluno.

Nota: Neste caso a variável (número de elementos do agregado familiar) é discreta porque pode tomar valores inteiros.

# FREQUÊNCIAS

## FREQUÊNCIA ABSOLUTA

Frequência Absoluta ($F_i$) – é o número de vezes que cada caracter estatístico aparece repetido.

Em termos gerais:

A frequência absoluta $F_i$ do valor $x_i$. É o número de indivíduos de uma população para as quais a variável estatística toma o valor $x_i$ .

Ex.:

Consideremos uma turma de 25 alunos cujas notas na disciplina de Matemática foram as constantes no quadro seguinte:

| N. º de alunos | Notas |
|---|---|
| 5 | 10 |
| 10 | 12 |
| 5 | 14 |
| 3 | 16 |
| 1 | 18 |
| 1 | 20 |

Podes verificar que a nota 12 é a que se repete mais vezes. Corresponde a 10 alunos.

Assim: A frequência absoluta da nota 12 é 10.

$$\boxed{\boldsymbol{F_i = 10}}$$

## FREQUÊNCIA RELATIVA

A Frequência Relativa ($f_i$) – é nos dada pelo quociente entre a frequência absoluta e o número de indivíduos da população.

$$\boxed{\boldsymbol{f_i = \frac{F_i}{n}}}$$

$f_i$ → frequência relativa

$F_i$ → frequência absoluta

$n$ → número de indivíduos da população

Considerando o quadro anterior verificamos:

$F_i = 10$ $\quad n = 25$

$$f_1 = \frac{10}{25} \quad \text{ou} \quad f_1 = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad f_1 = 0{,}4$$

Em termos gerais:

A frequência relativa $f_i$ do valor $x_i$ é o quociente entre a frequência absoluta $F_i$ e o número de indivíduos da população.

$$\boxed{\boldsymbol{f_i = \frac{F_i}{n}}}$$

## FREQUÊNCIA ACUMULADA

Frequência Acumulada ($\Sigma$) – até um dado valor da variável é a soma da frequência absoluta ou da frequência relativa desse valor com os valores anteriores.

Nota:

Podemos determinar duas frequências acumuladas:

$\Sigma F_i$ Frequências absolutas acumuladas.

$\Sigma f_i$ Frequências relativas acumuladas.

Para melhor interpretação do que atrás foi dito, consideremos o seguinte quadro respeitante a uma turma de 30 alunos e os níveis de aproveitamento na disciplina de Matemática.

Vamos estabelecer a ordem dos níveis de forma crescente de 1 a 5.

| **Nível** | **N. º de Alunos** |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 3 | 15 |
| 4 | 5 |
| 5 | 3 |

30

Vamos elaborar o quadro de distribuição das frequências:

| Valores da Variável Estatística $x_i$ | Frequências Absolutas $F_i$ | Frequências Absolutas Acumuladas $\Sigma F_i$ | Frequências Relativas $f_i$ | Frequências Relativas Acumuladas $\Sigma f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |
| 2 | 5 | 7 | $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ | $\frac{7}{30}$ |
| 3 | 15 | 22 | $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ | $\frac{11}{15}$ |
| 4 | 5 | 27 | $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ | $\frac{9}{10}$ |
| 5 | 3 | 30 | $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ | 1 |
| Somas | 30 | | 1 | |

Exercício:

Num conjunto de estudantes fizemos um inquérito, tendo como objectivo o seguinte conhecimento:

- altura de cada um;
- número de irmãos;
- distância da escola a casa;
- número de pessoas do agregado familiar;
- estudos;
- profissão que deseja ter.

1. Indique o Universo Estatístico e a Unidade Estatística.
2. Quais as variáveis estatísticas?
3. Quais são as variáveis contínuas e as discretas.

Resolução:

1. Universo estatístico – conjunto dos estudantes isto é {estudantes}.

   Unidade estatística – cada um dos estudantes.

2. Como a variável estatística é quantitativa, teremos:

Variável Estatística — Caracter Quantitativo
- o número de irmãos
- distância de Escola a casa
- número de pessoas do agregado familiar

Variável Estatística — Caracter Qualitativo
- estudos
- profissão que deseja ter

3.

Variáveis contínuas

Intervalo de números reais
- altura de cada um
- distância da escola a casa

Variáveis discretas

{ } Infinito numerável
- número de irmãos
- número de pessoas do agregado familiar

Exercício:

As temperaturas máximas registadas em diversas cidades foram:

8; 6; 12; 9; 8; 7; 9; 11; 10; 8; 7; 10; 9; 7; 9; 6; 12; 11; 5; 9; graus.

1. Qual é a variável estatística e a população desta distribuição?
2. Elabore o quadro de distribuição de frequências.
3. Quanto cidades ficarem com temperatura máxima abaixo de 9º e quantas atingiram pelo menos a temperatura de 9º.

Resolução:

1. População – {cidades}

   Variável estatística – temperatura máxima.

2. Quadro:

| **Temperatura máxima** | **Contagem** | $F_i$ | $\sum F_i$ | $f_i$ | $\sum f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | I | 1 | 1 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |
| 6 | II | 2 | 3 | $\frac{2}{20}$ | $\frac{3}{20}$ |
| 7 | III | 3 | 6 | $\frac{3}{20}$ | $\frac{6}{20}$ |
| 8 | III | 3 | 9 | $\frac{3}{20}$ | $\frac{9}{20}$ |
| 9 | ~~IIII~~ | 5 | 14 | $\frac{5}{20}$ | $\frac{14}{20}$ |
| 10 | II | 2 | 16 | $\frac{2}{20}$ | $\frac{16}{20}$ |
| 11 | II | 2 | 18 | $\frac{2}{20}$ | $\frac{18}{20}$ |
| 12 | II | 2 | 20 | $\frac{2}{20}$ | $\frac{20}{20}$ |
| **Somas** | 20 | 20 | | 1 | |

<u>São 20 cidades</u>

$n = 20$

3. Verificando a coluna $F_i$ ou $\sum F_i$ temos 9 cidades com temperaturas inferiores a 9º.

Então $20 - 9 = 11$ cidades que atingiram pelo menos os 9º.

# REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Suponhamos serem:

$\{x_1, x_2, x_3 ... x_n\}$ valores de variável estatística.

e

$\{F_1, F_2, F_3 ... F_n\}$ valores das frequências.

Como:

Distribuição estatística – é o conjunto de pares do produto $\boxed{x \times F}$ em que:

$x = \{x_1, x_2, x_3 ... x_n\}$ e $F = \{F_1, F_2, F_3 ... F_n\}$ , teremos:

$$x \times F = \{(x_1, F_1), (x_2, F_2), (x_3, F_3), ..., (x_n, F_n)\}$$

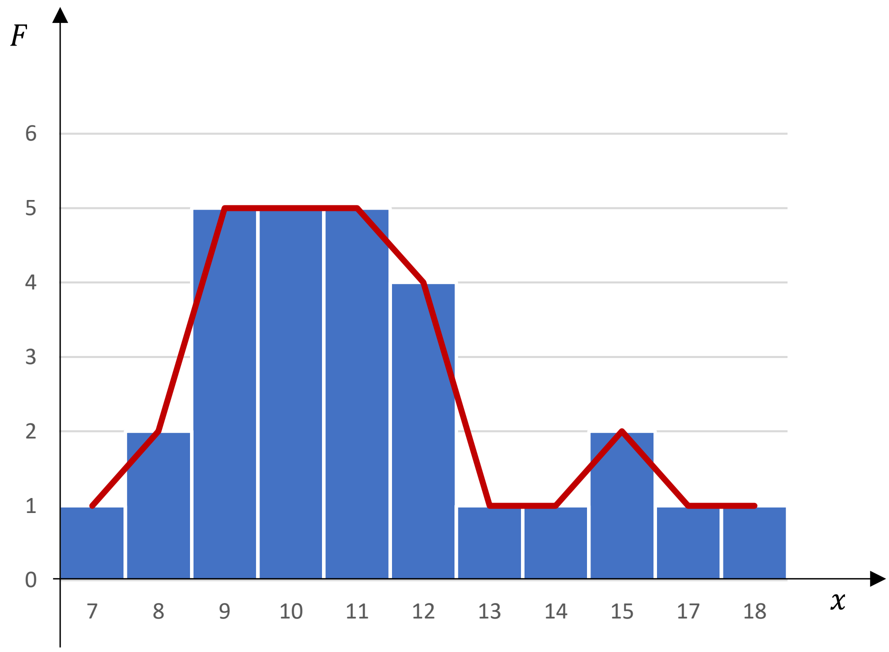
Dada a circunstância de a cada par ordenado corresponder um ponto no plano, é possível representa graficamente qualquer distribuição estatística.

## DIAGRAMA DE BARRAS

Se considerarmos um dos exemplos anteriores podemos construir o gráfico:

Ex.: vejamos o quadro seguinte:

| **Notas de Matemática** | **Frequência Absoluta** $(F_i)$ |
|---|---|
| 7 | 1 |
| 8 | 2 |
| 9 | 5 |
| 10 | 5 |
| 11 | 5 |
| 12 | 4 |
| 13 | 1 |
| 14 | 1 |
| 15 | 2 |
| 17 | 1 |
| 18 | 1 |



Notas:

1. Se os pontos de coordenada $(x, F)$ forem unidos, nas suas extremidades obteremos o polígono de Frequências.

2. Estes diagramas são especialmente utilizados quando as variáveis são discretas (numeráveis).

# HISTOGRAMAS

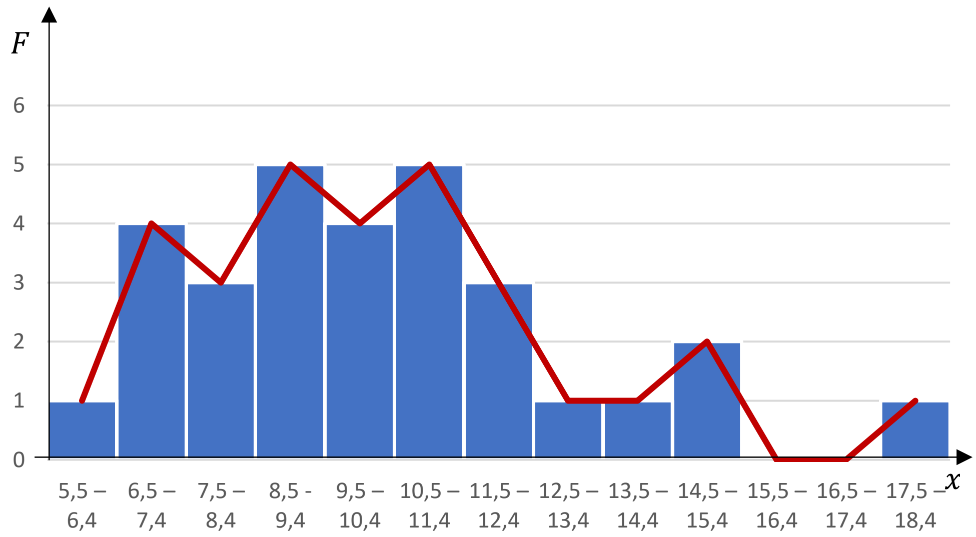
Nota:

1. Estes gráficos usam-se, especialmente, quando as variáveis são contínuas. Por isto devemos agrupar os seus valores em classes (Intervalos de números reais).

Ex.:

1. Ao verificar os resultados do diagnóstico, o professor da disciplina de matemática constatou:

| Notas de Matemática | Frequência Absoluta $(F_i)$ |
|---|---|
| 5,5 – 6,4 | 1 |
| 6,5 – 7,4 | 4 |
| 7,5 – 8,4 | 3 |
| 8,5 - 9,4 | 5 |
| 9,5 – 10,4 | 4 |
| 10,5 – 11,4 | 5 |
| 11,5 – 12,4 | 3 |
| 12,5 – 13,4 | 1 |
| 13,5 – 14,4 | 1 |
| 14,5 – 15,4 | 2 |
| 15,5 – 16,4 | 0 |
| 16,5 – 17,4 | 0 |
| 17,5 – 18,4 | 1 |



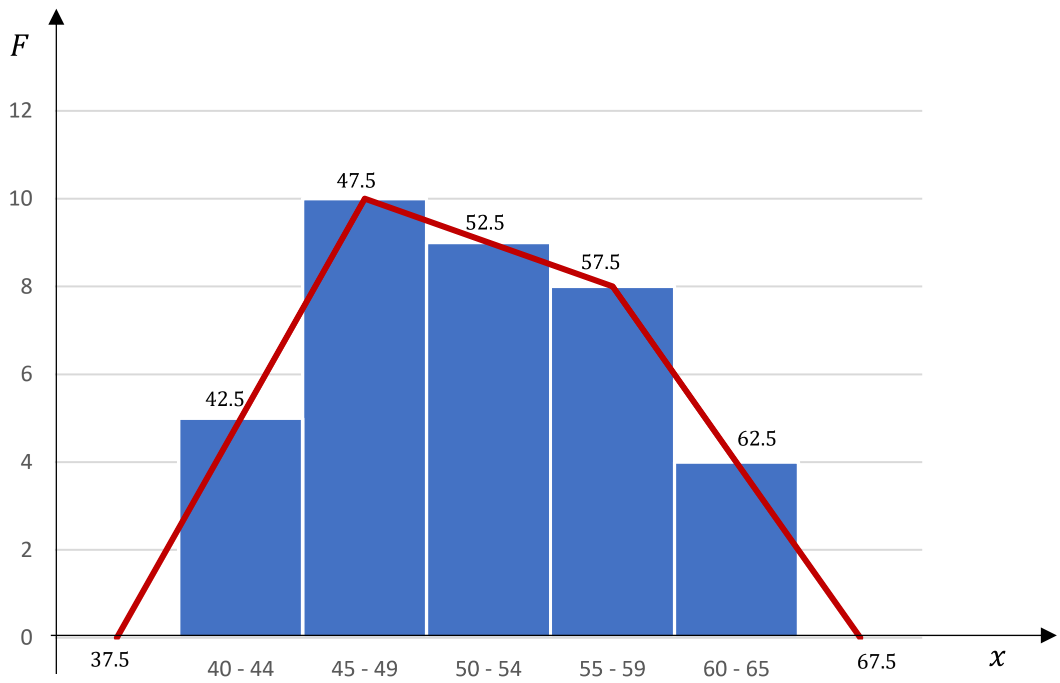
2. As notas estão agrupadas em classes com amplitude de um valor.

3. Se unirmos os pontos médios superiores dos rectângulos obtemos o polígono de frequências.

Ex.:

2. Os milhares de quilómetros, percorridos durante um ano pelos empregados duma firma estão representados no quadro seguinte:

| **Km percorridos (milhares)** | **N. º de viaturas** |
|---|---|
| [40,45[ | 5 |
| [45,50[ | 10 |
| [50,55[ | 9 |
| [55,60[ | 8 |
| [60,65[ | 4 |



# DIAGRAMAS DE SUPERFÍCIE

Consideremos a seguinte observação: "Num inquérito feito aos alunos duma turma (30 alunos), sobre o número de irmãos de cada um, obtivemos os resultados expressos no quadro seguinte: "

| N. º de irmãos | Frequência Absoluta $(F_i)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 8 |
| 2 | 10 |
| 3 | 5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

## DIAGRAMA CIRCULAR OU GRÁFICO DE SECTORES

Nestes diagramas as áreas são proporcionais às frequências. Usaremos o círculo e consequentemente a circunferência cuja amplitude é como sabes de 360º.

Neste caso, cada ângulo ao centro determina-se fazendo corresponder o número total de alunos a 360º. Depois calcula-se os valores correspondentes a cada uma das frequências absolutas.

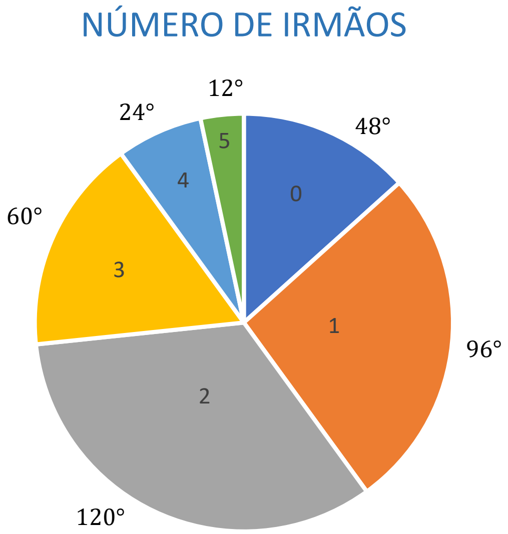
Assim:

$$\begin{array}{lcl} 30 & \text{———} & 360° \\ 4 & \text{———} & x \end{array} \qquad x = \frac{4 \times 360}{30} = 4 \times \frac{360}{30} = 4 \times 12 = 48°$$

Então:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a 4 corresponde | $4 \times 12 = 48°$ | - | 0 irmãos |
| a 8 corresponde | $8 \times 12 = 96°$ | - | 1 irmão |
| a 10 corresponde | $10 \times 12 = 120°$ | - | 2 irmãos |
| a 5 corresponde | $5 \times 12 = 60°$ | - | 3 irmãos |
| a 2 corresponde | $2 \times 12 = 24°$ | - | 4 irmãos |
| a 1 corresponde | $1 \times 12 = 12°$ | - | 5 irmãos |

Daqui, com a ajuda de um transferidor marcamos os ângulos:




## DIAGRAMA RECTANGULAR


## PICTOGRAMAS

Nota:

Neste tipo de representação gráfica, as frequências absolutas são apresentadas por desenhos semelhantes entre si e de áreas ou volumes proporcionais às frequências correspondentes.

Assim:

1. Se dois comprimentos homólogos estão na razão de 1 para 2, as suas áreas estão na razão de 1 para 4 e os seus volumes estão na razão de 1 para 8. Porquê:

   a $1 \quad 2$ Se $1^2 \quad 2^2$ Se $1^3 \quad 2^3$

   $1 \quad 4$ $1 \quad 8$

2. Podemos reproduzir o mesmo desenho em número de vezes proporcional à sua frequência absoluta.

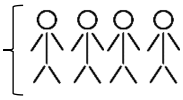
Ex.:

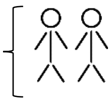
1. Apresentaram-se a um exame 50 alunos. No resultado final verificou-se:

- 20 dispensaram na oral
- 20 foram admitidas à oral
- 10 reprovaram.

Se convencionarmos que um desenho deste tamanho  representa 5 alunos, o pictograma será:

Admitidos  $4 \times 5 = \ 20\ alunos$

Dispensados  $4 \times 5 = \ 20\ alunos$

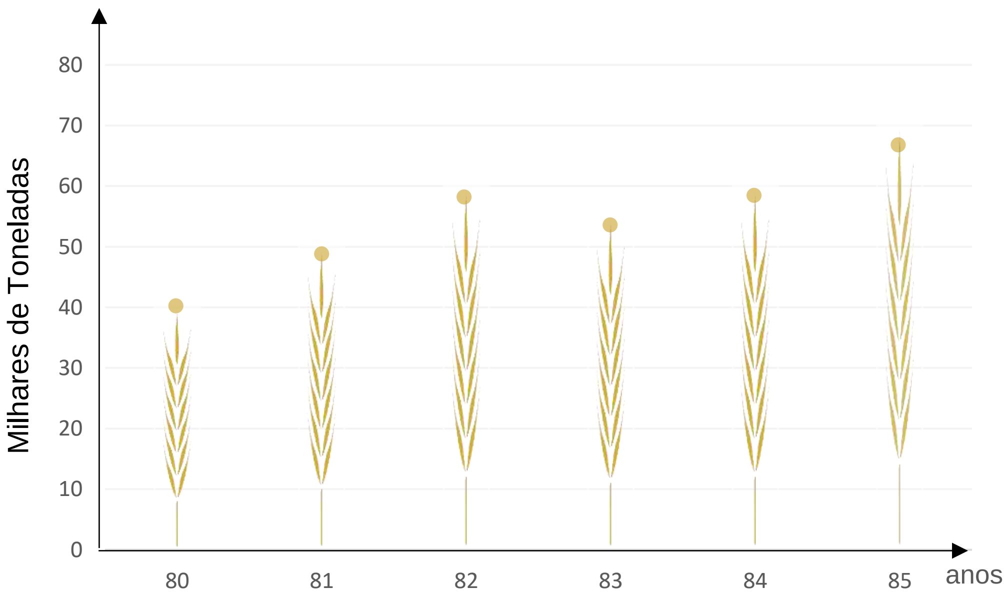
Reprovados  $2 \times 5 = \ 10\ alunos$

Ex.:

2. A produção de trigo no Alentejo, em milhares de toneladas, nos anos 80 a 85 são de:

| | | |
|---|---|---|
| 1980 | —— | 40 |
| 1981 | —— | 50 |
| 1982 | —— | 60 |
| 1983 | —— | 55 |
| 1984 | —— | 60 |
| 1985 | —— | 70 |

Como representar um pictograma:



## Exercício:

Feito um inquérito, a 500 pessoas, sobre os programas da televisão que mais admiram, obtivemos os resultados referidos no quadro seguinte.

Construa um gráfico de sectores.

| Programas T.V. | Pessoas $(F_i)$ |
|---|---|
| Desportivos | 50 |
| Musicais | 25 |
| Filmes | 300 |
| Concursos | 100 |
| Informação | 25 |

a 500 pessoas $\curvearrowright$ $360°$

Então:

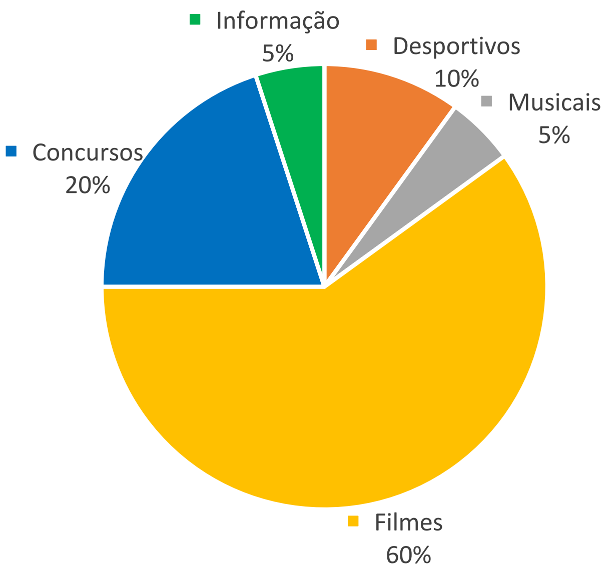
$$\begin{array}{ccc} 500 & \text{——} & 360º \\ 50 & \text{——} & x \end{array} \qquad x = 50 \times \frac{360}{500} = \frac{18000}{500} = 36°$$

$$\text{ou} \quad 50 \times \frac{360}{500} = 50 \times 0{,}72 = 36°$$

Daqui:

$$25 \times 0{,}72 = 18° \; ; \; 300 \times 0{,}72 = 216°$$

$$100 \times 0{,}72 = 72° \; ; \; 25 \times 0{,}72 = 18°$$




Em Percentagens:

$$\begin{array}{ccc} a\ 100 & \curvearrowright & 360° \\ x & \text{——} & 36 \end{array} \qquad x = 10\%$$

$$\begin{array}{rl} 36° = & 10\% \\ 72° = & 20\% \\ 18° = & 5\% \\ 18° = & 5\% \\ 216° = & 60\% \\ \hline & 100\% \end{array}$$

Feito o estudo das informações estatísticas utilizando quadros e diagramas é necessário reduzir os dados de forma a tirar conclusões.

Assim aparecem-nos dois tipos de parâmetros.

Esses parâmetros podem ser de:
- Centralização
- e
- Dispersão

Os parâmetros de centralização são
- Média Aritmética
- Média Aritmética Ponderada
- Mediana
- Moda

Os parâmetros de dispersão são:
- Intervalo de variação
- Desvio médio
- Variância
- Desvio-padrão

# PARÂMETROS DE CENTRALIZAÇÃO OU MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL OU DE LOCALIZAÇÃO

## MÉDIA ARITMÉTICA OU MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES ($\overline{x}$)

De $n$ números reais (observações) $x_1, x_2, \dots, x_n$ é o número real que se obtém através do quociente entre a soma desses valores e o seu número $n$.

Então:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

Ex.: As idades dos alunos de uma turma são:

18, 19, 22, 23, 20, 16, 17, 25, 24, 26

Determina a idade médias dos alunos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 19 + 22 + 23 + 20 + 16 + 17 + 25 + 24 + 26}{10} = \frac{210}{10} = 21\ anos$$

## MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA OU MÉDIA PESADA ($\overline{\overline{x}}$)

De $n$ números reais (observação) $x_1, x_2, \dots, x_n$ aos quais se atribuíram pesos (coeficientes de ponderação) $p_1, p_2, \dots, p_n$, é o número real que se obtém dividindo pela soma dos pesos a soma dos produtos dos $n$ números pelos respetivos pesos.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Ex.: Um atleta executa 5 exercícios com um coeficiente de dificuldade diferente e cuja pontuação é de 0 a 10 cada um.

O júri considera, como índice de dificuldade a cada um dos exercícios de acordo com o quadro:

| Exercício | Dificuldade |
|---|---|
| 1º | 1 |
| 2º | 1 |
| 3º | 2 |
| 4º | 3 |
| 5º | 4 |

Os pontos que o atleta deteve em cada prova foram: 10,10;8;8;9;

Qual foi a pontuação média ponderada?

Então:

Pesos: 1; 1; 2; 3; 4.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1 \times 10 + 1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 8 + 4 \times 9}{1 + 1 + 2 + 3 + 4} = \frac{10 + 10 + 16 + 24 + 36}{11} = \frac{96}{11}$$

$$= 8{,}72\ldots \simeq 8{,}73$$

Mas:

Se, alguns dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ forem iguais, podemos associá-los. Então a média aritmética é calculada assim:

$\boxed{\bar{\bar{x}} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots F_k x_k}{n}}$ com $k < n$ ou $\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{k} F_i\, x_i}{n}}$ com $k < n$

Notas:

1. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são valores distintos da variável.
2. $F_1, F_2, \ldots, F_k$ são as respetivas frequências absolutas em que

   $n = F_1 + F_2 + \ldots + F_k$
3. As frequências são aqui os pesos.

Ex.: Um aluno no final do seu curso obteve as classificações constantes de quadro.

| **Disciplinas** | **Notas** |
|---|---|
| Português | 12 |
| Inglês | 13 |
| Integração | 12 |
| Matemática | 15 |
| Fís. Química | 14 |
| O.G. Empresas | 12 |
| T. L. Program. | 12 |
| S.E.A.C. | 14 |

Calcular a classificação média.

$$\bar{x} = \frac{4 \times 12 + 1 \times 13 + 2 \times 14 + 1 \times 15}{8} = \frac{48 + 13 + 28 + 15}{8} = \frac{104}{8} = 13$$

# MEDIANA

De um conjunto de números (observações) apresentados por ordem crescente ou ordem decrescente de grandeza é:

1. O valor central das observações se estas são em número ímpar;
2. A média aritmética dos dois valores centrais se as observações são em número par.

Ex.:

1.Consideremos o seguinte quadro:

| **Variável** $(x)$ | **Freq. Absoluta** $(F)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 1 |

Façamos a contagem:

Temos:

2 vezes o 1
3 vezes o 2
4 vezes o 3
5 vezes o 4
1 vezes o 5

e coloquemos os dados por ordem crescente:

Então: $\underbrace{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3}_{\text{7 dados}}, \mathbf{3}, \underbrace{3, 4, 4, 4, 4, 4, 5}_{\text{7 dados}}$

Número ímpar

15 dados

Mediana

(valor central)

3 é a mediana da distribuição

2. Suponhamos que encontramos os seguintes valores para uma distribuição:

$\underbrace{1, 2, 2, 3}_{\text{4 dados}}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \underbrace{4, 4, 5, 5}_{\text{4 dados}}$

Número par

10 dados

Valores Centrais

Então:

$$\text{mediana} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

# MODA

De um conjunto de observações é o valor da variável estatística que tem uma maior Frequência Absoluta.

A moda pode ser $\begin{cases} \text{única} \\ \text{ou} \\ \text{múltipla} \end{cases}$

Notas:

Quando os dados são agrupados, a classe de maior frequência chama-se classe modal.

Ex.: Se analisarmos os exemplos anteriores aquando do cálculo da mediana verificamos:

1. A moda é 4 porque é a variável que teve maior frequência absoluta.
2. A moda é 4 porque é a variável que teve maior frequência absoluta.

Exercício:

Um aluno no fim do curso obteve as classificações seguintes:

| Port. | Ing. | Integração | Mat. | F.Quím. | Geo. Des. | Des. | Tecnol. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 12 | 15 | 14 | 12 | 12 | 14 |

1. Calcule a classificação média:

$$\bar{x} = \frac{4 \times 12 + 13 + 2 \times 14 + 15}{8} = \frac{104}{8} = 13$$

2. Calcule a classificação mediana:

   Dispondo por ordem crescente; temos:

$$\underbrace{12,\ 12,\ 12,}\ \mathbf{12,\ 13,}\ \underbrace{14,\ 14,\ 15}$$

$$M = \frac{12+13}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

3. Qual é a moda:
   A moda é o valor mais frequente. Então a moda é $12$

# PÂRAMETROS DE DISPERSÃO OU MEDIDAS DE DISPERSÃO

## INTERVALO DE VARIAÇÃO

De um conjunto de observações é a diferença entre os valores extremos da variável num conjunto, isto é, a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo.

Ex.: observemos o quadro seguinte das distribuições $\underline{x}$ e $\underline{y}$:

| $x$ | 5 | 30 | 80 | 110 | 175 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

1. Calculemos $\bar{x}\ e\ \bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{5+30+80+110+175}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

$$\bar{y} = \frac{60+70+80+90+100}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

   Verificamos que as duas distribuições têm a mesma média, i. é:

$$\bar{x} = \bar{y} = 80$$

2. Se determinarmos a mediana, verificamos que é a mesma:

$$Md(x) = Md(y) = 80$$

3. Calculemos o intervalo de variação de cada uma:

$$Ix = 175 - 5 = 170$$

$$Iy = 100 - 60 = 40$$

Conclusão:

1. A dispersão na distribuição de variável $\underline{x}$ é maior do que a na variável $\underline{y}$.
2. A média e a mediana é mais significativa em $y$ do que em $x$.

# DESVIO MÉDIO

## DESVIO EM RELAÇÃO À MÉDIA

É a diferença entre cada valor $x_i$ e a média aritmética $\bar{x}$.

$$dx_i = x_i - \bar{x}$$

## DESVIO MÉDIO

É a média aritmética dos módulos dos desvios em relação à média.

$$dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$ ou $$dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Nota:

Se os dados da distribuição estão <u>agrupados</u>, a fórmula a utilizar será:

$$dm = \frac{\sum F_i \, |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Sendo $x_i$ o <u>valor central</u> de cada uma das <u>classes.</u>

## VARIÂNCIA OU FLUTUAÇÃO

É a média aritmética dos quadrados dos desvios em relação à média:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$ ou $$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})^2}{n}$$

Nota:

No caso de <u>dados agrupados</u> a fórmula a utilizar será:

$$V = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$x_i$ é o <u>valor central</u> de cada uma das <u>classes</u>.

## DESVIO PADRÃO

É a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios em relação à média.

$$dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad dp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Notas:

1. Se verificarmos bem o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

2. No caso de dados agrupados, a fórmula a utilizar será:

$$dp = \sqrt{\frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$x_i$ é o valor central de cada uma das classes.

Exercícios:

Um aluno no final do curso obteve as seguintes classificações:

| Port. | Ing. | Integ. | Mat. | F.Q. | O.G.E. | A.I. | T.LP. | S.EA.C. | H.S.T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 12 | 14 | 14 | 14 | 13 | 15 | 14 | 16 |

1. Calcule:
   a. A mediana e a moda.
   b. A média aritmética.
   c. O desvio padrão

Resolução

a. Cálculo da mediana:

$$\underbrace{12, 12, 13, 13,}\ \mathbf{14, 14,}\ \underbrace{14, 14, 15, 16}$$

$$\boxed{M = \frac{14 + 14}{2} = \frac{28}{2} = 14}$$

b. Cálculo da moda:

moda= 14

c. Cálculo do desvio padrão:

1.º Cálculo da média aritmética

$$\bar{x} = \frac{2 \times 12 + 2 \times 13 + 4 \times 14 + 15 + 16}{10} = \frac{24 + 26 + 56 + 31}{10} = \frac{137}{10}$$

$$\bar{x} = 13{,}7$$

2.º Cálculo dos módulos dos desvios:

$$\begin{array}{lcl} |12 - 13{,}7| = 1{,}7 & \longrightarrow & 1{,}7 \times 2 = 3{,}4 \\ |13 - 13{,}7| = 0{,}7 & \longrightarrow & 0{,}7 \times 2 = 1{,}4 \\ |14 - 13{,}7| = 0{,}3 & \longrightarrow & 0{,}3 \times 4 = 1{,}2 \\ |15 - 13{,}7| = 1{,}3 & \longrightarrow & 1{,}3 \times 1 = 1{,}3 \\ |16 - 13{,}7| = 2{,}3 & \longrightarrow & 2{,}3 \times 1 = 2{,}3 \end{array}$$

3.º Cálculo da variância:

$$V_x = \frac{2 \times 1{,}7^2 + 2 \times 0{,}7^2 + 4 \times 0{,}3^2 + 1 \times 1{,}3^2 + 1 \times 2{,}3^2}{10} =$$

$$= \frac{2 \times 2{,}89 + 2 \times 0{,}49 + 4 \times 0{,}09 + 1{,}69 + 5{,}29}{10} = \frac{5{,}78 + 0{,}98 + 0{,}36 + 1{,}69 + 5{,}29}{10}$$

$$V_x = \frac{14{,}1}{10} = 1{,}41$$

4.º Cálculo do desvio padrão:

$$dp = \sqrt{1{,}41} \simeq 1{,}187 \ldots$$

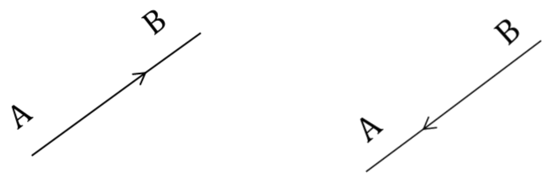
# PARTE 3

# *CÁLCULO VECTORIAL*

# CÁLCULO VECTORIAL

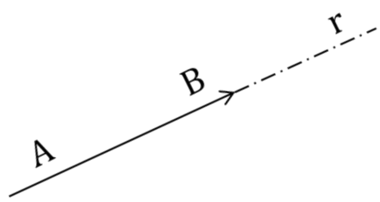
CÁLCULO VECTORIAL

## SEGMENTO ORIENTADO




Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos.

Elementos de um Segmento:
- Origem
- Direcção
- Sentido
- Comprimento ou módulo




Origem $\rightarrow$A

Direcção$\rightarrow$ a mesma da recta suporte

Sentido$\rightarrow$ de A para B

Comprimento ou módulo$\rightarrow$ $\overline{AB}$

Representa-se por [AB]

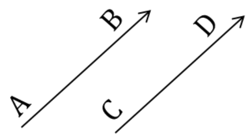
## CASO PARTICULAR: SEGMENTO ORIENTADO NULO

[A,A]
Tem origem $A$
Direcção e sentido indeterminados
Comprimento - nulo

# SEGMENTOS EQUIPOTENTES

Têm a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Nota: Dois segmentos orientados nulos são sempre equipotentes.




[A,B] é equipotente a [C,D]

[A,A] é equipotente a [C,C]

$\Longleftrightarrow$

$AB // CD$ - Direcção

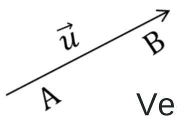
Sentido [AB] = Sentido [CD]

$\overline{AB} = \overline{CD}$

Nota: Aos segmentos orientados dizemos que são Vectores Aplicados.

# VECTOR LIVRE

Tem uma direcção, um sentido e um comprimento.

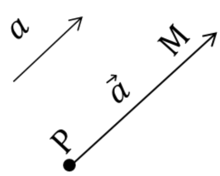



Vector livre ($\vec{u}$ $ou$ $\overline{AB}$)

Nota: o vector nulo - $\vec{0}$ tem direcção e sentido indeterminados e comprimento nulo.

# SOMA DE UM VECTOR COM UM PONTO

Dados um vector $\vec{a}$ e um ponto P



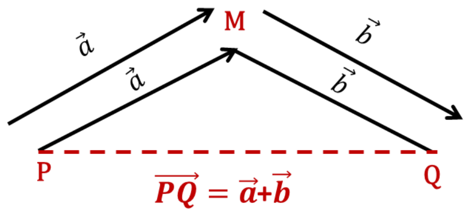

A soma de P com $\vec{a} = M$ tal que $\overrightarrow{PM} = \vec{a}$

$M = P + \vec{a}$ $ou$ $M - P = \vec{a}$

Se $\vec{a} = \vec{0}$, tem-se: $M = P + \vec{0}$
$M = P$

# ADIÇÃO DE DOIS VECTORES

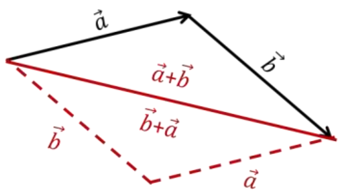
Dados $\vec{a}$ e $\vec{b}$




## ↳PROPRIEDADES

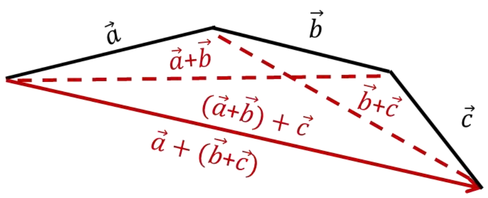
### COMUTATIVA

$\forall\, \vec{a}, \vec{b}$ $\qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$




### ASSOCIATIVA

$\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\qquad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



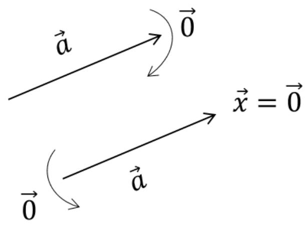

### EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO

$\vec{a} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{a} = \vec{a},$

$\exists\, \vec{x}\ \forall\, \vec{a}$

Pela comutativa

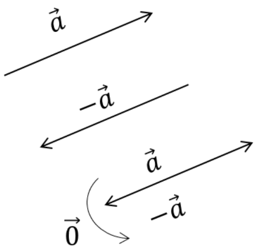
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$




### EXISTÊNCIA DE OPOSTO

$\forall\, \vec{a}\ \exists\, \vec{c} : \vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ Pela comutativa



A $\vec{c}$ chamamos **simétrico** de $\vec{a}$ e representa-se por $-\vec{a}$; **este vector tem a direcção e o comprimento de $\vec{a}$ e sentido oposto**.

## SUBTRACÇÃO

$\vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{a} + (-\vec{b})$

É a soma de $\vec{a}$ com o simétrico de $\vec{b}$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

## PRODUTO DE UM NÚMERO POR UM VECTOR

$K \neq 0 \qquad \vec{a} \neq \vec{0}$ k → Real

$\boxed{k\,\vec{a}}$

Chama-se produto de um nº Real $\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$ por um vector $\vec{\boldsymbol{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ e representa-se por $\boldsymbol{k}\,\vec{\boldsymbol{a}}$ ao vector cuja direcção é a do $\vec{a}$.

# COORDENADAS E COMPONENTES DE UM VECTOR

## BASE

É qualquer par de vectores, não nulos, com origem num mesmo ponto e que não sejam colineares (que não tenham a mesma direcção).

## BASE ORTONORMADA

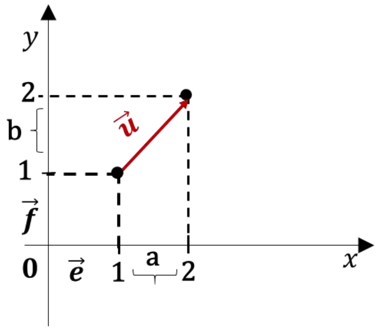
Quando os vectores forem unitários (têm comprimento 1) e são perpendiculares.

## REFERENCIAL CARTESIANO $(0, \vec{e}, \vec{f})$ E ORTONORMADO

Se a base $(\vec{e}, \vec{f})$ for ortonormada

$$\vec{u}\ (a; b) \equiv \vec{u}\ (2{,}1)\ em\ (0, \vec{e}, \vec{f})$$

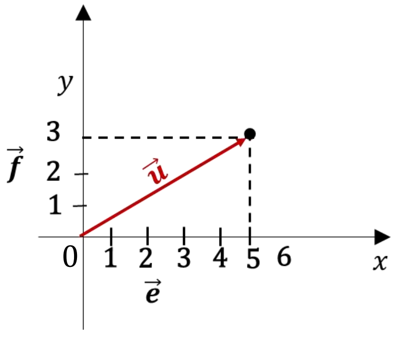
$$\equiv \vec{u} = 2\vec{e} + 1\vec{f}$$




Ex.:

Consideremos $\boldsymbol{r}.\mathbf{0}(\mathbf{0}, \vec{\boldsymbol{e}}, \vec{\boldsymbol{f}})$ e o vector $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{3})$

Se:




Neste referencial $\vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{e}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{f}}$

$\mathbf{5}\vec{\boldsymbol{e}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{f}}$ são as **componentes** de $\vec{\boldsymbol{u}}$ no Referencial $(\mathbf{0}, \vec{\boldsymbol{e}}, \vec{\boldsymbol{f}})$

$(5{,}3)$ são as **coordenadas** de $\vec{\boldsymbol{u}}$ no referencial $(\mathbf{0}, \vec{\boldsymbol{e}}, \vec{\boldsymbol{f}})$

# IGUALDADE DE VECTORES

Sendo $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$

$$\boxed{\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \; a = c \wedge b = d}$$

Ex.:

$\vec{u} = \; (3; 2 \; - b) \; e \, \vec{v} \; = \; (3a; 1)$

$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow 3 = 3a \wedge 2 - b = 1$

$\Leftrightarrow a = 1 \; \wedge - b = 1 - 2$

$-b = -1$

$b = 1$

# SOMA DE UM PONTO COM UM VECTOR

Consideremos: $A\ (ab) \quad e = \vec{u} \; = \; (u_1; u_2)$

$A + \vec{u} \rightarrow$ Representa um ponto B tal que:

$B = A + \vec{u}$ então:

$B = (a; b) + (u_1; u_2)$

$\boxed{\boldsymbol{B = (a + u_1; b + u_2)}}$ ou $\boxed{\boldsymbol{A + \vec{u} = \; (a + u_1; \; b + u_2)}}$

Ex.:

Sendo $\vec{u} = (2; -1) \; e \; A\ (1; 1)$

$\mathrm{A} + \overrightarrow{u} = B = (1; 1) + (2; -1)$

$= (3{,}0)$

# VECTOR COMO DIFERENÇA DE PONTOS

De $B = A + \vec{u}$ temos $B - A = \vec{u}$, podendo $\vec{u}$ ser igual à diferença de dois pontos.

Se $A = (a; b)$ e $B = (c; d)$, temos:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (c - a;\ d - b) = \vec{u}$

Ex.:

$A\ (-3; 2)\ e\ B\ (1; -1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - (-3); -1 - 2)$

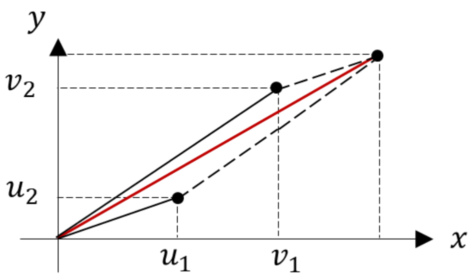
$= (4; -3)$

# ADIÇÃO DE VECTORES NUM REFERENCIAL ORTONORMADO

$\vec{u} = (u_1; u_2)\ e\ \vec{v} = (v_1; v_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1; u_2) + (v_1; v_2)$

$= (u_1 + v_1\ ;\ u_2 + v_2;)$




Ex.:

Consideremos $A\ (-3;\ 0)$ e $B\ (\ 2;\ -1)$ e ainda o vector $\vec{u} = (2; 2)$

Calculemos $\overrightarrow{AB} = B - A = (2; -1) - (-3; 0) = (5; -1)$

$\vec{u} + \overrightarrow{AB} = (2; 2) + (5; -1) = (7; 1)$

# PRODUTO DE UM VECTOR POR UM NÚMERO REAL

Sendo k um número real e $\vec{u} = (u_1; u_2)$

$k.\vec{u} = k.(u_1; u_2) = (ku_1; ku_2)$

Ex.:

Sendo $\vec{u} = (2; -3)\ e\ k = 3 \quad k > 0(\ k\ é\ positivo)$

$k\vec{u} = k(2 - 3)$

$3\vec{u} = 3\ (2; 3) = (6; -9)$ tem a direcção e o sentido de $\vec{u}$ porque $k > 0$

Ex.:

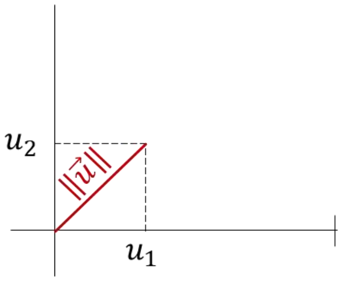
$k = -2 \; e \; \vec{u} = (2; -3)$

$k\vec{u} = k(2; -3)$ $\qquad\qquad$ $k < 0 \; (k \text{ é } negativo)$

$-2\vec{u} = -2\,(2; -3) = (-4; 6)$ tem a direcção de $\vec{u}$ e sentido oposto ao de $\vec{u}$ porque $k < 0$.

## NORMA DE UM VECTOR

É o comprimento do vector e representa-se por $\|\vec{u}\|$




Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overrightarrow{\|u\|}^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

Nota: Não se considera o sinal (-) porque os comprimentos são sempre positivos.

Se considerarmos um vector definido como diferença de dois pontos:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

podemos determinar a norma através da distância entre os pontos A e B.

Se: $A \;\; (x_1;\; y_1) \; e \; B \; (x_2;\; y_2)$, teremos: $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ex.:

1. Sendo $\vec{u} = (-3; 4)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2. Sendo $A \;\; (-1; 0)$ e $B \;\; (2;\; 5)$ $\qquad \overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

**ou**

Como $B - A = (3; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

# VECTORES COLINEARES

Quando têm a mesma direcção, isto é, se existe um número real k tal que:

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{kv}}$$

Sendo $\vec{u} = (2; 4)$ e $\vec{v} = (1; 2)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares pois $\vec{u} = 2.\vec{v}$

Como $\vec{u} = 2.\vec{v}$ vem $2\,(1; 2) = (2; 4)$
Vê-se que $k = 2$ nº real.

Ex.:
Verifica se são colineares os vectores:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}; 5\right) e\ \vec{v} = (\frac{2}{3}; 10)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{kv} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}; 5\right) = k\left(\frac{2}{3}; 10\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}; 5\right) = \left(\frac{2}{3}k; 10k\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}k \\ 5 = 10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{5}{10} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \end{cases} \quad K = \frac{1}{2}$$

logo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares

Ex.:
Sendo $\vec{u} = (-1; 2)\ e\ \vec{v} = (2; 3)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{kv} \Leftrightarrow (-1; 2) = k(2; 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1; 2) = (2k; 3k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -1 \\ 3k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares

Ex.:
Determinar um vector $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$ e que seja colinear com $\vec{v} = (-3; 4)$
Consideremos:

$$\vec{u} = (u_1;\ u_2)$$

Como $\vec{u}$ é colinear com $\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{kv}$

Daqui que:

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{5} \\ \vec{u} = \overrightarrow{kv} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = \sqrt{5} \\ (u_1;\ u_2) = k(-3;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = \sqrt{5} \\ u_1 = -3k \\ u_2 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {u_1}^2 + {u_2}^2 = 5 \\ u_1 = -3k \\ u_2 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (-3k)^2 + (4k)^2 = 5 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9k^2 + 16k^2 = 5 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k^2 = 5 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm\sqrt{\dfrac{5}{25}} \end{cases}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{5}{25}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \begin{matrix} +\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u1} = -3k \Leftrightarrow -3 \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} \wedge -3 \times \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \dfrac{-3\sqrt{5}}{5} \wedge \dfrac{+3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Então:

Se $k = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ teremos:

$$\vec{u} = (u1; u2) \begin{cases} \boldsymbol{u2} = 4k \Leftrightarrow 4 \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} \wedge 4 \times \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \wedge -\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$$

Se $k = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ teremos $\quad \vec{u} = \left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

# PRODUTO INTERNO DE DOIS VECTORES

Se tivermos os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

O Produto Interno de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real designado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$. ou $\vec{u} \perp \vec{v}$ definido por:

$$\boxed{\vec{u}\,.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right)}$$

Se $\quad \vec{u} \neq 0 \wedge \vec{v} \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0}$ se $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}$

## Notas:

1. Se $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow cos\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) = cos\,90° = 0$

Então: $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$

2. Se $\vec{u}\,.\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) = 0.$

Concluímos que se nenhum dos factos é o vector nulo $(\vec{0})$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$

Daqui que, $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$, se e só se, $\vec{u} \perp \vec{v} = 0$ ou $\vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0$.

3. Como a norma de um vector é sempre positiva, teremos $\|\vec{u}\| > 0$ e $\|\vec{v}\| > 0$.

3.1 $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ se $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) > 0$ o que implica que $\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) < 90°$ (ângulo agudo) visto que se $\alpha$ é um ângulo agudo então $0 < \alpha < 90°$ e daqui que $1 < \cos\alpha < 0$.

3.2 $\vec{u}\,.\vec{v} < 0$ se $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) < 0$ o que implica que $\left(\widehat{\overrightarrow{u,\vec{v}}}\right) > 90°$ porque (se $90° < \alpha < 180° \Longrightarrow -1 < \cos\alpha < 0$).

## A PARTIR DAS COORDENADAS:

Consideremos o referencial ortonormado $(0, \vec{e}, \vec{f})$

Consideremos $\vec{u} = u_1\vec{e}, +u_2\,\vec{f}\ e\ \ \vec{v} = v_1\vec{e}\ + v_2\,\vec{f}$

$$\vec{u}\,.\vec{v} = (u_1\vec{e}\ + u_2\,\vec{f}\,) \times (v_1\vec{e}\ + v_2\,\vec{f})$$
$$= u_1\,.v_1\vec{e}.\vec{e} + u_1.v_2\vec{e}.\vec{f} + u_2.v_1\,\vec{e}.\vec{f} + u_2.v_2\ \vec{f}.\vec{f}$$

Como $\vec{e}$ e $\vec{f}$ são vectores unitários (1) então:

$\|\vec{e}\| = \|\vec{f}\| = 1\ e\ (\vec{e} \wedge \vec{e}) = 0°\ e\ (\vec{f} \wedge \vec{f}) = 0° \Rightarrow \cos(\vec{e} \wedge \vec{e}\,) = \cos(\vec{f} \wedge \vec{f}\,) = 1$

Logo:

$\vec{e} \cdot \vec{e} = \|\vec{e}\|^2 \cdot \cos(\vec{e} \wedge \vec{e}) = 1$

e $\vec{f} \cdot \vec{f} = \|\vec{f}\|^2 \cdot \cos(\vec{f} \wedge f) = 1$

como $\vec{e} \perp \vec{f}$, então $\vec{e} \cdot \vec{f} = 0$

Então:

$u.v = u_1.v_1.1 + u_1.v_2.0 + u_2.v_1.0 + u_2.v_2.1$

$$\boxed{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2}$$

## VECTORES PERPENDICULARES

Dados os vectores $\vec{u} = (u_1; u_2)$ $e$ $\vec{v} = (v_1; v_2)$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

isto é: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{u}.\vec{v}} = 0$ por definição de produto interno

$\hookrightarrow$ $u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$

Ex.:

$\vec{u} = (5; 2)$ $e$ $\vec{v} = (-2; 5)$ São perpendiculares?

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$

$\Leftrightarrow 5\,(-2) + 2\,(5) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{-10 + 10} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ são perpendiculares porque $0 = 0$

Ex.:

$\vec{u} = (-1; 0)$ e $\vec{v} = (2; 3)$ São perpendiculares?

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$

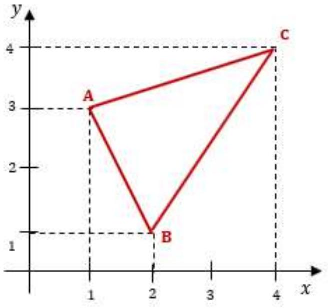
$\Leftrightarrow -1(2) + 0(3) = 0$

$\Leftrightarrow -2 + 0 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2 = 0$ Não são perpendiculares, porque $-2 \neq 0$

Ex.:

Consideremos o triângulo $[ABC]$




$\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Vamos verificar se o Triângulo $[ABC]$ é rectângulo.

Para isso vamos ver se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ ou $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{AB}$ são perpendiculares.

A (1;3) ; B (2;1) ; C (4;4)

Calculemos:

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2;1) - (1;3) = (1;-2)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (4;4) - (2;1) = (2;3)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (1;-2).(2;3) = 1.2 + (-2).3 = -4$

Não são perpendiculares. Porque $-4 \neq 0$.

Logo $A\widehat{B}C$ não é recto.

2. $\overrightarrow{BC} = C - B = (4;4) - (2;1) = (2;3)$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (1;3) - (4;4) = (-3;1)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = (2;3).(-3;1) = 2.(-3) + 3.(+1) = -6 + 3 = -3$

Não são perpendiculares porque $-3 \neq 0$

Logo [BCA] não é recto.

3) $\overrightarrow{CA} = A - C = (1;3) - (4;4) = (-3;1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1) - (1;3) = (1;-2)$

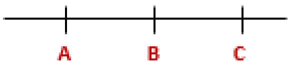
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = (-3;1).(1;2) = -3(1) + (-1)(-2) = -3 + 2 = -1$

Não são perpendiculares porque $-1 \neq 0$

Logo [CAB] não é recto.

O Triângulo não é rectângulo.

# COLINEARIDADE DE TRÊS PONTOS




Os pontos A, B e C são colineares se pertencem à mesma recta o que significa que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}}$$

Ex.:

Se:

$$A\,(-2;3);\, B\left(\frac{1}{2};1\right);\, C\left(0;\frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{1}{2};1\right) - (-2;3) = \left(\frac{5}{2};-2\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(0;\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2};1\right) = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$$

$$\left(\frac{5}{2};-2\right) = k\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}k \\ -2 = \frac{3}{2}k \end{cases} \quad \begin{cases} 5 = -k \Leftrightarrow k = -5 \\ -4 = 3k \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad -5 \neq -\frac{4}{3}$$ logo não são colineares

Então se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são colineares, os pontos A, B e C não são colineares.

Ex.:

$A\left(-1;\frac{1}{3}\right); B\left(2;\frac{2}{3}\right); C\left(3;\frac{7}{9}\right)$ São colineares?

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(2;\frac{2}{3}\right) - \left(-1;\frac{1}{3}\right) = \left(3;\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(3;\frac{7}{9}\right) - \left(2;\frac{2}{3}\right) = \left(1;\frac{1}{9}\right)$$

$$\left(3;\frac{1}{3}\right) = k\left(1;\frac{1}{9}\right)$$

$$\begin{cases} 3 = k \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{9}k \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 3 \\ 3 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \end{cases}$$

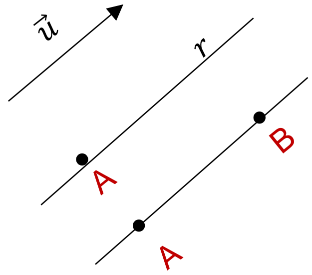
são colineares

Então se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares, os pontos $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$ e $\mathrm{C}$ são colineares.

# RECTA

## EQUAÇÃO VECTORIAL

Dados um ponto A $(x_1;y_1)$ e um vector $\vec{u} = (u_1;u_2)$ existe uma e uma só recta r que passa por A e tem a direcção de $\vec{u}$.




Dados dois pontos A e B, também existe uma única recta que passa por estes dois pontos.

$$\boxed{P = A + k\overrightarrow{u}\,;\,k \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{x;y = (x_1\,;y_1) + k(u_1;u_2)}$$

Equação Vectorial da recta que passa por A e tem a direcção de $\vec{u}$

P- Representa qualquer ponto de r $(x;y) = (x_{1;}\,y_1) + k(u_1;u_2)$

Nota:

Se substituirmos $\boldsymbol{k}$ por valores reais, obtemos pontos de recta.

Ex.:

1. Escrever uma equação vectorial da recta que passa pelo ponto

   A $(1;-1)$ e tem a direcção do vector $\vec{u}$ $(3;2)$

$$P = k\overrightarrow{u} \Leftrightarrow (x;y) = \underset{A}{(1;-1)} + k\underset{\vec{u}}{(3;2)} \longrightarrow \text{Equação Vectorial}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

2. Verificar se B $(4;1)$ pertence à recta:

$(4;1) = (1;-1) + k\,(3;2)$

$$\begin{cases} 4 = 1 + 3k \\ 1 = -1 + 2k \end{cases} \begin{cases} 3 = 3k \\ 2 = 2k \end{cases} \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Logo B $\in r$

Ex:

Escrever uma equação vectorial da recta que passa pelos pontos

$A \left(\frac{1}{2} : 0\right) e\ B \left(-3; \frac{2}{3}\right)$

1º Determinar $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(-3; \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}; 0\right) = \left(-\frac{7}{2}; \frac{2}{3}\right)$$

A equação será:

$$P = A + k\,\overrightarrow{AB}\,; k \ \in \mathbb{R}$$

ou

$$P = B + k\,\overrightarrow{AB};\ k \in \mathbb{R}$$

Considerando a 1.ª

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right) + k = \left(-\frac{7}{2}; \frac{2}{2}\right); k \in \mathbb{R}$$

## EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Da equação vectorial teremos:

$$P = A + \overrightarrow{ku}\,; k \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\overbrace{(x; y)}^{P} = \overbrace{(x_1; y_1)}^{A} + k\overbrace{(u_1; u_2)}^{\vec{u}};\ k \in \mathbb{R}$$

$$(x; y) = (x_1; y_1) + (k\,u_1; k\,u_2);\ k \in \mathbb{R}$$

$$(x; y) = (x_1 + k\,u_1; y_1 + k\,u_2);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_1 + ku_1 \\ y = y_1 + ku_2 \end{array} \; ; k \in \mathbb{R}}$$

Equações Paramétricas da recta que passa por um Ponto A $(x_1\,; y_1)$ e tem a direcção de $\vec{u} = (u_1; u_2)$

Ex.:

Dadas as equações paramétricas da recta $r$

$$\begin{cases} x = -1 - \dfrac{2}{3}k \\ y = \dfrac{1}{5} + 3k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

Um ponto da recta $(x\,;y)$ será $\left(-1;\frac{1}{5}\right)$ e um vector com a direcção da recta será $\left(-\frac{2}{3};3\right)$

Nota:

Se quisermos determinar outro ponto da recta, basta substituir $\boldsymbol{k}$ por um n.º real.

Ex.:

Se $k=1$ vem: $\begin{cases} x = -1-\frac{2}{3}\times 1 \\ y=\frac{1}{5}+3\times 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1-\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{5}+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases}$

$\left(-\frac{5}{6};\frac{16}{5}\right)$ é outro ponto da recta.

Ex.:

Dadas as equações paramétricas da recta $r$

$$\begin{cases} x = -3-2k \\ y=5k \end{cases}$$

Determine um ponto e um vector com a direcção da recta $r$

$\mathrm{A}\ (-3;0)$ $\vec{u}=(-2;5)$

Ex.:

1. Escreva uma equação vectorial e um par de equações paramétricas da recta que passa:
   a) Pelos pontos

$A\left(\frac{3}{4};-1\right)$ $e$ $B\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

R.: $\mathrm{P}=\mathrm{A}+k\vec{u}$ ou $(x;y)=\underbrace{(x_1;y_1)}_{\text{Ponto}}+k\,\underbrace{(u_1;u_2)}_{\text{Vector}}$

$\mathrm{P}=\mathrm{A}+k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(-1;\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4};-1\right)=\left(-\frac{7}{4};\frac{3}{2}\right)$

$$(x;y)=\overbrace{\left(\frac{3}{4};-1\right)}^{A}+k\overbrace{\left(-\frac{7}{4};\frac{3}{2}\right)}^{\overrightarrow{AB}}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{4}-\frac{7}{4}k \\ y=-1+\frac{3}{2}k \end{cases}$$

b) Pelo ponto $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$ e tem a direcção de $\vec{v}=(1;3)$

$P = A + k\vec{u}$ ou $(x;y)=(x_1;y_1)+k(u_1;u_2)$

$(x;y)=\left(0;\frac{3}{2}\right)+k\,(1;3) \quad k\in\mathbb{R}$

$$x = 0 + 1k \qquad \begin{cases} x = k \\ y = \frac{3}{2} + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{3}{2} + 3k$$

# EQUAÇÕES CARTESIANAS

## EQUAÇÃO CONTÍNUA

Das equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_1 + ku_1 \\ y = y_1 + ku_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Teremos:

$$\begin{cases} x - x_1 = ku_1 \\ y - y_1 = ku_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Então:

Se $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ vem

$$\begin{cases} k = \dfrac{x-x_1}{u_1} \\ k = \dfrac{y-y_1}{u_2} \end{cases}$$

e como $k$ é igual nas duas

Teremos $\boxed{\dfrac{x-x_1}{u_1} = \dfrac{y-y_1}{u_2}}$ → Equação Contínua da recta que passa por $A\ (x_1\,;y_1)$ e tem a direcção de $\vec{u}=(u_1;u_2)$

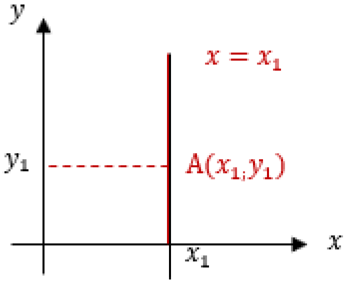
Nota:

1. Se $u_1 = 0 \wedge u_2 \neq 0$, teremos:

$$\begin{cases} x = x_1 + k.0 \\ y = y_1 + k.u_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Conclui-se que $\boxed{x = x_1}$ Recta Vertical que passa pelo ponto

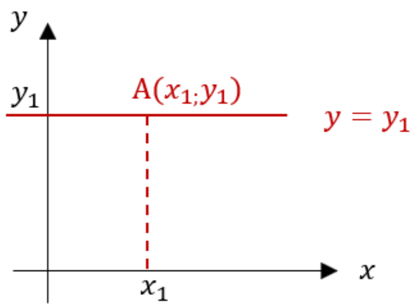
$A \ (x_1; y_1)$




2. Se $u_1 \neq 0 \wedge u_2 = 0$, teremos:

$$\begin{cases} x = x_1 + k.u_1 \\ y = y_1 + k.0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Conclui-se que $\boxed{y = y_1}$ Recta Horizontal que passa pelo ponto $A \ (x_1; y_1)$




Ex.:
Escrever uma equação continua da recta que passa pelo ponto $A \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (3; -4)$

$u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0$

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2}$$

$$\frac{x - (-2)}{3} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-4} \Leftrightarrow \frac{x + 2}{3} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-4}$$

Ex.:

Escrever uma equação continua da recta que passa pelo ponto $A \ (5; \ -1)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (0; 2)$

$u_1 = 0 \wedge u_2 \neq 0 \longrightarrow$ recta vertical

$x = x_1 \Leftrightarrow x = 5$

Ex.:

Escrever uma equação continua da recta que passa pelo ponto

$A(-1;-3)$ e tem a direcção do vector $\vec{u}=(-4;0)$

$u_1 \neq 0 \wedge u_2 = 0 \longrightarrow$ recta horizontal

$y = y_1 \Leftrightarrow y = -3$

## EQUAÇÃO GERAL

A equação continua da recta que passa pelo ponto $A(3;-2)$ e tem a direcção do vector $\vec{u}=(2;5)$ será:

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-(-2)}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2_{(5)}}=\frac{y+2}{5_{(2)}} \Leftrightarrow 5x-15=2y+4 \Leftrightarrow$$

$$5x-2y-15-4=0 \Leftrightarrow 5x-2y-19=0 \Leftrightarrow$$

$\boxed{5x-2y-19=0} \longrightarrow$ Equação Geral da recta que passa pelo ponto $A$ e tem a direcção de $\vec{u}$

Então, a Equação Geral da recta será:

$\boxed{Ax+By+C=0}$ em que A e B não são simultaneamente nulos.

Vejamos:

$$\frac{x-x_1}{u_{1\,(u_2)}}=\frac{y-y_1}{u_{2\,(u_1)}} \Leftrightarrow u_2.x-u_2.x_1=u_1.y-u_1y_1$$

$\underbrace{u_2.x}_{A}\underbrace{-u_1.y}_{B}+\underbrace{u_1y_1-u_2.x_1}_{C}=0$ Em que:

$A=u_2=$ 2.ª Coordenada do vector
$B=-u_1=$ simétrico da 1.ª Coordenada do vector

Daqui que:

$$Ax+By+C=0$$

1) Um vector com a direcção destas rectas será $\vec{u} = (-B; A)$
2) Um vector com a direcção perpendicular à recta será $\vec{v} = (A; B)$ porque $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (vectores perpendiculares)

$$u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$$

Ex.:

Determinar a equação geral da recta da equação:

$$\underset{(1/2)}{\frac{x+4}{5}} = \underset{(5)}{\frac{y-1}{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+4) = 5(y-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 5y - 5 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{1}{2}}x - \underset{\substack{\downarrow \\ B}}{5}y + 7 = 0$$

- Um vector com a direcção de recta é:

$$\vec{u} = (-B; A) = \left(5; \frac{1}{2}\right)$$

- Um vector de direcção perpendicular à recta é:

$$\vec{v} = (A; B) = \vec{v} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)\ ou \left(-\frac{1}{2}; -5\right) = \quad \text{visto que}$$

$$= \left(5; \frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}; -5\right) = \left(5 \times \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2} \times (-5)\right] = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

Ex.:

Escrever a equação geral da recta que passa pelo ponto A $(3;-1)$ e tem a direcção perpendicular à recta de equação

$$\underset{\substack{\downarrow \\ A}}{3}x - \underset{\substack{\downarrow \\ B}}{4}y + 1 = 0$$

1) Sabemos que o vector $\vec{u} = (3; -4)$ ou $(-3; 4)$ isto é, como é perpendicular vem de $\vec{u} = (A; B)$; tem a direcção perpendicular a esta recta.

2) Como a recta passa pelo ponto A $(3; -1)$ teremos:

$A = u_2$ e $B = -u_1$ então vem:

$$4x - 3y + C = 0 \Leftrightarrow 4(3) - 3(-1) + C = 0$$
$$\Leftrightarrow 12 + 3 + C = 0$$
$$\Leftrightarrow C = -12 - 3$$
$$\Leftrightarrow C = -15$$

A equação será $4x - 3y - 15 = 0$

Ex.:

Escrever a equação da recta que passa:

1. Pelo ponto $A$ $(6; -2)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (0; 1)$.

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y1}{u_2} \Leftrightarrow \frac{x - 6}{\underset{(1)}{0}} = \frac{y + 2}{\underset{(0)}{1}} \Leftrightarrow x - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Pela origem e tem a direcção perpendicular do vector $\vec{u} = (0; -3)$.

Se é perpendicular $\Rightarrow u_1 . v_1 + u_2 . v_2 = 0$

$$0 \times 0 + 1(-3) = 0$$

$$0 - 3 = 0$$

$$\underline{y = -3}$$

Ex.:

Dada a recta $\boldsymbol{s}$ da equação:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

1. Indique um vector com a direcção de $\boldsymbol{s}$.

   $\vec{u} = (-B; A) \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3) \vee (3; 2)$

2. Escrever a equação geral da recta cuja direcção é perpendicular a $\boldsymbol{s}$ e que passa pelo ponto A $(3; -\frac{1}{2})$.

   A equação será:

   $2x + 3y + C = 0$ porque $A = u_2$ $e$ $B = u_1$

$$2(3) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + C = 0 \Leftrightarrow \underset{(2)}{6} - \frac{3}{2}_{(1)} + \underset{(2)}{C} = 0 \Leftrightarrow 12 - 3 + 2C = 0 \Leftrightarrow 9 + 2C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2C = -9$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{9}{2}$$

Então a equação será:

$$2x + 3y - \frac{9}{2} = 0$$

## EQUAÇÃO REDUZIDA

Dada a equação $2x - 5y + 1 = 0$ podemos defini-la da seguinte forma:

$$2x - 5y + 1 = 0$$

$$-5y = -2x - 1$$

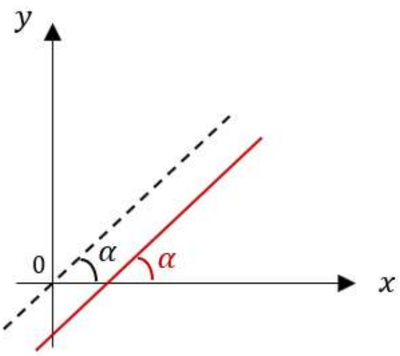
$$5y = 2x + 1$$

$$y = \frac{2x+1}{5} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{1}{5}$$

Esta equação é da forma:

$\boxed{y = mx + b}$ Equação reduzida da recta não vertical

$m \longrightarrow$ Representa o declive
$b \longrightarrow$ Representa a ordenada na origem (ordenada do ponto com abcissa $= 0$
$x = 0)$




Inclinação da recta $(\alpha)$ – é a medida de amplitude do menor ângulo não negativo cujo lado origem é ( $x$ $x$) positivo e o lado da extremidade é paralelo à recta dada.

Se $\alpha = 0$ → a recta é horizontal

Se $\alpha = 90°$ → a recta é vertical

O declive é a tangente da sua inclinação.

$$\boxed{m = tg\alpha}$$

1. Se $m > 0 \Longrightarrow tg\ \alpha > 0 \Longrightarrow \alpha < 90°$ $\Rightarrow$ ($\alpha \in$ 1.º Quadrante)
2. Se $m < 0 \Longrightarrow tg\ \alpha < 0 \Longrightarrow \alpha > 90°$ $\Rightarrow$ ($\alpha \in$ 2.º Quadrante)
3. Se $m = 0 \Longrightarrow tg\ \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0°$ $\Rightarrow \alpha = 0$

## EQUAÇÃO DA RECTA QUE PASSA POR UM PONTO SENDO DADO O DECLIVE

$$\boxed{y = mx + b}$$

Se $A$ $(x_1; y_1)$ pertence à recta $\Rightarrow y_1 = mx_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - mx_1$

Substituindo em $y = mx + b$, vem:

$y = mx + y_1 - mx_1$

$y - y_1 = mx - mx_1$, teremos:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Equação da recta que passa pelo ponto $A(x_1; y_1)$ e tem declive $m$.

Ex.:

Escrever a equação da recta que passa pelo ponto $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ e tem declive $-2$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2x + \frac{2}{2} \Leftrightarrow y = -2x + 3$

Suponhamos que $B(x_{2;}\, y_2)$ é outro ponto da recta, então:

De:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ teremos:

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ daqui que:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Equação do declive de uma recta determinado <u>a partir de dois pontos distintos.</u>

<u>Desta forma:</u>

Se $A(x_{1;}\, y_1)$ e $B(x_{2;}\, y_2)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_{2;}\, y_2) - (x_{1;}\, y_1) = (x_2 - x_{1;}\, y_2 - y_1)$

Se considerarmos $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (u_{1;}\, u_2)$ podemos escrever:

$$\boxed{m = \frac{u_2}{u_1}}$$

porque se $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow (u_1\,; u_2) = (x_2 - x_1\,; y_2 - y_1)$ e

$u_1 = x_2 - x_1 \;\wedge\; u_2 = y_2 - y_1$

como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m = \frac{u_2}{u_1}$

<u>Nota:</u>

O declive de uma recta pode ser determinado a partir de um vector com a direcção da recta.

Ex.:

Determinar o declive da recta:

1. Da equação $(x, y) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)}_{\text{ponto}} + k\,\underbrace{(-3; 1)}_{\text{vector}}; \quad k \in \mathbb{R}$

   Como $(-3; 1)$ são as coordenadas do vector será $u_1 = -3 \; e \; u_2 = 1$.

Daqui que:

$$m = \frac{u_2}{u_1} \Leftrightarrow m = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

2. Da equação $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$

   Como $\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \Leftrightarrow u_1 = 3 \; e \; u_2 = 2$

   $\vec{u} = (3; 2)$

   $m = \frac{2}{3}$

3. Da equação $3x - 5y + 7 = 0$

   Como $A = 3$ e $B = -5$ e $A = u_2$ e $B = -u_1$ teremos o vector $\vec{u} = (\overset{u_1}{5}; \overset{u_2}{3})$ =

   $m = \frac{u_2}{u_1} \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$

4. Que passa pelos pontos $A\,(5; -3)$ e $B\,(1; -4)$

   $\overrightarrow{AB} = B - A = (1; -4) - (5; -3) = (-4; -1) \longrightarrow$ vector

   $m = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

   ou

   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m = \frac{-4 - (-3)}{1 - 5} = \frac{-4 + 3}{-4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

5. Da equação $y = \frac{1}{2}x + 5$

Como $y = mx + b \Rightarrow y = \underbrace{\frac{1}{2}}_{m}x + \underbrace{5}_{b}$

Logo $m = \frac{1}{2}$

## EQUAÇÃO AXIAL

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \longrightarrow \text{Equação Axial}$$

$a$ – Representa a abcissa na origem (valor da abcissa para $y = 0$)

$b$ – Representa a ordenada na origem (valor da ordenada para $x = 0$)

Ex.:

Dada a equação geral da recta $-4x - 5y + 7 = 0$ para passarmos à equação axial, podemos fazê-lo das seguintes maneiras:

1. $-4x - 5y + 7 = 0$

   Se $x = 0 \Rightarrow -5y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{5}$ ; logo $b = \frac{7}{5}$

   Se $y = 0 \Rightarrow -4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$; logo $a = \frac{7}{4}$

   Daqui resulta que:

   $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{7}{4}} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$$

2. $-4x - 5y + 7 = 0 \Leftrightarrow -4x - 5y = -7 \Leftrightarrow 4x + 5y = 7$

   Se dividirmos ambos os membros por 7 vem:

$\frac{4x}{7} + \frac{5y}{7} + \frac{7}{7} \Leftrightarrow \frac{4x}{7} + \frac{5y}{7} = 1$ mas,

$\frac{4x}{7} + \frac{x}{\frac{7}{4}} \wedge \frac{5y}{7} = \frac{y}{\frac{7}{5}}$ então:

$$\frac{x}{\frac{7}{4}} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$$

Ex.:

Considere a recta que contem o ponto $A\ (-1; 2)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (2; -3)$

1. As equações paramétricas são:

$$x = x_1 + ku_1$$

$y = y_1 + ku_2$ ; $k \in \mathbb{R}$, então teremos:

$$x = -1 + 2k$$

$$y = 2 - 3k \qquad\qquad k \in \mathbb{R}$$

2. A equação continua será:

$\dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u2}$ , então teremos:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$$

3. A equação geral será:
   Partindo da equação contínua:

$$\underset{(-3)}{\frac{x+1}{2}} = \underset{(2)}{\frac{y-2}{-3}} \Leftrightarrow -3(x+1) = 2(y-2) \Leftrightarrow -3x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x - 2y - 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + 1 = 0$$

4. A equação reduzida será:

   Partindo da equação contínua:

$$-3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow -2y = 3x - 1 \Leftrightarrow 2y = -3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3x+1}{2} \quad \Leftrightarrow y = \frac{-3x}{2} + \frac{1}{2}$$

5. A equação axial:
   Pela equação reduzida $(y = mx + b)$ sabemos que $b = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{-3x}{2} + \dfrac{1}{2}$

   Vamos determinar o $\underline{a}$; porque a equação axial é: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

   (abcissa na origem) fazemos $y = 0$ então vem:

$$y = \frac{-3x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Logo $a = \frac{1}{3}$

A equação axial é:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ex.:

Consideremos a recta da equação:

1. $3x - \frac{5}{2y} + 1 = 0$. Um vector com a direcção da recta é $\vec{u} = \left(\frac{5}{2}; -3\right)$

$i.é: \vec{u} = (-B; A)$

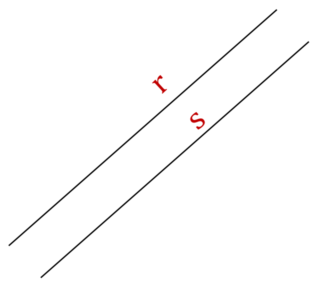
2. Um vector com a direcção perpendicular é $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{2}\right)$ $\quad i.é: \vec{v} = (A; -B)$

$u_2 = 3$

$u_1 = \frac{5}{2}$

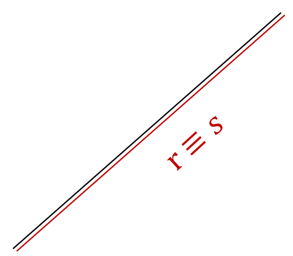
3. O declive da recta é $m = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$ porque $m = \frac{u_2}{u_1}$

## RECTAS PARALELAS E RECTAS PERPENDICULARES




$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são estritamente paralelas $\boldsymbol{r} // \boldsymbol{s}$

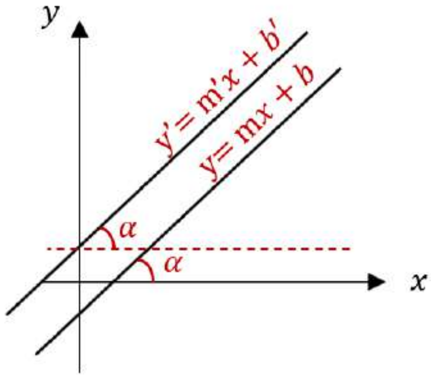
(nunca se encontram)




$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são coincidentes $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{s}$

Nota:

Se $\boldsymbol{r} // \boldsymbol{s} \Rightarrow$ formam ângulos iguais com o eixo dos $(xx)$, logo têm declives iguais




$m = m'$

Ex.:

Consideremos:

$$r = 2x - 3y + 4 = 0 \ \wedge \ s = -4x + 6y + 7 = 0$$

Um vector com a direcção de $\boldsymbol{r}$ é $\vec{u} = (3; 2)$ porque $(-B; A)$

Um vector com a direcção de $\boldsymbol{s}$ é $\vec{v} = (-6; -4)$ porque $(-B; A)$

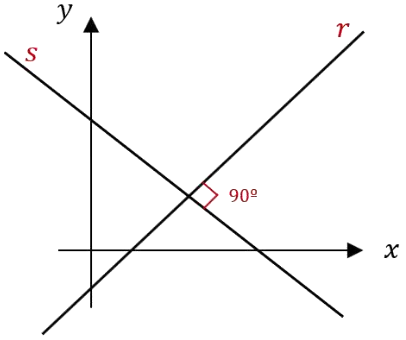
O declive de $\boldsymbol{r} = \frac{2}{3}$ porque $\boldsymbol{m} = \frac{u_2}{u_1}$ logo $\boldsymbol{m} = \frac{2}{3}$

O declive de $\boldsymbol{s} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$ porque $\boldsymbol{m} = \frac{u_2}{u_1}$ logo $\boldsymbol{m}' = \frac{2}{3}$

Como $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}'$ as rectas são paralelas $\boldsymbol{r} // \boldsymbol{s}$

## RECTAS PERPENDICULARES

$r \perp s$ se formarem, entre si, um ângulo de 90º




Consideremos $r$ e $s$ perpendiculares entre si cujas equações são:

$r : y = mx + b \ \wedge \ s : y = m'x + b'$, então:

$y = mx + b \qquad y = m'x + b'$

$-mx + y - b = 0 \qquad -m'x + y - b' = 0$

Um vector com a direcção de $r$ é : $\vec{u} = (-1; -m)$

Um vector com a direcção de $s$ é : $\vec{v} = (-1; -m')$

Se $r \perp s \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares. Então:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ isto é $(-1) \times (-1) + (-m) \times (-m') = 0$

ou

$$\boxed{1 + m.m' = 0} \qquad \boxed{m.m' = -1}$$

$$m = \frac{-1}{m'} \quad \text{com} \quad m' \neq 0$$

Ex.:

Consideremos:

$$\boldsymbol{r} = \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2} \land \boldsymbol{s} = \frac{x-4}{8} = \frac{y-1}{12}$$

São perpendiculares?

Um vector com a direcção de $\boldsymbol{r}$ é $\vec{u} = (3; -2)$ porque $\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y + y_1}{u_2}$

Um vector com a direcção de $\boldsymbol{s}$ é $\vec{v} = (8; 12)$ porque $\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y + y_1}{v_2}$

O declive de $\boldsymbol{r}$ é $m = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

O declive de $\boldsymbol{s}$ é $m' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Como $1 + m \times m' = 0$ teremos:

$$1 + \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{-6}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \Rightarrow r \perp s$$

Ex.:

Determinar $k \neq 0$ de forma que as rectas cujas equações são:

$r: x - 2y + 3 = 0$ e $s: -2x + ky + 1 = 0$ sejam:

1. Paralelas
2. Perpendiculares

Calculemos os declives das rectas:

Um vector com a direcção de $\vec{u} = (2; 1)$ porque $(-B; A)$

Um vector com a direcção $\vec{v} = (-k; -2)$ porque $(-B; A)$

O declive de $r$ é $m = \frac{1}{2}$ e o declive de $s$ é $m' = \frac{-2}{-k} = \frac{2}{k}$

1. São paralelas se $m = m' = \frac{1}{2} = \frac{2}{k} \Leftrightarrow k = 4 \Leftrightarrow m' = \frac{2}{4} \Leftrightarrow m' = \frac{1}{2}$
2. São perpendiculares se $1 + m.m' = 0$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{k}\right) = 0$$

$$1 + \frac{2}{2k} = 0 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow k = -1$$

Ex.:

Consideremos:

$$r: 3x - 5y + 11 = 0 \quad \text{e} \quad A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$$

Escrever uma recta $\underline{s}$ que contém o ponto A e é perpendicular a $r$ .
Determinemos um vector com a direcção da recta $\underline{s}$ mas que seja perpendicular a $\underline{r}$.

$$\vec{v} = (3; -5) \text{ porque } (A; B)$$

O declive de $\underline{s}$ é $m = \frac{-5}{3}$

Como a equação da recta que passa por um ponto dado e tem declive $m$ é dado por:

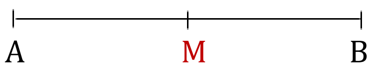
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{6} - 1$$

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{6}$$

## PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Consideremos o segmento $[AB]$ e $\underline{M}$ como um ponto médio.

Então, teremos:




$$A\ (x_1; y_1)\ ;\ B\ (x_2; y_2)\ e\ M\ (a;\ b)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$M - A = \frac{1}{2}(B - A)$$

$$(a - x_1; b - y_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \text{ mas,}$$

$$\begin{cases} a - x_1 = \dfrac{x_2 - x_1}{2} \\ \\ b - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{2} \end{cases} \begin{cases} a = \dfrac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ \\ b = \dfrac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x_2 - x_1 + 2x_1 \\ 2b = y_2 - y_1 + 2y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x_2 + x_1 \\ 2b = y_2 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x_2 + x_1}{2} \\ \\ b = \dfrac{y_2 + y_1}{2} \end{cases}$$

Logo

$$M(a; b) \Leftrightarrow \boxed{M \rightarrow \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right); \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)}$$

Ex.:

Temos $A(\overset{x_1}{-1}; \overset{y_1}{1})$ e $B(\overset{x_2}{3}; \overset{y_2}{-2})$. Determinar as coordenadas do ponto médio de $[AB]$.

Seja <u>M</u> o ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right); \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{3 - 1}{2}\right); \left(\frac{-2 + 1}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

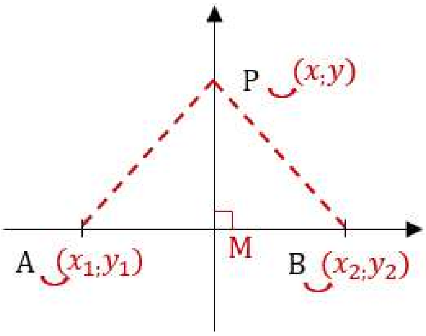
$$M\left(1; \frac{-1}{2}\right)$$

## MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO

Consideremos um segmento $[AB]$.

A mediatriz do segmento $[AB]$ é o conjunto de pontos equidistantes dos extremos do segmento.

É a recta que passa pelo ponto médio de $[AB]$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$.




$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - x_1;\ y - y_1)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x - x_2;\ y - y_2)$$

Como a distância de A a P é igual à de B a P, então:

$$\boxed{\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|} \longrightarrow$$ Equação de Mediatriz

Ex.:

Dados $A\ (1;3)$ e $B\ (-2;2)$ e $P\ (x;y)$ um ponto qualquer da mediatriz.

$\overrightarrow{AP} = (x-1;\ y-3)$ porque $\overrightarrow{AP} = P - A = (x-1;\ y-3)$

$\overrightarrow{BP} = (x+2;\ y-2)$ porque $\overrightarrow{BP} = P - B = (x+2;\ y-2)$

A equação da mediatriz será:

$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$ então, como $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ vem:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado teremos:

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

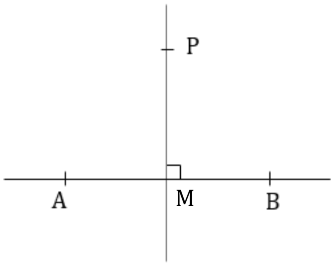
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - x^2 - 4x - 4 - y^2 + 4y - 4 = 0$$

$-6x - 2y + 2 = 0$ dividindo ambos os membros por 2 vem:

$$-3x - y + 1 = 0$$

Por outro processo:

Como a mediatriz é a recta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a este segmento, teremos:




$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$ Logo como são perpendiculares, teremos:

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AB} = 0,$ então:

$A\ (1;3)\ ;\ B\ (-2;2)$ e $P\ (x;y)$

Calculemos o ponto médio:

$M\left(\frac{x_{1+}x_2}{2}\right);\left(\frac{y_{1+}y_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{1-2}{2};\frac{3+2}{2}\right);$

$M\left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right);$

Calculemos $\overrightarrow{MP}$ e $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MP} = P - M = \left(x+\frac{1}{2};y-\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2-1;2-3) = (-3;-1)$

Como $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AB} = 0$ teremos:

$$\left(x+\frac{1}{2};y-\frac{5}{2}\right)\times(-3;-1) = 0$$

$$-3\left(x+\frac{1}{2}\right)-1\left(y-\frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underset{(2)}{3x}-\underset{(1)}{\frac{3}{2}}-\underset{(2)}{y}+\underset{(1)}{\frac{5}{2}} = \underset{(2)}{0} \Leftrightarrow -6x-3-2y+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x-2y+2 = 0$$

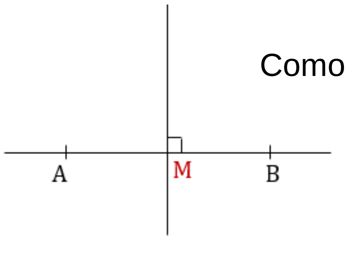
Dividindo por 2 ambos os membros vem:

$$-3x-y+1 = 0$$

Ex.:

Determinar a equação da mediatriz, sabendo:

$A\ (1;3)$ e $B\ (-2;2)$ e M um ponto médio




Como a mediatriz é a recta que passa por $M\left(\overset{x_1}{-\frac{1}{2}};\overset{y_1}{\frac{5}{2}}\right)$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, então:

$\overrightarrow{AB} = B - A(-2-1;2-3) = (-3;1)$

Um vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ é $\vec{u} = (1; -3)$ e a mediatriz que passa por $M$ tem a direcção de $\vec{u} = (1; -3)$

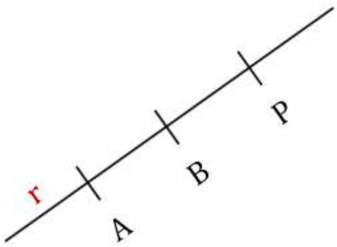
O declive de mediatriz é $m = \frac{u_2}{u_1} \Leftrightarrow m = \frac{-3}{1} = -3$

A equação será $y - y_1 = m(x - x_1)$ porque é a equação da recta que passa por um ponto dado e tem declive $\boldsymbol{m}$

$$y - \frac{5}{2} = -3\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \underset{(2)}{y} - \underset{(1)}{\frac{5}{2}} = \underset{(2)}{-3x} - \underset{(1)}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y - 5 = -6x - 3 \Leftrightarrow 2y - 5 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$$

## SEMI-RECTAS




A equação da recta definida por dois pontos é:

$$P = A + k\,\overrightarrow{AB}; k \in \mathbb{R}$$

1. Se $k > 0 \Rightarrow k\,\overrightarrow{AB}$ tem a direcção e sentido de $\overrightarrow{AB}$ (produto de um número real por um vector)

   O ponto P é um ponto à direita de A.

   Ex: $\vec{u} = (2; -3)$ e $k = 3 \Rightarrow k \cdot \vec{u} = 3\vec{u} = 3(2; -3) = (6; -9)$

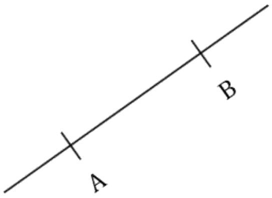
   $\boxed{P = A + k\,\overrightarrow{AB}; k \in \mathbb{R}_0^+}$ Representa $\mathrm{AB}$ – semi-recta
   Origem $\mathrm{A}$ e sentido $\overrightarrow{AB}$

2. Se $k = 0 \Rightarrow P \equiv A$

   Daqui que

   $\boxed{P = A + k\,\overrightarrow{AB}; k \in \mathbb{R}_0^-}$ Representa $\mathrm{AB}$ – semi-recta
   Origem $\mathrm{A}$ e sentido oposto ao de $\overrightarrow{AB}$

# SEGMENTO DE RECTA




De $P = A + k\,\overrightarrow{AB}; k \in \mathbb{R}$

Consideremos $k \in [0;1]$

1. Se $k = 0 \Rightarrow P \equiv A$
2. Se $k = 1 \Rightarrow P \equiv A + 1.(B - A) \Rightarrow P \equiv B$

Então: $\boxed{P = A + k\,\overrightarrow{AB};\ k \in [0;1]}$ Define o segmento $[AB]$

Ex.:

Dados os pontos $A$ $(-5;3)$ e $B$ $(1;4)$, escrever a equação que:

1. Define a semi-recta de origem A e direcção $\overrightarrow{AB}$:

   $\overrightarrow{AB} = B - A = (6;1)$ de $(1;4) - (-5+3)$

   $P = (-5;3) + k\,(6;1);\ k \in \mathbb{R}$ de $P = A + k.\overrightarrow{AB}$

2. Define a semi-recta de origem B e direcção oposta a $\overrightarrow{AB}$:

   $P = (1;4) + k\,(6;1);\ k \in \mathbb{R}$

3. Representa o segmento $[AB]$

   $P = (-5;3) + k\,(6;1);\ k \in [0;1]$

Ex.:

Sendo $A$ $(1;2)$ e $B$ $(0;3)$, escrever:

1. A equação vertical da recta que passa por $A$ e $B$:

   $P = A + k\,\vec{u}$

   Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (0;3) - (1;2) = (-1;1)$

   Então:

   $(x, y) = (1;2) + k\,(-1;1);\ k \in \mathbb{R}$

2. A equação da semi-recta com origem em A e direcção $\overrightarrow{AB}$:

$$P = A + k\,\overrightarrow{AB};\ k \in \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) = (1; 2) + k\,(-1; 1);\ k \in \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) = (1;2) - k + k$$

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + k \end{cases} ; k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 - k \\ k = -2 + y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2 - y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y + 3 \\ y - 2 = k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}_0^+$$

Então:

$$x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad y - 2 \geq 0 \quad ; k \in \mathbb{R}_0^+$$
$$x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad y \geq 2$$

3. O segmento de recta $[AB]$:
   Como $k \in [0; 1]$ podemos escrever

$$x + y - 3 = 0 \quad \wedge \ 0 \leq y - 2 \leq 1$$

$x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad 2 \leq y \leq 3$ porque $y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2 \wedge y - 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 3$

Ex.:

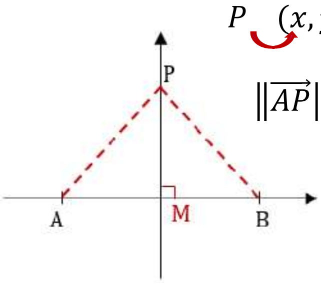
Considerar os pontos $A\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}\ ; 0\right)$ e determine:

1. As coordenadas do ponto médio de $[AB]$:

$$M\left(\frac{x_{1+}x_2}{2}\ ;\ \frac{y_{1+}y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-2 + \frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{\frac{1}{3} + 0}{2}\right) = \left(\frac{-\frac{3}{2}}{2}\ ;\ \frac{\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$$

A equação da mediatriz de $[AB]$




$P\ (x, y)\quad \overrightarrow{AP} = P - A = \left(x + 2; y - \frac{1}{3}\right)\quad \overrightarrow{BP} = P - B = \left(x - \frac{1}{2}\ ;\ y - 0\right)$

$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$ como $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ temos:

$$\sqrt{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2}$$

elevando ao quadrado vem:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+0)^2$$

$$x^2+4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=x^2-x+\frac{1}{4}+y^2$$

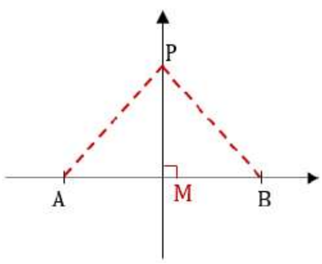
$$x^2+4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}-x^2+x-\frac{1}{4}-y^2=0$$

$$4x+4-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}+x-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow \underset{(36)}{5x}-\underset{(12)}{\frac{2}{3}y}+\underset{(36)}{4}+\underset{(4)}{\frac{1}{9}}-\underset{(9)}{\frac{1}{4}}=0$$

$$180x-24y+144+4-9=0$$

$$180x-24y+139=0$$

## Outro Processo:




$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AB}=0 \quad P\ (x;y)$

$M\ \left(-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$ como já calculamos.

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(x;y)-\left(-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{6}\right)=\left(x+\frac{3}{4}\ ;\ y-\frac{1}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)-\left(-2;\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}+2;\ 0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{4};y-\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(y-\frac{1}{6}\right)=0\Leftrightarrow \underset{(36)}{\frac{5}{2}x}+\underset{(9)}{\frac{15}{8}}-\underset{(24)}{\frac{y}{3}}+\underset{(4)}{\frac{1}{18}}=0$$

$$180x+135-24y+4=0\ \Leftrightarrow$$

$$180x-24y+139=0$$

2. A equação da semi-recta de origem em A com direcção de $\overrightarrow{BA}$.

$$P = A + k\,\overrightarrow{AB};\ k \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = \left(-2; \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}; 0\right) = \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

$$P = \left(-2; \frac{1}{3}\right) + k\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right);\ k \in \mathbb{R}_0^+$$

3. A equação do segmento $[AB]$

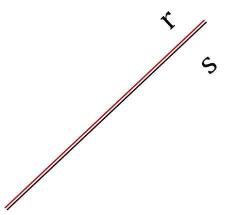
$$P = A + k\,\overrightarrow{AB};\ k\ [0,1]$$

$$\mathrm{P} = \left(-2; \frac{1}{3}\right) + \mathrm{k}\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{3}\right);\ \mathrm{k} \in \mathbb{R}_0^+$$

## INTERSECÇÃO DE DUAS RECTAS

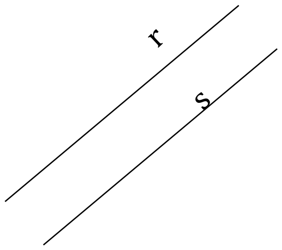
Dadas as rectas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ dos planos elas podem ser:

### COINCIDENTES - $r \cap s = r = s$



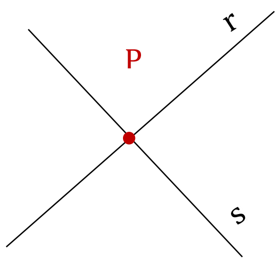

$r \equiv s$ (Têm todos os pontos comuns).

### ESTRITAMENTE PARALELAS - $r \cap s = r = 0$




(Não têm nenhum ponto comum)

### CONCORRENTES - $r \cap s = \{P\}$




(Têm um ponto comum)

Nota:

As rectas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ podem representar-se pela equação:

$r: Ax + By + C = 0$ e $s: A'x + B'y + C' = 0$

A interseção de $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ é definida através do sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Na resolução do sistema podemos obter:

1. **Sistema Indeterminado –** Tem um número infinito de soluções. As rectas são **coincidentes**.
2. **Sistema Impossível –** Não tem solução. As rectas são **estritamente paralelas.**
3. **Sistema Possível e Determinado –** Tem uma só solução P $(x_1; y_1)$. **As rectas são concorrentes.** $(\boldsymbol{r} \cap \boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{P}\}$

Nota:

Se $\left.\begin{matrix} r: Ax + By + C = 0 \\ \wedge \\ s: A'x + B'y + C' = 0 \end{matrix}\right\}$ Teremos:

1. Um vector com a direcção de $\boldsymbol{r}$ é $\vec{u} = (-B; A)$
2. Um vector com a direcção de $\boldsymbol{s}$ é $\vec{v} = (-B'; A')$
3. Para que as rectas sejam <u>paralelas</u> terão de possuir o mesmo declive:

$-\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ou seja

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}}$$

$A = u_2 = 2.ª$ coordenada do vector

$B = -u_1 =$ simétrico da 1.ª coord. do vector

$$\boxed{m = \frac{u_2}{u_1}}$$

4. Se $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são <u>coincidentes</u> todos os pontos de $\underline{\boldsymbol{r}}$ pertencem a $\underline{\boldsymbol{s}}$ (na prática $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são a mesma recta) então:

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$$

Obs.: Para que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ sejam coincidentes é necessário e suficiente que se possa passar da equação de $\boldsymbol{r}$ para a equação de $\boldsymbol{s}$ multiplicandos ambos os membros por um número diferente de zero.

Ex: $r: 4x - 3y + 2 = 0$ e $s: -8x + 6y - 4 = 0$

5. Se $r$ e $s$ são <u>concorrentes</u>, os declives são diferentes:

Então:

$$\boxed{\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}}$$

Se $A' \neq 0; B' \neq 0 \wedge C' \neq 0$, o sistema $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$

Será:

1. **Indeterminado** Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
2. **Impossível** Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$
3. **Possível e Determinado** Se $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Ex.:

Determinar a posição relativa das rectas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ sabendo que:

$r: 2x + 3y + 1 = 0$ e $s: 3x - 5y + 3 = 0$

$A = 2;\ B = 3; C = 1$ $A' = 3;\ B' = -5;\ C' = 3$

$\frac{A}{A'} = \frac{2}{3}$

$\frac{B}{B'} = -\frac{3}{5}$ $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ as rectas são concorrentes.

Como calcular as coordenadas do ponto de intersecção?

Porque $(\boldsymbol{r} \cap \boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{P}\}$

$$\begin{matrix} (-3) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 5y + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - 9y - 3 = 0 \\ 6x - 10y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\cancel{6x} - 9y = 3 \\ \cancel{6x} - 10y = -6 \end{cases} \ +$$

$$-19y = -3$$

$$y = \frac{3}{19}$$

$$2x + 3y + 1 = 0$$

$$2x + 3y = -1$$

$$2x + 3\left(\frac{3}{19}\right) = -1$$

$$2x + \frac{9}{19} = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{9}{19} - 1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{28}{19} \Leftrightarrow 38x = -28 \Leftrightarrow x = \frac{-28}{38} = -\frac{14}{19}$$

$$P\left(-\frac{14}{19}; \frac{3}{19}\right)$$

Ex.:

Considere as rectas cujas equações são:

$r: x - 3y + 1 = 0;\ \ s: 2x + 4y - 1 = 0;\ t: 2x - 6y + 3 = 0$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ porque $\frac{A}{A'} = \frac{1}{2} \wedge \frac{B}{B'} = \frac{-3}{4}$

$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são concorrentes.

E $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{t}$?

$\frac{A}{A'} = \frac{1}{2}; \frac{B}{B'} = \frac{-3}{-6};$ Como $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ , porque $\frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{t}$ são paralelas.

A equação de uma recta coincidente com $\boldsymbol{r}$ será:

Se multiplicarmos os termos por um $n^{\underline{o}} \neq 0$, teremos:

$4(x - 3y + 1) = 4(0)$ → escolhemos o $n^{\underline{o}}4$

$4x - 12y + 4 = 0$

Porque basta multiplicar por um $n^{\underline{o}} \neq 0$. Neste caso multiplicamos por 4.

Ex.:

Determinar o ponto de intersecção das rectas:

$r: -x + 2y + 4 = 0 \quad \wedge \quad s: 2x + y - 1 = 0$

$$(2)\begin{cases} -x + 2y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{2x} + 4y = -8 \\ \cancel{2x} + y = 1 \end{cases} + \qquad y = -\frac{7}{5}$$

$$5y = -7$$

$$2x + y = 1$$

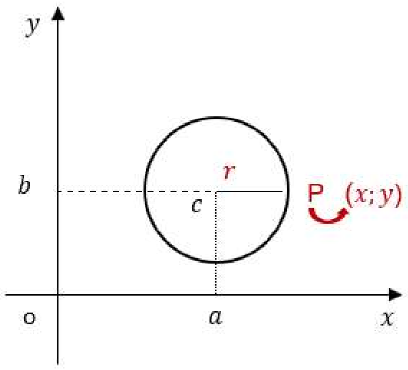
Substituindo:

$$\underset{(5)}{2x} - \underset{(1)}{\frac{7}{5}} = \underset{(5)}{1} \Leftrightarrow 10x - 7 = 5 \Leftrightarrow 10x = 5 + 7 \Leftrightarrow 10x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$r \cap s = \{P\} \qquad P\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$$

# CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência de Centro $C\ (a, b)$ e raio $\underline{\boldsymbol{r}}$ é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao centro é constante e igual a $\boldsymbol{r}$ (raio).




$a, b$ → Coordenadas do centro

$x, y$ → Coordenadas do ponto da circunferência

Consideremos $C\ (a, b)$ o Centro da Circunferência e $P\ (x, y)$ um Ponto qualquer da Circunferência.

$\overrightarrow{CP} = P - C = (x, y) - (a, b)$

$\overrightarrow{CP} = (x - a; y - b)$ mas $\overrightarrow{CP}$ é o raio. Então:

## EQUAÇÃO VECTORIAL DA CIRCUNFERÊNCIA

$\boxed{\|\overrightarrow{CP}\| = r}$ → Equação Vectorial da Circunferência

De $\|\overrightarrow{CP}\| = \boldsymbol{r}$ vem:

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ ; elevando ambos ao quadrado, vem:

$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2$

# EQUAÇÃO CARTESIANA DA CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO ( $a, b$ ) E RAIO $r$

$$\boxed{x^2 + by^2 + dx + ey + f = 0}$$

Ex.:

Dada a equação $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$ que representa uma circunferência, calcular o centro e o raio.

$C\ (1; -3)$ $\quad r = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ porque $r^2 = 16$

Porque a equação é do tipo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ daqui que:

$$\begin{cases} -a = -1 \\ -b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

e $r^2 = 16 \Leftrightarrow r = \sqrt{16} \Leftrightarrow r = 4$

**Obs.:** A equação $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$ pode escrever-se:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 16$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0}$$ → Equação Geral da Circunferência

# EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Nota: Qualquer circunferência pode ser representada por uma equação deste tipo.

No entanto, nem todas as equações deste tipo representam uma circunferência.

Ex.:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$$

Representa o conjunto vazio?

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$$

$$\left(x - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{2}\right)^2 + 6 - 1^2 - 2^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 6 - 1 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 + (y-2)^2 = -1$$

Como o 1.º membro é sempre não negativo e o 2.º membro é $(-1)$ a equação é o conjunto vazio.

Ex.:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 2y + 10 = 0$$

Representa o ponto $(-3; -1)$

$$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{2}\right)^2 + 10 - 3^2 - 1^2 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 + 10 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$a = -3 \ \wedge \ b = -1$$

Ex.:

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{31}{9} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{31}{9} = 0$$

Representa a circunferência de centro $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ e raio $\underline{2}$

$$\left(x - \frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - \frac{31}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{2}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{31}{9} - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{36}{9}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 4$$

$$a = \frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3} \ e \ r = \sqrt{4} = 2$$

Nota:

Em geral temos:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow x^2 + dx + y^2 + ey + f = 0$$

$$\left(x + \frac{d}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}$$

$a$ – coef.de $x^2$
$b$ – coef.de $y^2$
$d$ – coef.de $x$
$e$ – coef.de $y$
$f$ – termo independente

1. Se $d^2 + e^2 - 4f < 0$ – **A equação representa o conjunto vazio.**

2. Se $d^2 + e^2 - 4f = 0$ – **A equação representa o ponto** $\left(-\frac{d}{2}; -\frac{e}{2}\right)$

3. Se $d^2 + e^2 - 4f > 0$ – **A equação representa a circunferência de centro**

$\left(-\frac{d}{2}; -\frac{e}{2}\right)$ **e raio** $r = \frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4af}}{2}$

Nota:

Toda a equação do 2.º Grau em $x$ e $y$ , cujos termos em $x^2$ e $y^2$, tenham coeficientes iguais diferentes de 0 e com termo $(xy)$ nulo pode reduzir-se a uma equação do tipo: $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

Ex.:

$$2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4y}{2} + \frac{7}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 2y + \frac{7}{2} = 0$$

Ex.:

Determinar uma equação cartesiana da circunferência:

1. De Centro $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ e raio 5

   $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

2. De diâmetro $[AB]$; sendo $A = (-1; 0)$ e $B = (4; -2)$

   Se $[AB]$ é diâmetro ⇒ o centro é o ponto médio de $[AB]$

   $C\ \left(\frac{-1 + 4}{2}; \frac{0 - 2}{2}\right)$

   $C\ \left(\frac{3}{2}; -1\right)$

O raio é a distância de C a $A$ ou de $C$ a $B$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+1} = \sqrt{\frac{29}{4}}$$

porque

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ sendo $A\ (x_1\,;\ y_1)$ e $B\ (x_2\,;\ y_2)$ e

$$\overrightarrow{CA} = \mathrm{A} - \mathrm{C} = (-1;0) - \left(\frac{3}{2};\ -1\right) = \left(-\frac{5}{2};\ +1\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+1} = \sqrt{\frac{29}{4}}$$

A circunferência pedida tem por equação:

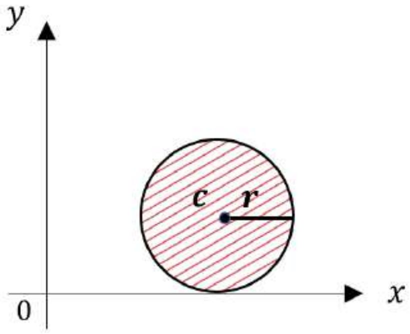
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{29}{4}$$

# CÍRCULO

## CÍRCULO FECHADO

Representa a circunferência e todos os pontos que estão “dentro dela”.



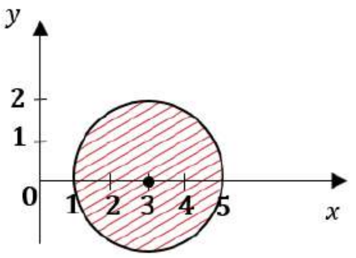

Então:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \rightarrow$ **Representa a circunferência de centro** $(a,b)$ e **raio** $\boldsymbol{r}$

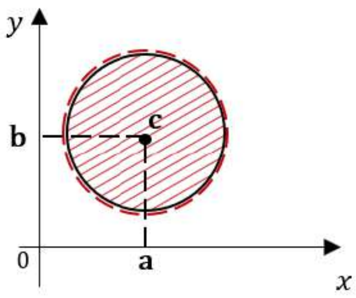
$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2}$ $\rightarrow$ Representa o círculo (os pontos cuja distância ao $C(a,b)$ é inferior ou igual ao raio $\boldsymbol{r}$)

Ex.:

$(x-3)^2+y^2 \le 4$ Representa o círculo fechado de centro $(3;0)$ e raio 2, incluindo a circunferência




## CÍRCULO ABERTO

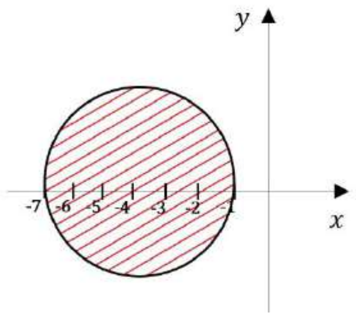



$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2}$ $\rightarrow$ Representa a circunferência de centro $C(a,b)$ e raio $\boldsymbol{r}$ e o seu interior chama-se círculo aberto.

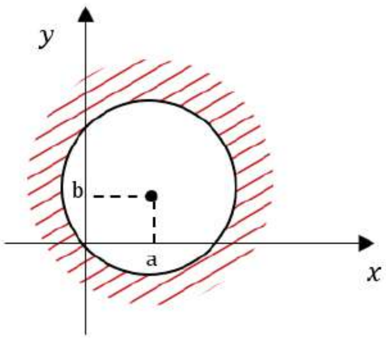
Ex.:

$(x+4)^2 + (y-1)^2 < 9$

Representa o círculo aberto de centro $(-4;1)$ e raio 3, excluindo a circunferência.

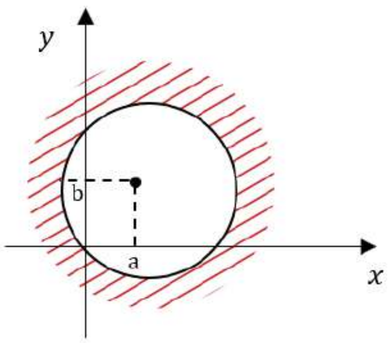



a) Representa o exterior do círculo de raio $(\boldsymbol{r})$ e centro $C\ (a,b)$




$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$$

b) Representa o exterior do círculo, incluíndo a circunferência.

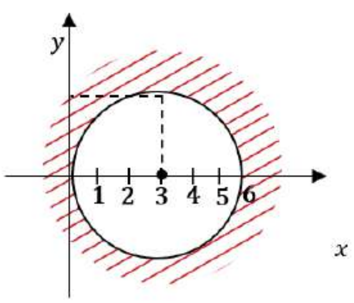



Ex.: a)

$C\ (3;0)\ r = 3$

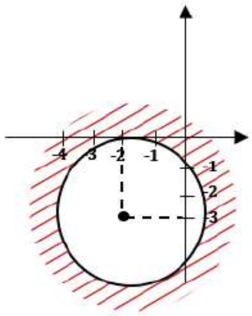
$$(x-3)^2 + y^2 > 3^2$$

$$(x-3)^2 + y^2 > 9$$



Ex.: b)

$C \quad (-2;-3) \;\; \mathrm{r}=3$




$$(x+2)^2+(y+3)^2 \geq 3^2$$

$$(x+2)^2+(y+3)^2 \geq 9$$

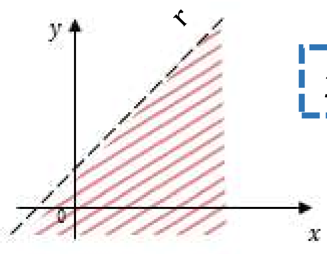
# DOMÍNIOS PLANOS

Consideremos a equação da recta $(\boldsymbol{r})$ não vertical:

$$\boxed{y = mx + b}$$

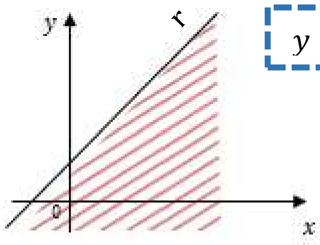
O conjunto de pontos situados abaixo da recta $\mathrm{r}$ é definido por:

1. **Semiplano inferior aberto sem a recta** $(\boldsymbol{r})$



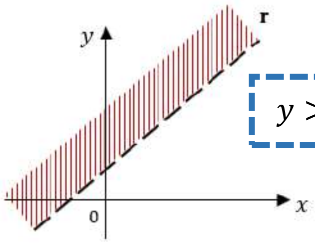

$\boxed{y < mx + b}$ → **Semiplano inferior aberto** ( não contém $\boldsymbol{r}$)

2. **Se tivermos:**



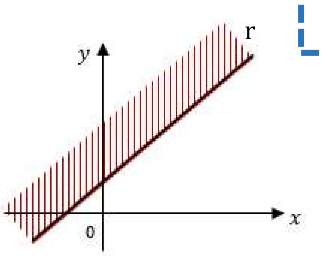

$\boxed{y \leq mx + b}$ → **Semiplano inferior fechado com a recta** $(\boldsymbol{r})$

3. **Se tivermos o conjunto dos pontos acima da recta $(r)$**




$\boxed{y > mx + b}$ → **Semiplano superior aberto**, sem a recta $(r)$

4. **Se tivermos:**




$\boxed{y \geq mx + b}$ → **Semiplano superior fechado**, com a recta $(r)$

Ex.:

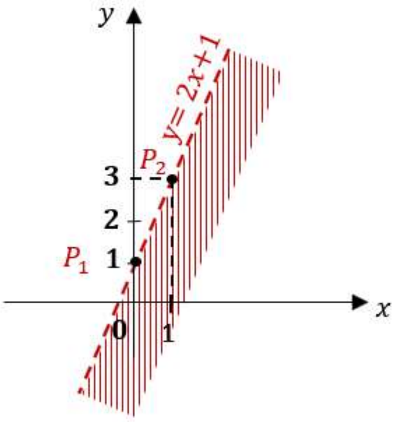
$y < 2x + 1$

$y = 2x + 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |

$P_1 \; (0; 1)$

$P_2 \; (1; 3)$




Ex.:

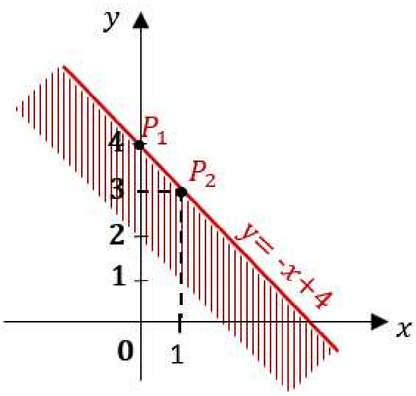
$y \leq -x + 4$

$y = -x + 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 3 |

$P_1 \; (0;4)$

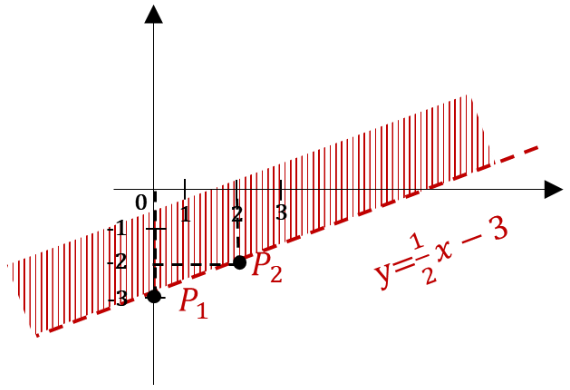
$P_2 \; (1;3)$



Ex.:

$$y > \frac{1}{2}x - 3$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | -3 |
| 2 | -2 |

$P_1$ (0;-3)

$P_2$ (2;-2)

Nota:

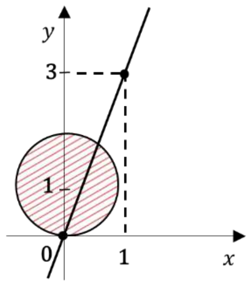
Um conjunto de pontos do plano pode ser definido pela conjunção e disjunção de duas ou mais condições.

$$(x-1)^2 + y^2 < 1 \wedge y = 3x$$

Ex.:

1. $(x-1)^2 + y^2 < 1$

   Define o interior da circunferência de centro (1;0) e raio 1.




2. $y = 3x$

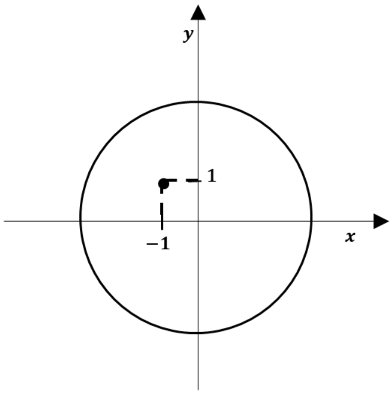
   Define a recta que passa pelos pontos (0;0) e (1;3)

Ex.:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 9 \wedge y \leq 0$

1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 9$ define a circunferência de Centro $(-1;1)$ e raio 3

2) $y \leq 0$ define o semiplano inferior fechado




A disjunção das duas condições define o conjunto de pontos que pertence pelo menos a uma das figuras.

# ÍNDICE

# Sobre o Autor

António Lima, nasceu em Darque, Viana do Castelo, em Dezembro de 1939.

Possui formação superior nas áreas de Magistério Primário, Matemática e Mecânica.

Exerceu funções de professor nos ensinos primário, preparatório, secundário, recorrente e profissional, destacando-se a sua docência nos Externatos de Odivelas, Alexandre Herculano e Novo Alexandre Herculano, bem como, na Escola Profissional Gustave Eiffel.

Para além de ter sido docente nos ensinos primário e preparatório, em Angola, foi inspector e orientador pedagógico na Diamang. Foi Director da Escola de Professores de Posto Escolar e do Lar de Estudantes, em Cabinda, tendo sido louvado, pelo Secretário Provincial de Educação de Angola, pelo desempenho das suas funções.

Foi quadro superior e exerceu cargos de chefia no serviço de Estudos do Ambiente, Serviço Nacional de Parques, Reservas e Conservação da Natureza e no Instituto da Conservação da Natureza.

Desde 1989, faz parte da Sociedade de Ensino Studium, Lda, tendo vindo a exercer funções de direcção e de gerência.

A 4 de Agosto de 1989, participou na escritura de constituição da Cooptécnica - Gustave Eiffel, Cooperativa de Ensino e Formação Técnico Profissional, CRL, proprietária da Escola Profissional Gustave Eiffel sendo, desde a sua fundação, Cooperador.

O seu envolvimento na Cooptécnica - Gustave Eiffel, CRL bem como na sua Escola Profissional, tem mais de 30 anos sendo, actualmente, Vice-Presidente do Conselho de Administração.

Fruto da sua reconhecida experiência profissional, pedagógica e didática, para além de docente de matemática até 2005, tem exercido diversos cargos entre os quais, os de Sub-Director Pedagógico e Director Pedagógico, Adjunto da Presidência da Direcção, Director de Administração e de Pessoal, Director de Planeamento Educacional e, desde Dezembro de 2004, dirige a Direcção de Recursos Humanos.

COOPTÉCNICA
GUSTAVE EIFFEL

COOPTÉCNICA
GUSTAVE EIFFEL