

MATEMÁTICA BÁSICA I

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática
Matemática Básica I

Fernando Luís Vieira de Sousa

Fortaleza, CE
2011

CRÉDITOS

Presidente

Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação

Aloizio Mercadante Oliva

Presidentes da CAPES

José Almeida Guimarães

Diretor de EaD - CAPES

Joao Carlos Teatine Climaco

Diretor de Educação a Distância

Celso Costa

Reitor do IFCE

Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino

Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE

Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB

Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria

José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Priscila Rodrigues de Alcântara

Elaboração do conteúdo

Fernando Luís Vieira de Sousa

Colaboradores

Luciana de Lima

Jane Fontes Guedes

Equipe Pedagógica e Design Instrucional

Ana Cláudia Uchôa Araújo

Andréa Maria Rocha Rodrigues

Carla Anaílde Moreira de Oliveira

Cristiane Borges Braga

Eliana Moreira de Oliveira

Gina Maria Porto de Aguiar Vieira

Glória Monteiro Macedo

Iraci Moraes Schmidlin

Irene Moura Silva

Isabel Cristina Pereira da Costa

Jane Fontes Guedes

Karine Nascimento Portela

Lívia Maria de Lima Santiago

Luciana Andrade Rodrigues

Marcia Roxana da Silva Regis

Maria Irene Silva de Moura

Maria Vanda Silvino da Silva

Marília Maia Moreira

Maria Luiza Maia

Saskia Natália Brígido Batista

Equipe Arte, Criação e Produção Visual

Ábner Di Cavalcanti Medeiros

Benghson da Silveira Dantas

Germano José Barros Pinheiro

José Albério Beserra

José Stelio Sampaio Bastos Neto

Lucas de Brito Arruda

Lucas Diego Rebouças Rocha

Marco Augusto M. Oliveira Júnior

Equipe Web

Benghson da Silveira Dantas

Fabrice Marc Joye

Herculano Gonçalves Santos

Lucas do Amaral Saboya

Samantha Onofre Lóssio

Tibério Bezerra Soares

Revisão Textual

Aurea Suely Zavam

Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web

Antônio Carlos Marques Júnior

Débora Liberato Arruda Hissa

Saulo Garcia

Logística

Francisco Roberto Dias de Aguiar

Virgínia Ferreira Moreira

Secretários

Breno Giovanni Silva Araújo

Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar

Ana Paula Gomes Correia

Bernardo Matias de Carvalho

Charlene Oliveira da Silveira

Isabella de Castro Britto

Vivianny de Lima Santiago

Wagner Souto Fernandes



Catalogação na Fonte: Islânia Fernandes Araújo (CRB 3 - N° 917)

S725m Sousa, Fernando Luis Vieira de.

Matemática básica 1 / Fernando Luis Vieira de Sousa; Coordenação
Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

164p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-475-0004-7

1. MATEMÁTICA. 2. CONJUNTOS. 3. FUNÇÕES. I. Joye, Cassandra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD 510

Apresentação 7
Referências 162
Currículo 163

SUMÁRIO

AULA 1

TÓPICO 1
TÓPICO 2
TÓPICO 3

Conjuntos 8

Descrição de conjuntos 9
Conjuntos numéricos 16
Relações 24

AULA 2

TÓPICO 1
TÓPICO 2
TÓPICO 3

Função afim e função quadrática 28

Introdução às funções 29
Função afim 33
Função quadrática 44

AULA 3

TÓPICO 1
TÓPICO 2

Função modular e função composta 56

Função modular 57
Função composta 66

AULA 4

TÓPICO 1
TÓPICO 2
TÓPICO 3

Outras funções elementares 70

Funções sobrejetora, injetora, bijetora 71
Função inversa 74
Funções cúbicas, recíprocas e maior inteiro 78

AULA 5

TÓPICO 1
TÓPICO 2
TÓPICO 3
TÓPICO 4

Funções exponenciais e logarítmicas 83

Potenciação 84
Radiciação 87
Função exponencial 91
Função logarítmica 97,

AULA 6

TÓPICO 1
TÓPICO 2

Introdução à trigonometria e funções circulares 112

Noções básicas de trigonometria 113
Funções circulares 119

AULA 7

TÓPICO 1
TÓPICO 2

Relações e transformações trigonométricas 132

Relações trigonométricas 133
Transformações trigonométricas 139

AULA 8

TÓPICO 1
TÓPICO 2
TÓPICO 3

**Equações, inequações trigonométricas
e funções circulares inversas 148**

Equações trigonométricas 149
Inequações trigonométricas 153
Funções circulares inversas 156

APRESENTAÇÃO

Caríssimos alunos,

A disciplina Matemática Básica I tem como objetivo possibilitar ao estudante uma revisão geral da matemática elementar do Ensino Médio. Para tanto, abordaremos estes conteúdos, dando-lhes um enfoque de nível superior, buscando assim dar um embasamento para as disciplinas posteriores, principalmente para as disciplinas de Cálculo.

A disciplina está estruturada em oito aulas. Ao final de cada aula, o aluno deverá resolver um conjunto de exercícios, como parte da sua avaliação.

No desenvolvimento dos conteúdos, procuramos seguir sempre uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades de maior relevância. Dessa maneira, pretendemos criar condições de os próprios alunos avançarem de modo crescente na sua formação na área de matemática.

Na estruturação dos exercícios, procuramos ordená-los atendendo ao critério de graduação, partindo de problemas mais simples até alcançar os que envolvem outros conteúdos já estudados, de modo que o aluno tenha a oportunidade de revisar, pesquisar e superar dificuldades também em outros conteúdos.

Diante desse desafio, convido-os a viajar comigo por esse mundo apaixonante da matemática.

Bons estudos!!!

Prof. Fernando Luís

AULA 1

Conjuntos

Olá aluno(a),

Nesta aula, vamos estudar os conjuntos e suas principais operações, tais como inclusão, união, interseção, diferença e complementar. É importante que você, professor de matemática, esteja bem atento a esses conceitos, pois toda linguagem matemática atual pode ser expressa em uma linguagem de conjuntos. Além disso, a ideia de conjuntos é também uma das mais fundamentais da matemática.

Já que vamos tratar de conjuntos, não podemos deixar de falar de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matemático russo que se formou em Berlim, na Alemanha, e obteve o grau de doutor em 1867 com uma tese sobre Teoria dos Números.

Georg Cantor desenvolveu suas pesquisas na área de análise matemática. Sua atenção foi voltada para o assunto com o qual tinha especial afinidade: a teoria dos conjuntos infinitos. Ele mostrou que os reais \mathbb{R} e os complexos \mathbb{C} têm a mesma potência e que esta é superior a dos enumeráveis. E mostrou ainda que a escala do infinito não tem limites. Devido a certos resultados a que chegou, Cantor recebeu críticas de importantes matemáticos da época.

Agora que já sabemos um pouco mais sobre o pesquisador da teoria dos conjuntos, vamos a nossa aula então.

Objetivos

- Conhecer, interpretar e analisar os elementos de um conjunto
- Utilizar uma linguagem correta ao realizar as operações envolvendo conjuntos

TÓPICO 1

Descrição de conjuntos

OBJETIVOS

- Conhecer os elementos de um conjunto
- Fazer uso de linguagem matemática correta nas operações
- Conhecer e realizar operações com conjunto

Neste tópico, estudaremos os conjuntos, seus tipos e propriedades. Todos os assuntos abordados você já estudou em sua formação básica. Faremos então um aprofundamento desses conceitos e dos teoremas por meio das demonstrações dos resultados mais conhecidos.

1. CONJUNTOS

Ao estudarmos conjuntos, três noções são aceitas sem definição, pois são consideradas noções já dadas, por serem primitivas. São elas:

- Conjunto
- Elemento
- Pertinência entre Elemento e Conjunto

1.1 REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO

Ao representarmos conjuntos, podemos fazê-lo da seguinte maneira:

De maneira Tabular, em que os elementos são escritos entre chaves e separados por vírgula.



VOCÊ SABIA?

Usamos letras maiúsculas para denominar conjuntos e letras minúsculas para indicar os elementos de um conjunto.

EXEMPLOS:

- Conjunto das vogais $A = \{a, e, i, o, u\}$
- Conjunto dos algarismos arábigos $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

Também podemos representar em diagrama de Venn (figura abaixo).

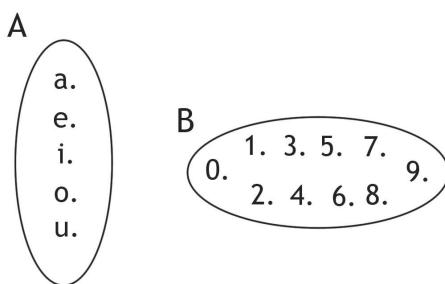


Figura 1 – Exemplos de conjuntos representados pelo diagrama de Venn

Ou através de uma propriedade P, que descreve os seus elementos, isto é, A é o conjunto de elementos x de tal forma que x tem a propriedade P. E denotaremos por $A = \{x | x \text{ tem a propriedade } P\}$.

Exemplos:

- $A = \{x | x \text{ são os clubes da 1º divisão do campeonato brasileiro 2008}\}$
- $B = \{x | x \text{ é divisor inteiro de } 4\} = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$

VOCÊ SABIA?

Usamos a relação de pertinência para relacionar elementos e conjuntos. Nesse caso, denotaremos por $x \in A$ (lê-se x pertence a A), se x for elemento de A, e denotaremos por $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A) se x não for elemento de A.

EXEMPLOS:

- No conjunto dos meses do ano, o mês de maio é um elemento desse conjunto.
- No conjunto dos algarismos arábicos, o número 5 é um elemento desse conjunto.

1.2 TIPOS DE CONJUNTO

Podemos classificar os conjuntos da seguinte maneira:

a) Conjunto Unitário

É o conjunto que possui um único elemento.

EXEMPLOS:

$$A = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ divide } 1\} = \{1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | 2x - 1 = 1\} = \{1\}$$

b) Conjunto Vazio

É o conjunto que não possui elemento, e é denotado por \varnothing .

EXEMPLOS:

$$A = \{x \mid x \neq x\} = \varnothing$$

$$C = \{x \mid x > 3 \text{ e } x < 3\} = \varnothing$$

$$D = \{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 4\} = \varnothing$$

c) Conjunto Universo (U)

É o conjunto ao qual pertencem todos os elementos utilizados em um determinado estudo.

Exemplo:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisor de } 10\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$, onde \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros), nesse caso, representa o conjunto universo U .

1. 3 SUBCONJUNTOS

Conhecidos dois conjuntos A e B , dizemos que A é subconjunto de B se todo elemento de A é também elemento de B . E denotaremos por: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ (lê-se: A está contido em B se, e somente se, para todo x pertencente a A implicar que x pertence a B)

EXEMPLOS:

Dados os conjuntos $A = \{i, u\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$.

Observe que os i e u são elementos do conjunto A e também são elementos do conjunto B . Portanto, $A \subset B \Rightarrow \{i, u\} \subset \{a, e, i, o, u\}$.

Na geometria, se uma reta r está contida no plano α , então $r \subset \alpha$, pois os elementos da reta são os pontos que estão contidos no plano α .

1.3.1 PROPRIEDADES DA INCLUSÃO

Sejam A e B dois conjuntos tais que todo elemento de A é também elemento de B . Nesse caso, diz-se que A é um subconjunto de B , ou que A está contido em B . Essa relação $A \subset B$ é chamada de inclusão.

Ao estudarmos inclusão de conjuntos, duas inclusões se revelam, de certa forma, curiosas. Uma é que para todo conjunto A , vale afirmar que $A \subset A$, o que é óbvio, pois todo elemento de A pertence ao conjunto A . A outra é que $\varnothing \subset A$ para qualquer conjunto A .



VOCÊ SABIA?

Na geometria, usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto para indicar pontos, minúsculas do nosso alfabeto para indicar retas ou minúsculas gregas para indicar planos.



ATENÇÃO!

Quando o conjunto A não é um subconjunto do conjunto B, então A não está contido em B, e denotaremos por $A \not\subset B$ (lê-se A não está contido em B)



VOCÊ SABIA?

Se x for um elemento do conjunto A, então a relação $x \in A$ também pode ser escrita sob a forma $\{a\} \subset A$. Porém, é incorreto escrevermos $a \subset A$ e $\{a\} \in A$.



GUARDE BEM ISSO!

A propriedade de inclusão é usada para relacionar conjuntos e subconjuntos, e não elementos e conjuntos. Por exemplo, seja A o conjunto dos números pares. Então são válidas as afirmativas $4 \in A$ e $\{4\} \subset A$, porém é errado escrever $4 \subset A$ e $\{4\} \in A$.

A relação de inclusão goza de três propriedades fundamentais.

Dados A, B e C conjuntos quaisquer, temos:

- i. Reflexividade: $A \subset A$;
- ii. Anti-simétrica: $A \subset B$ e $B \subset A \Leftrightarrow A = B$;
- iii. Transitividade: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Provaremos aqui a segunda propriedade. As demais são deixadas como exercício para você.

- iv. Anti-simétrica: $A \subset B$ e $B \subset A \Leftrightarrow A = B$;

Das proposições

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\{x \in A \Rightarrow x \in B\} \quad \text{e}$$

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x)\{x \in B \Rightarrow x \in A\} \quad \text{implica}$$

a igualdade de conjuntos, ou seja,

$$(\forall x)\{x \in A \Leftrightarrow x \in B\} \Leftrightarrow A = B, \text{ logo a prova está}$$

concluída. Portanto: $A \subset B$ e $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.

1.3.2 CONJUNTO DAS PARTES

Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A aquele formado por todos os subconjuntos de A. E denotaremos por: $\wp(A) = \{X / X \subset A\}$

EXEMPLOS:

- 1) Se $A = \{1, 2\}$, os elementos de $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Veja que o conjunto A possui dois elementos e o conjunto das partes de A ($\wp(A)$) possui quatro elementos.

2) Se $B = \{a, b, c\}$, os elementos de $\wp(B)$ são:

$$\wp(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que o conjunto $\wp(B)$ possui 8 elementos enquanto o conjunto B possui 3 elementos.

Conclusão:

No exemplo 1, o conjunto A possui dois elementos e conjunto $\wp(A)$ possui 4 elementos ($4 = 2^2$). Já para o segundo exemplo, o conjunto B possui 3 elementos, enquanto o conjunto $\wp(B)$ possui 8 elementos ($8 = 2^3$). Portanto, podemos concluir que, se um conjunto X possui n elementos, o conjunto das partes de X, $\wp(X)$ possui 2^n elementos.

1.4 UNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se o conjunto união $A \cup B$ o conjunto formado por todos os elementos de A mais os elementos de B, sem repetição. Ou seja, são todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. E denotaremos por: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então o conjunto união é $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

1.4.1 PROPRIEDADES DA UNIÃO

Dados quaisquer conjuntos A, B e C, então a união de conjuntos goza das seguintes propriedades:

- i. Idempotente: $A \cup A = A$;
- ii. Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A$;
- iii. Comutativa: $A \cup B = B \cup A$;
- iv. Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- v. $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$
- vi. $A \cup U = U$

Provaremos aqui a terceira propriedade. As demais são deixadas como exercício para você.

Seja $A = \{x | p(x)\}$ e $B = \{x | q(x)\}$ onde p e q são proposições quaisquer, então $A \cup B = \{x | p(x) \text{ ou } q(x)\}$ e $B \cup A = \{x | q(x) \text{ ou } p(x)\} = A \cup B$. Portanto, a demonstração está concluída e temos que $A \cup B = B \cup A$.

1.5 INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$, formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e a B simultaneamente. E denotaremos por: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

EXEMPLO:

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$. O conjunto $A \cap B = \{2\}$.

Veja que o 2 é o único elemento que pertence ao conjunto A e ao conjunto B simultaneamente.

1.5.1 PROPRIEDADES DA INTERSEÇÃO

Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, então são válidas as seguintes propriedades:

- i. Idempotente: $A \cap A = A$;
- ii. Elemento neutro: $A \cap U = A$;
- iii. Comutativa: $A \cap B = B \cap A$;
- iv. Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- v. $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$
- vi. Se A e B são disjuntos $A \cap B = \varnothing$.

Provaremos aqui a terceira propriedade. As demais são deixadas como exercício.

Seja $A = \{x / p(x)\}$ e $B = \{x / q(x)\}$, onde p e q são proposições quaisquer, então se $x \in (A \cap B) \Rightarrow \{x / p(x) \text{ e } q(x)\}$ e se $x \in (B \cap A) \Rightarrow \{x / q(x) \text{ e } p(x)\}$ as implicações acima são verdadeiras $\forall x$, portanto: $A \cap B = B \cap A$.

ATENÇÃO!



Em geral, a propriedade comutativa não se aplica à diferença de conjuntos, isto é, $A - B \neq B - A$. Se $A - B = B - A$, então $A = B$.

1.6 DIFERENÇA DE CONJUNTOS

A diferença de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B . E denotaremos por $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplos:

- 1) Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$, o conjunto diferença é

$A - B = \{a\}$, pois o elemento a é o único elemento que pertence A e não pertence B .

2) Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5, 6\}$, o conjunto $A - B = \{1, 4\}$, pois os elementos 1 e 4 pertencem ao conjunto A e não pertencem a B .

1.7 CONJUNTO COMPLEMENTAR

Dados dois conjuntos quaisquer A e B , tais que $B \subset A$, o complementar de B em relação a A é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B .

Denotaremos por:

C_A^B (lê-se complementar de B em relação a A).

$$C_A^B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} \Leftrightarrow B \subset A$$

EXEMPLOS:

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então $C_A^B = \{1, 2\}$, pois os elementos 1, 2 pertencem ao conjunto A e não pertencem a B .

2) Dados $A = \{a, b, c\}$ e $B = \varnothing$, então $C_A^B = A = \{a, b, c\}$.

Observe que nestes dois exemplos, o conjunto B está contido em A ($B \subset A$).

Exercício Resolvido:

1) Dado o conjunto $A = \{1, \{1\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$, considere as afirmativas:

- i. $\varnothing \in A$
- ii. $\{\varnothing\} \in A$
- iii. $\{\varnothing\} \subset A$

Identifique as afirmativas verdadeiras e justifique a resposta.

SOLUÇÃO:

As afirmativas (i) e (ii) são verdadeiras, pois tanto \varnothing como $\{\varnothing\}$ são elementos do conjunto A , logo relacionamos elementos e conjuntos com o símbolo de pertence (\in). A afirmativa (iii) também é verdadeira, pois $\{\varnothing\}$ tanto é elemento como um subconjunto de A . Neste caso, relacionamos conjunto e subconjunto com o símbolo de inclusão (\subset). Portanto, todas as afirmativas são verdadeiras.



SAIBA MAIS!

Um bom professor está sempre pesquisando e buscando novas descobertas. Pesquise mais sobre conjuntos em livros e em alguns sites. Procure estudar também as propriedades que relacionam a união com a interseção, pois elas serão de muita utilidade em disciplinas posteriores. Se preferir, consulte o site: <http://www.inf.ufsc.br/~mauro/ine5381/slides/Conjuntos.PDF>

TÓPICO 2

Conjuntos numéricos

OBJETIVOS

- Conhecer e identificar os tipos de conjuntos
- Realizar as operações envolvendo conjuntos
- Representar soluções através de gráficos e intervalos
- Provar algumas proposições por indução

Neste tópico, estudaremos os conjuntos numéricos, desde os números naturais até os números reais, bem como suas propriedades.

Para número, os compêndios tradicionais apresentam a seguinte definição:

“Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real.” (LIMA, 2006, p. 25.)

Estudaremos também o princípio da indução finita.

O assunto deste tópico é de fundamental importância, pois é através dos números que podemos construir modelos que permitam contar, medir e avaliar diferentes quantidades de uma grandeza.

Vamos conferir?

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos podem ser de seis tipos. Vamos rever cada um deles, bem como suas propriedades.

1.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

É o conjunto formado pelos números $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Podemos observar que todo número natural tem um único sucessor e também possui um único antecessor, com exceção do número 0, que não possui antecessor.

Com os números naturais, podemos realizar duas operações: a adição e a multiplicação. Além disso, podemos definir as seguintes propriedades:

i. Comutativa da adição e da multiplicação:

$$a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a$$

ii. Elemento neutro da adição e da multiplicação:

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ e } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

iii. Associativa da adição e da multiplicação:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

e

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

iv. Distributiva da multiplicação relativa à adição:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

EXEMPLO:

Considere $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$. A condição sobre B para que n seja um número natural ímpar, sendo $n = 2p - 1$ ímpar para todo $p \in N^*$, é que $2p - 1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, ou seja; $2p - 1 \geq 1 \Rightarrow p \geq 1$. Portanto, $p = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e $B = \{p \mid p \in N^*\}$.

1.1.1 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O princípio da indução finita (ou indução matemática) é um método para demonstração da validade de proposição para conjuntos infinitos. Esse método permite mostrar que, se uma proposição P, aplicável aos números naturais, é válida para $k \in N$ (ou $k \in N^*$) e é válida para o seu sucessor, então P é válida para todo $n \in N$ (ou $n \in N^*$).

Para mostrar que a proposição $P(n)$ é válida para todo $n \in N$ (ou $n \in N^*$), é suficiente:

1. Base da indução: Provar que a proposição P vale para 0 (ou 1);
2. Hipótese da indução:
 - i. Supor que a proposição P é válida para $k \in N$ (ou $k \in N^*$)
 - ii. Provar que a proposição é válida para $k + 1$.

Logo, a proposição P vale para todo $n \in N$ (ou $n \in N^*$).



ATENÇÃO!

Sabemos que números naturais pares são todos os naturais múltiplos de 2 e que os ímpares são os não pares. Nessas condições: Se $p \in N$, então os números naturais pares são escritos na forma $n = 2p$, e os números naturais ímpares são escritos na forma $n = 2p - 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Demonstre usando o princípio da indução finita que:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

SOLUÇÃO:

Devemos mostrar que a proposição é válida para $n = 1$, o que é verdadeiro, pois $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Por hipótese da indução, admitamos que a proposição seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Provaremos agora que é válida para $k + 1$, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

PROVA:

Tomamos a expressão válida para $k \in \mathbb{N}^*$ e somamos $k + 1$ aos dois membros da igualdade. Assim temos:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Para $n = 1$, a proposição é verdadeira, pois $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6}$.

Por hipótese da indução, admitimos que a propriedade seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Provaremos agora que é válida para $k + 1$, isto é, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Prova:

Tomamos a igualdade válida para k e somamos $(k+1)^2$ aos dois membros da igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6} [2k^2 + 7k + 6]$$

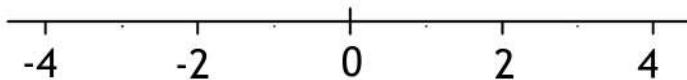
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6} \cdot 2 \cdot (k+2) \left(k + \frac{3}{2} \right)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

1.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

É o conjunto formado pelos números $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Esses números também podem ser representados de outra maneira: Sobre a reta marcamos o ponto 0 (origem); à direita da origem, dividimos a semi-reta em valores unitários; à esquerda da origem, em valores negativos no sentido negativo (ilustração abaixo).



Com os números inteiros, além das operações de adição e multiplicação que já estudamos com os números naturais, podemos também realizar a operação de subtração $a - b = a + (-b)$, onde $a, b \in Z$. Além disso, podemos definir uma nova propriedade:

Simétrico ou oposto para a adição: para todo $a \in Z$ existe $-a \in Z$ tal que $a + (-a) = 0$.

1.2.1 DIVISIBILIDADE

Dizemos que um inteiro a é divisor do inteiro b , isto é $a | b$ (lê-se a divide b) quando existe um inteiro c tal que $ca = b$.

Denotaremos por $a | b \Leftrightarrow \exists c \in Z$ tal que $ca = b$.

EXEMPLOS:

1. $2 \mid 4$, pois $2 \cdot 2 = 4$
2. $2 \mid 6$, pois $2 \cdot 3 = 6$
3. $3 \mid -18$, pois $2 \cdot (-6) = -18$

1.2.2 NÚMEROS PRIMOS

Um número inteiro p é primo quando $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$ e os seus divisores são $D(p) = \{-1, 1, -p, p\}$

Como exemplos de números primos, temos:

$$P = \{\dots, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 7, -7, \dots\}$$

VOCÊ SABIA?

Quando a é divisor de b , dizemos que b é divisível por a ou b é múltiplo de a .

VOCÊ SABIA?

Se a e b são dois números primos entre si, então o Máximo Divisor Comum, $\text{mdc}(a, b) = 1$.

1.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

É o conjunto de todos os números escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. E denotaremos por:
$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \text{, com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

No estudo dos números racionais, são válidas as seguintes relações:

- i. Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
- ii. Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- iii. Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Com os números racionais, além das operações de adição, multiplicação e subtração que usamos para os números inteiros, podemos

realizar a operação de divisão, isto é, $\frac{a}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ para todo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais e $\frac{c}{d}$ é não-nulo. Além disso, podemos definir uma nova propriedade que é:

Simétrico ou inverso para a multiplicação: para todo $\frac{a}{b} \in Q$ e $\frac{a}{b} \neq 0$ existe $\frac{b}{a} \in Q$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

1.3.1 REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser escrito como um número decimal.

Exemplos:

$$\frac{3}{2} = 1,5; \frac{1}{2} = 0,5; \frac{1}{3} = 0,3333\cdots$$

De maneira geral, uma expressão decimal é escrita na forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$,

onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ são algarismos inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Por exemplo: o número $\alpha = 3,235$ pode ser escrito na forma $\alpha = 3 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3}$.

1.4 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

É o conjunto dos números cuja representação decimal tem infinitas casas decimais e não-periódicas, isto é, são da forma:

$\alpha = a_0, a_1 \cdots a_n \cdots$ em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i=0, 1, 2, \dots, n, \dots$

EXEMPLOS:

$$\pi = 3,141559265\dots$$

$$0,1010010001\dots$$

1.5 CONJUNTOS DOS NÚMEROS REAIS

É o conjunto formado por todos os números racionais ou irracionais.

Com os números reais podemos realizar as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão. Esta última resultará no IR*. Além disso, os números reais gozam das mesmas propriedades dos números racionais.

1.5.1 RETA REAL

É uma reta que tem como medida padrão o segmento unitário u. Tomando esse segmento padrão, podemos dividi-la em vários segmentos congruentes de tamanho u. Sobre essa reta fixamos um ponto 0, chamado de origem, o qual

VOCÊ SABIA?

Se um número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente é chamado de dízima periódica.

Uma dízima é dita periódica simples quando os primeiros dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente.

SAIBA MAIS!

Para saber mais sobre o número irracional pi, acesse o site: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1b.html>

Na disciplina de geometria plana e espacial, você poderá abordar melhor a utilização do número pi ao estudar áreas e volumes de figuras da geometria euclidiana. Nesta disciplina, falaremos mais sobre esse número ao estudarmos as funções trigonométricas circulares, aulas posteriores.

divide a reta em duas semi-retas, uma de sentido positivo (à direita de 0) e outra de sentido negativo (à esquerda de 0), conforme se vê abaixo.



Figura 2 – Representação da reta real

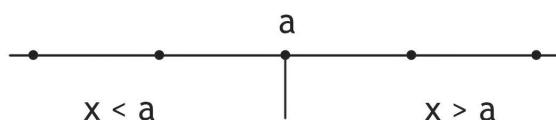


Figura 3 – Posição de um número na reta real

1.5.2 INTERVALOS

Muitas vezes uma proposição é válida apenas para alguns valores contidos nos números reais. Nesse caso, esses valores podem ser representados através de um intervalo. Os intervalos podem ser fechados quando os extremos fazem parte dele, ou abertos quando os extremos não fazem parte dele.



ATENÇÃO!

Se um número qualquer x estiver situado na reta à direita de um número a , então ele é maior que a ; por outro lado, se x estiver situado à esquerda de a , então ele é menor que a . (figura ao lado)

Desse modo, conhecidos dois números reais a

e b , com $a < b$, podemos ter:

i. Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{ou} \quad]a, b[$$



ii. Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



iii. Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



iv. Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda)

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Se os intervalos envolvem infinitos, então definimos:

v. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



vi. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



vii. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



viii. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



ix. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



ATENÇÃO!

Pesquise mais sobre o assunto em livros e sites para ampliar seus conhecimentos.

TÓPICO 3

Relações

OBJETIVOS

- Compreender e analisar par ordenado
- Compreender e definir relações
- Interpretar domínio e imagem de uma relação
- Obter relações inversas

Uma vez que já conhecemos conjuntos e suas principais operações, vamos estudar agora as relações entre conjuntos. Iniciaremos com produto cartesiano, em seguida definiremos relações binárias e os elementos que compõem uma relação: domínio e imagem.

1. PRODUTO CARTESIANO

VOCÊ SABIA?

Que o par ordenado $p = (x, y)$ é diferente do conjunto $\{x, y\}$, pois os conjuntos $\{y, x\} = \{x, y\}$ são verdadeiros para todo x e y , enquanto que $(x, y) = (y, x)$ só é verdadeiro se $x = y$. O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ (lê-se A cartesiano B), formado por todos os pares ordenados (x, y) , cuja, primeira coordenada x pertence a A e a segunda coordenada pertence a B . Denotaremos por

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}.$$


Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado pela primeira coordenada chamada de x , e uma segunda coordenada chamada de y . É fácil perceber que dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (u, v)$ são iguais se, e somente se, eles tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada, isto é, $x = u$ e $y = v$.

1.2 RELAÇÕES

Uma relação binária R de A em B é um conjunto de condições que permitem determinar que, para $x \in A$ e $y \in B$, x está relacionado com y segundo a relação R . E denotaremos por xRy (lê-se “ x erre y ”).

Exercícios Resolvidos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 6\}$, determine:

- a. O produto cartesiano $A \times B$
- b. Relação R , de A em B para:

$$R = \{(x, y) \in A \times B; y = 2x\}$$

SOLUÇÃO:

- a. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 6)\}$
- b. $R = \{(2, 4), (3, 6)\}$

1.3 DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA RELAÇÃO

O domínio de uma relação R de A em B é o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R , ou seja, são todos os valores de x , $x \in A$, tais que x esteja relacionado a y , $y \in B$ através da relação R .

Denotaremos por:

$$x \in D \Leftrightarrow \exists y, y \in B | (x, y) \in R.$$

A imagem de uma relação R de A em B é o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes R , ou seja, são todos os y , $y \in B$, tais que y esteja relacionado a x , $x \in A$ através da relação R .

Denotaremos por:

$$y \in Im \Leftrightarrow \exists x, x \in A | (x, y) \in R.$$

Exercício Resolvido

Dados $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, determine o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B; y \text{ é múltiplo de } x\}$ (gráfico)

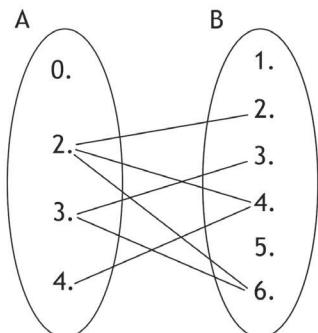


Figura 4 – Representação da relação R de A em B



ATENÇÃO!

Toda relação de A em B é sempre subconjunto de $A \times B$, isto é, R é relação binária de A em B
 $\Leftrightarrow R \subset A \times B$.



ATENÇÃO!

É importante observar que o conjunto domínio D está contido no conjunto A ($D \subset A$), e o conjunto imagem Im está contido no conjunto B ($Im \subset B$).

Como a relação associa a cada valor de x um valor de y , que é seu múltiplo, então temos a seguinte relação: $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$, onde o domínio é $D(R) = \{2, 3, 4\}$, e o conjunto imagem é $Im(R) = \{2, 3, 4, 6\}$.

1.4 RELAÇÃO INVERSA

Sejam os conjuntos A e B e seja R uma relação de A em B , tal que $R = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in R\}$, a relação inversa é uma relação de B em A , tal que $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$. E denotamos por: $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$.

Exercícios resolvidos:

Determine os conjuntos A , B e C que satisfazem as seguintes condições: $A \cup B \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$, $A \cap B = \{r, s\}$, $B \cap C = \{s, x\}$, $C \cap A = \{s, t\}$, $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$ e $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$.

SOLUÇÃO:

Da interseção de A e B , temos r e s elementos de A e de B ; da interseção de B e C , temos s e x comuns aos dois conjuntos; e da interseção de A e C , sabemos que s e t são comuns aos dois conjuntos, logo percebemos que s é comum aos três conjuntos.

Da união dos conjuntos A e B e A e C , concluímos que p e q pertencem a A e que z pertence a B e u e v pertencem a C . Portanto, os conjuntos são: $A = \{p, q, r, s, t\}$, $B = \{r, s, x, z\}$ e $A \cup B \cup C = \{s, t, u, v, x\}$.

Resolva esse exercício através do diagrama de Venn. Diga qual a melhor maneira de representação.

Sejam x , y e z números naturais. Na divisão de x por y obtém-se quociente z e resto 8. Sabe-se que a representação decimal de $\frac{x}{y}$ é a dízima periódica $7,63636\dots$. Então, o valor de $x + y + z$ equivale a:

SOLUÇÃO:

Se $\frac{x}{y} = 7,363636\dots$, então podemos escrever na forma $\frac{x}{y} = 7 + \frac{36}{10^2} + \frac{36}{10^4} + \frac{36}{10^6}\dots = 7 + \frac{\frac{36}{10^2}}{1 - \frac{36}{10^2}}$. Resolvendo a operação temos $\frac{x}{y} = \frac{229}{99} = \frac{81}{11}$ ou $11x = 81y$ (i). Como x dividido por y possui quociente z e deixa resto 8, então $y \cdot z + 8 = x$, o que equivale a escrevermos $11y \cdot z + 88 = 11x$

(ii). Das equações (i) e (ii) temos $11y \cdot z + 88 = 11x = 81y$, o que implica dizer que $88 = 11x = 81y - 11y \cdot z \Rightarrow y \cdot (81 - 11z) = 88$. Como y e z são números naturais, determinamos que os valores são $y = 22$ e $z = 7$. Substituindo esses valores em (i) ou em (ii), encontramos $x = 162$. Portanto, o valor de $x + y + z = 162 + 22 + 7 = 191$.

Os pares ordenados $(1, 2), (2, 6), (3, 7), (4, 8)$ e $(1, 9)$ pertencem ao produto cartesiano $A \times B$. Sabendo que $A \times B$ tem 20 elementos, então a soma dos elementos de A vale:

SOLUÇÃO:

Como A possui n elementos e B possui m elementos, então $A \times B = mxn = 20$. Dos pares ordenados, temos o conjunto A com 4 elementos e o conjunto B com 5 elementos. Assim, A possui os seguintes elementos $1, 2, 3, 4$, e sua soma vale 10.

Prove por indução que $2^n > n$ para todo n pertencente aos naturais.

SOLUÇÃO:

Mostraremos primeiro que a proposição é válida para $n = 0$, o que é verdadeiro, $2^0 = 1 > 0$.

Por hipótese da indução, admitamos que a proposição seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, $2^k > k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Provaremos agora que a proposição é válida para $k + 1$, isto é, $2^{k+1} > k + 1$.

PROVA:

Tomamos a expressão válida para $k \in \mathbb{N}$. Como $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$, então $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2k > k + 1$. Portanto, temos $2^k > k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

AULA 2

Função afim e função quadrática

Nessa segunda aula, como já conhecemos conjuntos, algumas importantes propriedades dos pares ordenados do plano e de domínio e imagem de uma relação serão apresentadas. Passaremos a estudar as funções, bem como as características e particularidades de cada uma delas.

Antes de falarmos propriamente de função, vamos lembrar um matemático suíço, cujos estudos estão relacionados ao assunto desta nossa aula. Leonhard Euler (1707 – 1783) desenvolveu trabalhos em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, com destaque para a análise – estudo dos processos infinitos desenvolvendo a ideia de função. Ele também foi o responsável pela adoção do símbolo $f(x)$ para representar uma função de x . Hoje em dia, função é uma ideia essencial na matemática. Vamos conferir?

Objetivos

- Conhecer, interpretar e analisar as funções afins e quadráticas
- Resolver problemas que sejam modelados por essas funções

TÓPICO 1

Introdução às funções

OBJETIVOS

- Conhecer e definir funções
- Determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função
- Construir e interpretar gráficos das funções

Uma vez que já estudamos produto cartesiano e relações, daremos agora início ao estudo das funções. Neste tópico, vamos revisar o conceito de função e estudar a função constante, que é a função mais simples. Mais adiante, ao estudarmos as demais funções, iremos aumentando o grau de complexidade.

1. CONCEITO

EXEMPLO:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, e seja R uma relação de A em B definida por $y = x + 5$.

Verificamos que a relação R é formada pelos pares ordenados $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$, e que, para cada elemento do conjunto A , existe um único elemento do conjunto B associado a ele. Ou seja, $\forall x \in A, \exists y \in B | (x, y) \in R$ (Figura 1).

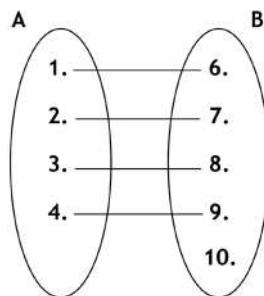


Figura 1 – Relação $R: A \rightarrow B$

Toda relação desse tipo recebe o nome de função, como veremos na definição a seguir.

Dados os conjuntos não vazios A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ (lê-se f de A em B) é uma relação em que cada elemento $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$. E escrevemos $x \rightarrow f(x)$ (lê-se f leva x em $f(x)$)

NOTAÇÃO:

$$f : A \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B | (x, y) \in f)$$

EXEMPLO:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } y = 3x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } y = x^2$$

2. DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO

O **domínio** e o **conjunto imagem** de uma função têm as mesmas definições dadas para uma relação, como foi visto na aula 1. Mas, pela definição de função, podemos concluir que o **domínio da função** $D(f)$ será sempre igual ao conjunto A , quando tivermos a função $f : A \rightarrow B$, isto é, $D(f) = \{x \in A\} = A$.

O **contradomínio** $CD(f)$ será sempre igual ao conjunto B , quando tivermos a função $f : A \rightarrow B$, isto é, $CD(f) = \{y \in B\} = B$.

Já **Imagen de um Elemento**, quando conhecemos o par ordenado $(a, b) \in f$, é o elemento b , que é chamado de **imagem** de a pela aplicação f ou valor de f no elemento a igual a b .



GUARDE BEM ISSO!

O conjunto **imagem** da função são todos os valores reais, uma vez que a função é real e possui variável real, e escrevemos $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$. Graficamente, o domínio é o conjunto das abscissas que interceptam o gráfico nas retas verticais, e a imagem é o conjunto das ordenadas que interceptam o gráfico nas retas horizontais.

Quando é dada uma função $f : A \rightarrow B$, definimos o **conjunto imagem** como sendo todos os $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, o **conjunto imagem** é um **subconjunto do contradomínio**.

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$. Então:

$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Nesse caso substituímos a variável x pelo valor 0 (zero) e obtemos a imagem de -3 (menos 3). Para os itens seguintes prosseguimos de maneira análoga.

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2$$

3. FUNÇÃO CONSTANTE

O estudo sobre funções nesta disciplina será feito apenas no conjunto dos números reais. Isto quer dizer que estudaremos funções reais de variáveis reais.

Definiremos uma função constante como sendo uma aplicação que associa a cada $x \in A$ um elemento $c \in B$, tal que $f(x) = c$, onde c é uma constante. Uma definição mais formal para essa função é dada a seguir:

Função constante é toda aplicação f dos reais nos reais ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) que associa cada elemento $x \in \mathbb{R}$ a um mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$.

E escrevemos $f(x) = c$.

EXEMPLO:

$$f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (ver figura 2)}$$

Calculemos agora a imagem dos seguintes números reais.

$$f(-1) = 3, f(0) = 3, f(3) = 3$$

Observe que a imagem de qualquer número real é sempre igual a 3.

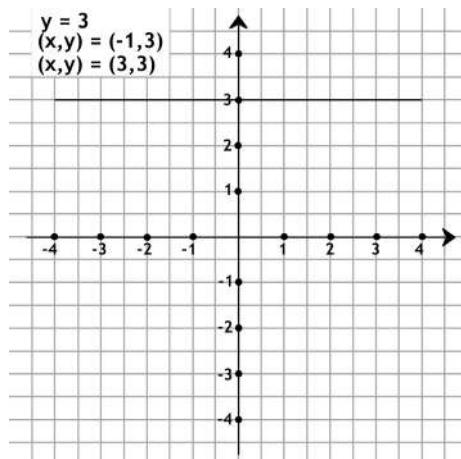


Figura 2 – Gráfico da função constante $f(x) = 3$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Os professores do IFCE recebem salário independentemente da quantidade de aulas dadas por eles no mês. Suponha que o salário do professor do CEFETCE seja em média R\$ 4.000,00. Determine o salário de um professor que dá 12 aulas semanais e de outro que dá 20 aulas semanais.

SOLUÇÃO:

Como o salário do professor é de R\$ 4.000,00, se tomarmos x como sendo o número de aulas, então podemos definir uma função que relate horas aulas com salário da seguinte maneira $f(x) = 4000$, que é uma função constante. Portanto, os professores possuem o mesmo salário, isto é, $f(12) = f(20) = 4000$.

TÓPICO 2

Função afim

OBJETIVOS

- Conhecer e definir função afim
- Construir e interpretar gráficos das funções
- Conhecer as propriedades características da função afim

Neste tópico estudaremos a função afim e suas principais características. Resolveremos também as inequações envolvendo esse tipo de função.

Um caso particular de função afim é a **função identidade** $f(x) = x$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um $y \in \mathbb{R}$ com $y = x$, ou seja, f leva x em x . Essa função é uma reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares (1° e 3° quadrantes).

Observe que, para cada valor do elemento x , associamos o mesmo valor ao elemento y . (Figura 3)

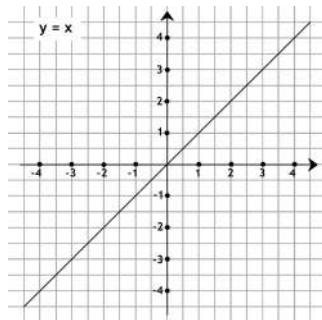


Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = x$

x	y
-1	1
0	0
1	1

Estudaremos a partir de agora as funções reais de variáveis reais, isto é funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, que têm como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e imagens $f(x)$ reais, para todo x real.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Um botânico media o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Percebeu que, no primeiro dia de medida, a planta estava com 1 cm de altura e no décimo dia tinha alcançado 2 cm de altura. Colocando os pontos sobre um gráfico, ele observou que o gráfico descrevia uma função afim. Se for mantida, então, a mesma relação entre o tempo (dias) e a altura (centímetros), qual será a altura da planta no trigésimo dia?

Solução:

Como a função é linear e a cada 10 dias a planta está aumentando 1 centímetro, então, pelas regras de proporcionalidade, em trinta dias, ela tem aumentado 3 centímetros. Portanto, no trigésimo dia, a planta terá uma altura de 4 centímetros.

1. DEFINIÇÃO

Exemplo:

- a. $y = 2x + 3$ onde, $a = 2$ e $b = 3$
- b. $y = 2 - x$ onde, $a = -1$ e $b = 2$
- c. $y = 3x$ onde, $a = 3$ e $b = 0$

2. GRÁFICO

Definição:

Uma função afim é toda aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $y = f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$.

Afirmamos que o gráfico da função afim é uma reta. Para construirmos, atribuímos valores distintos à variável x e obtemos os valores de y associados a ele. Em seguida marcamos cada par ordenado (x, y) no plano cartesiano e unimos esses pares.

A demonstração de que o gráfico da função afim é uma reta é deixada como exercício.

EXEMPLO:

Construa o gráfico da função $y = 2x + 3$.

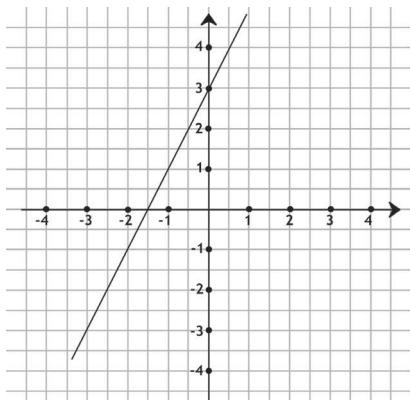


Figura 4 – Gráfico da função $y = 2x + 3$

x	y
0	3
-1	1

Agora é com você. Esboce o gráfico das funções $y = -x + 2$ e $y = 3x$.

3. COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

Os valores das constantes a e b que aparecem na função afim $f(x) = ax + b$ são denominados respectivamente coeficiente angular e linear.

O coeficiente a mede a inclinação da reta, e o coeficiente b é o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas (eixo oy).

EXEMPLO:

O gráfico da função $y = 2x - 2$ está ilustrado abaixo:

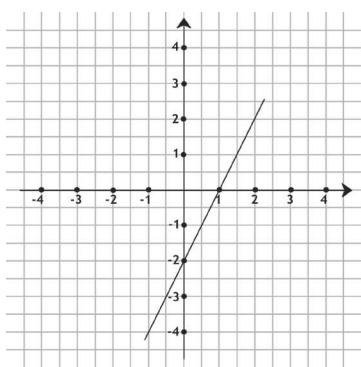


Figura 5 – Gráfico da função $y = 2x - 2$



ATENÇÃO!

Uma maneira de você demonstrar é pegar três pontos distintos quaisquer $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ e utilizar a geometria analítica para mostrar que eles são colineares se tiverem o mesmo coeficiente angular a quando tomados a dois a dois. Ou seja, mostrar que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$.



VOCÊ SABIA?

Winplot é um software de caráter matemático. Essa ferramenta computacional tem como objetivo fazer gráficos 2D e 3D. Sugestão: Após esboçar os gráficos manualmente, utilize o software winplot para esboçar computacionalmente os mesmos gráficos. Ele é uma excelente ferramenta. Você poderá encontrar o winplot no site: <http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html>

VOCÊ SABIA?

Quando marcamos os elementos (x, y) no plano cartesiano (\mathbb{R}^2), eles surgem como as coordenadas cartesianas do $p(x, y)$ no plano ($x =$ abscissas, $y =$ ordenada) de eixos ortogonais OX e OY , que se intercepta na origem O do sistema de coordenadas..

Observe que, para o valor da abscissa $x = 0$, o gráfico intercepta o eixo das ordenadas no valor $y = -2$. Esse valor é o coeficiente linear $b = -2$. O coeficiente angular a é obtido calculando-se a tangente do ângulo (θ) formado pela reta e o eixo das abscissas (ox) medido no sentido anti-horário. Chega-se assim a $a = \tan \theta = \frac{2}{1} = 2$.

De maneira geral, os coeficientes a e b da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser determinados da seguinte maneira:

b é o valor que a função assume quando $x = 0$, isto é, $b = f(0)$.

Quanto ao valor de a , ele pode ser determinado a partir dos valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos x_1 e x_2 . Como $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, então $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

No exemplo anterior, podemos calcular o valor de a atribuindo, por exemplo, os valores $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, onde $a = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow a = \frac{2 - 0}{2 - 1} \Rightarrow a = 2$.

Para um intervalo $x, x+h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o valor a é dado por $a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, que é chamado de taxa de variação da função f no intervalo de extremos $x, x+h \in \mathbb{R}$.

4. ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO

O zero de uma função é todo número $x \in \mathbb{R}$ em que $y = f(x) = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Determine a raiz ou zero das funções:

- $f(x) = 2x - 4$
- $f(x) = 2x - 3$

SOLUÇÃO:

- Veja que, se $f(x) = 0$, quando
 $f(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$,
 $x = 2$ é raiz da função $f(x) = 2x - 4$.

- b. Veja que, se $f(x) = 0$, quando $f(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$,
 $x = \frac{3}{2}$ é raiz da função.

De maneira geral, a raiz de uma função afim $f(x) = ax + b$ é dada por:

$$f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

5. FUNÇÃO CRESCENTE OU DECRESCENTE

Seja f uma função de $A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$, então:

i. f é crescente se para qualquer x_1 e x_2 pertencente a A com $x_1 < x_2$,

tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ ou $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

ii. f é decrescente se para qualquer x_1 e x_2 pertencente a A com $x_1 < x_2$,

tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ ou $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

EXEMPLO:

A função $f(x) = 2x + 3$ é uma função crescente, pois para quaisquer dois valores do domínio de f , por exemplo, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, temos $f(1) = 5$ $f(3) = 9$, isto é, $3 > 1 \Rightarrow f(3) > f(1)$. Já a função $f(x) = -x + 2$ é uma função decrescente, pois, se tomarmos os mesmos valores da função anterior, temos $f(1) = 1$ e $f(3) = -1$, isto é, $3 > 1 \Rightarrow f(3) < f(1)$.

6. SINAL DA FUNÇÃO AFIM

Queremos encontrar os valores de x para os quais a função $f(x)$ é positiva ($f(x) > 0$), ou zero ($f(x) = 0$), ou negativa ($f(x) < 0$).

Resolver este problema implica estudar o sinal da função $y = f(x)$ em todo o seu domínio.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Discutir o sinal das funções abaixo:

- a. $f(x) = 2x + 6$
 b. $f(x) = -3x + 12$

SOLUÇÃO:

a) Para encontrarmos o valor de x em que $f(x) = 0$, temos:

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3$$

VOCÊ SABIA?

A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ (positivo) e decrescente se $a < 0$ (negativo).

Toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim. E, se essa reta passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem inclinação a , sua equação é $y = y_0 + a(x - x_0)$.

Para os valores de x em que $f(x) > 0$, temos:

$$2x + 6 > 0 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -\frac{6}{2} \Rightarrow x > -3$$

Para os valores de x em que $f(x) < 0$, temos:

$$2x + 6 < 0 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -\frac{6}{2} \Rightarrow x < -3$$

Esse método algébrico pode ser substituído pelo método gráfico, por meio do qual representamos a raiz da função $x = -3$. Traçamos o gráfico no plano cartesiano passando pela raiz (Figura 6). No gráfico, observa-se que, para valores x maiores que -3 , os valores de y são positivos, e, para valores x menores que -3 , os valores de y são negativos.

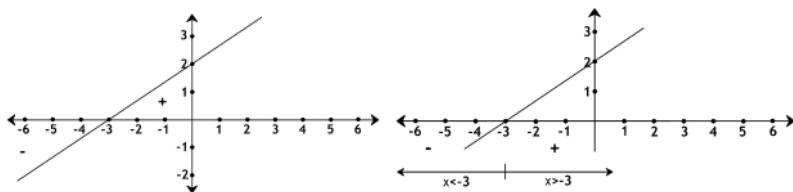


Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 6$

Portanto, temos:

$$f(x) > 0 \quad \forall x, x > -3, \quad f(x) = 0 \quad \text{para } x = -3 \quad \text{e} \quad f(x) < 0 \quad \forall x, x < -3.$$

Esse método gráfico se torna mais prático na resolução de inequações.

b) Para resolvemos esse item, usaremos o método gráfico. Determinaremos a raiz, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$.

$$\text{Logo: } -3x + 12 = 0 \Rightarrow -3x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-3} \Rightarrow x = 4.$$

Representando a raiz e traçando o gráfico, temos:

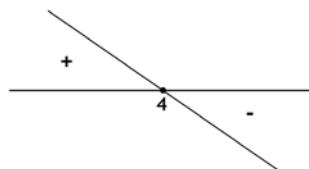


Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = -3x + 12$

Com base no gráfico, podemos concluir que: $f(x) > 0 \quad \forall x, x < 4$, $f(x) = 0$ se $x = 4$ e $f(x) < 0 \quad \forall x, x > 4$.

7. INEQUAÇÕES

Queremos encontrar, agora, soluções de sentenças abertas, tais como $3x - 4 > 2x$. Queremos determinar, então, os valores de x que tornem essa sentença verdadeira.

Para resolvemos esse problema, procedemos da seguinte maneira:

Isolamos todos os termos que possuem variáveis em um dos membros da desigualdade e as constantes no outro lado da desigualdade, e realizamos as operações necessárias.

$$3x - 4 > 2x \Rightarrow 3x - 2x > 4 \Rightarrow x > 4.$$

Portanto, a solução é: $S = \{x \in \text{IR} \mid x > 4\}$.

Logo, podemos **definir inequação** como sendo toda sentença aberta do tipo:

$f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções reais.

O **Conjunto Solução** de uma inequação são todos os valores de x que tornam a sentença verdadeira.



GUARDE BEM ISSO!

Ao estudarmos o sinal da função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, devemos lembrar que, à direita da raiz, o sinal é igual ao sinal de a , e, à esquerda da raiz, o sinal é contrário ao sinal de a . (ilustração abaixo)

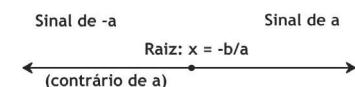


Figura 8 - Representação do estudo do sinal da função do 1º grau

EXEMPLO:

$3x + 1 > x + 5$ tem como conjunto solução $S = \{x \in \text{IR} \mid x > 2\}$, pois, para qualquer valor de $x > 2$, a sentença é verdadeira. Se tomarmos, por exemplo, $x = 3$, temos:

$$3x + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10, \quad x + 5 = 3 + 5 = 8 \quad e \quad 10 > 8.$$

Agora é com você:

Encontre o conjunto solução das inequações:

$$3x + 2 > 2x + 4$$

$$5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$$

Essa questão tem como solução $S = \{x \in \text{IR} \mid x > 2\}$ e $S = \{x \in \text{IR} \mid x \leq -10\}$ respectivamente.

7.1 INEQUAÇÕES PRODUTO

Como resolver inequações que envolvem produto de duas ou mais funções, por exemplo, $(x + 1)(2x - 6) > 0$?

Para resolvemos esse tipo de problema, usaremos uma regra prática, que segue os seguintes passos:

i. Estudar os sinais de cada função;

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ii. Estudar o sinal do produto das duas funções, isto é, encontrar valores de x que tornem a sentença $f(x) \cdot g(x) > 0$, ou seja, valores cujo produto de dois números seja positivo. Isso acontece quando $f(x)$ e $g(x)$ são simultaneamente positivas ou simultaneamente negativas. Veja no gráfico de sinais.

iii. Procurar, no caso desse exemplo, valores positivos, $(x + 1)(2x - 6) > 0$.

O conjunto solução é dado de acordo com o figura 9 abaixo, isto é,
 $S = \{x \in \text{IR} \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$.

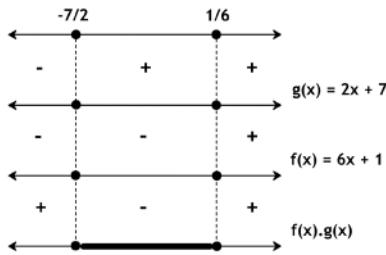


Figura 9 – Esquema gráfico para a solução da inequação $(x + 1)(2x - 6) > 0$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva em IR a inequação $(6x - 1)(2x + 7) \leq 0$.

SOLUÇÃO:

Seguindo os passos descritos acima, temos:

i. Estudamos o sinal de cada função;

$$6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}; \quad 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

ii. Estudamos o sinal do produto, ou seja, procuramos valores de x que tornem a sentença $f(x) \cdot g(x) \leq 0$, ou seja, encontrar valores cujo produto seja nulo quando pelo menos uma das funções for nula e negativo quando f e g tiverem sinais contrários.

iii. De acordo com o figura 10, temos o conjunto solução dado por:

$$S = \{x \in \text{IR} \mid -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{6}\}$$

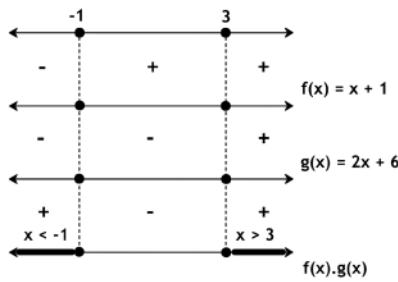


Figura 10 - Esquema gráfico para a solução da inequação $(6x - 1)(2x + 7) \leq 0$

7.2 INEQUAÇÃO QUOCIENTE

São inequações em que aparecem quocientes do tipo:
 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ e $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções reais.

A resolução de inequações quociente é feita de maneira semelhante à das inequações produto. Temos apenas que observar que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Resolva em IR a inequação $\frac{2x+1}{x+2} \geq 0$.

SOLUÇÃO:

Usando os passos aprendidos na resolução de inequações produto, temos:

i. Estudamos o sinal das funções;

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ e } x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

ii. Agora, procuramos encontrar valores de x que tornem a sentença $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$,

considerando que o quociente de dois números é nulo se o numerador for zero ($f(x) = 0$), e é positivo quando o numerador $f(x)$ e denominador $g(x)$ são simultaneamente positivos ou negativos.

iii. Portanto, a partir do gráfico de sinais ao lado, chegamos ao conjunto solução que é dado por $S = \{x \in \text{IR} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq -\frac{1}{2}\}$.

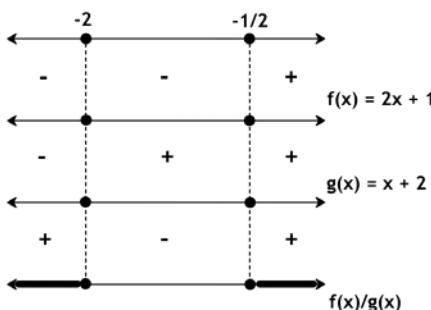


Figura 11 - Esquema gráfico para a solução da inequação $\frac{2x+1}{x+2} \geq 0$

VOCÊ SABIA?

Para resolvemos inequações do tipo $[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geq 0$, $[f(x)]^n \leq 0$ onde $n \in \mathbb{N}^*$, aplicamos as propriedades da potência de base real e expoente inteiro. Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base.

Exemplo: $2^3 = 8$ e $(-2)^5 = -32$

Toda potência de base real e expoente par é um número não-negativo.

Exemplo: $2^4 = 16$ e $(-2)^2 = 4$

Após a revisão dessas propriedades, podemos passar para o exercício seguinte.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Resolva as desigualdades abaixo:

$$(x - 4)^4 > 0$$

$$(3x + 8)^3 < 0$$

$$(4 - 5x)^6 < 0$$

SOLUÇÃO:

Estudamos primeiro o sinal da função $f(x) = x - 4$, sem a potência $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.

Agora encontramos a potência de acordo com as propriedades acima. Nesse caso, o expoente é 4, que é um número par. Portanto, temos $[f(x)]^4 = (x - 4)^4$ é positiva para todo $x \neq 4$ e nula para $x = 4$. A solução é, então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$

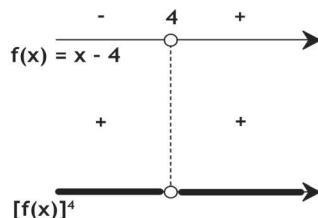


Figura 12 - Esquema gráfico para o estudo do sinal de $(x - 4)^4 > 0$

Seguindo o mesmo raciocínio, estudamos o sinal da função $f(x) = 3x + 8$ sem a potência $3x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$.

Em seguida analisamos a potência $[f(x)]^3 = (3x + 8)^3$. Como o expoente 3 é ímpar, conserva-se o sinal da função. Portanto, de acordo com o gráfico de sinais abaixo, temos o seguinte conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{8}{3}\}$.

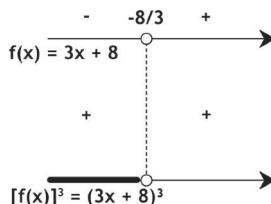


Figura 13 - Esquema gráfico para o estudo do sinal de $(3x + 8)^3 < 0$

Seguindo a mesma linha de pensamento, estudamos o sinal da função

$f(x) = 4 - 5x$ sem levar em consideração a potência $4 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$.

Estudando o sinal da função como expoente $[f(x)]^6 = (4 - 5x)^6$, verificamos que o expoente é par, logo a função é toda positiva e queremos que a desigualdade seja negativa. De acordo com a figura 14 de sinais ao lado, temos o conjunto solução dado por $S = \emptyset$.

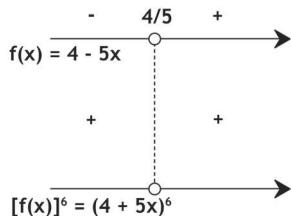


Figura 14 - Esquema gráfico para o estudo do sinal de $(4 - 5x)^6 < 0$

8. FUNÇÃO LINEAR

A função linear dada por $f(x) = ax$ é uma função afim com $b = 0$. Esse modelo matemático é muito utilizado para problemas de proporcionalidade.

8.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear crescente, as afirmações são equivalentes:

$$f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $a = f(1)$, temos que $f(x) = ax$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A demonstração desse teorema você encontra em Lima et al. (2005).



SAIBA MAIS!

Para saber mais sobre proporcionalidade, consulte o livro 1 indicado ao final desta aula, em Referências. Para saber mais sobre esse assunto, consulte o site <https://sites.google.com/site/wellersonquintaneiro/biblioteca/colecao-matematica-ele>

TÓPICO 3

Função quadrática

OBJETIVOS

- Conhecer e interpretar a função quadrática
- Construir e interpretar gráficos
- Analisar os principais pontos da parábola
- Resolver problemas que envolvam a função quadrática
- Determinar o valor de máximo e mínimo de uma função

1. DEFINIÇÃO

Função quadrática é toda aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde a, b, c são números reais conhecidos e $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Exemplos:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4, \text{ onde } a = 1, b = -2 \text{ e } c = 4$$

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1, \text{ onde } a = -2, b = 3 \text{ e } c = 1$$

$$f(x) = x^2 - 9, \text{ onde } a = 1, b = 0 \text{ e } c = -9$$

$$f(x) = 2x + x^2, \text{ onde } a = 1, b = 2 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = x^2, \text{ onde } a = 1, b = 0 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = 4 + 5x^2 - 3x, \text{ onde } a = 5, b = -3 \text{ e } c = 4$$

2. GRÁFICO

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola e pode ser demonstrado usando-se a geometria analítica. Para isso, considere um ponto fixo F , chamado foco, e que pertence ao eixo de simetria, e uma reta d , chamada diretriz. A parábola, então, é o conjunto de pontos que distam igualmente de F e d . Em Lima et al. (2005, p. 126-127), você encontrará alguns exercícios que garantem essa afirmação. Entretanto a demonstração dessa afirmativa é feita na disciplina de geometria

analítica, quando estudamos as cônicas, em especial a parábola. No decorrer deste curso, iremos construir o gráfico, atribuindo valores a variável x e obtendo suas respectivas imagens.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = -x^2 + 1$$

SOLUÇÃO:

Construímos uma tabela, atribuímos valores a variável x e obtivemos as suas respectivas imagens através lei de formação $y = f(x)$.

x	$y = x^2 - 1$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

x	$y = -x^2 + 1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3

Em seguida, marcamos cada ponto no plano cartesiano e os unimos, obtendo assim os gráficos (Figura 15).

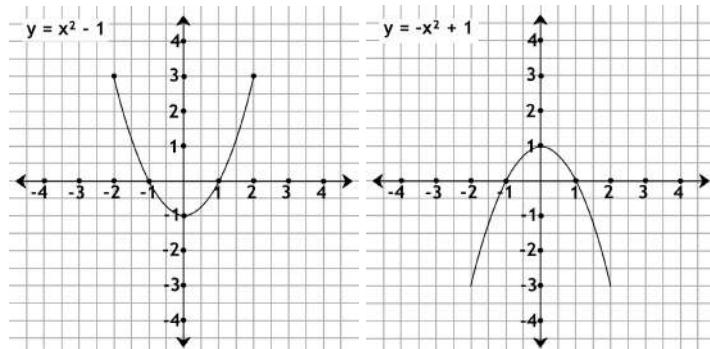


Figura 15 – Gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = -x^2 + 1$

Ao esboçarmos os gráficos desses exemplos, verificamos que, no primeiro caso, o gráfico tem concavidade voltada para cima e $a = 1 > 0$, e, no segundo caso, o gráfico tem concavidade voltada para baixo e $a = -1 < 0$. Portanto, concluímos que a constante a determina se o gráfico é côncavo para cima ($a > 0$) ou se é côncavo para baixo ($a < 0$).

3. CONGRUÊNCIA DAS PARÁBOLAS

Duas funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ possuem parábolas congruentes se $a' = \pm a$. No caso de $a' = a$, a transformação de uma parábola na outra é feita por meio de uma translação horizontal seguida de uma translação vertical. Se $a' = -a$, além das translações horizontal e vertical, devemos fazer a reflexão em torno do eixo OX (LIMA, 2005, p. 132-134).

É importante observar que a congruência de duas parábolas depende apenas do coeficiente a e a' . Já os coeficientes b , b' , c e c' determinam a posição da parábola em relação aos eixos. O valor c é a ordenada do ponto que a parábola intercepta o eixo vertical (eixo das ordenadas) e b é a inclinação da tangente nesse mesmo ponto. (LIMA, 2005, p. 137-139).

A figura 16 mostra a congruência de duas parábolas.

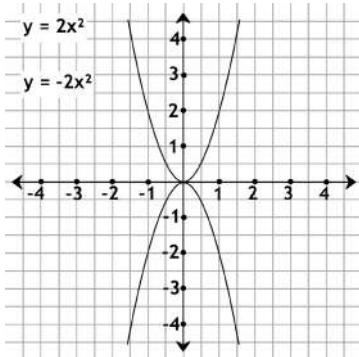


Figura 16 – Gráfico que exemplifica uma congruência entre parábolas

4. FORMA CANÔNICA

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser representada de uma maneira mais conveniente, que facilita a sua análise. Essa representação é chamada de forma canônica. A forma canônica é obtida de modo que tenhamos o quadrado da soma de dois termos, conforme o desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante do trinômio do 2º grau.

5. ZEROS OU RAIZ

Os zeros de uma função são os valores de x tais que $f(x) = 0$, ou seja, são os valores nos quais a função f intercepta o eixo x . Portanto,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

Como $a \neq 0$, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observe que as raízes dependem do valor de Δ , sendo assim, as raízes reais dependem do fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Portanto, devemos considerar os três casos seguintes:

1º Caso: $\Delta > 0$

Nesse caso, temos duas raízes reais e distintas dadas por $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2º Caso: $\Delta = 0$

Nesse caso, temos duas raízes reais e iguais dadas por $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

3º Caso: $\Delta < 0$

Já nesse caso, não existe $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$, logo a equação não possui raízes reais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Verificar o número de raízes de cada função do 2º grau abaixo:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

SOLUÇÃO:

Como as raízes dependem do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, logo temos duas raízes reais distintas que são:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}, \text{ ou seja: } x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$, logo a função não possui raízes reais.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$, logo temos duas raízes reais e iguais dadas por $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2}$.

SAIBA MAIS



Para saber mais sobre a fórmula de Bháskara, consulte o site
<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formula-bhaskara.htm>.

5.1 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

Geometricamente, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo x.

EXEMPLO:

Ao esboçarmos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$, temos:

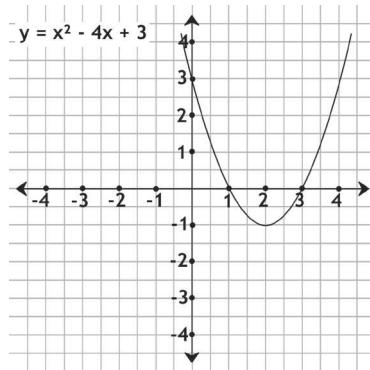


Figura 17 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Percebemos que os pontos em que o gráfico corta o eixo x possuem abscissas $x = 1$ e $x = 3$, que são as raízes da função.

5.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS

O valor máximo de uma função é o maior valor que ela assume em seu domínio, ou seja, se y_M é o valor máximo de $y = f(x)$, então $y_M \geq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. Se a função possui um valor máximo, então ela tem um ponto de máximo $x_M \in D(f)$, tal que $f(x_M) = y_M$.

O valor mínimo de uma função é o menor valor que ela pode assumir em seu domínio, ou seja, se y_m é o valor mínimo de $y = f(x)$, então $y_m \leq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. Se a função possui um valor mínimo, então ela tem um ponto de mínimo $x_m \in D(f)$, tal que $f(x_m) = y_m$.

5.2.1. TEOREMAS

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $a < 0$, a função quadrática admite um valor máximo, que é dado por $y_M = \frac{-\Delta}{4a}$, e um ponto de máximo, que é dado por $x_M = \frac{-b}{2a}$.

Se $a > 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite um valor mínimo $y_m = \frac{-\Delta}{4a}$ e um ponto de mínimo $x_m = \frac{-b}{2a}$.

Demonstração

Considere a função na forma canônica $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

Considere agora $a < 0$. Então, o valor de y será maior possível quanto

menor for a diferença da expressão em colchetes na forma canônica, isto é, se $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ for mínimo.

Como $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é uma constante, pois só depende das constantes a, b e c e $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para todo x real, então a diferença será mínima quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Portanto, para $x = -\frac{b}{2a}$ e $a < 0$, temos um valor máximo que é dado por:

$$y = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = -\frac{\Delta}{4a}$$

A demonstração do teorema II é análoga e é deixada como exercício.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Determine o valor máximo ou mínimo e o ponto de máximo ou de mínimo das funções:

$$y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$$

$$y = 2x^2 - 5x + 2$$

SOLUÇÃO:

Como $a = -1 < 0$, então a função admite um valor máximo que é dado por $y_m = \frac{-\Delta}{4a}$. Calculando o valor do discriminante temos: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{-2}{9} \right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$. Portanto, o valor máximo é:

$$y_m = \frac{-\frac{1}{9}}{4(-1)} = \left(-\frac{1}{9} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{36}; \text{ E o ponto de máximo é:}$$

$$x_m = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-1}{2(-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Como $a = 2 > 0$, então a função possui um valor mínimo. Calculando o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, temos $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$.

Portanto, o valor mínimo é $y_m = \frac{-\Delta}{4 \cdot a} = \frac{-9}{4 \cdot 2} = \frac{-9}{8}$ e o ponto de mínimo é $x_m = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$.

6. VÉRTICE DA PARÁBOLA

O vértice da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o ponto $V\left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{-\Delta}{4 \cdot a}\right)$, pois é o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Determine o vértice das parábolas:

$$y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$$

$$y = x^2 - 4$$

SOLUÇÃO:

O vértice é dado por $V\left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{-\Delta}{4 \cdot a}\right)$. Logo, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$, e como $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{-2}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$, temos:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{1}{9}}{4 \cdot (-1)} = \frac{1}{36}.$$

Portanto, o vértice é $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{36}\right)$.

Analogamente, temos $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$, e como o discriminante é

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16$, então $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$. Portanto, o vértice é $V(0, -4)$.

7. IMAGEM

Para determinar a imagem da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, considere-a na forma canônica $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, onde $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, temos:

Se $a > 0$, a função possui um valor mínimo $-\frac{\Delta}{4a}$, portanto
 $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq y_m = -\frac{\Delta}{4a}$, logo $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$, isto é, se $a > 0 \Rightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a}$.

Se $a < 0$, a função possui um valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$, portanto
 $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq y_m = -\frac{\Delta}{4a}$, isto é, se $a < 0 \Rightarrow y \leq -\frac{\Delta}{4a}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Determine a imagem das funções:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

SOLUÇÃO:

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, então a imagem é dada por $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Calculando o valor de Δ ,

temos $\Delta = 1^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1 - 2 = -1$. Portanto, a imagem é $y \geq -\frac{(-1)}{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y \geq \frac{1}{2}$, e

escrevemos $\text{Im}(f) = \left\{ y \in \text{IR} \mid y \geq \frac{1}{2} \right\}$.

Como $a = -1 < 0$, então a imagem é dada $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$. Calculando Δ temos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 16$. Logo o conjunto imagem é dado por $y \leq -\frac{16}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow y \leq 4$
e escrevemos $\text{Im}(f) = \left\{ y \in \text{IR} \mid y \leq 4 \right\}$.

8. EIXO DE SIMETRIA

TEOREMA

O gráfico (figura 18) da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice. Ou seja, possui uma reta $x = \frac{-b}{2a}$.

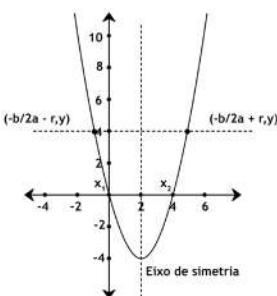


Figura 18 – Gráfico de uma função do 2º grau e seu eixo de simetria

9. SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Estudar o sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é determinar os valores de x , para os quais a imagem da função é positiva, negativa e nula. Ou seja, quando, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ e $f(x) = 0$.

Para resolvemos esse problema, devemos começar analisando o discriminante Δ e o que ocorre para que se chegue a seus três valores possíveis.

1º Caso:

Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$, logo, da forma canônica, temos $af(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, onde a^2 é positivo $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ (positivo ou nulo) e $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ (positivo). Portanto, $af(x) \geq 0$ é um número positivo para todo x . Isso implica dizer que $f(x)$ e a têm o mesmo sinal, ou seja, se $a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$, ou se $a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$.

Graficamente temos:

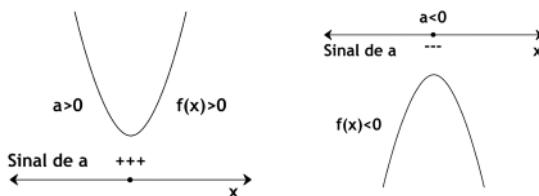


Figura 19 – Gráficos que exemplificam caso em que $\Delta < 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Estude o sinal das funções:

a. $y = x^2 - 2x + 2$

b. $y = -x^2 + x - 1$

Solução:

a) Calculando o valor de Δ , temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, e $a = 1 > 0$, logo $f(x) > 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$.

b) Como $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ e $a = -1 < 0$, então:

$$f(x) < 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$$

2º Caso:

Se $\Delta = 0$, então, da forma canônica, temos:

$$af(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{0}{4a^2} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0.$$

Portanto, temos $af(x) \geq 0, \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, temos:

Se $a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, ou seja, $f(x)$ tem o sinal de a .

Se $a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x, x \in \text{IR} - \{x_1\}$, ou seja $f(x)$ tem o sinal de a .

E $f(x) = 0$ para $x = x_1$, sendo $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

Graficamente, temos:

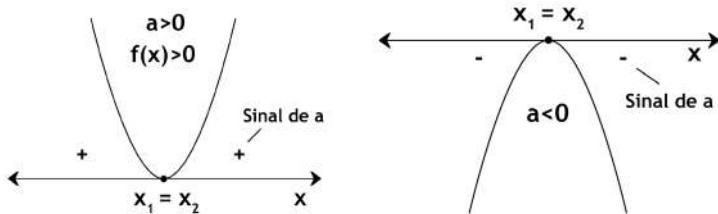


Figura 20 – Gráficos que exemplificam caso em que $\Delta = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Estude o sinal das funções:

$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 8$$

Solução:

Calculando o valor do discriminante, temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ e $x_1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{2} = 1$. Como $a = 1 > 0$, então $f(x) = 0$ se $x = 1$ e $f(x) > 0, \quad \forall x \in \text{IR} - \{1\}$.

Calculando o valor de Δ , temos $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 0$ e $x_1 = \frac{-8}{-4} = 2$.

Como $a = -2 < 0$, então $f(x) < 0, \quad \forall x \in \text{IR} - \{2\}$, e $f(x) = 0$ para $x = 2$.

3º Caso:

Se $\Delta > 0$, temos duas raízes reais e distintas $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Utilizando a forma canônica, temos:

$$af(x) = a^2 \left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = a^2(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Portanto $af(x)$ depende dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Analisando todos os valores possíveis de $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$, temos:

O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x , tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$.

O sinal de $f(x)$ é o sinal contrário de a ($-a$) para todo x , tal que $x_1 < x < x_2$.

Graficamente temos:

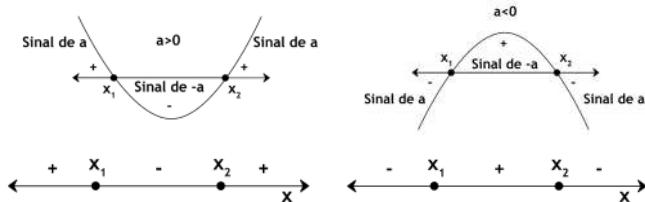


Figura 21 – Gráficos que exemplificam caso em que $\Delta > 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Estude o sinal da função $f(x) = x^2 - x - 6$

SOLUÇÃO:

Calculando o valor do discriminante, temos $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$.

Calculando agora as raízes, temos $x = \frac{-(-1)^2 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$.

Então, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ e $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.

Como $a = 1 > 0$, temos:



Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 6$

Portanto:

$f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 3$

$f(x) < 0$ para $-2 < x < 3$

$f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 3$

10. INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

A resolução de uma inequação envolvendo funções quadráticas é feita de acordo com o estudo do sinal, e este, por sua vez, depende do coeficiente a e do discriminante Δ .

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva no conjunto dos números reais a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

SOLUÇÃO:

Queremos encontrar os valores de x , que tornem a sentença verdadeira. Para isso, começaremos calculando o valor de Δ .

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, portanto temos:

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$, ou seja, $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.

Como $a = 1 > 0$, a função é positiva para os valores de $x < 1$ e para $x > 2$, e é negativa para $1 < x < 2$. (figura 23)



Figura 23 – Solução geométrica da inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$

Como queremos encontrar os valores de x que tornem a desigualdade maior do que zero (positivo), o conjunto solução é, portanto, $S = \{x \in \text{IR} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.

Exercício:

Agora é com você.

Determine o conjunto solução das inequações:

a) $-x^2 + x + 6 > 0$

b) $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$

Respostas:

$$S = \{x \in \text{IR} \mid -2 < x < 3\}$$

$$S = \left\{x \in \text{IR} \mid x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\right\}$$

11. CARACTERÍSTICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática $f(x) = x^2$ transforma a progressão aritmética de números naturais $1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$ na sequência $1, 4, 9, \dots, n^2 - 2n + 1, n^2, n^2 + 2n + 1, \dots$, que não é uma progressão aritmética. Porém, a diferença entre os termos consecutivos da sequência $3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots$ forma uma progressão aritmética. Isso não é coincidência, pois as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ gozam da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2$ e etc formam uma progressão aritmética. A demonstração desse teorema vocês encontra em Lima et al (2005, p. 149-150).



SAIBA MAIS

Para saber mais sobre o assunto, consulte o site:
<https://www.somatematica.com.br/emedio/funcao2/funcao2.php>

AULA 3

Função modular e função composta

Olá aluno(a),

Após termos estudado as principais funções polinomiais, estudaremos agora as funções modulares e a composição de funções, bem como as suas propriedades algébricas.

Objetivos

- Compreender e aplicar o conceito de função modular
- Compreender e aplicar o conceito de função composta

TÓPICO 1

Função modular

OBJETIVOS

- Identificar uma função definida por várias sentenças
- Construir e interpretar gráficos de funções modulares
- Obter soluções de equações e inequações modulares

Neste tópico, estudaremos os módulos, definiremos função modular e resolveremos equações e inequações envolvendo módulo. As desigualdades que envolvem módulo são muito utilizadas nas demonstrações de limites nas disciplinas de cálculo.

O estudo do módulo e da função modular tem sido um desafio para os professores, principalmente os do ensino médio, a começar pelas definições. Apesar disso, um bom professor de matemática deve explorar as ideias das diversas aplicações do módulo em funções e na geometria analítica, a fim de estabelecer estratégias para dinamizar com eficiência cada saber requerido no estudo do valor absoluto.

1. CONCEITOS PRELIMINARES

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 0 \\ x + 2, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 4, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

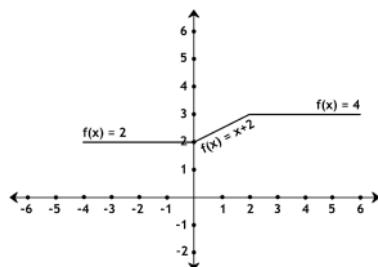


Figura 1 - Função definida por várias sentenças

Essa função é definida por três funções, logo ela é uma função definida por várias sentenças.

É importante entender o comportamento de uma função definida por várias sentenças, pois uma função modular é uma função definida por duas sentenças, como veremos a seguir.

2. MÓDULO

Seja x um número real, então o módulo ou valor absoluto de x é o próprio valor de x se x for um número positivo, e é o simétrico de x se x for negativo.

Denotaremos por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

a. $|2| = 2$

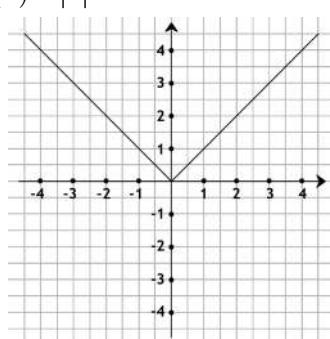
b. $|-5| = -(-5) = 5$

c. $\left| \frac{-1}{3} \right| = -\left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{1}{3}$

3. FUNÇÃO MODULAR

Função modular é toda aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada elemento $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $|x| \in \mathbb{R}$. Denotaremos por: $f(x) = |x|$.

Como $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, isto é, a imagem da função modular assume valores não negativos, o módulo é um valor absoluto. Portanto, o gráfico da função $f(x) = |x|$ é:



x	y = x
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

Figura 2 - Gráfico da função modular

4. CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico de uma função modular, podemos proceder de duas maneiras:

1^a maneira:

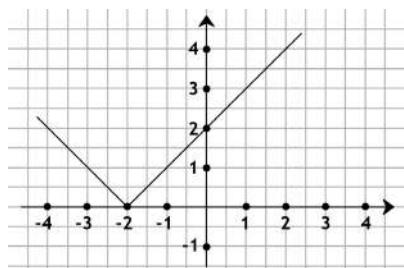
Transformamos a função modular em uma função definida por duas sentenças. Em seguida, esboçamos o seu gráfico.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$.

SOLUÇÃO:

Seguindo a regra de módulo e fazendo os cálculos, temos
$$f(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -(x + 2), & \text{se } x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$
, atribuindo valores à variável x conforme manda a função, isto é, valores maiores ou iguais menos dois para a expressão $x + 2$ e valores menores que dois para a expressão $-(x + 2)$, conforme tabela abaixo. Em seguida, marcamos os pontos obtendo assim o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$.



x	$y = x + 2$
-2	0
0	2
x	$y = -(x + 2)$
-2	0
-4	2

Figura 3a - Processo da construção do gráfico da função modular

2^a maneira:

Nesse método, esboçamos o gráfico da função interna ao módulo $g(x)$ e, em seguida, fazemos o gráfico da função modular $f(x) = |g(x)|$ da seguinte maneira:

Se $g(x) \geq 0$, então $f(x) = g(x)$, isto é, o gráfico de f coincide com o gráfico de g .

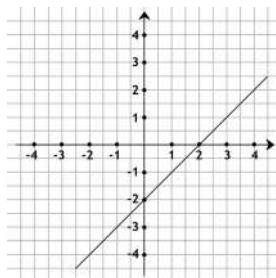
Se $g(x) \leq 0$, então $f(x) = -g(x)$, e o gráfico de f é simétrico ao gráfico de g .

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Esboce o gráfico da função $f(x) = |x - 2|$.

SOLUÇÃO:

Inicialmente esboçamos o gráfico da função $g(x) = x - 2$, que é a função interna ao módulo, atribuindo valores conforme a tabela abaixo:



x	y = g(x)
0	-2
1	-1
2	0
3	1
4	2

Figura 3b - Processo da construção do gráfico da função modular

Agora esboçamos o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$. Seguindo a regra, temos $f(x) = g(x)$ se $g(x) \geq 0$, isto é, as funções f e g são iguais para valores de x maiores ou iguais a dois. As funções f e g são simétricas para valores de x menores que dois, ou seja, $f(x) = -g(x)$ se $g(x) < 0$ (figura 3c).

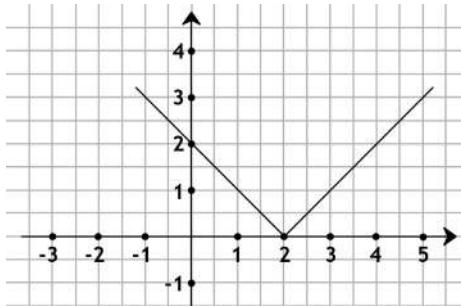


Figura 3c - Processo da construção do gráfico da função modular

5. EQUAÇÕES MODULARES

As equações que envolvem módulos são chamadas equações modulares e podem ser escritas nas seguintes formas:

Equações do tipo $|f(x)| = k$, onde k é uma constante positiva. Esse tipo de equações são as mais simples. Para resolvê-las, usamos apenas a definição de módulo estudada anteriormente, ou seja, $|f(x)| = k \Rightarrow f(x) = k$ ou $|f(x)| = k \Rightarrow f(x) = -k$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação modular $|2x - 3| = 1$.

SOLUÇÃO:

Por definição do módulo, temos $2x - 3 = \pm 1$. Fazendo os cálculos, temos:

$2x - 3 = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $2x - 3 = -1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Portanto o conjunto solução é $S = \{1, 2\}$.

Equações do tipo $|f(x)| = g(x)$. Para resolvemos este tipo de equação, devemos levar em conta que $g(x)$ não pode ser negativo, ou seja, $g(x) \geq 0$, uma vez que $g(x)$ é o valor de um módulo (valor absoluto). O processo de resolução é análogo ao anterior.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação $|2x + 4| = x + 1$.

SOLUÇÃO:

Para que a sentença seja verdadeira, temos que considerar a condição de existência, isto é, a expressão $x + 1 \geq 0$. Isso implica que $x \geq -1$.

Usando a definição de módulo e fazendo os cálculos, temos:

$$|2x + 4| = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = x + 1 \Rightarrow x = -3 \\ \text{ou} \\ 2x + 4 = -x - 1 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Em que $x = -3$ e $x = -\frac{5}{3}$ não satisfazem a condição de existência $x \geq -1$.

Portanto a solução é vazia, e escrevemos $S = \emptyset$.

EXERCÍCIOS:

Resolva as equações modulares:

$$|2x - 5| = x - 1$$

$$|2x - 2| = |3x + 1|$$

RESPOSTA:

$$S = \{2, 4\}$$

$$S = \left\{-3, \frac{1}{5}\right\}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Como resolver equações do tipo $|2x - 3| + |x + 2| = 4$?

SOLUÇÃO:

Para resolvemos equações desse tipo, ou seja, equações que envolvem operações com módulo, procedemos da seguinte maneira:

Analisamos cada expressão contida nos módulos. Logo, usando a definição de módulo e fazendo os cálculos, temos:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3, & \text{se } 2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{se } x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

Realizamos agora as operações necessárias, ou seja, somamos os dois módulos $|2x - 3| + |x + 2|$, levando em consideração os intervalos onde eles são positivos e negativos (definição do módulo) (quadro abaixo)

	-2	$\frac{3}{2}$	
$ 2x - 3 $	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x - 3 + x + 2 $	$-3x + 1$	$-x + 5$	$3x - 1$

Transformamos a equação modular em uma equação definida por várias sentenças, nesse caso, em três sentenças. Temos que considerar o intervalo de existência de cada função. Portanto, teremos a seguinte sentença:

$$|2x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} -3x + 1, & \text{se } x < -2 \\ -x + 5, & \text{se } -2 \leq x < \frac{3}{2} \\ 3x - 1, & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Agora resolvemos cada sentença, levando em conta cada condição de existência. Fazendo os cálculos, temos:

i) para a primeira expressão $-3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1$. Esse valor não serve como solução, pois não atende a condição $x < -2$.

ii) para a segunda expressão, temos $-x + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$; e para a terceira, temos $3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$. Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

6. INEQUAÇÕES MODULARES

As desigualdades em que aparecem módulos são chamadas de inequações modulares. Elas podem ser:

Do tipo $|f(x)| < k$ ou $|f(x)| > k$ onde k é uma constante positiva. Esse tipo de desigualdades modulares são as mais simples.

Para resolvemos esse tipo de desigualdades, usamos a definição de módulo, isto é, $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ e $|x| > k \Leftrightarrow x < -k$ ou $x > k$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Resolva as inequações modulares:

$$|4x - 6| > 5$$

$$|3x - 2| < 4$$

SOLUÇÃO:

Das desigualdades de módulos, temos $|4x - 6| > 5$, então $4x - 6 > 5$ ou $4x - 6 < -5$. Fazendo os cálculos, concluímos que:

$$|4x - 6| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 6 > 5 \Rightarrow 4x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{4} \\ \text{ou} \\ 4x - 6 < -5 \Rightarrow 4x < 1 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{11}{4}\right\}.$$

Da desigualdade de módulos, temos $|3x - 2| < 4$. Isso implica que $-4 < 3x - 2 < 4$. Fazendo os cálculos, isto é, somando duas unidades a toda essa expressão, encontramos $-4 + 2 < 3x - 2 + 2 < 4 + 2$, o que implica dizer que $-2 < 3x < 6$. Se dividirmos toda a

VOCÊ SABIA?

Quando marcamos os elementos (x, y) no plano cartesiano (\mathbb{R}^2), eles surgem como as coordenadas cartesianas do ponto $p(x, y)$ no plano (x = abscissas, y = ordenada) de eixos ortogonais OX e OY , que se intercepta na origem O do sistema de coordenadas.

desigualdade por 3, teremos $-\frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$. Portanto o conjunto solução é dado por $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2 \right\}$.

2. Qual o conjunto solução da inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$?

Solução:

Esse tipo de inequação modular é a mais complexa. Para resolvêmos, utilizamos um método análogo ao utilizado na resolução de equações modulares, ou seja, estudamos o sinal dos módulos e transformamos a inequação modular em uma inequação definida por várias sentenças. Em seguida resolvemos cada desigualdade.

Para o exemplo acima, iniciamos analisando os módulos $|2x - 6|$ e $|x|$.

Ou seja, da definição de módulo, temos $|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6, & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6, & \text{se } x < 3 \end{cases}$ e $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Em seguida realizamos as operações necessárias. Nesse caso, a diferença dos módulos é $|2x - 6| - |x|$, conforme esquema abaixo:

		0	3
$ 2x - 6 $	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$ x $	$-x$	x	x
$ 2x - 6 - x $	$-x + 6$	$-3x + 6$	$x - 6$

Transformamos, os módulos em expressões definidas por várias sentenças, considerando os intervalos de existência de cada uma. Portanto, $|2x - 6| - |x|$ é equivalente às expressões:

$$|2x - 6| - |x| = \begin{cases} -x + 6, & \text{se } x < 0 \\ -3x + 6, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 6, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Agora, resolvemos cada sentença, considerando as suas respectivas condição de existência. Para a primeira desigualdade, temos $-x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow 6 \leq 4$ (absurdo).

Já para a segunda desigualdade, temos $-3x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow -2x \leq -2 \Rightarrow x \geq 1$. Como a condição de existência é que $0 \leq x < 3$, então da interseção dos dois (ilustração abaixo), temos $1 \leq x < 3$. Finalmente a terceira desigualdade $x - 6 \leq 4 - x \Rightarrow 2x \leq 10 \Rightarrow x \leq 5$. Como é válida para $x \geq 3$, então da interseção dos dois (ilustração abaixo), temos $3 \leq x \leq 5$. Portanto, a solução é dada por: $S = \{x \in \text{IR} \mid 1 \leq x < 3\} \cup \{x \in \text{IR} \mid 3 \leq x \leq 5\} = \{x \in \text{IR} \mid 1 \leq x \leq 5\}$.



Figura 4 - Soluções da equação modular

i
SAIBA MAIS

Para saber mais sobre funções modulares, consulte o site:

<https://www.estudopratico.com.br/funcao-modular/>

TÓPICO 2

Função composta

OBJETIVOS

- Identificar uma composição de funções
- Obter composição de funções
- Obter funções conhecendo a composição de outras

Uma vez que já estudamos as principais funções algébricas, passaremos agora a estudar a composição de funções. Estudaremos a composição de funções, bem como a determinação de uma função, a partir de sua composição com outras funções. As funções compostas são muito utilizadas, principalmente nas disciplinas de cálculo, em que trabalharemos com as derivadas e as integrais que envolvem esse tipo de função.

O professor de matemática deve estar atento às dificuldades dos alunos. Buscando facilitar o entendimento sobre função composta, é importante que o professor, na medida do possível, relate as funções com a composição de outras e mostre em que condições isso pode ocorrer, pois a grande dificuldade dos alunos é identificar uma função composta, principalmente quando se estudam derivadas de funções compostas (regra da cadeia).

1. DEFINIÇÃO

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de um conjunto B em um conjunto C , a função composta de g e f é uma função h de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

Aplica-se a x a função f , obtendo-se $f(x)$.

Aplica-se a $f(x)$ a função g , obtendo-se $g(f(x))$.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e sejam as funções f de A em C definidas por $f(x) = x^2$ e g de C em B dadas por $g(x) = 2x+1$.

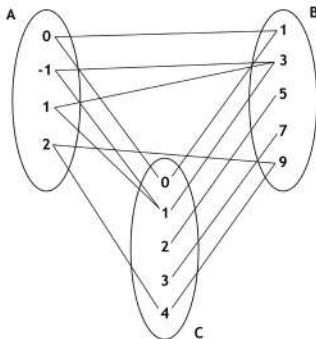


Figura 5 - Ilustração da composição de duas funções

Da figura 5 acima, temos $f(2)=4$, $g(4)=9$ e $h(2)=9$, ou seja, $h(2)=(gof)(2)=g(f(2))=g(4)=9$.

Para obtermos a lei de formação da função composta $h = gof$, substituímos x na função $g(x)$ por $f(x)$, ou seja, $h(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 1$.

Observe que a composição gof só está definida quando o contradomínio da função f é igual ao domínio de g .

Para obtermos a lei de formação da função composta $h = gof$, substituímos x na função $g(x)$ por $f(x)$, ou seja, $h(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 1$.

Note que a composta gof só está definida quando o contradomínio da função f é igual ao domínio de g .

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$

- Obtenha as leis que definam fog e gof .
- Calcule $(fog)(2)$ e $(gof)(2)$.
- Determine os valores do domínio da função fog que produzem imagem 16.

SOLUÇÃO:

Substituindo x na função f pela função $g(x)$ e fazendo os cálculos, determinamos $(fog)(x) = f(g(x))$. Ou seja,

$$(fog)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4g(x) - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9 + 8x - 12 - 5 = 4x^2 - 4x - 8$$

Substituindo x na função g pela função $f(x)$ e fazendo os cálculos, determinamos $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ou seja,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(4x^2 - 4x - 8) - 3 = 2x^2 + 8x - 13$$

Uma vez que já conhecemos as funções compostas, basta agora substituir o valor da variável x pelo valor de 2.

$$(g \circ f)(2) = f(g(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

Como $(g \circ f)(x) = 16$, então:

$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x - 8 = 16 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0$, que é uma equação do 2º grau, cuja solução é $S = \{-2, 3\}$.

Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 1$, determine a lei de formação da função f .

SOLUÇÃO:

Como $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = 2x - 3$, então, isolando o valor de x , temos $x = \frac{g(x) + 3}{2}$. Substituindo x por $g(x)$ na função composta e fazendo os cálculos, temos:

$$f(g(x)) = 2 \left[\frac{g(x) + 3}{2} \right]^2 - 4 \left[\frac{g(x) + 3}{2} \right] + 1$$

$$f(g(x)) = 2 \left[\frac{[g(x)]^2 + 6g(x) + 9}{4} \right] - 2g(x) - 6 + 1$$

$$f(g(x)) = \frac{[g(x)]^2}{2} + 3g(x) + \frac{9}{2} - 2g(x) - 5$$

$$f(g(x)) = \frac{[g(x)]^2}{2} + g(x) - \frac{1}{2}$$

Portanto, da composta de f com g , temos $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$.

Dadas as funções $f(x) = 3x - m$ e $g(x) = \frac{x+4}{3}$, determine m de modo que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \forall x, x \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO:

Da composição de funções, temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - m = x + 4 - m$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - m) = \frac{3x - m + 4}{3} = x + \frac{4 - m}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow x + 4 - m = x + \frac{4 - m}{3} \Rightarrow 4 - m = \frac{4 - m}{3}$$

$$12 - 3m = 4 - m \Rightarrow 3m - m = 12 - 4 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$



SAIBA MAIS

Para saber mais sobre esse assunto, consulte o site:
[http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/
superior/algebra/funcoes/funcoes.htm](http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/funcoes/funcoes.htm)



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Esboce o gráfico das funções:

- a) $f(x) = |2x + 4| - 3x + 1$
- b) $f(x) = |x^2 - 3x - 4| + x - 2$

2) Determine o conjunto solução das equações:

- a) $|2x - 3| = 2x - 3$
- b) $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$

3) (UFPI) Seja f uma função real de variável real dada por $f(x) = |x - 3| + 5x$. Podemos afirmar corretamente que:

- a) f é uma função par;
- b) f é uma função ímpar;
- c) f é uma função crescente;
- d) f é uma função decrescente;
- e) $f(x) \geq 0$ para todo número real x .

4) (UFPI) Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$. Então podemos afirmar corretamente que:

- a) $f \circ g = g \circ f$
- b) $f(x) \geq g(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $g(x) = (f(x))^2 \forall x \in \mathbb{R}$
- d) $g(x) \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- e) $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

AULA 4

Outras funções
elementares

Olá aluno (a),

Nesta aula, vamos dar continuidade ao nosso estudo sobre funções elementares. Veremos, então, as funções sobrejetoras, injetoras, bijetoras, inversas, cúbicas, maior inteiro e recíproca, bem como as suas principais propriedades. Esse conhecimento é muito importante para o professor de matemática compreender o comportamento de certas funções, principalmente quando estudar cálculo diferencial e integral.

Objetivos

- Identificar injeção, sobrejeção e bijeção de funções
- Interpretar e analisar o comportamento de funções cúbicas, maior inteiro e recíproca

TÓPICO 1

Funções sobrejetora,
injetora, bijetora

OBJETIVOS

- Identificar funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras
- Reconhecer injecão, sobrejeção e bijectão de funções
- Obter composições de funções injetoras e sobrejetoras

Nesse tópico definiremos as funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras, bem como as condições em que podemos obter essas funções tanto do ponto de vista algébrico como do ponto de vista gráfico.

1. FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função de f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Observe que, na função sobrejetora, a imagem é igual ao contradomínio.

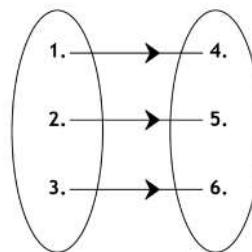


Figura 1 - Representação de sobrejeção de A em B

2. FUNÇÃO INJETORA

Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 pertencentes a A , se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Veja que, para cada elemento distinto do domínio A , existe uma imagem distinta em B .

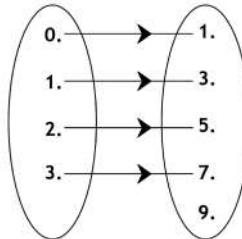


Figura 2 - Representação de injeção de A em B

3. FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

A função é sobrejetora, pois todos os elementos de B estão associadas a pelo menos um elemento de A , e é injetora, pois cada elemento distinto em A está associado a elementos distintos em B . Portanto f é bijetora.

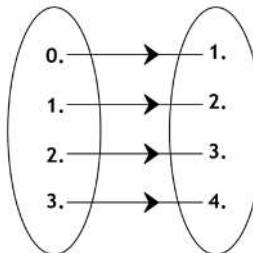
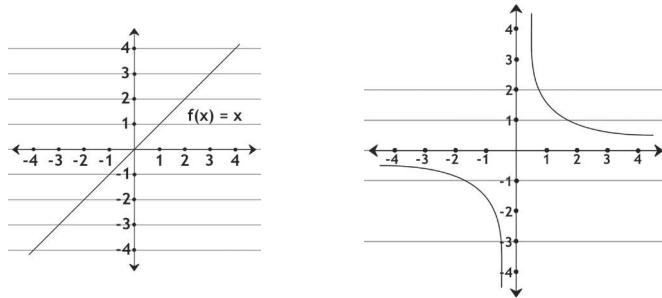


Figura 3 - Representação de bijeção de A em B

4. CLASSIFICAÇÃO ATRAVÉS DE GRÁFICO

Conhecido o gráfico de uma função f , podemos verificar se ela é injetora, sobrejetora ou bijetora. Para isso, traçamos retas paralelas ao eixo dos x , em todo o contradomínio de f , e analisamos da seguinte maneira:

1º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um único ponto ou não cortar o gráfico, a função é injetora.



$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \frac{1}{x}$$

Figura 4 - Reconhecimento de uma função injetora por meio do seu gráfico

2º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em pelo menos um ponto, então a função é sobrejetora.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tal que } f(x) = x^2$$

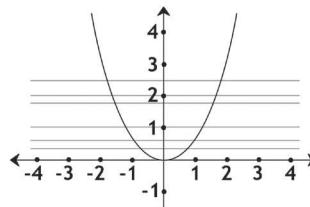


Figura 5 - Reconhecimento de uma função sobrejetora por meio do seu gráfico

3º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um único ponto, então a função é bijetora.

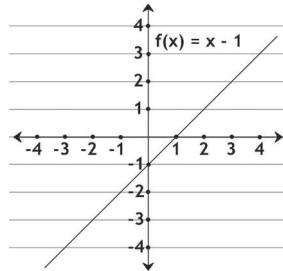


Figura 6 - Reconhecimento de uma função bijetora por meio do seu gráfico

Essas funções são muito utilizadas no estudo da álgebra. Portanto, é de fundamental importância que o aluno de licenciatura esteja atento as suas definições, em especial as funções bijetoras, pois ela é uma condição necessária e suficiente para que tenhamos uma inversão de funções, que estudaremos a seguir.



SAIBA MAIS

Para aprender um pouco mais sobre as funções elementares de que tratamos neste tópico de nossa aula, consulte o site:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/funcoes/funcoes.htm>

TÓPICO 2

Função inversa

OBJETIVOS

- Identificar se uma função possui inversa
- Obter funções inversas de uma função dada

No tópico anterior, aprendemos a identificar uma função bijetora. Estudaremos agora as funções inversas. Determinaremos também a inversa de uma função, bem como as propriedades e composição de funções inversíveis.

1. CONCEITOS PRELIMINARES

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Seja f uma função definida por $f(x) = 2x$.

ATENÇÃO!



Se duas funções f e g são inversíveis, então o domínio g é o conjunto imagem de f , e o conjunto imagem de g é o domínio de f .
 $D(g) = D(f^{-1}) = B$
 $Im(g) = Im(f^{-1}) = A$

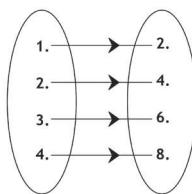


Figura 7 - Ilustração de função que possui inversa

Veja que a função f é bijetora, então a relação g de B em A tal que $g(x) = \frac{x}{2}$ é também uma função. Nesse caso, dizemos que g é inversa de f e escrevemos $g = f^{-1}$.

2. DEFINIÇÃO

Se f é uma função bijetora de A em B , a relação inversa de f de B em A é chamada de função inversa.

3. TEOREMA

Seja $f : A \rightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

A demonstração desse teorema fica como exercício proposto.

Como determinar a inversa de uma função?

Para determinarmos a inversa de uma função, usamos uma regra prática que segue os seguintes passos:

1º) Na sentença $y = f(x)$, fazemos uma mudança de variável, trocamos x por y e y por x e, então, obtemos $x = f(y)$.

2º) Transformamos algebraicamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x e obtendo, assim, $y = f^{-1}(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Qual é a inversa da função bijetora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$?

SOLUÇÃO:

Para resolvemos, permutamos as variáveis x e y na função $y = 2x + 3$, obtendo, assim, $x = 2y + 3$. Expressando y em função de x , temos $x = 2y + 3 \Rightarrow 2y = x - 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$. Portanto a inversa f^{-1} de \mathbb{R} em \mathbb{R} é dada por $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Determine a inversa da função bijetora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

SOLUÇÃO:

Utilizando os passos descritos anteriormente, temos: $y = x^3$. Então $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$. Logo, a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

4. PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS DE f E f^{-1}

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13} ou $y = x$) no plano cartesiano (ilustração abaixo)

A ilustração mostra a função $f(x) = 2x + 3$ e a sua inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, bem como a simetria com a reta $y = x$.

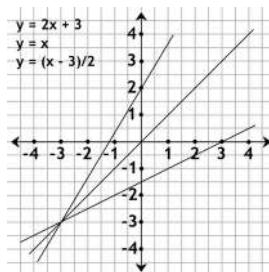


Figura 8 - Funções inversíveis e simetria com a bissetriz dos quadrantes ímpares

5. COMPOSIÇÕES DE FUNÇÕES INVERSAS ENTRE SI

TEOREMAS:

Seja f uma função bijetora de A em B . Se f^{-1} é a inversa de f , então:

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A$ e $(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = y = I_B$, em que I_A e I_B são funções identidades.

Se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras, então $(gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, ou seja, a inversa da composta é igual à composta das inversas.

A demonstração desse teorema é deixada como exercício.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Seja a função de $\mathbb{R} - \{-2\}$ em $\mathbb{R} - \{-4\}$ definida por $f(x) = \frac{4x-3}{x+2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com a imagem 5?

SOLUÇÃO:

Queremos encontrar um valor de $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f^{-1}(a) = 5$. Para isso basta determinar a tal que $f(5) = a$.

$$a = f(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7}$$

Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ e a função f de A em B definida por $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$. Obtenha a função inversa de f .

SOLUÇÃO:

Veja que a função $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$ é válida para $x \geq 1$ e $y \geq 2$. Logo, usando a regra prática, ou seja, permutando x por y , temos $x = y^2 - 2y + 3$ com $x \geq 2$ e $y \geq 1$.

Expressando y em função de x , completando o quadrado da diferença, temos:

$$y^2 - 2y + 3 = x \Rightarrow y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 + 3 - 1^2 = x$$

$$y^2 - 2y + 3 = x \Rightarrow (y - 1)^2 + 2 = x \Rightarrow (y - 1)^2 = x - 2$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{x - 2} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{x - 2}$$

Portanto: $y = 1 + \sqrt{x - 2}$ ou $y = 1 - \sqrt{x - 2}$. Como, para a função inversa $x \geq 2$ e $y \geq 1$, a sentença $y = 1 - \sqrt{x - 2}$ não convém, então a função inversa procurada é dada por $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$.

É importante que você, aluno, verifique que esse exercício anterior atende ao teorema descrito acima.

TÓPICO 3

Funções cúbicas, recíprocas e maior inteiro

OBJETIVOS

- Construir gráficos e interpretar o comportamento das funções
- Conhecer domínio e conjunto imagem

Uma vez compreendido o que vimos até aqui sobre funções, analisaremos agora o comportamento de algumas funções, que serão fundamentais para o estudo de disciplinas posteriores.

1. FUNÇÃO $f(x) = x^3$

1.1 DEFINIÇÃO

É uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $x^3 \in \mathbb{R}$. E denotaremos por $f(x) = x^3$.

1.2 GRÁFICO

Para construirmos o gráfico da função, atribuímos valores a x e determinamos os valores de y (figura 9).

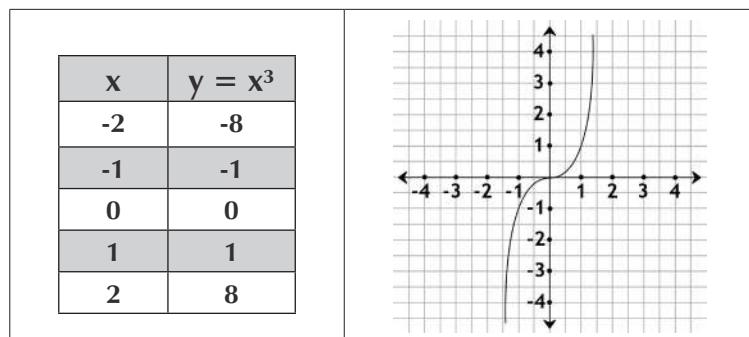


Figura 9 - Representação do gráfico da função cúbica

Observe que a função $f(x) = x^3$ é uma função crescente em \mathbb{R} , isto é, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes aos reais com $x_1 < x_2$, temos $(x_1)^3 < (x_2)^3$.

EXERCÍCIO:

Construa o gráfico das funções definidas em \mathbb{R} .

- a. $f(x) = x^3 + 1$
- b. $f(x) = (x+1)^3$
- c. $f(x) = -x^3$
- d. $f(x) = (2-x)^3$

2. FUNÇÃO RECÍPROCA

2.1 DEFINIÇÃO

É uma aplicação f de \mathbb{R}^* em \mathbb{R}^* , que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ o elemento $\frac{1}{x}$. E denotaremos por: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.2 GRÁFICO

A tabela a seguir ilustra alguns valores das variáveis x e y . Marcando esses pontos no plano cartesiano, obtemos o gráfico abaixo.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

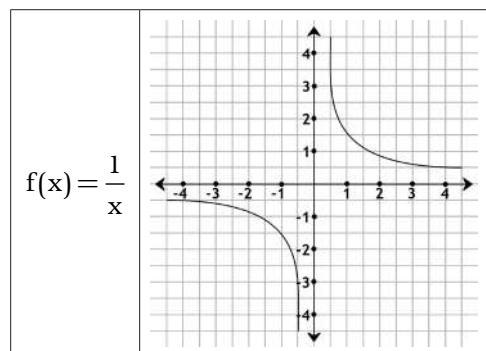


Figura 10 - Representação do gráfico da função recíproca

Observe que a função recíproca não está definida para $x=0$ e sua imagem é o conjunto dos reais exceto o número zero. Isso implica que o gráfico da função recíproca não corta os eixos x e y . Observe, ainda, que, para valores muito grandes (infinitamente) ou muito pequenos (menos infinito ou infinitamente negativo), o gráfico tangencia o eixo x (é assintótico); e, para valores próximos de zero, ele tangencia o eixo dos y . Nesse dois casos o gráfico é assintótico.

EXERCÍCIO:

Para as funções abaixo, esboce o gráfico e determine seu domínio.

a. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b. $f(x) = \frac{1}{2-x}$

c. $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$

d. $f(x) = \frac{x}{|x-1|}$

3. FUNÇÃO MÁXIMO INTEIRO OU MAIOR INTEIRO

3.1 DEFINIÇÃO

É uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$, que é o maior inteiro que não supera x .

EXEMPLOS:

a. $[2,8] = 2$

b. $[-0,5] = -1$

c. $[3] = 3$

3.2 GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico, atribuímos valores a x e determinamos o seu maior inteiro. Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano e os unimos.

EXEMPLO:

Construa o gráfico da função $f(x) = [x]$.

Construímos uma tabela de valores e assim temos:

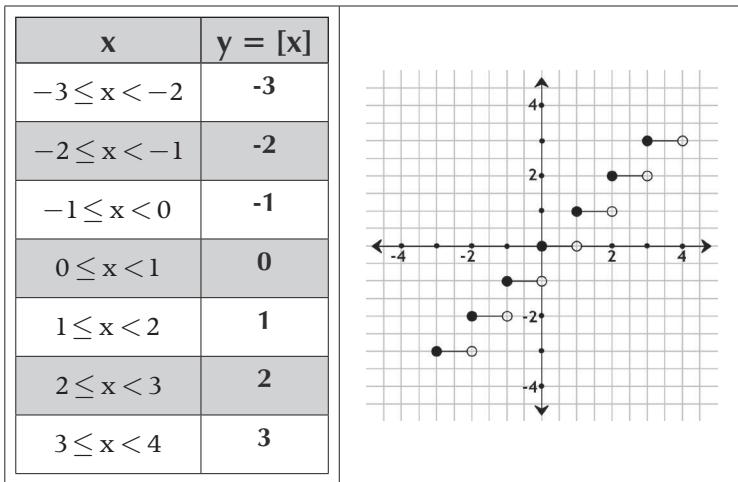


Figura 11 - Representação do gráfico da função maior inteiro

Observe que o gráfico da função é um gráfico na forma de escada, a imagem é o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} e o domínio é o conjunto dos números reais.

EXERCÍCIO:

1) Construa o gráfico das funções definidas em IR .

- a. $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$
- b. $f(x) = [3x]$
- c. $f(x) = [-x]$
- d. $f(x) = [x - 2]$



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) A função $f : A \rightarrow B$ é dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

a) Determine o domínio de f , isto é, $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \exists f(x)\}$.

b) Determine a imagem de f , isto é, $B = f(A)$.

c) A função é injetora? Por quê?

d) Trace o gráfico da função f .

2) Seja a função f em reais definida por $f(x) = \frac{2x+4}{5}$, esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} e faça uma análise geométrica de cada um.

3) Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = (1-x)^3$

b) $f(x) = (x-1)^3 + 1$

c) $f(x) = |x|^3$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

f) $g(x) = \frac{|x|}{3x}$

g) $g(x) = [3x]$

AULA 5

Funções exponenciais e logarítmicas

Olá aluno(a),

Iniciaremos nossa aula com uma revisão sobre potências e raízes. Em seguida daremos início às funções exponenciais e logarítmicas. Estudaremos também as principais propriedades e suas características.

A função exponencial é uma das mais importantes, pois muitos dos modelos matemáticos utilizam essas funções. Portanto, é fundamental que o professor de matemática explore bem essa função e mostre as suas inúmeras áreas de aplicações.

Objetivos

- Definir e aplicar as propriedades e operações básicas da potência e da radiciação no estudo das funções exponenciais e logarítmicas
- Conhecer e analisar as propriedades características dessas funções

TÓPICO 1

Potenciação

OBJETIVOS

- Conhecer, identificar e utilizar as propriedades da potenciação
- Demonstrar algumas propriedades da potenciação

Nesse tópico iremos mostrar as propriedades da potenciação bem como demonstrar algumas delas e utilizá-las na resolução de exercícios.

1. DEFINIÇÃO

Sendo a um número real e n um número natural, ($n > 1$), então $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$, onde a é a base e n é chamado expoente.

EXEMPLOS:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Veja que 2^3 é o número dois multiplicado por ele mesmo, 3 vezes. Ou seja, o expoente indica quantas vezes a base vai ser multiplicada por ela mesma.

b) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Por definição, se a é um número real, então $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

EXEMPLOS:

a) $3^0 = 1$

b) $(-2)^0 = 1$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$

d) $4^1 = 4$

2. PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

Sendo a e b números reais e n e m números naturais, então são válidas as seguintes propriedades:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$: produto de bases iguais, conservamos a base e somamos o expoente.

EXEMPLO: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

II) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$: quociente de bases iguais, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

EXEMPLO: $\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3$

III) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$: conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

EXEMPLO: $(3^2)^5 = 3^{10}$

IV) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$: cada base elevada ao mesmo expoente.

EXEMPLO: $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

V) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: sendo a um número não nulo, então um número elevado a um

expoente negativo é igual ao inverso da potência positiva.

EXEMPLO: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

VI) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$: a potência do quociente é igual ao quociente da potência.

EXEMPLO: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$

Demonstraremos aqui a propriedade II. As demais são deixadas como exercício.

DEMONSTRAÇÃO:

Demonstraremos por indução que $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ é verdadeira.

Consideremos m fixo.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$a^{0-m} = a^{-m} = a^0 \cdot a^{-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é,

$a^{k-m} = \frac{a^k}{a^m}$. Mostraremos que é verdadeira para todo $n = k + 1$, ou seja,

$a^{k+1-m} = \frac{a^{k+1}}{a^m}$. De fato:

$$a^{k+1-m} = (a^{k+1}) \cdot a^{-m} = (a^k \cdot a^{-m}) \cdot a = \frac{a^k}{a^m} \cdot a = \frac{a^{k+1}}{a^m}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Utilizando as propriedades das potências, simplifique as expressões:

a) $E = \frac{2^{n+2} - 2^n}{3 \cdot 2^{n+1}}$

b) $E = \frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}}$

SOLUÇÃO:

a) Como $2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2$ e $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$, então podemos reescrever a expressão, de outra maneira:

$$E = \frac{2^{n+2} - 2^n}{3 \cdot 2^{n+1}} = \frac{2^n \cdot 2^2 - 2^n}{3 \cdot 2^n \cdot 2}. \text{ Fatorando o numerador e efetuando as operações, temos:}$$

$$E = \frac{2^n(2^2 - 1)}{6 \cdot 2^n}. \text{ Simplificando os termos comuns, neste caso } 2^n, \text{ temos}$$

$$E = \frac{4 - 1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) Como $3^{n+2} = 3^n \cdot 3^2$ e $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$, então a expressão pode ser escrita como

$$E = \frac{3^n \cdot 3^2 + 3^n \cdot 3}{2 \cdot 3^n \cdot 3}. \text{ Fatorando o numerador e efetuando as operações, temos}$$

$$E = \frac{3^n(3^2 + 3)}{6 \cdot 3^n}. \text{ Simplificando, chegamos a } E = \frac{9 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

TÓPICO 2

Radiciação

OBJETIVOS

- Conhecer e utilizar métodos matemáticos para resolver raiz enésima aritmética
- Realizar operações envolvendo radicais

Nesse tópico estudaremos a radiciação e suas principais propriedades e operações envolvendo radicais, bem como utilizá-las na resolução de exercícios envolvendo radicais.

1. DEFINIÇÃO

Sendo a um número real não negativo e n um número inteiro, define-se $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ e $b \geq 0$.

EXEMPLOS:

- $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ e $2 \geq 0$
- $\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9$ e $3 \geq 0$
- $\sqrt[5]{0} = 0 \Leftrightarrow 0^5 = 0$ e $0 \geq 0$

2. PROPRIEDADES DOS RADICIAIS

Se o radicando for não negativo, então são válidas as seguintes propriedades:

I) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$: conservamos o radical e multiplicamos o radicando.

EXEMPLO: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$

II) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$: conservamos o radical e dividimos o radicando.

EXEMPLO: $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$

III) $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$: conservamos o radicando e simplificamos a potência e o índice.

EXEMPLO: $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[2,3]{5^{2,2}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

IV) $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$: conservamos o radical e elevamos o radicando à potência do radical.

EXEMPLO: $(\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{2^3})^4 = 2^4 = 16$

V) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$: conservamos o radicando e multiplicamos o índice do radical.

EXEMPLO: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

Demonstraremos a propriedade 1. As demais são deixadas como exercício para você resolver.

Operando $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, encontramos
 $x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b = ab \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Como $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, então $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

3. SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Mostraremos aqui como se dá a simplificação de um radical. Para facilitar a compreensão, recorreremos à resolução de exercícios. Vamos lá?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Como simplificar o radical $\sqrt{50}$?

SOLUÇÃO:

Fatorando o radicando em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{c|c} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & \\ 1 & \end{array}$$

Ou seja, $50 = 2 \cdot 5^2$. Assim, reescrevemos o radical $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2}$.

Usando as propriedades 2 e 3, temos: $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{2}$.

2. Agora simplifique o radical $\sqrt{160}$.

SOLUÇÃO:

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, ou seja, recorrendo à fatoração em números primos, temos:

160		2
80		2
40		2
20		2
10		2
5		5
1		

Ou seja, $160 = 2^5 \cdot 5$. Portanto, reescrevendo o radical, utilizando as propriedades 2 e 3 e efetuando as operações, temos:

$$\sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{10}$$

4. OPERAÇÕES COM RADICAIS

Podemos realizar as quatro operações básicas envolvendo radicais. Para realizarmos essas operações, verificamos se os radicais são comuns ou não. No caso de os radicais serem comuns, as operações da adição e subtração são feitas somando ou subtraindo os coeficientes dos radicais. Para o produto e divisão, multiplicamos ou dividimos os coeficientes e multiplicamos ou dividimos os radicandos. No caso de os radicais serem diferentes, reduzimos ao mesmo radical e em seguida procedemos como no caso anterior. Nos exercícios a seguir, mostraremos esse procedimento.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Efetue as seguintes operações:

- $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$
- $4\sqrt{8} + 3\sqrt{18}$
- $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3}$
- $4\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$

SOLUÇÃO:

a) Para a soma e a subtração, nos casos em que os radicais são comuns, fatoramos os radicais e realizamos as operações (soma ou diferença). No item a, $\sqrt{5}$ é comum. Logo, fatorando e realizando as operações, temos:

$$6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}(6 + 3 - 4) = 5\sqrt{5}$$

b) Para a soma e subtração, se os radicandos são diferentes, reduzimos ao mesmo radicando e em seguida procedemos como no item anterior.

18	2
9	3
3	3
1	

8	2
4	2
2	2
1	

$$\text{Logo, temos } \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Realizado, então, as operações, temos:

$$4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} = 4 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

c) Para o produto, se os radicais forem iguais, multiplicamos os coeficientes e multiplicamos os radicandos. Logo, efetuando as operações, temos:

$$3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3} = (3 \cdot 5) \left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \right) = 15\sqrt[3]{6}$$

d) No caso da divisão, se os radicais forem comuns, dividimos os coeficientes e dividimos os radicandos. Logo, efetuando as operações, temos:

$$4\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2} \sqrt{\frac{6}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Uma vez revisadas as propriedades e operações envolvendo potenciação e radiciação. Agora vocês estão aptos a estudar as funções exponenciais e logarítmicas.

TÓPICO 3

Função exponencial

OBJETIVOS

- Identificar uma função exponencial
- Identificar as propriedades características da função exponencial
- Determinar soluções de equações e inequações exponenciais
- Construir e interpretar gráficos

Uma vez revisadas as propriedades básicas da potenciação, iremos agora estudar a função exponencial. Também estudaremos as suas propriedades características e resolveremos equações e inequações exponenciais.

1. DEFINIÇÃO

Função exponencial é toda aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* que associa a cada elemento x o elemento a^x , onde a é um número real positivo e diferente de 1.

EXEMPLOS:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $g(x) = 3^x$

d) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

A definição da função $f(x) = a^x$ atende as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y};$

ii) $a^1 = a$;

iii) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Essas propriedades podem ser observadas ao esboçarmos os gráficos das funções exponenciais.

O gráfico da função exponencial é feito atribuindo valores a x , e obtendo o correspondente em y , pela aplicação $y = f(x) = a^x$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Esboce o gráfico das funções e determine o domínio e a imagem.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

SOLUÇÃO:

Atribuindo valores a x , para as funções acima, temos os seguintes valores descritos na tabelas abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Marcando os pontos no plano cartesiano e unindo-os, obtemos os gráficos a seguir:

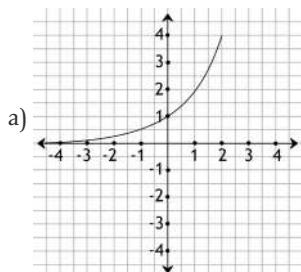


Figura 1 - Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$

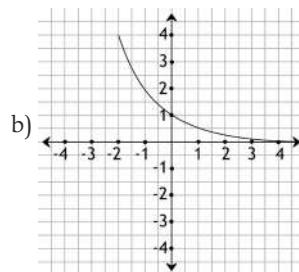


Figura 2 - Gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Observe que a função $y = 2^x$ é uma função crescente, nesse caso $a = 2 > 1$, e a função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente, nesse caso $a = \frac{1}{2}$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$. Portanto, podemos dizer que, se $a > 1$, a função $y = a^x$ é crescente; e, se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Além das descritas anteriormente, a função exponencial tem ainda essas outras propriedades:

iv) Toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é bijetora, isto é, é sobrejetora e injetora.

v) A função $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$ é ilimitada superiormente, isto é, se $a > 1$, a^x cresce sem limites para x muito grande, enquanto se $0 < a < 1$, a^x cresce muito para $x < 0$ (Figura 1 e Figura 2 acima).

vi) A função exponencial é continua.

A continuidade de uma função será tratada na disciplina Cálculo I.

2. CARACTERIZAÇÃO (TEOREMA)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona (crescente ou decrescente) injetiva. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- i. $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- ii. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- iii. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração desse teorema vocês encontram em Lima (2006, p. 183-184).

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL DE BASE e

A função exponencial de base e é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ ou $f(x) = \exp(x)$, onde o número irracional $e = 2,718281828459$ é o único número real positivo tal que a área da hipérbole H_e^x é igual a 1 (LIMA, 2006, p. 200-201).

Esse número também é mostrado na disciplina Cálculo 1, como sendo

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

EXERCÍCIO:

Curva de aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por esse indivíduo. Um exemplo de curva de

aprendizagem é dada pela expressão $Q = 700 - 400e^{-0,5t}$, onde: Q é a quantidade de peças produzidas por um funcionário; t meses de experiência e $e \cong 2,718$ (número de Euler).

De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com dois meses de experiência deverá produzir mensalmente?

E um funcionário, sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente?

SOLUÇÃO:

Para o funcionário com dois meses de experiência, o tempo é $t = 2$. Logo, substituindo t por dois na equação e fazendo as operações, temos:

$$Q(2) = 700 - 400 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = 552,84 \cong 553$$

Para o funcionário sem experiência o tempo é zero ($t = 0$). Portanto, realizando as operações, temos $Q(0) = 700 - 400 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} = 300$.

4. EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Equação exponencial é toda equação em que a variável ou incógnita aparece no expoente de uma ou mais base positiva e diferente de um.

EXEMPLOS:

- a) $2^x = 4$
- b) $3^x = 2^x$
- c) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Para resolvemos uma equação exponencial, usamos a primeira propriedade, ou seja, reduzimos a equação a uma mesma base, e em seguida trabalhamos com os expoentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Resolva as equações no conjunto dos números reais:

- a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8}$
- b) $4^x = 16$
- c) $3^x - 5^x = 0$
- d) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

SOLUÇÃO:

a) Reduzindo 27 e 8 a fatores primos, temos $27 = 3^3$ e $8 = 2^3$. Logo, a equação fica:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3}. \text{ Valendo da propriedade 6 da potenciação, temos } \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

Portanto $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$. Como as bases são iguais, então $x = 3$, e a solução é $S = \{3\}$.

b) Seguindo a mesma forma de resolução do item anterior, temos:

$$4^x = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

c) A equação $3^x - 5^x = 0$ é equivalente à equação $3^x = 5^x$. Como $5^x \neq 0$ para todo x , então dividiremos a equação por 5^x .

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x} \Rightarrow \frac{3^x}{5^x} = 1. \text{ Da definição de potência, temos } a^0 = 1, \text{ para todo } a. \text{ Logo,}$$

$$1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0, \text{ e a equação fica } \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0. \text{ A solução é, portanto, } S = \{0\}.$$

d) Reduzindo 9 a fatores primos, temos $9 = 3^2$. Logo, podemos reescrever a equação $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ ou $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Fazendo uma mudança de variável, $t = 3^x$, temos $t^2 - 4 \cdot t + 3 = 0$, que é uma equação do 2º grau na variável t . Resolvendo, temos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \text{ logo } t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}. \text{ Portanto, } t_1 = \frac{4+2}{2} = 1 \text{ e } t_2 = \frac{4-2}{2} = 3.$$

Substituindo os valores de t em $t = 3^x$, temos para $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 = 3^0 \Rightarrow x = 0$ e para $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 = 3^1 \Rightarrow x = 1$.

Portanto a solução é $S = \{0, 1\}$.

5. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Toda inequação cuja incógnita aparece no expoente de uma base positiva e diferente de 1 é chamada de inequação exponencial.

EXEMPLOS:

a) $4^x < 2^{x+1}$

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geq 11$

c) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

RESOLUÇÃO DE UMA INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

A solução de uma inequação é feita com base na propriedade (iii) da função exponencial. Ou seja, reduzimos as bases a um fator comum e em seguida verificamos se a função é crescente ou decrescente.

Se a função é crescente $a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2$, o sinal da desigualdade se mantém para os expoentes. Já se a função é decrescente $a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2$, o sinal da desigualdade se inverte para os expoentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Resolva em IR a inequação $5^{3x-1} > 25^{x+2}$.

SOLUÇÃO:

Reduzindo à mesma base, temos $25 = 5^2$. Logo $5^{3x-1} > 25^{x+2}$ fica $5^{3x-1} > (5^2)^{x+2}$.

Aplicando a propriedade (3) potência temos que $5^{3x-1} > 5^{2x+4}$, como as bases são iguais e a função é crescente, o sinal da desigualdade permanece para os expoentes.

$$3x - 1 > 2x + 4 \Rightarrow 3x - 2x > 4 + 1 \Rightarrow x > 5 \text{ e escrevemos } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}.$$

2. Resolva em IR a desigualdade $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.

SOLUÇÃO:

Temos $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Então podemos reescrever a inequação

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \text{ como } \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{2x-5} \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6x-15} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}.$$

Como a base $0 < \frac{1}{2} < 1$, então a desigualdade se inverte para os expoentes.

Portanto temos $6x - 15 \geq 2x + 2 \Rightarrow 6x - 2x \geq 2 + 15 \Rightarrow 4x \geq 17 \Rightarrow x \geq \frac{17}{4}$, e a

solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{17}{4}\right\}$$



SAIBA MAIS

Para saber mais sobre o assunto, consulte o site:

<http://www.somatematica.com.br/superior/logexp/logexp4.php> Agora resolva os exercícios propostos, e pesquise mais em livros para melhorar os seus conhecimentos que será de muita utilidade no estudo das funções logarítmicas.

TÓPICO 4

Função logarítmica

OBJETIVOS

- Conhecer logaritmo e suas propriedades
- Construir e interpretar gráficos de funções logarítmicas
- Determinar domínio e conjunto imagem de função logarítmica
- Obter soluções de equações e inequações logarítmicas

Estudamos agora a função logarítmica, bem como as suas propriedades característica. Resolveremos também exercícios envolvendo equações e inequações e que tenha algumas aplicações dos logaritmos.

Segundo LIMA(2006, p. 191), os primeiros logaritmos estudados foram os de base dez. No entanto são os logaritmos de base dois que desempenham importante papel nas ciências da computação, uma vez que surgem naturalmente em sistemas numéricos binários. Os logaritmos naturais, por sua vez, são mais utilizados, principalmente aquelas que envolvem o uso do cálculo infinitesimal. Portanto, os alunos de licenciatura devem, ficar bem atentos aos logaritmos naturais, bem como a sua função inversa, que é a função exponencial de base e , pois muitos dos problemas da Física, das engenharias e de outras ciências são modelados por essas funções.

1. LOGARITMO

1.1 DEFINIÇÃO

Sejam a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b o expoente que se deve dar à base b de modo que a potência seja igual a a .

1.2 NOTAÇÃO

Se $a \in \mathbb{R}$, e $a > 0$ e $0 < b \neq 1$, então $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Nessas condições,

b é a base do logaritmo;

a é o logaritmando;

x é o logaritmo de a na base b .

EXEMPLOS:

a) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$.

b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$, pois $2^{-5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_3 3 = 1$, pois $3^1 = 3$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Usando a definição calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_4 8$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

c) $\log_{16} 32$

SOLUÇÃO:

a) Por definição, temos $\log_4 8 = x$. Logo $4^x = 8$, isto é, uma equação exponencial. Resolvendo, temos:

$$4^x = 8 \Rightarrow (2^2)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Então, } \log_4 8 = \frac{3}{2}.$$

b) Usando o mesmo raciocínio, encontramos:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Rightarrow (2^{-1})^x = 2^3 \Rightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

c) Analogamente, temos:

$$\log_{16} 32 = x \Rightarrow 16^x = 32 \Rightarrow (2^4)^x = 2^5 \Rightarrow 2^{4x} = 2^5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Portanto, $\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$.

1.3 PROPRIEDADES:

Trabalharemos agora as propriedades dos logaritmos. Essas propriedades são de fundamental importância para o aluno, pois, por meio delas, reduziremos cálculos longos e exaustivos a simples operações.

Sejam $a; b; c$ números reais positivos e $b \neq 1$. Então são válidas as seguintes propriedades:

O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero.

I) $\log_b 1 = 0$

Se o logaritmando e a base são iguais, então o logaritmo é igual a 1.

II) $\log_b b = 1$

A potência de base b e expoente $\log_b a$ é igual a a .

III) $b^{\log_b a} = a$

Logaritmo da potência é o produto do expoente da potência pelo logaritmo sem a potência.

IV) $\log_b a^n = n \log_b a$

Logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

V) $\log_b (a \cdot c) = \log_b (a) + \log_b (c)$

Logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos.

VI) $\log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b (a) - \log_b (c)$

Mudança de base o logaritmo pode ser escrito em qualquer base positiva e diferente de 1.

VII) $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}, \forall k, 0 < k \neq 1$

Demonstraremos aqui as propriedades (iii) e (v). Faça as demais como exercício.

DEMONSTRAÇÃO DE (III):

Sejam a, b números reais positivos e $b \neq 1$, então, por definição de logaritmo, temos $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$. Como $b^x = b^{\log_b a} \Rightarrow b^{\log_b a} = a$.

DEMONSTRAÇÃO DE (V):

Sejam a, b e c números reais positivos e $b \neq 1$, e sejam $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow c = b^y$. Logo temos $a \cdot c = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ e, da definição da inversa da exponencial, temos $\log_b (a \cdot c) = x + y \Rightarrow \log_b (a \cdot c) = \log_b (a) + \log_b (c)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, coloque em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

- a. $\log 6$
- b. $\log 4$
- c. $\log 12$
- d. $\log \sqrt{2}$
- e. $\log 0,5$
- f. $\log 20$
- g. $\log 5$
- h. $\log 15$

SOLUÇÃO:

- a. Como $6 = 2 \cdot 3$, então usando a propriedade (v) temos,
 $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$. Assim, $\log 6 = a + b$.
- b. Como $4 = 2 \cdot 2$, então usando a propriedade (v) temos,
 $\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = a + a = 2a$. Assim, $\log 4 = 2a$.
- c. Como $12 = 4 \cdot 3$, então usando as propriedades (v) e (iv) temos,
 $\log 12 = \log(4 \cdot 3) = \log 4 + \log 3 = 2a + b$. Assim, $\log 12 = 2a + b$.
- d. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, então usando a propriedade (iv) temos,
$$\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}$$
.
Assim, $\log \sqrt{2} = \frac{a}{2}$.
- e. $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, então usando a propriedade (iv) temos,
$$\log 0,5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -1 \log 2 = -1 \cdot a = -a$$
. Assim, $\log 0,5 = -a$.
- f. $20 = 2 \cdot 10$, então usando as propriedades (v) e (ii) temos,
$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = a + 1 = 1 + a$$
. Assim,
$$\log 20 = 1 + a$$
.
- g. $5 = \frac{10}{2}$, então usando a propriedade (vi) temos,
$$\log 5 = \log \left(\frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$
. Assim, $\log 5 = 1 - a$.
- h. $15 = 3 \cdot 5$, então usando a propriedade (v) temos,
$$\log 15 = \log(3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = b + 1 - a = 1 - a + b$$
. Assim,
$$\log 15 = 1 - a + b$$
.

2. Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calcule $\log_6 5$.

SOLUÇÃO

Como conhecemos $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, faremos uma mudança de base. Nesse caso, para base 20. Assim temos:

$$\log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20} \frac{20}{4}}{\log_{20} 2 \cdot 3} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{1 - \log_{20} 2^2}{a + b} = \frac{1 - 2\log_{20} 2}{a + b}$$

$$\log_6 5 = \frac{1 - 2a}{a + b}$$

Nesse aplicamos as seguintes propriedade (vii), (vi), (v), (ii) e (iv).

3. Calcule o valor da expressão $E = \log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

SOLUÇÃO:

Fazendo uma mudança de base, e nesse caso mudando para a base 3, temos:

$$E = \log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 3^3}{\log_3 5^2} = \log_3 5 \cdot \frac{3\log_3 3}{2\log_3 5}$$

$$E = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

2.1 DEFINIÇÃO

Dado um número real b ($0 < b \neq 1$), chamamos função logarítmica de base b a função de IR_+^* em IR que associa a cada x o número $\log_b x$. E escrevemos $f(x) = \log_b x$.

EXEMPLOS:

- a. $f(x) = \log_2 x$
- b. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
- c. $f(x) = \log x$
- d. $f(x) = \ln x$

2.2 GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico, atribuímos valores a variável x e determinamos os correspondentes em y . Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano e os unimos, obtendo assim o gráfico.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Construa o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = \log_2 x$

SOLUÇÃO:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

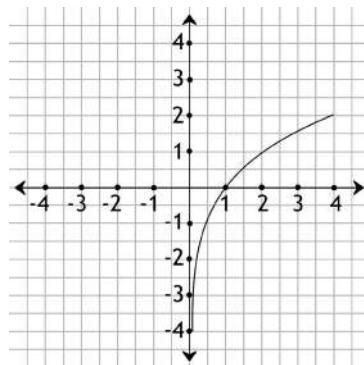


Figura 3 - Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

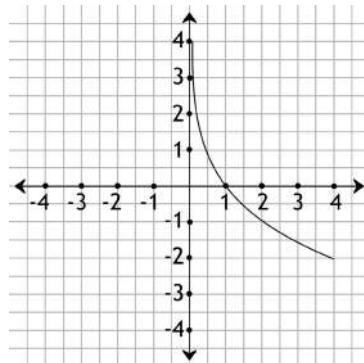


Figura 4 - Gráfico da função logarítmica decrescente $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observe que $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente, e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente. Na primeira função, a base é $2 > 1$; na segunda, é $0 < \frac{1}{2} < 1$. Podemos concluir, portanto, que a função $y = \log_b x$ é crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$.

Veja também que o domínio da função é \mathbb{R}_+^* , e a imagem é \mathbb{R} .

2.3 PROPRIEDADES

As propriedades que citaremos a seguir são fundamentais para que possamos fazer a análise de uma determinada função. É justamente por meio dessas propriedades que podemos tirar várias conclusões. Vamos conferir?

1. As funções $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = b^x$ são inversas entre si.
2. A função $f(x) = \log_b x$ é crescente se, e somente se, $b > 1$. Isto é, $\log_b x_1 > \log_b x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
3. A função $f(x) = \log_b x$ é decrescente se, e somente se, $0 < b < 1$. Isto é, $\log_b x_1 > \log_b x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

2.4 CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

TEOREMA:

Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe um valor $b > 0$ tal que $f(x) = \log_b x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

A demonstração desse teorema vocês encontram em Lima (2006, p.194-195).

3. LOGARITMOS NATURAIS

A função logaritmo natural é definida por $f(x) = \log_e x = \ln x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, sendo $e = 2,718281828459$ a base dos logaritmos naturais.

Esses logaritmos são os mais importantes nas aplicações, principalmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Determine o domínio da função $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$.

SOLUÇÃO:

Para que o logaritmo seja real, devemos ter o logaritmando positivo, uma vez que a base e é um número positivo e diferente de 1. Portanto, $x^2 - 3x > 0$

é uma inequação do segundo grau. Resolvendo-a, isto é, encontrando as raízes e estudando o sinal, temos:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \text{ou} \\ x > 3 \end{cases}$$

Portanto, o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$.

Determine o domínio da função $f(x) = \log_{3-x}(x+2)$.

SOLUÇÃO:

Para que o logaritmo seja real, devemos ter logaritmando positivo e base positiva e diferente de 1.

$$\text{Portanto, } f(x) = \log_{3-x}(x+2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}.$$

Fazendo a interseção, temos o domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$.

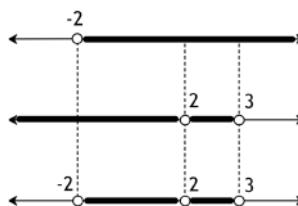


Figura 5 - Domínio da função logarítmica $f(x) = \log_{3-x}(x+2)$

4. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base de um ou mais logaritmos. Isso ocorre quando temos igualdade entre dois logaritmos ou entre logaritmos e um número real.

As equações logarítmicas podem ser classificadas em três tipos:

1º TIPO:

Equações que apresentam igualdade entre dois logaritmos de mesma base b ($0 < b \neq 1$).

A solução de uma equação desse tipo é feita com base na definição, ou seja, $\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$. Devemos levar em consideração as condições de existência, isto é, o logaritmando deverá ser positivo e a base também positiva e diferente de 1.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5)$.

SOLUÇÃO:

As condições de existência (C.E.) $3x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$ e $2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$

Logo, a C.E. é $x > -\frac{2}{3}$.

$\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5) \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5 \Rightarrow x = 3$. Como $x = 3 > -\frac{5}{2}$, a solução é, portanto, $S = \{3\}$.

2º TIPO:

O logaritmo é igual a um número real.

$$\log_b f(x) = k$$

A solução é baseada na definição e considera as condições de existência $0 < b \neq 1$

$$\log_b f(x) = k \Rightarrow f(x) = b^k$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação $\log_5 4x - 3 = 1$.

SOLUÇÃO:

$$\log_5 4x - 3 = 1 \Rightarrow 4x - 3 = 5^1 \Rightarrow 4x = 5 + 3 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

$$S = \{2\}$$

3º TIPO: INCÓGNITA AUXILIAR

São equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de variável.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação:

$$\log_4^2 x - 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$$

SOLUÇÃO:

A equação é equivalente à equação: $(\log_4 x)^2 - 2(\log_4 x) - 3 = 0$, logo, fazendo uma substituição $y = \log_4 x$, temos

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$y = \frac{2 \pm 4}{2}, y_1 = -1 \text{ e } y_2 = 3$$

Portanto, substituindo os valores de y por $\log_4 x$, temos:

- para $y = -1$: $\log_4 x = -1 \Rightarrow x = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$
- para $y = 3$: $\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 = 64$

$$S = \left\{ \frac{1}{4}, 64 \right\}$$

5. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São desigualdades em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base de um ou mais logaritmos. Isso ocorre quando temos desigualdade entre dois logaritmos ou entre logaritmos e um número real.

As inequações logarítmicas também podem ser classificadas em três tipos:

1º TIPO:

A inequação é uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base b ($0 < b \neq 1$). Isto é, $\log_b f(x) > \log_b g(x)$.

Para resolvemos uma inequação logarítmica, devemos considerar o crescimento dela $b > 1$ ou o decrescimento ($0 < b \neq 1$).

Portanto, devemos considerar dois casos:

1º CASO:

A base é maior que 1: $b > 1$. Então a desigualdade existente para o logaritmo é a mesma para os logaritmandos. Devemos lembrar que os logaritmandos deverão ser positivos.

Se $b > 1$, então $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

2º CASO:

A base é positiva e menor que 1. Então a desigualdade existente para os logaritmos é invertida para os logaritmandos. Novamente devemos lembrar que os logaritmandos deverão ser positivos.

Se $0 < b < 1$, então $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Portanto, podemos esquematizar os dois casos como:

$$\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \text{ se } b > 1 \\ \quad \quad \quad \text{ou} \\ 0 < f(x) < g(x) \text{ se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a inequação $\log_3(5x - 2) < \log_3 4$.

SOLUÇÃO:

Como a base $b = 3 > 1$, então a desigualdade para os logaritmos é a mesma para os logaritimandos. Isto é, $\log_3(5x - 2) < \log_3 4 \Leftrightarrow 0 < 5x - 2 < 4$.

Adicionando 2 unidades a desigualdade, temos:

$0 + 2 < 5x - 2 + 2 < 4 + 2 \Rightarrow 2 < 5x < 6$. Dividindo a desigualdade por 5, temos $\frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$. Logo a solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5} \right\}$$

2º TIPO:

A inequação é uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.

$$\log_b f(x) > k \text{ ou } \log_b f(x) < k$$

Para resolvemos esse tipo de equação, basta ver que o número k pode ser escrito na forma $k = k \log_b b = \log_b b^k$ e as equações podem ser reescritas das seguintes formas:

$$\log_b f(x) > k \Rightarrow \log_b f(x) > \log_b b^k$$

ou

$$\log_b f(x) < k \Rightarrow \log_b f(x) < \log_b b^k$$

Veja que estas inequações são semelhantes as já estudadas no primeiro tipo.

Podemos, então, esquematizar da seguinte maneira:

$$\log_b f(x) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > b^k \text{ se } b > 1 \\ 0 < f(x) < a^k \text{ se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b f(x) < k \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k \text{ se } a > 1 \\ f(x) > a^k \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Resolva as inequações:

- a. $\log_2 3x + 5 > 3$
b. $\log_2 3x + 2 < 2$

SOLUÇÃO:

a) Como $b = 2 > 1$, então $\log_2 3x + 5 > 3 \Leftrightarrow 3x + 5 > 2^3$.

Resolvendo a desigualdade, temos:

$$3x > 8 - 5 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{3} \Rightarrow x > 1$$

$$S = \left\{ x \in \text{IR} \mid x > 1 \right\}$$

b) Como $b = 2 > 1$, então $\log_2 3x + 2 < 2 \Rightarrow 0 < 3x + 2 < 2^2$.

Resolvendo a desigualdade, temos $0 < 3x + 2 < 4$. Subtraindo -2 da desigualdade, temos:

$$0 - 2 < 3x + 2 - 2 < 4 - 2 \Rightarrow -2 < 3x < 2$$

Dividindo a desigualdade por 3, chegamos a $-\frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$.

$$\text{Portanto a solução é: } S = \left\{ x \in \text{IR} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} \right\}.$$

3º TIPO: INCÓGNITA AUXILIAR

São inequações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de variável.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a inequação $\log_3 x^2 - 3 \cdot \log_3 x + 2 > 0$.

SOLUÇÃO:

A inequação pode ser escrita como $(\log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x + 2 > 0$. Fazendo agora uma mudança de variável, isto é, $y = \log_3 x$, a inequação acima fica: $y^2 - 3y + 2 > 0$, uma inequação do 2º grau, que resolvendo temos:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad y_1 = 1 \text{ e } y_2 = 2$$

Estudando o sinal, temos:



Figura 6 - Solução da inequação $y^2 - 3y + 2 > 0$

Portanto, a solução da inequação do 2º grau é: $y < 1$ ou $y > 2$.

Logo, como $y = \log_3 x$, temos:

- para $y < 1$: $\log_3 x < 1 \Leftrightarrow x < 3$
 - para $y > 2$: $\log_3 x < 2 \Leftrightarrow x < 3^2 \Rightarrow x > 9$.

Portanto a solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 9\}$



SAIBA MAIS

Para saber mais sobre o assunto consulte os sites:

<http://www.somatematica.com.br/superior/logexp/logexp5.php>

Estudado esse assunto, agora vocês serão capazes de resolver e discutir com seus colegas os exercícios propostos, bem como, fazer aplicações dos seus conhecimentos em outras disciplinas e áreas afins.



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) O valor da expressão $\frac{10^{-3} \cdot 10^5}{10 \cdot 10^4}$ é:

- a) 1000 b) 10 c) 0,1 d) 0,01 e) 0,0001

2) Simplifique as expressões:

$$a) \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$\text{b) } \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$3) \text{ Mostre que } \sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

4) Para que valores de k a equação $\frac{a^{-x} + a^x}{a^x - a^{-x}} = k$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, admite raiz real?

5) (CEFET-PR) Cientistas de certo país, preocupados com a possibilidade cada vez mais ameaçadora de uma “guerra biológica”, pesquisam uma determinada bactéria, que cresce segundo a expressão $P(t) = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde t , representa o tempo em horas. Para obter-se uma população de 3.125 bactérias, será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

- a) $]0,2]$ b) $]2,4]$ c) $]4,6]$ d) $]6,8]$ e) $]8,10]$

6) (UNIFOR-CE) O número real x que é solução da equação $\frac{3 - 9 \cdot 2^{4-x}}{1 - 2 \cdot 3^{4-x}} = 3$ é:

- a) múltiplo de 5
b) par
c) múltiplo de 7
d) ímpar
e) irracional

7) Seja $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$, $a > 0$. O valor da base é:

- a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 2 d) 10 e) 16

8) Qual das sentenças abaixo é verdadeira para todos os números reais, a e b ?

- a) $\log a^2 = 2 \log a$
b) $\log(1+a^2)^2 = 2 \log(1+a^2)$
c) $\log(ab) = \log a + \log b$
d) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
e) $\log a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log a}$

9) Sejam a , b , c números reais estritamente positivos e distintos entre si, se $\log a$, $\log b$ e $\log c$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então:

- a) a , b , c é uma progressão aritmética
b) a , b , c é uma progressão geométrica
c) $a + c = b$
d) $a < b < c$
e) $c < b < a$

10) A igualdade $3^{1-x} \cdot 6^{x-1} = 3$ é verdadeira para x igual a:

- a) $\log_3 2$ b) $\log_6 2$ c) $\log_2 3$ d) $\log_2 6$ e) $\log_3 6$

11) Seja p um número real maior que 1. Se $\log_3(p^2) = 5 + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{p}\right)$, então $\log_2(p+13)$ é igual a:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

12) Sejam x e y números reais positivos. A igualdade $\log(x+y) = \log x + \log y$ é verdadeira se e somente se:

- a) $x = 2$ e $y = 2$
b) $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{5}{2}$
c) $x = y$
d) $xy = 1$
e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

13) A função $f : A \rightarrow B$ é dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

- a) Determine o domínio de f , isto é, $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \exists f(x)\}$.
b) Determine a imagem de f , isto é, $B = f(A)$.
c) A função é injetora? Por quê?
d) Trace o gráfico da função f .

14) Seja a função f em reais definida por $f(x) = \frac{2x+4}{5}$, esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} e faça uma análise geométrica de cada um.

AULA 6

Introdução à trigonometria e funções circulares

Olá aluno(a),

Nesta aula, faremos uma introdução ao estudo da trigonometria. Conheceremos os elementos de um triângulo retângulo e as relações básicas da trigonometria nesta figura geométrica.

Essas relações serão de fundamental importância no decorrer desta nossa disciplina. Um professor de matemática, por sua vez, deve explorar bastante essas relações e mostrar para os alunos a sua importância e as suas aplicabilidades, tanto na Matemática como em outras ciências.

Uma vez que conhecemos as relações trigonométricas e já estudamos funções, daremos início às funções trigonométricas. As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria circular e são muito importantes devido a sua periodicidade, pois elas podem representar muitos fenômenos naturais periódicos, tais como: o comportamento ondulatório do som, as variações de temperatura terrestre, os níveis de águas no oceano etc. Portanto, os alunos do curso de licenciatura devem explorar bastante essa característica das funções circulares, bem como as suas aplicações na ciência, na tecnologia e na análise.

Objetivos

- Conhecer e utilizar de forma adequada as relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Conhecer, identificar, interpretar e analisar as funções circulares trigonométricas e as suas propriedades inerentes

TÓPICO 1

Noções básicas de trigonometria

OBJETIVO

- Conhecer as razões básicas da trigonometria

A trigonometria é um ramo da matemática que estuda as medidas dos lados e os ângulos de um triângulo. Ela tem aplicações importantes em vários ramos, tanto na matemática pura, quanto na matemática aplicada e, consequentemente, em outras ciências naturais, tais como a Física, a Astronomia, a Geografia etc. E tem aplicação ainda na área da tecnologia.

Segundo Lima (2006), a trigonometria surgiu na antiguidade remota e tinha como objetivo inicial o estudo dos triângulos, isto é, o estudo dos seus três lados e dos seus três ângulos. Posteriormente, com a criação do cálculo infinitesimal e do seu prolongamento, que é a análise matemática, surgiu a necessidade de se atribuírem as noções de senos e cossenos e as funções associadas a essas noções.

Nesta aula, estudaremos as noções básicas dessas funções no triângulo.

1. TRIÂNGULO RETÂNGULO

Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.

Exemplo:

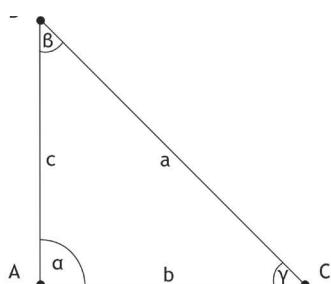


Figura 1 - Triângulo retângulo com ângulo reto em A



SAIBA MAIS

Se você achou interessante essa parte da história da trigonometria e quer saber um pouco mais, que tal uma pesquisa no site:
http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm

Utilizaremos a seguinte notação para os elementos de um triângulo ABC:

- Lados do Triângulo: \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC}
- Ângulos Internos: \hat{BAC} , \hat{ACB} , \hat{CBA}
- Medidas dos Lados: $\begin{cases} a = \text{medida de } \overline{BC} \\ b = \text{medida de } \overline{AC} \\ c = \text{medida de } \overline{AB} \end{cases}$
- Medida dos Ângulos: $\begin{cases} \hat{A} = \text{medida de } \hat{BAC} \\ \hat{B} = \text{medida de } \hat{ABC} \\ \hat{C} = \text{medida de } \hat{ACB} \end{cases}$

2. TEOREMA DE PITÁGORAS

No triângulo retângulo, é válido o teorema de Pitágoras, que diz que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado de várias maneiras, desde as mais simples, nas quais se utilizam áreas de figuras planas, até as mais complexas. De acordo com Elisha Scott Loomis, há nada mais, nada menos que 370 (isso mesmo: 370!) demonstrações desse teorema, todas registradas em seu livro.

Os trechos a seguir, com a respectiva indicação do site de onde foram retirados, ilustram algumas das demonstrações desse Teorema. Vamos a elas?



ATENÇÃO!

No triângulo, o lado \overline{BC} , que é oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa, e os lados \overline{AC} e \overline{AB} , adjacentes ao ângulo reto, são chamados de catetos.

DEMONSTRAÇÃO 1:

Uma demonstração é atribuída ao general americano James Abram Garfield (1831-1881), que foi o 20º presidente dos Estados Unidos, no período de 4 de março a 19 de setembro de 1881, quando faleceu.

Garfield partiu de um trapézio retângulo, dividido em três triângulos retângulos, e comprovou que se pode demonstrar o teorema seguindo estes passos:

1º) Calcule, algebricamente, as áreas dos três triângulos que compõem o trapézio ABCD;

2º) Escreva a expressão que dá a área do trapézio ABCD;

3º) Observe que a área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos.

DEMONSTRAÇÃO 2:

Outra maneira de demonstrar o famoso teorema está registrada no Papiro Matemático Cairo, desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém quarenta problemas de Matemática, nove dos quais lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras, e mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

Você também pode demonstrar a validade do teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a. Ou de qualquer outro triângulo.

Veja mais demonstrações do Teorema de Pitágoras em:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigonometria/mod114.htm>

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo05.htm>

<http://www.mat.ufg.br/docentes/jhcruz/ensino/Pitagoras.htm>

Além de sites, você também pode encontrar a demonstração do Teorema de Pitágoras em Netto, 1995.

3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja \hat{B} um ângulo agudo, podemos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, \dots e conduzir por eles as perpendiculares $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, \dots$, conforme mostra a ilustração a seguir.



SAIBA MAIS

Pitagóras foi um matemático e filósofo grego, que nasceu no ano de 570 a. C. em Magna, na Grécia. aos 18 anos de idade, ele já dominava muitos conhecimentos de matemática e filosofia da época. Se você quiser continuar sabendo mais sobre a biografia desse importante filósofo e matemático grego, consulte o site de onde tiramos essas informações:

<http://www.suapesquisa.com/pesquisa/pitagoras.htm>

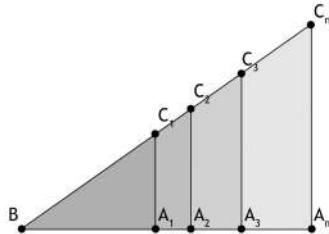


Figura 2 - Representação de sucessivos triângulos retângulos semelhantes

Observe que todos os triângulos BA_1C_1 , BA_2C_2 e etc. são semelhantes entre si. Diante dessa constatação, podemos afirmar que:

1 – Fixado o ângulo \hat{B} , o cateto oposto a \hat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \dots$$

2 – Fixado o ângulo \hat{B} , o cateto adjacente a \hat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \dots$$

3 – Fixado o ângulo \hat{B} , os catetos opostos e adjacentes são diretamente proporcionais.

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \dots$$

4 – Fixado o ângulo \hat{B} , os catetos adjacentes e opostos são diretamente proporcionais.

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \dots$$

Portanto, considerando um ângulo agudo \hat{B} fixo em um triângulo retângulo, temos:

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a} \dots \cos \hat{B} = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{b}{c} \dots \cot \hat{B} = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Cateto Oposto}} = \frac{c}{b}$$

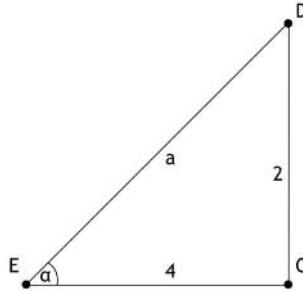


Figura 3 - Triângulos retângulos e suas razões trigonométricas

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

- 1) Dado o triângulo CDE, reto em C, calcule:
- $\sin \hat{D}$
 - $\cos \hat{D}$
 - $\tan \hat{D}$
 - $\cot \hat{D}$
 - $\sin \hat{E}$
 - $\cos \hat{E}$
 - $\tan \hat{E}$
 - $\cot \hat{E}$

SOLUÇÃO:

Calculamos a hipotenusa. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\text{hipotenusa} = a$$

$$a^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$a = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Agora calculamos os demais valores. Portanto, fazendo as continhas os cálculos, temos:

- $\sin \hat{D} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\cos \hat{D} = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\tan \hat{D} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{4}{2} = 2$
- $\cot \hat{D} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $\sin \hat{E} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

f. $\cos \hat{E} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

g. $\tan \hat{E} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

h. $\cot \hat{E} = \frac{4}{2} = 2$

Conhecidos os elementos principais de um triângulo e as razões a ele associadas, passaremos agora a estudar as relações existentes nessa figura geométrica.

TÓPICO 2

Funções circulares

OBJETIVOS

- Conhecer o ciclo trigonométrico
- Conhecer as funções circulares
- Construir e interpretar gráficos das funções periódicas

Estudaremos agora as funções circulares trigonométricas. Iniciaremos com uma introdução sobre funções periódicas e posteriormente estudaremos as funções circulares.

1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Dado um número real x , sempre existem dois números inteiros consecutivos n e $n+1$ tais que $n \leq x < n+1$.

Consideremos a função f que associa a cada real x o real $x - n$, em que n é o maior inteiro que não supera x , ou seja, $f(x) = x - n$.

Logo, temos:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x - 0 = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = x - (-3) = x + 3$$

Construindo o gráfico, temos:

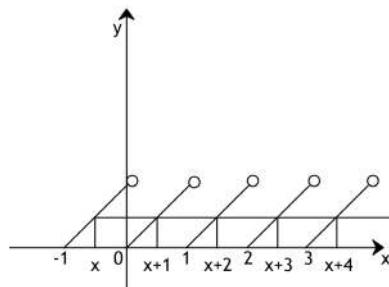


Figura 4 - Representação do gráfico de uma função periódica

Observe no gráfico que $f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = f(x + 4) = \dots, \forall x \in \mathbb{R}$.

Portanto, existem infinitos números inteiros p tais que $f(x) = f(x + p) \forall x \in \mathbb{R}$.

Observe também que o menor número inteiro de p positivo que satisfaz $f(x) = f(x + p) \forall x \in \mathbb{R}$ é $p = 1$, denominado período da função.

Definição:

Uma função $f : A \rightarrow B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição $f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, onde o menor valor de p que satisfaz a condição é chamado de período de f .

2. CICLO TRIGONOMÉTRICO

Seja uma circunferência λ de centro 0 e raio $r = 1$ no plano cartesiano $x0y$.

Veja que o comprimento da circunferência é 2π , pois $r = 1$.

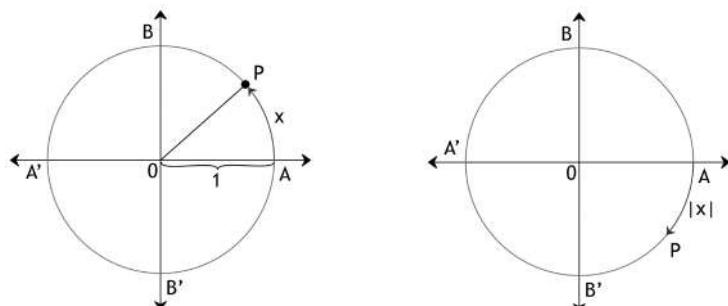


Figura 5 - Circunferência de raio unitário com indicação de um ponto P de arco x

Consideremos agora uma aplicação dos reais sobre a circunferência λ , isto é, uma associação que leva cada número real x a um único ponto p da circunferência λ do seguinte modo.

1º) Se $x = 0$, então p coincide com A.

2º) Se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x , no sentido anti-horário e marcamos p no final do percurso.

3º) Se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$ no sentido horário e marcamos p no final do percurso.

Observe que p é a imagem de x no ciclo trigonométrico.

EXEMPLO:

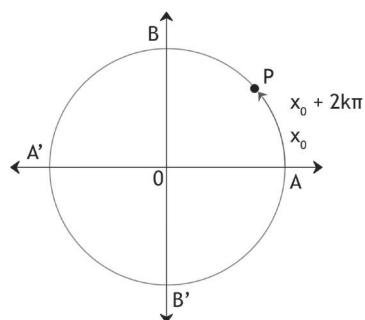
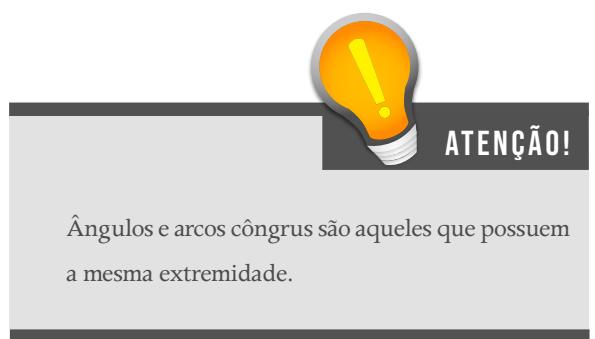


Figura 6 - Ciclo trigonométrico com indicação da imagem do número x_0 e de seus arcos côngruos



Veja que, se P é a imagem do número x_0 , então P também é a imagem dos números: $x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi$, etc. e também de $x_0 - 2\pi, x_0 - 4\pi, x_0 - 6\pi$, etc. Ou seja, P é a imagem dos elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. FUNÇÃO SENO

DEFINIÇÃO

Dado um número real x , seja p sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x e escrevemos $\sin x$ a ordenada \overline{OP}_1 do ponto p em relação ao sistema xOy .

Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP}_1 = \sin x$, isto é, $f(x) = \sin x$.

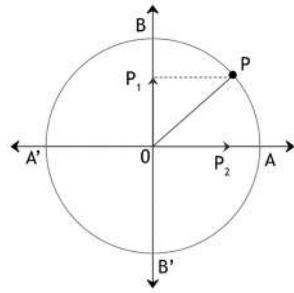


Figura 7 - Ciclo trigonométrico com indicação da imagem do número x e o seno $\overline{OP_1}$

Onde a imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq \sin x \leq 1$, para todo x real.

A função seno é periódica e seu período é $p = 2\pi$ ou $T = 2\pi$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como $\sin x = \overline{OP_1}$, então $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \overline{OP_1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então $\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi) = \overline{OP_1}$, portanto, a função seno é periódica e o seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, $p = 2\pi$.

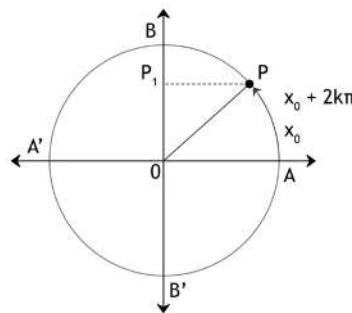


Figura 8 - Ciclo trigonométrico com indicação da imagem do número x_0 e de seus côngruos ($x_0 + 2k\pi$ $\sin x_0 = \sin(x_0 + 2k\pi) = \overline{OP_1}$)

GRÁFICO:

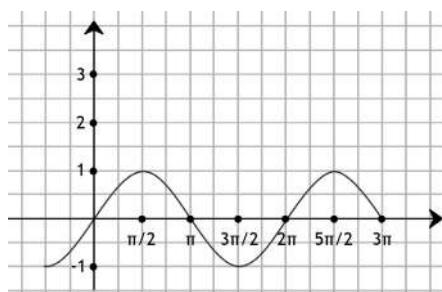


Figura 9 - Gráfico da função seno

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \operatorname{sen}x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

AGORA É A SUA VEZ!

Construa o gráfico das funções abaixo e determine o seu período e a sua imagem.

a) $f(x) = -\operatorname{sen}x$

b) $f(x) = |\operatorname{sen}x|$

c) $f(x) = 2\operatorname{sen}x$

d) $f(x) = \operatorname{sen}2x$

Se preferir, use o winplot ou graphmat para esboçar os gráficos.



ATENÇÃO!

Como o domínio da função seno é \mathbb{R} , a senóide continua para a direita de $-\pi$ e para a esquerda de 0 (zero). No gráfico representamos apenas um período da função.

4. FUNÇÃO COSSENO

Definição:

Dado um número real x , seja p sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x ($\cos x$) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto p em relação ao sistema $x0y$. Denominamos função cosseno $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

DEFINIÇÃO

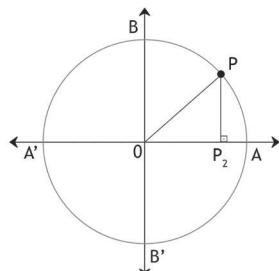


Figura 10 - Ciclo trigonométrico com indicação da imagem do número x e o cosseno $\overline{OP_2}$

A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

A função cosseno é periódica e seu período é $p = 2\pi$.

GRÁFICO:

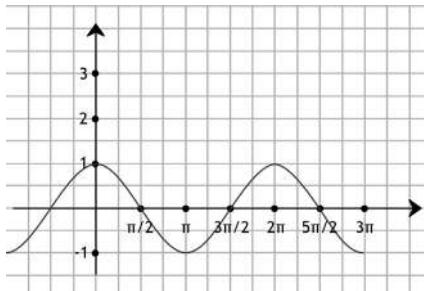


Figura 11 - Gráfico da função cosseno

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

EXEMPLO:

Determine o período e a imagem e construa o gráfico das funções:

- a) $f(x) = -\cos x$
- b) $f(x) = \cos 2x$
- c) $f(x) = 1 + \cos x$

As funções seno e cosseno são respectivamente ímpares e pares, isto é, $\sin(-x) = -\sin x$ e $\cos(-x) = \cos x$. Outras relações que estudaremos em unidades subsequentes, mas que podem ser vistas nos gráficos dessas funções são: $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$,

$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

5. FUNÇÃO TANGENTE

DEFINIÇÃO

Dado um número real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja p sua imagem no ciclo. Considere a reta \overleftrightarrow{OP} e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x a medida do segmento \overline{AT} .

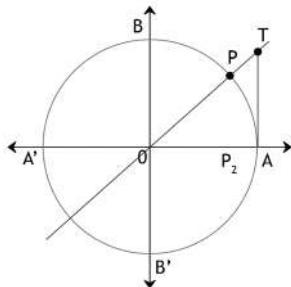


Figura 12 - Ciclo trigonométrico com indicação da tangente do arco x \overline{AT}

A função tangente é uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $AT = \operatorname{tg}x$, isto é, $f(x) = \operatorname{tg}x$.

A função tangente é periódica e seu período é π , isto é, $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}(x + \pi)$.

GRÁFICO:

Fazendo um diagrama com x e $f(x) = \operatorname{tg}x$, construímos o gráfico da função tangentóide.

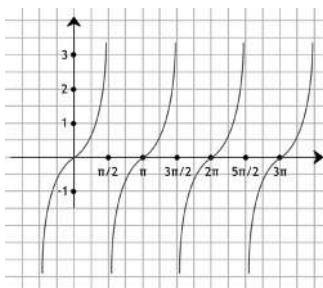


Figura 13 - Gráfico da função tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \operatorname{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não existe	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	não existe	0

Observe que o domínio da função é: $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, pois em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a imagem está em B ou B' , e a reta \overrightarrow{OP} fica paralela ao eixo das tangentes.

EXERCÍCIO:

Determine o domínio das funções.

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

6. FUNÇÃO COTANGENTE

DEFINIÇÃO

Dado um número real $x, x \neq k\pi$, seja p sua imagem no ciclo. Considere a reta \overrightarrow{OP} e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x a medida algébrica do segmento \overline{BD} .

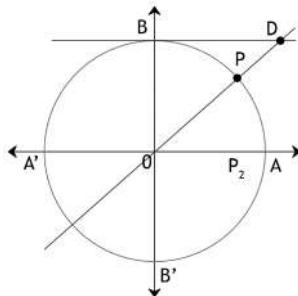


Figura 14 - Ciclo trigonométrico com indicação da cotangente \overline{BD} do arco x

A função cotangente é uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $BD = \operatorname{cotg} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Observe que:

- a) a função cotangente é uma função periódica e seu período é π ;
- b) o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$, pois se $x = k\pi$, o ponto p coincide com o A ou A' , e a reta \overrightarrow{OP} fica paralela ao eixo das cotangentes.

GRÁFICO:

Atribuindo valores a x , encontramos o seu correspondente y , e marcando essas partes, construímos o gráfico da função cotangente.

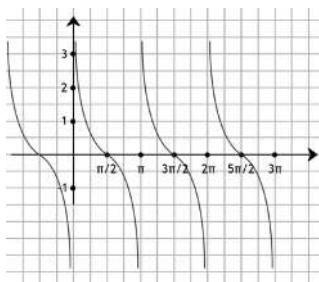


Figura 15 - Gráfico da função cotangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cotgx$	não existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	não existe	0	não existe

7. FUNÇÃO SECANTE

DEFINIÇÃO

Dado um número real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e seja p sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em p e seja s sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x a abscissa OS do ponto S .

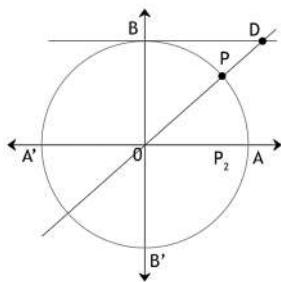


Figura 16 - Ciclo trigonométrico com indicação da secante \overline{OS} do arco x

A função secante é a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

o real $OS = \sec x$, isto é, $f(x) = \sec x$.

Veja que:

- a) a função secante é periódica e seu período é $p = 2\pi$;
- b) o domínio da função secante é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;
- c) a imagem da função secante é $\text{Im} = \mathbb{R} - [-1, 1]$.

GRÁFICO:

Construindo uma tabela de pares ordenados $(x, \sec x)$ e marcando esses pontos, obtemos o gráfico da função secante.

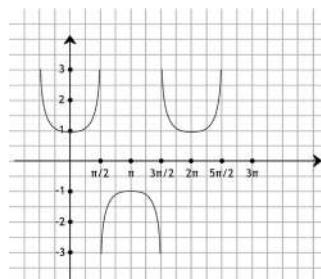


Figura 17 - Gráfico da função secante

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1

8. FUNÇÃO COSSECANTE

DEFINIÇÃO

Dado um número real $x, x \neq k\pi$, cuja imagem no ciclo é p . Seja a reta S tangente ao ciclo em p e seja C uma intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x a ordenada OC do ponto C .

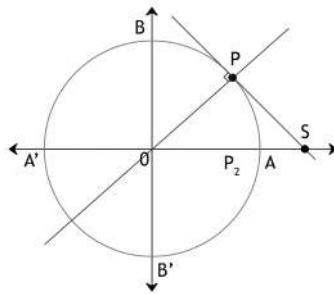


Figura 18 - Ciclo trigonométrico com indicação da cossecante \overline{OC} do arco x

A função cossecante é uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $OC = \text{cossec } x$, isto é, $f(x) = \text{cossec } x$.

Observe que:

- o domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$;
- a imagem da função cossecante é $D = \mathbb{R} - [-1, 1]$;
- a função cossecante é periódica e seu período é $P = 2\pi$.

GRÁFICO:

Construímos uma tabela com os pares ordenados $(x, \text{cossec } x)$ e, marcando esses pontos, obtemos assim o gráfico:

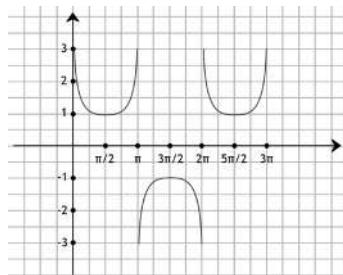


Figura 19 - Gráfico da função cossecante

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \text{cossec } x$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-1

EXERCÍCIO:

1) Determine o domínio e o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \cot g\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = \sec 2x$

c) $f(x) = \cos \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) (Vunesp – SP) Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$ e $V(x) = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, $0 \leq t \leq 6$. Determine o lucro, em reais, obtido para produzir 3 dezenas de peças.

SOLUÇÃO:

O custo para produzir 3 dezenas de peças é calculado usando a função custo dada pela equação de $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$. Logo, fazendo as operações, temos milhares de reais. Analogamente, calculamos o valor da venda de 3 dezenas de peças. Efetuando os cálculos, encontramos $V(3) = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ milhares de reais. Como o lucro $L(x)$ é dado por $L(x) = V(x) - C(x)$, então o lucro de 3 dezenas de peças é dado por $L(3) = V(3) - C(3) = 3000 - 2000 = 1000$ reais.

2) (UnB – DF) Supondo que, em determinada região, a temperatura média semanal T (em °C) e a quantidade de energia solar média semanal Q que atinge a região (em kcal/cm²) possam ser expressas em função do tempo t , em semanas, por meio das funções $T(t) = 10 + 12\sin 2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)$ e $Q(t) = 400 + 200\sin 2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right)$, determine:



SAIBA MAIS

Para melhorar o conhecimento e se aprofundar no assunto, é preciso pesquisar em livros, revistas e na internet. Sugestão: consulte o site

https://midia.atp.usp.br/impressos/lic/modulo01/fund_matematica_PLC0001/FundMat_I_top08.pdf

a) A maior temperatura média semanal.

b) Em que semana, a quantidade de energia solar média semanal é mínima.

c) Quando a quantidade de energia solar média é máxima, a temperatura média semanal também é máxima.

SOLUÇÃO:

Como $-1 \leq \text{sen}2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right) \leq 1$, então a temperatura será máxima quando o valor do $\text{sen}2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right) = 1$. Logo $T_{\max} = 10 + 12 \cdot 1 = 22^{\circ}\text{C}$.

Como $-1 \leq \text{sen}2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right) \leq 1$, então a energia solar é mínima quando o valor do $\text{sen}2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right) = -1$. Isto ocorre quando $2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right) = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, onde n é um número inteiro. Logo o menor valor de t ocorre quando $n = 0$. Fazendo as operações, temos que a quantidade de energia é máxima no tempo $t = 50$, isto é, na 50^a semana.

A quantidade de energia é máxima quando $\text{sen}2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right) = 1$. Isso ocorre para um tempo $t = 24$. Analogamente a temperatura é máxima quando $\text{sen}2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right) = 1$, isto é, para $t = 28$. Portanto, quando a quantidade de energia é máxima a temperatura não é máxima.

Uma vez, compreendido o assunto vocês podem discutir com seus colegas a respeito do mesmo e resolver os exercícios propostos.

AULA 7

Relações e Transformações Trigonométricas

Olá aluno(a),

Nas aulas anteriores estudamos as relações e as funções circulares trigonométricas. Agora estudaremos as relações e as transformações trigonométricas, que são de grande importância para o decorrer do curso de trigonometria. É importante que os alunos do curso de licenciatura explorem bastante esse assunto, pois será imprescindível para as disciplinas subsequentes, principalmente as de cálculo diferencial e integral.

Objetivo

- Conhecer, obter e fazer uso adequado das principais relações e transformações trigonométricas

TÓPICO 1

Relações trigonométricas

OBJETIVOS

- Conhecer as relações básicas da trigonometria
- Utilizar as razões trigonométricas para ângulos notáveis

Neste tópico, estudaremos as relações básicas para os triângulos retângulos. Estudaremos também as relações para os ângulos notáveis.

1. CONCEITOS PRELIMINARES

Dado o triângulo ABC, reto em A e com um ângulo agudo $\hat{B} = \alpha$, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\alpha$$

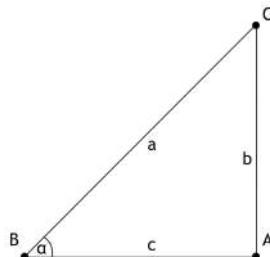


Figura 1 - Triângulos retângulos e as relações do seno e co-seno

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos $b^2 + c^2 = a^2$, ou seja, $(a\operatorname{sen}\alpha)^2 + (a\cos\alpha)^2 = a^2 \Rightarrow a^2\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha = a^2$. Dividindo a equação por a^2 , temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é conhecida como relação fundamental da trigonometria. Ela diz que, para todo ângulo α , os números $\text{sen}\alpha$ e $\text{cos}\alpha$ são as coordenadas do ponto da circunferência unitária, ou ciclo unitário. Portanto, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

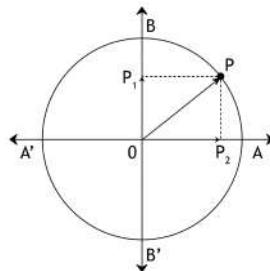


Figura 2 - Ciclo trigonométrico de raio unitário

Consideremos um ângulo α formado pelo eixo horizontal e o raio medido no sentido anti-horário. Então, temos as relações:

$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{cos}\alpha = \frac{c}{a}, \quad \tan\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cot\alpha = \frac{c}{b}$$

Consideremos agora as razões $\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan\alpha, \text{ isto é, } \tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \cot\alpha, \text{ isto é, } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \cot\alpha, \text{ isto é, } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.$$

É fácil verificar que $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

2. RELAÇÕES DE SENO, COSSENO, TANGENTE E COTANGENTE DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Considere o triângulo retângulo ABC, reto em A e com ângulos agudos $\hat{B} = \alpha$ e $\hat{C} = \theta$.

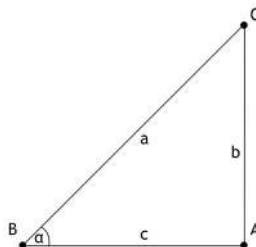


Figura 3 - Triângulo retângulo com ângulos agudos α e θ

Temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$, ou seja, os ângulos α e θ são complementares. Portanto, temos:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{c}{a} \\ \cos \alpha = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \sin \theta = \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{b}{a} \\ \cos \theta = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \theta$$

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{c}{b} \\ \cot \alpha = \frac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \cot \alpha \text{ ou } \tan \theta = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{b}{c} \\ \cot \theta = \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \cot \theta \text{ ou } \tan \alpha = \frac{1}{\tan \theta}$$

3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS NOTÁVEIS 30° , 45° E 60°

Consideremos um triângulo retângulo isósceles com catetos de medidas iguais a 1.

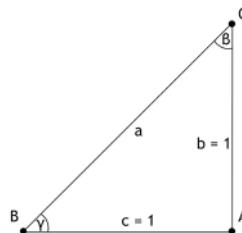


Figura 4 - Triângulo retângulo isósceles com ângulos agudos de 45°

Como $b = c = 1$, temos $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$. Utilizando o teorema de Pitágoras, encontramos $a = \sqrt{2}$. Portanto:

$$\sin \hat{B} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot \hat{B} = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado $l = 2$. Então $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

Seja \overline{CD} a mediana relativa ao lado \overline{AB} .

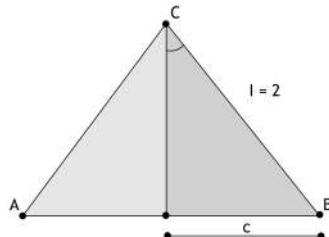


Figura 5 - Triângulo equilátero de lado de medida e ângulos agudos de 60°

Da geometria plana sabemos que, no triângulo equilátero, \overline{CD} é mediana, altura e bissetriz. Portanto, no $\triangle DBC$, temos $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$. Valendo-nos do teorema de Pitágoras, chegamos a $b_1 = \sqrt{3}$, uma vez que $\overline{DB} = \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Então, temos:

$$\sin \hat{C} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos \hat{C} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \hat{C} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \hat{C} = \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin \hat{B} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot \hat{B} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Com esses valores, podemos construir uma tabela de dupla entrada:

Razão	Ângulo		
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considerando o triângulo ABC retângulo em A, qual é a relação entre x e y?

SOLUÇÃO:

Como o ΔABC é reto em A, então $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ e $\hat{B} = 60^\circ$.

Temos $\tan 30^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y \cdot \tan 30^\circ = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ (I)

e $\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \tan 60^\circ = x \cdot \sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{3}x$ (II)

Das equações (I) e (II), decorrem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3}x$$

$$y = 2x \text{ ou } \frac{y}{x} = 2$$



SAIBA MAIS

Quer se aprofundar e melhorar seus conhecimentos? Então consulte o site:

[https://www.infoescola.com/matematica/
trigonometria-do-triangulo-retangulo/](https://www.infoescola.com/matematica/trigonometria-do-triangulo-retangulo/)

TÓPICO 2

Transformações trigonométricas

OBJETIVOS

- Obter as principais transformações trigonométricas
- Conhecer e utilizar fórmulas para arcos metades, arcos duplos
- Conhecer e utilizar fórmulas de multiplicação e de divisão de arcos

Neste tópico estudaremos as principais transformações trigonométricas, bem como a sua aplicação, que serão muito úteis nas disciplinas de cálculos.

Como as demonstrações são muito extensas e elaboradas, é importante que o professor procure trabalhar essas transformações na forma de exercícios. Nessa aula, demonstraremos algumas dessas relações para que o aluno de licenciatura comece a se adaptar com as demonstrações e busque sempre a melhor maneira de realizá-las.

Nessa unidade deduziremos algumas fórmulas para encontrar funções trigonométricas dos arcos do tipo $a + b$ conhecidas as funções circulares de a e de b , bem como outras relações importantes no estudo da trigonometria.

Quando conhecemos o cosseno de um arco a e o cosseno de um arco b , podemos encontrar o cosseno da soma desses dois arcos $a + b$ e também o cosseno da diferença desses dois arcos $a - b$. Para isso, usaremos as transformações que deduziremos a seguir.

1. FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

1.1 COSSENO DA SOMA

Sejam P , Q e R os pontos do ciclo associado aos números a , $a + b$ e $-b$ respectivamente. Sejam as coordenadas dos pontos $P(\cos a, \operatorname{sen} a)$, $Q(\cos(a + b), \operatorname{sen}(a + b))$ e $R(\cos b, -\operatorname{sen} b)$.

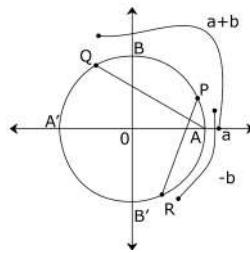


Figura 6 - Ilustra os pontos P, Q e R no ciclo trigonométrico

Os arcos \hat{AQ} e \hat{RP} têm a mesma medida, portanto as cordas \overline{AQ} e \overline{PR} têm medidas iguais. Então da geometria analítica, temos:

$$d_{AQ}^2 = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 = [\cos(a+b) - 1]^2 + [\sin(a+b) - 0]^2$$

$$d_{AQ}^2 = \cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \sin^2(a+b) = 2 - 2\cos(a+b)$$

Analogamente

$$d_{RP}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 = [\cos a - \cos b]^2 + [\sin a + \sin b]^2$$

$$d_{RP}^2 = \cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2\sin a \cdot \sin b + \sin^2 b$$

$$d_{RP}^2 = 2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b$$

Como $d_{AQ} = d_{RP}$, $d_{AQ} = d_{RP}$, então:

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b, \text{ ou seja,}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

1.2 COSENHO DA DIFERENÇA

Sabendo que $a - b = a + (-b)$ e utilizando o cosseno da soma de dois arcos demonstrada no item anterior, temos que:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \sin a \cdot \sin(-b)$$

Como o $\cos(-b) = \cos b$ e o $\sin(-b) = -\sin b$, então vem

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot [-\sin b]$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

1.3 SENO DA SOMA

Sabemos que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ e utilizando, agora a relações do cosseno da diferença, demonstraremos a relação para o seno da soma de dois arcos.

$$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

1.4 SENO DA DIFERENÇA

Uma vez que já conhecemos o seno da soma de dois arcos e sabemos que $a - b = a + (-b)$. Demonstraremos agora o seno da diferença de dois arcos utilizando as relações já conhecidas.

$$\sin(a-b) = \sin[a+(-b)] = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

1.5 TANGENTE DA SOMA

Como $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, então:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a \cdot \cos b$:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b} . \text{ Esta fórmula só é válida se } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{e } (a+b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi .$$

1.6 TANGENTE DA DIFERENÇA

Como $a - b = a + (-b)$, e fazendo uso das relações e transformações já estudadas anteriormente, demonstraremos agora a fórmula para a tangente da diferença de dois arcos.

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}[a+(-b)] = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg}a + (-\operatorname{tg}b)}{1 - \operatorname{tg}a \cdot (-\operatorname{tg}b)}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$$

$$\text{Esta fórmula só é válida se } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } (a-b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi .$$

1.7 COTANGENTE DA SOMA

$$\cot g(a+b) = \frac{\cot ga \cdot \cot gb - 1}{\cot ga + \cot gb}, \text{ válida se } a \neq k\pi, b \neq k\pi \text{ e } (a+b) \neq k\pi.$$

1.8 COTANGENTE DA DIFERENÇA

$$\cot g(a-b) = \frac{\cot ga \cdot \cot gb + 1}{\cot ga - \cot gb}, \text{ válida se } a \neq k\pi, b \neq k\pi \text{ e } (a-b) \neq k\pi.$$

A demonstração dessas duas fórmulas é análoga a demonstração das fórmulas da tangente da soma e da diferença de dois arcos e é deixada como exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Calcule os valores de:

- a. $\cos 15^\circ$
- b. $\sin 105^\circ$
- c. $\tan 75^\circ$
- d. $\sec 285^\circ$

SOLUÇÃO:

a) Sabemos que $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, logo:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) Como $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$, então:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) Como $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, então:

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando, temos:

$$\tan 75^\circ = \frac{(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{9 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{9 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

d) Como $285^\circ = 360^\circ - 75^\circ$, então:

$$\sec 285^\circ = \sec(360^\circ - 75^\circ) = \sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos(45^\circ + 30^\circ)}$$

$$\sec 285^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}$$

$$\sec 285^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2}$$

$$\sec 285^\circ = \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

2. FÓRMULAS DE ARCOS DUPLOS

Deduziremos, agora, fórmulas para as funções seno, cosseno e tangentes de arcos duplos ($2a$).

Podemos escrever o arco duplo $2a$ como sendo $a + a$, logo, utilizando as relações já estudadas, temos que:

$$\text{I)} \cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Essa equação pode ainda ser escrita nas fórmulas $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ou $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ que serão muito utilizadas para resolver integrais envolvendo potências de seno e cossenos, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

$$\text{I. } \sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a = 2\sin a \cdot \cos a$$

$$\text{II. } \tan 2a = \tan(a + a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3. FÓRMULAS DE ARCOS TRIPLOS

Para arcos triplos $3a$, temos:

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

As demonstrações dessas fórmulas é deixada como exercícios.

4. FÓRMULAS DE ARCO METADE

Encontraremos, agora, fórmulas do seno, cosseno e tangente para arcos metade, isto é para arcos do tipo $\frac{x}{2}$.

Vimos anteriormente que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ou $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.



VOCÊ SABIA?

Se conhecermos a tangente do arco metade $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$, então podemos obter as seguintes fórmulas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Se fizermos uma substituição

$$x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2}, \text{ temos:}$$

$$\operatorname{cos} x = 2 \operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \operatorname{cos} x}{2}$$

$$\text{ou } \operatorname{cos} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} x}{2}}.$$

Das equações $\operatorname{cos} 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$ e

$$x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \text{ temos:}$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{cos} x}{2}$$

$$\text{ou } \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{2}}.$$

Logo:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\operatorname{cos} \frac{x}{2}} \text{ ou } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{cos} x}}.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Calcule as funções circulares de $\frac{\pi}{8}$.

SOLUÇÃO:

Sabemos que $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ e que $\frac{\pi}{8}$ é um arco no primeiro quadrante, onde seno, cosseno e tangente são positivos. Logo, efetuando as operações, temos:

$$\operatorname{cos} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}-1$$

5. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Na Álgebra Elementar, usamos muito os recursos para transformar um polinômio em produtos de binômios. Esse processo é chamado de fatoração. Na trigonometria, muitas vezes aplicamos esse recurso para realizar determinadas transformações do tipo $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)$. Essas transformações muitas vezes são fundamentais para resolvemos equações e inequações. Além disso, são de grande importância para resolvemos integrais que envolvem potências de funções trigonométricas. Esse assunto será estudado nas disciplinas de cálculo diferencial e integral.

Para transformarmos adição e subtração de funções trigonométricas em produtos, usaremos as relações já determinada anteriormente:

$$\cos(a+b) = \operatorname{cosa} \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (1)$$

$$\cos(a-b) = \operatorname{cosa} \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (2)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (3)$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (4)$$

Se realizarmos as operações de adição e subtração com as equações acima, temos:

$$(1) + (2): \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\operatorname{cosa} \cdot \cos b$$

$$(1) - (2): \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$(3) + (4): \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos b$$

$$(3) - (4): \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Fazendo, nas equações acima, as seguintes substituições

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}, \text{ chegamos a } a=\frac{p+q}{2} \text{ e } b=\frac{p-q}{2}, \text{ e obtemos assim as fórmulas}$$

de transformação de adição e subtração em produto:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Para obtermos as relações envolvendo a tangente, temos:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q + \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q - \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Transforme em produto $y = \sin 5x + \sin 3x$

SOLUÇÃO:

Das transformações estudadas acima, temos

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Logo, tornando $p=5x$ e $q=3x$, temos

$$y = \sin 5x + \sin 3x = 2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = 2\sin 4x \cdot \cos x.$$

2) Prove que $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$.

SOLUÇÃO:

Sabemos que $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Logo, utilizando essa

relação e realizando algumas operações, temos:

$$\cos 40'' \cdot \cos 80'' \cdot \cos 160'' = \frac{2 \cdot \cos 40'' \cdot \cos 80''}{2} \cdot \cos 160''$$

$$\cos 40'' \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)}{2} \cdot \cos 160^\circ$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{(-\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \cdot \cos 160^\circ}{2}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \cos 160^\circ + \frac{1}{2} \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 160^\circ}{2}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{-\cos 160^\circ + \cos 200^\circ + \cos 120^\circ}{4}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{-(-\cos 20^\circ) + (-\cos 20^\circ) + \cos 120^\circ}{4}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{-(-\cos 20^\circ) + (-\cos 20^\circ) + \cos 120^\circ}{4}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{\cos 20^\circ - \cos 20^\circ + \cos 120^\circ}{4}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{4} = \frac{-\cos 60^\circ}{4} = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = -\frac{1}{8}$$

Estudadas essas transformações, agora vocês podem obter novas transformações a partir delas e solucionar problemas que envolva as mesmas, seja na matemática elementar, no cálculo diferencial ou em outras ciências.



SAIBA MAIS

Para saber um pouco mais sobre esse assunto, consulte os sites que indicamos a seguir. Eles apresentam outras relações relevantes, além de outros exercícios resolvidos e propostos.

[https://brasilescola.uol.com.br/matematica/
formulas-transformacao-soma-produto.htm](https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formulas-transformacao-soma-produto.htm)

AULA 8

Equações, inequações trigonométricas e funções circulares inversas

Olá aluno(a),

Uma vez que já conhecemos as relações e as transformações básicas da trigonometria, daremos início agora às técnicas de resolução de equações e inequações trigonométricas. Elas são muito utilizadas no estudo de problemas que envolvem as funções circulares trigonométricas, principalmente quando buscamos encontrar as funções inversas. É importante, que o aluno de licenciatura esteja atento a essas técnicas, pois elas serão muito úteis no estudo da trigonometria.

Uma vez conhecidas as funções trigonométricas circulares e funções inversas, estudaremos também as funções circulares inversas.

Objetivos

- Conhecer e fazer uso adequado das técnicas de resolução de equações e inequações trigonométricas
- Conhecer e obter as funções circulares inversas

TÓPICO 1

Equações trigonométricas

OBJETIVO

- Resolver equações trigonométricas

Neste tópico estudaremos as técnicas de resolução de equações trigonométricas.

Uma equação do tipo $f(x) = g(x)$ é uma equação trigonométrica se f e g forem funções trigonométricas na variável x .

A solução de uma equação desse tipo é um número real r tal que $f(r) = g(r)$ seja verdadeiro. Vale ressaltar que r pertence ao domínio das funções f e g .

A maioria das equações trigonométricas é reduzida a uma das seguintes

equações $\begin{cases} \sin\alpha = \sin\theta \\ \cos\alpha = \cos\theta, \text{ conhecidas como equações trigonométricas fundamentais.} \\ \tan\alpha = \tan\theta \end{cases}$

EXEMPLO:

1) Ache o valor de $\cos[\arcsen(\frac{-1}{2})]$.

SOLUÇÃO:

Como a imagem da função inversa do seno está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então $\arcsen(\frac{-1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$. Logo $\cos[\arcsen(\frac{-1}{2})] = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para solucionar uma equação trigonométrica qualquer, precisamos primeiramente saber resolver as equações trigonométricas fundamentais.

1.1 EQUAÇÃO DO TIPO $\sin\alpha = \sin\theta$

Se $\sin\alpha = \sin\theta = 0P_1$, então traçamos uma reta r perpendicular ao eixo dos senos no ciclo e determinamos as imagens de α e θ nos pontos de interseção P e P' da reta com o ciclo. Logo, temos:

- 1º) α e θ têm a mesma imagem, isto é, são ângulos congruos ($\alpha = \theta + 2k\pi$), ou
- 2º) α e θ têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são ângulos suplementares $\alpha = \pi - \theta + 2k\pi$.

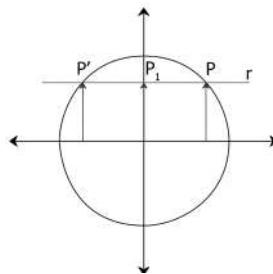


Figura 1 - Representação do seno dos ângulos α e θ

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva as seguintes equações, para $x \in \mathbb{R}$:

- a. $\sin x = \sin \frac{\pi}{8}$
- b. $\sin x = -\frac{1}{2}$

SOLUÇÃO:

a) Temos $\sin x = \sin \frac{\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{8} + 2k\pi = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \end{cases}$

Portanto, a solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \right\}$.

b) Como $\sin x = -\frac{1}{2}$, então $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin \frac{7\pi}{6}$.

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Logo, a solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

1.2 EQUAÇÃO DO TIPO $\cos\alpha = \cos\theta$

Se $\cos\alpha = \cos\theta = 0P_2$, então traçamos uma reta r perpendicular ao eixo dos cossenos no ciclo e determinamos as imagens de α e θ nos pontos de interseção da reta com o ciclo nos pontos P e P' . Logo, temos:

- 1º) α e θ têm a mesma imagem, isto é, são ângulos côngruos ($\alpha = \theta + 2k\pi$), ou
 2º) α e θ têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são ângulos replementares $\alpha = -\theta + 2k\pi$.

Nesse caso podemos resumir a solução da seguinte maneira $\alpha = \pm\theta + 2k\pi$

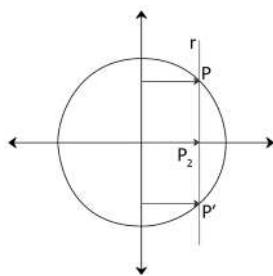


Figura 2 - Representação do cosseno dos ângulos α e θ

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $\cos x = \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

Nesse caso, temos:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Logo, a solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

1.3 EQUAÇÃO DO TIPO $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta$

Se $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta = AT$, então as imagens de α e θ estão sobre a mesma reta r determinada por O e T , isto é, estão nos pontos de interseção P e P' da reta com o ciclo.

Nesse caso, temos:

- 1º) α e θ têm a mesma imagem, isto é, são ângulos côngruos ($\alpha = \theta + 2k\pi$), ou
 2º) α e θ têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo trigonométrico, isto é, são ângulos explementares $\alpha = \pi + \theta + 2k\pi$.

Nesse caso podemos resumir a solução da seguinte maneira $\alpha = \theta + k\pi$.

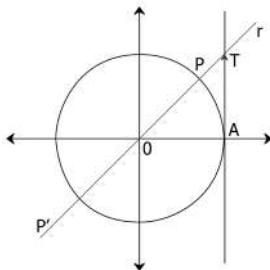


Figura 3 - Representação do tangente dos ângulos α e θ

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva a equação $\operatorname{tg}2x = 1$.

SOLUÇÃO:

Sabemos que $\operatorname{tg}2x = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Então $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Escrevemos, assim, a solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\}$$

Para resolvermos outros tipos de equação, buscamos sempre representá-la como uma equação na forma estudada anteriormente. No entanto, na maioria das vezes, faz-se necessário o uso das transformações trigonométricas, estudadas nos capítulos anteriores.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolver a equação $\operatorname{sen}x + \frac{1}{\operatorname{sen}x} = 2$ para real.

SOLUÇÃO:

$\operatorname{sen}x + \frac{1}{\operatorname{sen}x} = 2$ é equivalente a $\operatorname{sen}^2x + 1 = 2\operatorname{sen}x \Rightarrow \operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}x + 1 = 0$, que é uma equação do 2º grau na variável $\operatorname{sen}x$. Portanto temos:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1. \text{ Veja que } \operatorname{sen}x = 1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \text{ é uma equação fundamental e}$$

sua solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$.

Uma vez que já sabemos resolver esses três tipos de equações, agora é só utilizar de forma conveniente na resolução de outras equações, bem como auxílio na resolução de inequações trigonométricas.

TÓPICO 2

Inequações trigonométricas

OBJETIVO

- Resolver inequações trigonométricas

Neste tópico estudaremos as técnicas de resolução de inequações trigonométricas, que são semelhantes à resolução de equações. Porém, A solução de uma equação são todos os valores que atendem o conjunto verdade, isto é, são pontos fixos localizados no ciclo trigonométrico, já a solução de uma inequação são todos os intervalos que atendem o conjunto verdade, ou seja, são arcos do ciclo trigonométrico.

Assim como as equações, as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a desigualdades do tipo $\sin x > m$, $\cos x > m$, $\tan x > m$, $\sin x < m$, $\cos x < m$ e $\tan x < m$, conhecidas como inequações fundamentais trigonométricas.

EXEMPLO:

Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$.

SOLUÇÃO:

Como $\frac{1}{2} - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq \frac{1}{2}$ é a condição para que tenhamos uma função real de variável real, o domínio da função é dado por:

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right. \\ \left. \text{ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \right\}$$

Mostraremos como resolver inequações trigonométricas do tipo $\sin x > m$.

As demais inequações são semelhantes e são sugeridos como exercício.

2.1 INEQUAÇÕES DO TIPO $\sin x > m$

Nesse caso, marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 e traçamos por P_1 uma reta perpendicular ao eixo dos senos. As imagens dos reais x que satisfazem a condição $\sin x > m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima da reta.

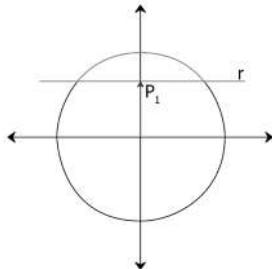


Figura 4 - Solução de uma inequação do tipo $\sin x > m$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Resolva a inequação $\sin x > \frac{1}{2}$ nos reais.

SOLUÇÃO:

De acordo com o que vimos anteriormente, queremos encontrar os valores do seno maior do que $\frac{1}{2}$ (meio). Como $\sin x = \frac{1}{2}$ ocorre para $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, então $\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Portanto a solução é: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

2) Resolva a inequação $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SOLUÇÃO:

Representamos no ciclo trigonométrico o valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ no eixo dos cossenos.

Em seguida marcamos as imagens de x que satisfaçam a desigualdade $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, que está na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita da reta que intercepta o ciclo com imagem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ver figura 2).

$$\text{Portanto, } \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}, \text{ e a solução é:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}.$$

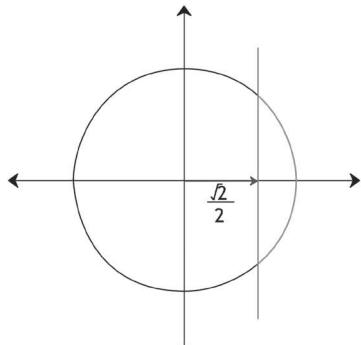


Figura 5 - Solução da inequação $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Compreendido o processo de resolução dessas inequações trigonométricas, agora vocês serão capazes de resolver qualquer tipo de inequações trigonométricas.



SAIBA MAIS

Para melhorar o seu desempenho, é necessário pesquisar mais sobre o assunto. No site abaixo, você encontra a resolução de exercícios.

<http://www.scribd.com/doc/3419167/Matematica-Apostila-Algebra-Trigonometria>

TÓPICO 3

Funções circulares inversas

OBJETIVOS

- Conhecer as funções circulares inversas
- Construir e interpretar gráficos das funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas não são bijetoras em seu domínio, ou seja, não são injetoras e sobrejetoras, portanto não possuem inversas. Porém, se restringirmos o intervalo de estudo a subintervalos do seu domínio, elas passam a serem bijetoras e, portanto, passam a ter inversas. Nesta unidade estudaremos as funções circulares inversas no domínio restrito.

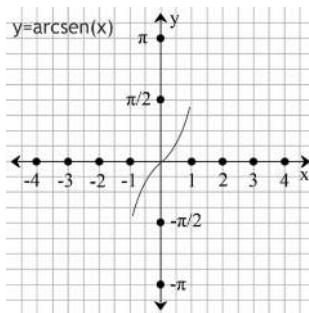
1. FUNÇÃO ARCO-SENO

DEFINIÇÃO:

A função arco-seno é a função que associa a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que y é um arco cujo seno é x .

Denotaremos por $y = \arcsen x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

GRÁFICO:



EXERCÍCIO:

1) Determine x tal que $\alpha = \arcsen \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

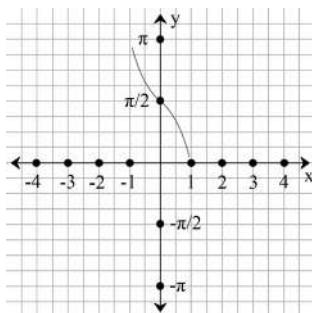
Por definição, α pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\alpha = \arcsen \frac{1}{2}$. Então $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, ou seja, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2. FUNÇÃO ARCO-COSSENO

Definição:

A função arco-cosseno é a função que associa a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in [0, \pi]$ tal que y é um arco cujo cosseno é x .

Denotaremos por $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$.

GRÁFICO:**EXERCÍCIO:**

1) Determine α tal que $\alpha = \arccos \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

Como $\alpha = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$, então $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

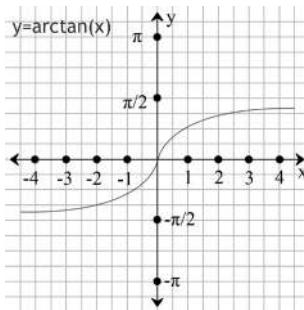
3. FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

Definição:

A função arco-tangente é a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ tal que y é um arco cuja tangente é x .

Denotaremos por $y = \arctg x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

GRÁFICO:



Observe que o gráfico da função inversa da tangente tangencia as retas $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$, isto é, é assintótico a essas retas.

EXERCÍCIO:

1) Determine tal que $\alpha = \arctg \sqrt{3}$.

SOLUÇÃO:

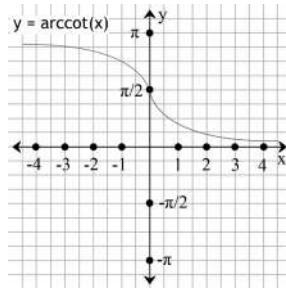
Como $\alpha = \arctg \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, logo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4. FUNÇÃO ARCO-COTANGENTE

Definição:

A função arco-cotangente é a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um $y \in]0, \pi[$ tal que y é um arco cuja co-tangente é x .

Denotaremos por $y = \operatorname{arc cot g} x \Leftrightarrow \operatorname{cot} y = x$ e $0 < y < \pi$.

GRÁFICO:

Veja que o gráfico da função inversa da cotangente tangencia as retas $y = 0$ e $y = \pi$, isto é, é assintótico a essas retas.

EXERCÍCIO:

1) Determine θ tal que $\theta = \text{arccot} g \frac{\sqrt{3}}{3}$.

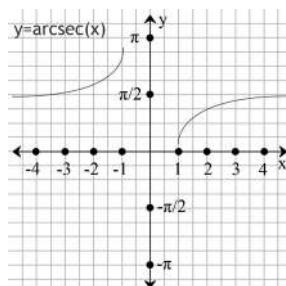
SOLUÇÃO:

Como $\theta = \text{arccot} g \frac{\sqrt{3}}{3}$, então $\cot g\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < \theta < \pi$. Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5. FUNÇÃO ARCO-SECANTE*Definição:*

A função arco-secante é a função que associa a cada $x \in \text{IR} -]-1, 1[$ um $y \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$ tal que y é um arco cuja secante é x .

Denotaremos por $y = \text{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $\begin{cases} 0 \leq y < \frac{1}{2}\pi & \text{se } x \geq 1 \\ \pi \leq y < \frac{3}{2}\pi & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$.

GRÁFICO:

VOCÊ SABIA?

As funções inversas também são denotadas por $y = \sin^{-1}x$, $y = \cos^{-1}x$, $y = \tan^{-1}x$, $y = \cot^{-1}x$, $y = \sec^{-1}x$ e $y = \csc^{-1}x$. Muito cuidado para não confundir com as inversas aritméticas dessas funções.

EXERCÍCIO:

- 1) Determine θ tal que $\theta = \operatorname{arcsec} 2$.

SOLUÇÃO:

Como $\theta = \operatorname{arcsec} 2$, então $\sec \theta = 2$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, pois $2 > 1$. Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

6. FUNÇÃO ARCO-COSSECANTE

Definição:

A função arco-cossecante é a função que associa a cada $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ um $y \in (-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$ tal que y é um arco cuja secante é x .

Denotaremos por:

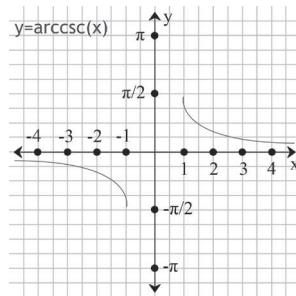
$$y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow \csc y = x \text{ e } \begin{cases} -\pi < y < -\frac{1}{2}\pi & \text{se } x \leq -1 \\ 0 < y \leq \frac{1}{2}\pi & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

SAIBA MAIS

Pesquise mais sobre o assunto, consultando o site:

<https://www.youtube.com/watch?v=k-BPycvaZLA>

Gráfico:



EXERCÍCIO RESOLVIDO:

- 1) Determine θ tal que $\theta = \operatorname{arccsc} \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

SOLUÇÃO:

Como $\theta = \operatorname{arccsc} \frac{2\sqrt{3}}{3}$, então $\csc \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, pois $\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$.

Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Entendido o comportamento das funções circulares inversas, agora seremos capazes de analisar as mesmas, bem como resolver problemas que as envolva, seja na matemática elementar ou nas disciplinas cálculo diferencial e integral.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos, **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8. ed., São Paulo; atual, 2004, v.1.

- _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004, v. 2.
- _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004, v.3.
- _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004, v.2.

IMPA. **Matemática no ensino médio**: Temas e problemas. v. 1. cap. 1-4. Disponível em: <<http://www.ensinomedio.imp.br/materiais/index.htm>>. Acesso em: 7 jun. 2007.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002, v.1.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2005, v.1.

_____. **A matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006, v.1.

MACHADO, A. S. **Matemática na escola de 2º grau**. São Paulo, Atual, 1996. Versões 1 e 2. v. 1, 2 e 3.

MATEMÁTICA ESSENCIAL superior. **Funções inversas da trigonometria hiperbólica**. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trighip/trighip.htm#trigh07>>. Acesso em: 10 jul. 2008.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática 8º série**. São Paulo: Scipione, 1995.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995, v.1.

ROSA NETO, E. **Matemática para o magistério**. 9. ed. São Paulo: Ática, 1998.

CURRÍCULO

Fernando Luis Vieira de Sousa

Possui graduação em Engenharia pela Universidade Federal da Paraíba (1995) e mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (2000). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Tem experiência na área de Engenharia Mecânica, com ênfase em Área de materiais na parte de ligas metálicas amorfas e compósitos. Atua como professor nos cursos de licenciatura em matemática nas modalidades presenciais e à distância, bem como, em outros cursos de graduação; atuando principalmente nos seguintes temas: cálculos, equações diferenciais e transformada de Laplace.

