Leonardo Daniel Rivera Valdez

Crash Course de Matemáticas para No-Matemáticos: Notas al libro “A Mathematical Course for Political and Social Research”

Preliminares

Constantes y variables

Una **constante** es un concepto o medida que tiene un solo valor para un conjunto dado. Por otro lado, una **variable** es un concepto o medida que cambia su valor para un conjunto dado. Toda función matemática puede contener variables y constantes, por lo general las podemos encontrar como la constante que multiplica a la variable. Por poner un ejemplo imagina la ecuación de la recta

$$\hat{y} = b_0 + b_1 X$$

Nuestras constantes son b_0 la intersección con el eje de las y b_1 que es la pendiente de la línea (expresa la relación de cambio de y respecto de x), así mismo, X es una variable que puede tomar N valores. Estos cambios de X y de Y, en función de las constantes es lo que nos da nuestra línea.

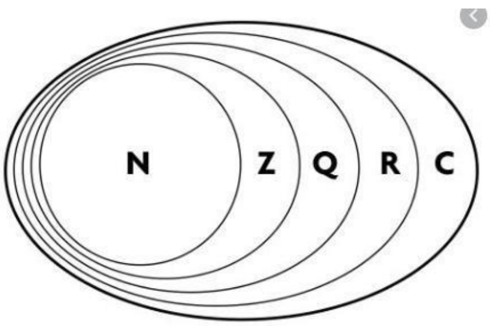
Conjuntos

Los **conjuntos** pueden ser entendidos como una colección de N elementos que comparten alguna característica común. Los conjuntos más comunes que uno puede encontrar en la siguiente tabla:

Table 1.1: Common Sets

Notation	Meaning
$\mathbb{N}$	Natural numbers
$\mathbb{Z}$	Integers
$\mathbb{Q}$	Rational numbers
$\mathbb{R}$	Real (rational and irrational) numbers
$\mathbb{C}$	Complex numbers
Subscript: $\mathbb{N}_+$	Positive (negative) values of the set
Superscript: $\mathbb{N}^d$	Dimensionality (number of dimensions)

estos son el conjunto $\mathbb{N}$ (el **conjunto de los número naturales**)este incluye todos los número del 0 al ∞ de uno en uno. Si agregamos los números negativos entonces obtenemos el **conjunto de los número enteros** $\mathbb{Z}$, este incluye tanto a los naturales como al resto de los número de -1 en -1 hasta el infinito. Cuando agregamos las fracciones posibles entonces $(\frac{X}{Y})$ entonces obtenemos el **conjunto de los números racionales** $\mathbb{Q}$. Posteriormente si agregamos todos los números irracionales (e.j. π, φ, e, etc) obtenemos el **conjunto de los números reales** $\mathbb{R}$. Finalmente si agregamos los número imaginarios (e.j $1i$) tendríamos el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Algo interesante de esto es que a pesar de que todos son en principio infinitos cada uno es más grande que el otro...es decir que hay infinitos más grandes que otros!



N - Números naturales
Z - Números enteros
Q - Números racionales
R - Números reales
C - Números complejos

Así mismo podemos tener **subconjuntos**, que son conjuntos más pequeños de otros conjuntos. Por ejemplo, podríamos denotar $\mathbb{Z}_{+}\,ó\,\mathbb{Z}_{-}$ donde indica que queremos el subconjunto de los enteros positivos ó los negativos. Así mismo podemos hacer uso de { } para referirnos a variables discretas, o sea, que sus componentes pueden ser asignados con un solo entero, como 1 ó 2. O también usamos ( ) ó [ ] para indicar que las variables son continuas, es decir, que a sus variables pueden asignarles más de un entero (∞,...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...,∞).

A parte de esto podemos indicar **dimensionalidad de los conjuntos**, cuando decimos que $\mathbb{Z}$■ hacemos referencia a una sola dimensión x, pero podemos ampliarlo para decir que el conjunto abarca dos ($\mathbb{Z}$■^{2}) o tres ($\mathbb{Z}$■^{3}) dimensiones. De hecho podemos decir que $\mathbb{Z}$■$^{□}$, es decir que puede ser cualquier número de dimensiones posibles (sí, podemos, en principio, tener un conjunto con un millón de dimensiones!).

Los conjuntos así mismo tienen ciertas propiedades como ser **finitos**, es decir que tienen una cantidad determinada de elementos y no más ni menos elementos. También pueden ser **infinitos** como cualquiera de los conjuntos de los número de los que mencionamos arriba (naturales, enteros, racionales, reales, y complejos), pero algunos subconjuntos de estos pueden ser finitos como sería el caso de $\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando cada elemento del conjunto puede ser asociado a un número real o natural se dice que son contables,como $\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, pero también puede no ser contables cuando no se les puede asociar un entero o natural (e.j. los números reales entre 0 y 1). Otra propiedad es que pueden tener **límites superiores o inferiores**, es decir que los elemento del conjunto no pueden ser más o menos a esos límites. Ojo, eso no quiere decir que no tengan elementos infinitos, pues si hablamos de números reales y ponemos como límite inferior el -1 y como límite superior el 1, tenemos 3 infinitos, uno entre -1 y 0, uno entre 0 y 1, y otro entre -1 y 1!

Como hemos mencionado los conjuntos están compuestos por elementos y por ello tenemos notación para poder asociar los elementos a los conjuntos. Podemos denotar que un elemento pertenece a un conjunto mediante ∊, por ejemplo si ponemos $x \in A$ estamos diciendo “x pertenece al conjunto A”. Es decir que ∊ se lee como **“pertenece a”**. Otra forma de usar este símbolo es al combinarlo con nuestros otros símbolos como { }, así podemos decir que $x \in \{1,2,3,4,5\}$, si este es el caso por necesidad x tiene algún valor entre 1-5, si hubiésemos dicho que $x \in (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ entonces diríamos que puede ser cualquier número real entre 1-5; lo cual es un rango infinito entre infinitos.

Así como podemos indicar que pertenece un elemento cualquiera a un conjunto, podemos indicar que tampoco pertenece; **"no pertenece a"**. Esto se expresa como $x \notin A$, lo mismo que dijimos del "pertenece a " aplica aquí por lo que podemos tener algo de la siguiente forma $x \notin \{1,2,3,4,5\}$, ó $x \notin (1,2,3,4,5)$.

Sin embargo también podemos indicar relaciones entre conjuntos. Podemos decir que "**un conjunto es un subconjunto propio de otro conjunto**" , esto se denota como $A \subset B$. Esto quiere decir que A está en B y B contiene al menos un elemento más que A. También podemos decir que "**un conjunto es un subconjunto de otro**", se escribe matemáticamente como $A \subseteq B$. Quiere decir que A no necesariamente es un subconjunto propio de B y que por ende A y A pueden ser iguales.

También tenemos que especificar otra terminología como la **cardinalidad de un conjunto** que es la cantidad de elementos en un conjunto. Así cuando tienen un solo elemento se llaman "**singletons**". Un **conjunto de poder** (power set) es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto. El conjunto nulo es el conjunto vacío y se escribe como $\emptyset = \{\}$. También podemos tener un **conjunto universal**, que es el que contiene todos los elementos posibles.

Finalmente, los conjuntos pueden estar **ordenados** o **no ordenados**. Por ejemplo uno ordenado es un conjunto como este $A = \{1,2,3,4,5\}$. mientras que un desordenado es $A = \{5,3,2,1,4\}$.

Operadores

Los **operadores** son símbolos que indican qué acciones hacer los conjuntos y sus elementos. Todo mundo conoce (asumo que el que lee esto lo hace) los básicos como la suma (+), la resta (−), la multiplicación ($\times, \cdot, *, o\ incluso\ xy$), así como la la elevación de un número a la n (x^n), sacar la raíz n de x ($\sqrt[n]{x}$), y el factorial de un número (!).

Sin embargo hay más operadores y que son de gran utilidad como la **sumatoria** ($\sum_{i=1} x_i$), esto nos dice que “**suma todos los valores indexados por i**”. O el **producto** $\prod_{i=1} x_i$, que nos dice “**multiplica todos los valores indexados por i**”. Por ello la i indica un caso. Se les puede ver de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

para el producto (https://www.youtube.com/watch?v=NdXWFvb21Yk&ab_channel=CowanAcademy)

$$\prod_{i=1}^{4} x_i = x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4$$

Así mismo los paréntesis les pueden afecta como:

$$\sum_{i=1} x_i^2$$

no es lo mismo que

$$\left(\sum_{i=1} x_i\right)^2$$

También podemos encontrar sumatoria o proyección múltiple (ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=vGQMmpTInPU&ab_channel=CowanAcademy) donde hay más de dos variables o dimensiones. Estas pueden ser:

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} x_{ij}$$

otro caso es

$$\prod_{i=1} \prod_{j=1} x_{ij}$$

aunque pueden extenderse indefinidamente. Así mismo podemos hacer la multiplicación de N sumatorias o de N productos:

$$\sum_{i=1} x_j \sum_{j=1} x_j$$

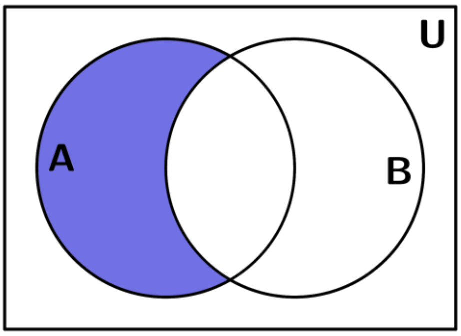
para el producto

$$\prod_{i=1} x_i \prod_{j=1} x_j$$

Más adelante se van a explicar mejor y en contexto de áreas que suelen usar dichos símbolos. Por ahora continuemos con más operadores.

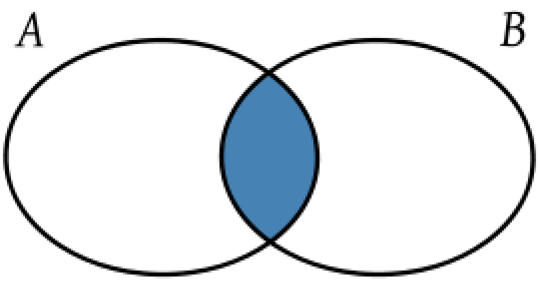
Por ejemplo también hay operadores para los conjuntos como la **diferencia**, esta se escribe como $A \setminus B$ que indica que "**A diferencia de B**", lo cual indica los elementos, el conjunto de elementos, de A que no están en B; de manera formal $x \in A \setminus B$ $si\ y\ sólo\ sí$ $x \in A$ & $x \notin B$. Así mismo podemos indicar el **complemento** de un elemento como A^c que es el conjunto de todos los elementos que no están en A.

Podemos así mismo usar diagrama de Venn para describir estas relaciones entre conjuntos. Por ejemplo en el siguiente vemos la diferencia:

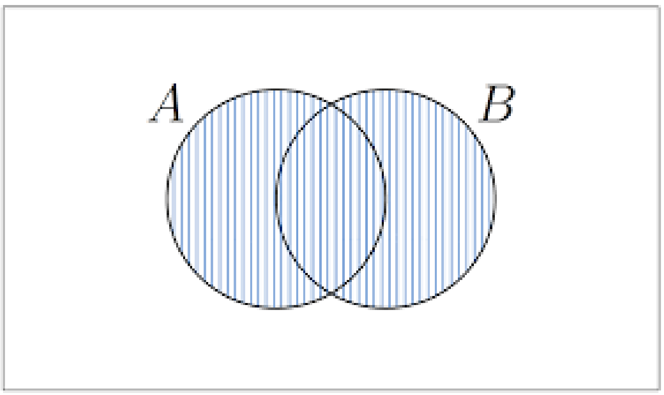


esto se ve dado a que la región sombreada está en A pero no en B.

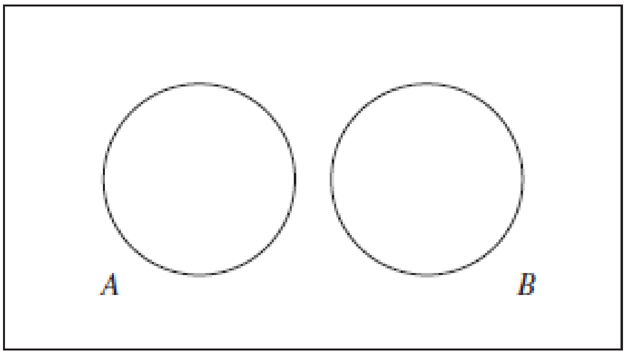
La **intersección** de un conjunto se refiere a “**los elementos compartidos por ambos conjuntos**” y esta se escribe como $A \cap B$. Su diagrama de Venn se ve:



La unión de dos conjuntos nos indica “**el conjunto de todos los elementos que están cualquier conjunto**”, se escribe como $A \cup B$, y se visualiza en diagrama de Venn como:

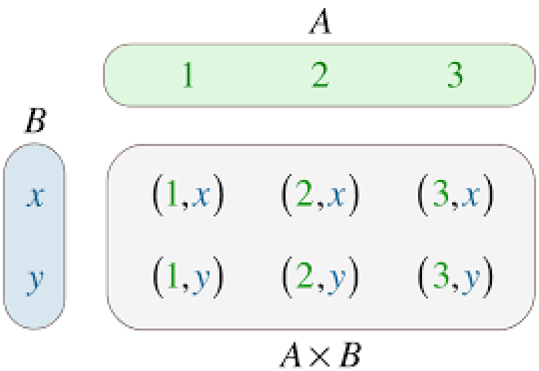


Así mismo tenemos conjuntos **mutuamente exclusivos**, o sea, “no comparten ningún elemento”, en diagramas de Venn se ve:



Otro importante es la partición, que se refiere “**al conjunto de subconjuntos que su unión conforma el conjunto**”. Por ejemplo, supón el conjunto $A = \{a, b, c\}$, este se puede partir de las siguientes maneras: $= \{a\}$; $= \{b\}$; $= \{c\}$; $= \{a, b\}$; $= \{b, c\}$; $= \{a, c\}$; $= \{a, b, c\}$; etc.

Finalmente el **producto cartesiano** es el conjunto formado a partir de los (a,b) donde a pertenece a A, y b pertenece a B. Para el caso de abajo vemos que $B = \{x, y\}$y $A\{1,2,3\}$, si este es el caso, entonces $A \times B = \{\{1, x\}, \{2, x\}, \{3, x\}, \{1, y\}, \{2, y\}, \{3, y\}\}$



Relaciones

Las relaciones matemáticas permiten comparar constantes y variables (que en esencia modelan conceptos de teorías). Aquí trataremos la relación entre solamente 2 elementos, por simplicidad, pero aplica a N elementos. Considera el caso donde tenemos números reales o enteros, en estos casos podemos hacer uso de símbolos conocidos para poder tratar su relación debido a que tienen un orden natural asociado. Ejemplo de esto es que $1 < 2 < 3 < 4 < 5 \ldots < n + 1, \quad 5 > 1$, etc. Así mismo tenemos los signos de mayor o igual que, o menor o igual que para casos donde no estamos tan seguros del valor, por ejemplo, $x \leq y$, $y \geq z$, etc.

Niveles de medición

Hay 4 diferentes niveles, está el nominal, ordinal, intervalo, y proporción. Expliquemos una por una.

El **nominal** es útil cuando queremos expresar diferencias de tipo pero no de orden como podrían ser las categorías asociadas a diferentes variables. Por ello es que no hace sentido hablar de relaciones como las antes mencionadas, ya que no tienen un orden natural. Supón que tenemos “piña”, “sandía”, y “mango”, no puedes decir que el mango es mayor que, igual que, o menor que alguna de las otras, es simplemente un mango y ya. Cuando se usan números con estas es una codificación, por ejemplo, si la categoría general es fruta entonces podemos decir que 1= piña, 2=sandía, y 3=mango. Esto, sin embargo, no da orden sino solamente una codificación arbitraria.

Cuando queremos establecer orden, entonces el nivel **ordinal** es el adecuado. Este nivel es el cual la numeración conserva una diferencia conceptual de orden sin embargo las diferencias entre uno y otro punto son discontinuas por lo que no se puede decir qué tanto es la diferencia o si la distancia entre ellos es equivalente. El ejemplo clásico es el del podio de una competencia donde tenemos un 1°, 2°, 3° pero no sabemos por cuánto ganó cada uno al anterior si solamente observamos el podio.

Por otro lado, podemos hacer que las distancias sean medibles y no diferencias entre los puntos (es constante). por lo que las diferencias de grado son apreciables mediante las variables de **intervalo**. Las variables de intervalo pueden ser de tipo continua o discretas. Para ejemplificarlas volvamos al podio, el tiempo es una variable de intervalo continua dado a que una unidad de tiempo t es igual en cualquier punto de la escala, así como que podemos decir por cuánto es que ganó cada participante al anterior (e.j. 10 seg, 20 seg, etc).

Por último tenemos las de **proporción (ratio)**, en este caso son igualmente de tipo intervalo pero en estas escalas hay un cero absoluto con significado. Ejemplos de esta son escalas donde tengamos un cero con significado tales como aquellas que tengan valores entre -x y +x, si esto es el caso las proporciones a cualquier punto de la escala son mantenibles , a diferencia de que solamente usáramos una escala del 0-100. En el caso anterior no se mantienen dichas proporciones.

Una cosa importante a notar es que hay una jerarquía entre los niveles de medición tal que toda de intervalo puede volverse de tipo ordinal o incluso nominal. Sin embargo, de nominal para arriba no funciona. Esto no quiere decir que la jerarquía indique que una sea mejor que otra, por el contrario, a veces las transformaciones pueden ser necesarias si un nivel x no da la información que uno requiere. Por poner un ejemplo, supón que vamos a recolectar datos de la cantidad de libros que las personas tienen por familias y solamente recolectamos esto, pero después quisiéramos conocer simplemente si tienen o no libros de fantasía. En el caso anterior sería más informativo volverla nominal y registrar un 1 para aquellas familias que tengan x>1, y 0 para los que tengan x<1.

Notación

Aquí una serie de símbolos y su significado que va a ser de utilidad siempre, va a ser nuestra tablita de cajón. Mucho de esto se entenderá después así que no te abrumes por la cantidad de símbolos y sus significados:

Symbol	Meaning
$+$	Addition
$-$	Subtraction
$*$ or $\times$ or $\cdot$	Multiplication
$/$ or $\div$	Division
$\pm$	Plus or minus
x^n	Exponentiation ("to the nth power")
$\sqrt[n]{x}$	Radical or nth root
$!$	Factorial
∞	Infinity
$\sum_{i=k}^{l} x_i$	Sum of x_i from index $i = k$ to $i = l$
$\prod_{i=k}^{l} x_i$	Product of x_i from index $i = k$ to $i = l$
$\ldots$	Continued progression
$\frac{d}{dx}$	Total derivative with respect to x
$\frac{\partial}{\partial x}$	Partial derivative with respect to x
$\int dx$	Integral over x
$\cup$	Set union
$\cap$	Set intersection
$\times$	Cartesian product of sets
$\setminus$	Set difference
A^c	Complement of set A
$\emptyset$	Empty (or null) set
$\in$	Set membership

$\notin$	Not member of set
$\mid$ or $:$ or $\ni$	Such that
$\subset$	Proper subset
$\subseteq$	Subset
$<$	Less than
$\leq$	Less than or equal to
$=$	Equal to
$>$	Greater than
$\geq$	Greater than or equal to
$\neq$	Not equal to
$\equiv$	Equivalent to or Defined as
$f()$ or $f(\cdot)$	Function
$\{\ \}$	Delimiter for discrete set
$(\ )$	Delimiter for open set
$[\ ]$	Delimiter for closed set
$\forall$	For all (or for every or for each)
$\exists$	There exists
$\Rightarrow$	Implies
$\Leftrightarrow$	If and only if
$\neg C$ or $\sim C$	Negation (not C)

Así mismo se usan letras del alfabeto griego, por ello he aquí algunos y cómo se pronuncian (sí, todos hemos buscado estas intrigados por su pronunciación y origen):

Upper-case	Lower-case	English	Upper-case	Lower-case	English
A	α	alpha	N	ν	mu
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	omega

Pruebas matemáticas

Por lo general eso empieza con una serie de **axiomas**, una serie de proposiciones que se asumen como ciertas dadas ciertas razones como podría ser que si X no fuera el caso entonces uno tendría una conclusión absurda. Luego a partir de estos axiomas se derivan otras proposiciones que deberían ser necesarias si los axiomas lo son, por ejemplo, si X es el caso entonces se sigue que Y dado que $X \Leftrightarrow Y$. Una proposición probada se llama un **teorema** (e.j. el de pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$) , cuando solamente es un paso en una cadena de pasos se llama **lemma**. Finalmente un **corolario** es una proposición que se sigue de la prueba de una proposición y no requiere más pruebas.

Hagamos unos ejemplos supón que A y B son nuestras suposiciones o axiomas, y nosotros tenemos una proposición derivada C de A y B, y que queremos probar D. Entonces podemos decir que “**D es cierta si A y B son el caso”**, de **suficiencia** (if), por ejemplo $A \& B \Rightarrow D$. Si queremos hacerlo de **necesidad** (only if), es decir, que “**si D es el caso entonces A y B también son el caso”**, entonces escribimos $A \& B \Leftarrow D$. De manera no formal el de suficiencia puede ser algo como: si Juanito tiene un dolor de muelas y nunca se cepilla los dientes entonces Juanito tiene una caria. Por otro lado, el de necesidad indica solamente si hay una causa hay un efecto.

Otro que se llega a usar es el de **suficiencia y necesidad**, tiene la forma "**X es el caso si y sólo si Y es el caso**" y en notación es $A \Leftrightarrow B$. Por ello es que también son intercambiables o equivalentes los términos. Por el sonido es si y sólo si hay movimientos ondulatorios de las partículas del aire.

Algunos de los procedimientos usados en las pruebas son la **negación**, que se escribe como $\neg A$, es decir que $\neg A$ es no A. También están la **disyunción** $\vee$ que significa "**a ó b**", y la **conjunción** $\wedge$ que significa "**a y b**". Se suelen usar para indicar que A o B son verdaderas, o que A y B son verdaderas (pueden extenderse a N términos, proposiciones, o conjuntos). Para escribir lo que intentábamos al principio lo haríamos $A \wedge B \Rightarrow D$, que dice "si A y B son el caso, entonces D es el caso" ó "si A y B son verdaderas, entonces D es verdadera"; esto quiere decir que A y B son razón suficiente de D.

Las **leyes de Morgan** nos van a ser de utilidad para manipular conjuntos y proposiciones lógicas. Estas son:

$$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

y la segunda

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Es decir que la negación de una disyunción de dos conjuntos es la unión de la negación de los conjuntos, y la negación de la unión de dos conjuntos es igual a la disyunción de la negación de los conjuntos. En español, quiere decir que si A y B son falsos entonces al menos es uno verdadero ($\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$), y si ni A o B son verdaderos entonces ambos son falsos ($\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$). Lo cual tiene sentido pues lo hacemos todo el tiempo, por ejemplo, decimos que si A estudia una licenciatura y A estudia un posgrado no pueden ser al mismo tiempo, al menos es cierto de A que o estudia un posgrado o estudia una licenciatura.

La inversa implica cambiar un argumento de necesidad a uno de suficiencia o al revés. Tal que si tenemos $A \,\&\, B \;\Rightarrow D$ entonces su inversa es $A \,\&\, B \;\Leftarrow D$ (de suficiencia a necesidad). Así mismo la contrapositiva es la inversa de la inversa, o sea, $A \,\&\, B \;\Rightarrow D$ para nuestro ejemplo (la del inicio).

Las pruebas son de dos tipos, directas e indirectas. Primero hablemos de las directas, estas hacen uso de la deducción y a partir de una concatenación de proposiciones basadas en axiomas llegan a una conclusión. Hay varios tipos de estas:

- **Deductiva**: aquí vamos de ciertas premisas universales a una conclusión. En el libro se sugiere partamos de que $A = x \in \mathbb{Z}_{\blacksquare}$ y que $B = y \in \mathbb{Z}_{\blacksquare}$, siendo estas proposiciones que definen un número par. Si $D = xy \in \mathbb{Z}_{\blacksquare}$, entonces dice que el producto de dos números pares es un par. Luego, si D es cierto entonces C es cierto, donde $C = 2a \times 2b = 4ab$, C es cierto por ende D es cierto.
- **Prueba por agotamiento**, es similar a la anterior solamente que se usan una selección exhaustiva de casos para mostrar que la proposición es cierta.
- **Prueba por construcción**, si puedes hacer algo entonces eso existe. Por ende suele ser útil para mostrar la existencia de algo.
- **Prueba por inducción** (aunque se llama así realmente es deductiva), se toma un caso X y se genera una proposición de este, luego se asume que es verdadera para algunos casos y se encuentran más casos, y si esto continúa se demuestra que la proposición es verdadera. Se sugiere el siguiente ejemplo donde tratamos de probar que una ecuación funciona para el caso de n, y el caso de n+1:

$$\sum_{i=1}^{n} \quad i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Primero el caso donde n=1

$$\sum_{i=1}^{n} \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

vemos que se cumple, luego queremos el caso donde n=n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$$

si i=$\frac{n(n+1)}{2}$, entonces

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Finalmente tenemos la **prueba indirecta** que se basa en una prueba dado que las otras posibilidades no lo son. Por ejemplo:

- Prueba por contraejemplo: Por contraejemplo es muy sencilla, si tenemos algo que dice que Aes el caso y encontramos un $\neg A$, entonces ya demostramos que A no es el caso.
- Prueba por contradicción: en esencia se asume que A es falso y a se muestra que no puede ser A falsa porque causaría una contradicción en algo que ya se sabe. Si esto ocurre se acepta A como verdadera.

2)Álgebra

Propiedades básicas de la aritmética

Estás aplica para todos los números reales y enteros:

- **Propiedad asociativa**, establece lo que ocurre en los casos siguientes $(a+b)+c = a+(b+c)$, y $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Es decir que **la agrupación de los factores no altera el resultado**.
- **Propiedad conmutativa**: esta dice que el **orden de las multiplicaciones y sumas no altera el resultado**. Por ello $a + b = b + a$, y $a \times b = b \times a$ son ciertas.

- **Propiedad distributiva,** nos dice que **la multiplicación se distribuye en suma y resta**. Tal que $a(b + c) = ab + ac$
- **Propiedad de identidad,** establece que **hay operaciones** (multiplicación, división, suma y resta) **que dejan sin cambiar un término**. Tales como $1 + 0 = 1$
- Propiedades inversas, es decir que hay valores que producen la identidad de adición. Esto solamente aplica para los reales y los racionales. Se ve como $(-x) + x = 0$, o como $(x^{-1}) \times x = 1$

Orden de las operaciones

El orden de las operaciones en el álgebra y la aritmética va así: paréntesis, exponente, multiplicación, división, adición y sustracción.

Razón, proporción, y porcentaje

La **razón**, como mencionamos antes, es solamente posible cuando hay un 0 y son de tipo continuo, estos se expresan como $\left|\frac{x}{y}\right|$. Es absoluto porque por lo general solamente nos interesan los valores entre $0\ y\ el\ \infty$, aunque, en principio, sí pueden ser negativos.

Una **proporción**, por otro lado, se expresa como la relación de una variable entre sí misma y la suma de esta con otra. Sus valores son entre 0 y 1, esta se escribe como $\left|\frac{x}{x+y}\right|$. Un **porcentaje** es lo mismo que la proporción pero representada en sentido de 0 y 100, por lo que se representa como $\left|\frac{x}{x+y}\right| \times 100$.

También podemos expresar el **cambio porcentual** como $\frac{(x_{t+1} - x_t)}{x_t}$, pueden ser en positivo o negativo (lo cual es importante pues indica la dirección de cambio). Puede ser útil para expresar el cambio de una proporción en un determinado periodo de tiempo como los cambios en los salarios, en el cambio de una moneda, etc.

A)Revisión de álgebra

Se van a revisar cosas que suelen ocasionar conflicto a pesar de que ya es algo conocido para la mayoría que lee este texto.

Fracciones

Las fracciones están compuestas por un numerador, el número de arriba, y un denominador, el número de abajo. Se ven $\frac{Numerador}{Denominator}$. Debido a que suelen causar confusión para muchos es importante poder convertirlas a números enteros, el caso más simple es cuando el numerador se divide de manera par con el denominador.

Pero cuando te encuentres con número mixtos de la siguiente manera $Z\frac{x}{y}$, entonces multiplica el denominador por el número entero y luego ese resultado lo sumas al numerador.

La cancelación es un error común de las personas supón la siguiente fracción $\frac{7+3x}{2x}$, el error consiste en cancelar las x's y hacer una fracción del siguiente tipo $\frac{10}{2} = 5$ para la fracción anterior! Lo correcto sería hacer lo siguiente:

$$\frac{7+3x}{2x} = \frac{7}{2x} + \frac{2x}{3x} = \frac{7}{2x} + \frac{2}{3}$$

Otro punto de frustración común es la adición ya que solamente se puede hacer esto si el denominador es igual. Por ejemplo, si $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2}$, pero no es posible si $\frac{7}{2} + \frac{2}{3}$. Para solucionar esto debemos un caso posible es que tenemos $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$, en este caso multiplicaremos por uno es decir por $\frac{2}{2}$el $\frac{1}{2}$ y nos dará $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$. A diferencia de la adición o la resta, la multiplicación se quita de la pena de la igualdad de los denominadores $\frac{7}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$. Por ende es mucho más simple.

Factorizar

Una manipulación algebraica básica es combinar términos similares en una expresión como sería el caso de $5a + 3b + 4a + 6c + 3b + 1c = 9a + 6b + 7c$. Otra operación común es quitar un término común, esto es mediante la propiedad distributiva de las multiplicaciones pero en reversa. Es decir que si tenemos la siguiente ecuación $2a + 5a^2 + 6a^3$podemos transformarla a $a(2 + 5a + 6a^2)$, también podemos tener a necesidad de hacer dos como cuando tenemos $12y^3 - 12 + y^4 - y$ entonces hacemos $12(y^3 - 1) + y(y^3 - 1)$

Factorización de polinomios cuadráticos

Estos tienen la forma $x^2 + 3x + 2$ son factorizables como $(x\pm?) \times (x\pm?)$. En nuestro ejemplo sería la solución $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, si lo desarrollamos tenemos que $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + 1x + 2 = x^2 + 3x + 2$. Los números que van en el primer paréntesis y en el segundo tras el símbolo son aquellos que sumados y multiplicados dan b (el número con la constante no elevada al cuadrado) y c (el número que no tiene una variable).

Factorización y fracciones

El mismo principio de arriba puede ser aplicado a casos donde tenemos fracciones. Supón que tenemos la siguiente fracción $\frac{x^2-1}{x-1}$, en este caso podemos factorizar el numerador de la siguiente manera $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$. SI desarrollamos el numerador podemos ver que es equivalente $(x + 1)(x - 1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$.

También hay casos donde puede haber la necesidad de hacer esto varias veces, considera la siguiente $\frac{3x^4 + 3x^3 - 6x^2}{6x^2 + 12x}$, en este caso podemos agrupar ambos, numerador y denominador, por factor común:

$$\frac{3x^2(x^2 + x - 2)}{6x(x + 2)}$$

luego factorizamos el polinomio cuadrático

$$\frac{3x^2(x - 1)(x + 2)}{6x(x + 2)}$$

luego podemos simplificar

$$\frac{3x^2(x - 1)}{6x}$$

finalmente dividimos

$$\frac{x(x - 1)}{2}$$

Expansión por medio del método FOIL

El nombre FOIL es por los pasos en inglés que uno sigue para realizar la expansión. SUpongamos la siguiente ecuación:

$$(2x + 7)(4 + 3x)$$

Para resolverlo mediante FOIL haríamos primero la F (first) que nos indica que hay que multiplicar el primero:

$$(2x + 7)(4 + 3x) = 2x \times 4 = 8x$$

luego O (outer) que dice que multipliques el de afuera:

$$(2x + 7)(4 + 3x) = 2x \times 3x = 6x^2$$

ahora hacemos la I (inner) que significa multiplica el interno:

$$(2x + 7)(4 + 3x) = 7 \times 4 = 28$$

la última letra L (last) no dice que multipliquemos el último

$$(2x + 7)(4 + 3x) = 7 \times 3x = 21x$$

cuando unimos todo esto nuestra expansión resulta en:

$$(2x + 7)(4 + 3x) = 8x + 6x^2 + 28 + 21x = 6x^2 + 29x + 28$$

Resolver ecuaciones

Para resolver una ecuación debemos aislar una variable a un lado del igual, por ejemplo en $y = 2x$ tenemos resuelto para y pero también podemos obtener x por medio de álgebra:

$$y = 2x$$

podemos dividir entre 2 a ambos lados de la ecuación

$$\frac{y}{2} = \frac{2x}{2}$$

esto es igual a

$$\frac{y}{2} = x$$

En esencia se deben tener en mente algunas cosas:

- Concéntrate en la variable de interés
- Combina los términos iguales
- Revisa tu respuesta por medio de sustitución de las variables

- Lo que hagas a un lado de igual lo haces al otro para mantener la igualdad (mover y cambiar el símbolo de un lado a otro no es una operación aritmética!)

Resolviendo cuadráticas polinomiales

Para ello debemos ver cómo se completa un cuadrado y conocer la ecuación cuadrática (aka la chicharronera).

Para **completar el cuadrado** lo que se hace, por lo general y cuando son simples, es aislar la variable y su cuadrado a un lado del igual e ir colocando números a ambos lados. Estas ecuaciones de las que hablamos tienen la forma $(x - n)^2 \pm c$, supón que tenemos $(x-3)^2 - 4$, para resolver sería

$$(x-3)^2 = 4$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{4}$$

$$(x-3) = \pm 2$$

$$x = \pm 2 + 3$$

por ende hay dos resultados

$$x = 5 \text{ ó } x = 1$$

Los pasos pueden resumirse como:

- Mueve la variable cuadrada a un lado de la ecuación y divide por su coeficiente
- El coeficiente de la variable no elevada al cuadrado divídela entre 2 y elévala al cuadrado.
- Factoriza el lado izquierdo a su forma $(x - n)^2 \pm c$ y del lado derecho simplifica
- Raíz cuadrada a ambos lados (va a dar dos soluciones por ello pues puede ser positiva o negativa)
- Resuelve para x y obten ambas soluciones

La fórmula cuadrática de una operación (aka la chicharronera) es útil cuando no podemos resolver de manera simple por medio de completar el cuadrado. La forma general de una ecuación cuadrática es $ax2 + bx + c = 0$, y la solución general para esta ecuaciones es:

$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b \quad ^2 - 4ac}}{2a}$$

como se ve a y b son coeficientes y c es una constante de las ecuaciones con la forma general antes descrita.

Inequidades

Los números reales tienen la siguiente propiedad $x = y, x > y, ó\ x < y$, es decir que tienen la capacidad de tener relación con otros números de igualdad (=), de menor que (<), y de mayor que (>). Así mismo estas guardan su relación sin importar qué tantos números se agreguen (adición y sustracción) a los lados de estas. De tal manera que si uno tiene $X = Y\ y\ luego\ pone\ X + Z = Y + Z$ se mantiene igual esto es debido a la propiedad de igualdad que establece que si uno hace una adición o sustracción de un lado ha de hacerlo del otro lado.

Para la multiplicación y la división esto ya no aplica de igual manera ya que cuando son positivos los números agregados tenemos el siguiente efecto: si a es positivo y tenemos $X > Y$ entonces $aX > aY$, para la división es $\frac{X}{a} > \frac{Y}{a}$; mientras que cuando tenemos un a negativo obtenemos $-aX < -aY$, y $\frac{X}{-a} < \frac{Y}{-a}$. En pocas palabras, si es positivo la relación se mantiene y si es negativo la relación se invierte.

Funciones relaciones y utilidad

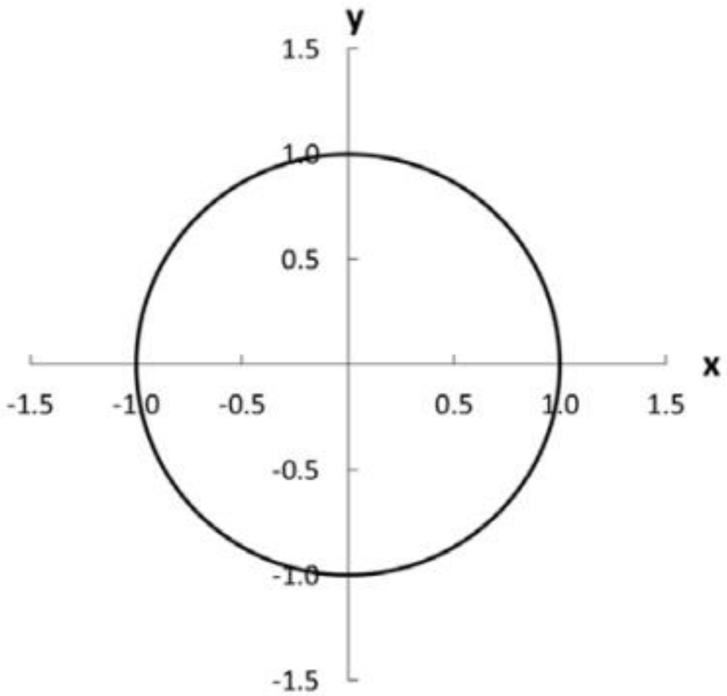
Las **funciones** describen la relación entre variables o conceptos, es decir que si X es tal Y es tal. Tal que para valor de X (dominio) hay un valor de Y (rango), sin embargo cuando a X le corresponde un subconjunto de valores del rango lo llamamos **correspondencia**.

Ecuaciones

La notación de una **función implícita**, es decir, cuando no está especificado que se hace con determinado elemento $y = f(x)$, es decir que solamente nos dice que y es una función (f) de x (el argumento) pero no se especifica la relación y uno no podría graficar o sacar ningún valor. Por otro lado, cuando es **explícita** la relación sí es posible hacer todo esto, estas son funciones como esta $y = 2x$ (aquí sabemos que y aumenta dos veces su valor por cada unidad de x).

Gráficos

Estos se derivan de las funciones a partir de la relación entre dos variables, la $x$en el eje horizontal y la y en el eje vertical. Este gráfico se llama cartesiano o xy. Un ejemplo de esto es la siguiente ecuación $x^2 + y^2 = 1$ que genera un círculo entre -1 y 1, aunque esto no es una función sino una relación ya que por cada valor de x hay más de un valor de y.



Por otro lado la ecuación $y = 3x$ sí es una función debida a que no hay más de un valor de y por cada valor de x. Esto es evidente al ver que es efectivamente una línea.

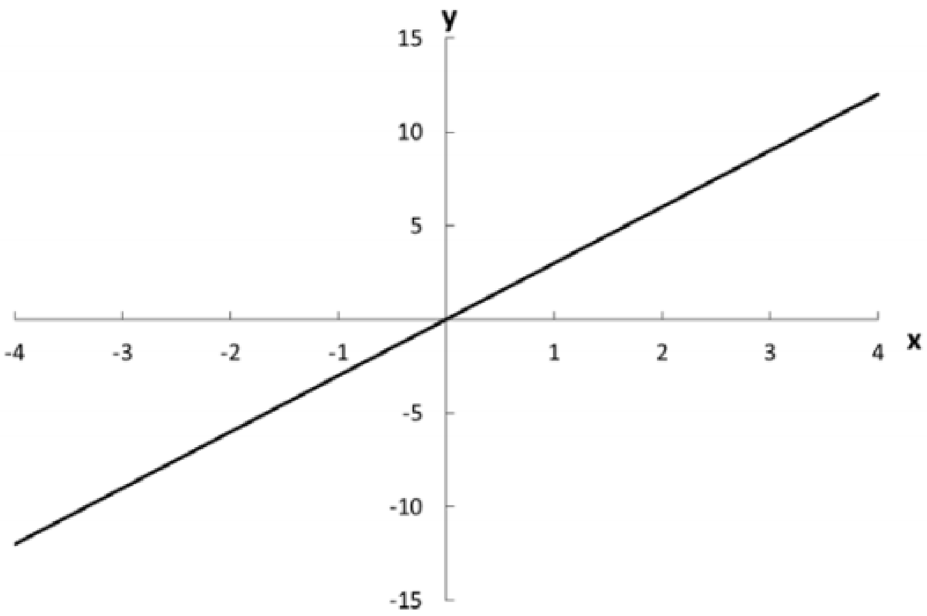


Figure 3.2: Graph of $y = 3x$

Propiedades de la funciones

De manera formal una función se define como $f\ como\ f(x) : A \to B$, es decir que $f(x)$ mapea A a B o que si uno le da a $f(x)$ una entrada x te arroja una y. También se le llama a la A el **dominio** (indica el valor de donde x se toma; como los números reales) y a B el **codominio** (que indica de donde se toma el valor de y asociado a x; también es alguno de los conjuntos de números). La **imagen** (también se llama rango) es el conjunto de todos los valores de A tras pasar por $f(x)$.

Las funciones también se pueden encadenar de tal manera que hay funciones dentro de funciones, esto se llama composición de funciones. Pueden tener las siguientes formas $g \circ f(x)\ , pero\ a\ más\ usada\ es\ \ g(f(x))$ y se lee como "g compuesta con f", o también como g de f de x. En casos donde tenemos $f(x)A \to B\ y\ también\ \ g(x) : B \to C$, entonces por mediación la definición completa es $g \circ f(x) : A \to C$; g de

f mapea A a C. Se computan de la más interna a la más externa tal que primero va f(x) y luego g.

Las funciones tienen propiedades asociativas como $(f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h)$, o sea que podemos mover los agrupadores sin alterar la identidad, pero no siempre es el caso que las propiedades conmutativas se mantengan (como $(f \circ g)\ y\ (g \circ f)$).

Identidad y funciones inversas

Table 3.1: Identity and Inverse Function Terms

Term	Meaning
Identity function	Elements in domain are mapped to identical elements in codomain
Inverse function	Function that when composed with original function returns identity function
Surjective (onto)	Every value in codomain produced by value in domain
Injective (one-to-one)	Each value in range comes from only one value in domain
Bijective (invertible)	Both surjective and injective; function has an inverse

Lo siguiente se resume en la tabla de arriba. Una función **suryectiva** es aquella en que todo valor del codominio proviene de algún valor del dominio.. Como cuando van de los reales a los reales.

Una función es **inyectiva** si cada elemento del codominio proviene de un solo elemento del dominio. Por ende es más restrictiva que la anterior pues la suryectiva no limita que cada valor de A mapee a un solo valor de B y viceversa.

Biyectivas son aquellas que son suryectivas y biyectivas, lo cual permite que se puedan invertir las funciones. Para poder explicar esto notemos que una función de **identidad** $f(x) = x$ tiene por su dominio y codominio los mismos valores tal que $A \rightarrow A$. Bueno, la **inversa** justamente hace que al unirse a una función esta regrese la función de identidad, o sea, que los cambios efectuados sean revertidos. La inversa se define como $f^{-1}(x) : B \rightarrow A$. Por ejemplo si tenemos $f(x) = 2x +$

$3\ es\ biyectiva\ entonces\ la\ inversa\ es\ f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ y si tenemos que $f^{-1}f(x) = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x}{2} = x$,como se ve se sustituye x en la ecuación y así se obtiene la de identidad.

Funciones monotónicas

Una **función monotónica** es aquella que preserva el orden del dominio al rango y por tanto la variable explicada (y) aumenta o se mantiene mientras la explicativa (x) aumenta.

Luego, también tenemos que discutir que hay funciones que incrementan o disminuyen. Se dice que una función ($f(x)$) **aumenta**, si esta aumenta, cuando por lo menos un x perteneciente a un subconjunto de su dominio aumenta ($x \subseteq C\ y\ C \subseteq A$). Pero cuando esta disminuye cuando por lo menos un x que pertenece a un subconjunto de su dominio ($x \subseteq C\ y\ C \subseteq A$) aumenta se dice que la función **disminuye**. Por otro lado, el aumento o disminución pueden ser estrictos o pueden ser débiles. Son **estrictos** cuando siempre que x aumenta esta aumenta (estas son inyectivas), y de **débil incremento** cuando esta no disminuye pero que puede o no incrementar, y de **débil disminución** cuando esta no incrementa y puede o no disminuir. Abajo hay una tabla que resume esto

Table 3.2: Monotonic Function Terms

Term	Meaning
Increasing	Function increases on subset of domain
Decreasing	Function decreases on subset of domain
Strictly increasing	Function always increases on subset of domain
Strictly decreasing	Function always decreases on subset of domain
Weakly increasing	Function does not decrease on subset of domain
Weakly decreasing	Function does not increase on subset of domain
(Strict) monotonicity	Order preservation; function (strictly) increasing over domain

Funciones con más de una variable y términos de interacción

Esto es necesario porque realmente son pocas las cosas que uno va a tratar que puedan describirse como una función entre 2 variables simples en la investigación o en el mundo...el mundo es más complejo que eso. Es por ello que vamos a necesitar hacer funciones que puedan ser como: $y = f(x1, x2, x3)$ ó $z = f(x, y)$, aunque realmente hay muchas más y mucho más complejas.

Considera la siguiente función $y = 3xz$, nota que la gráfica de esta es un plano con una variación de su pendiente a lo largo de su área. Bueno, esto es debido a que y es dependiente de la interacción de z en x (su producto y son usados en funciones no lineales) y esto hace que el plano no sea constante.

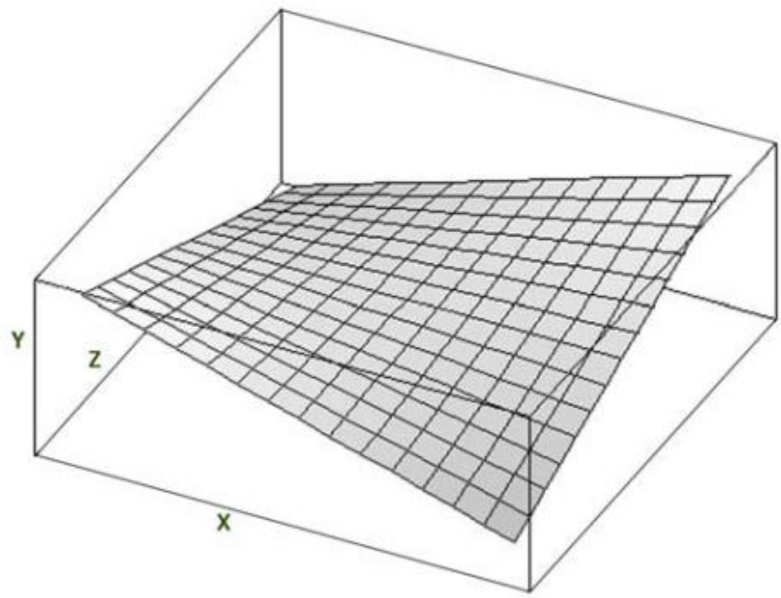


Figure 3.3: Graph of $y = 3xz$

Así mismo también tenemos funciones lineales como $y = 3x + z$, que como se ve en su representación 3-D es lineal y su pendiente es constante a lo largo del plano.

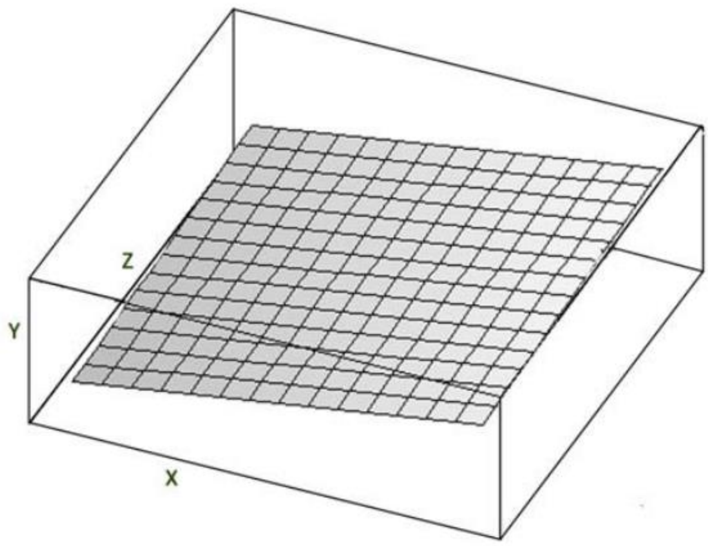


Figure 3.4: Graph of $y = 3x + z$

Sin embargo, en principio uno puede tener N dimensiones posibles y, en principio son graficables, pero no son muy útiles porque son extremadamente enredadas y difíciles de interpretar y por ende uno se limita al uso de ecuaciones para su análisis.

La definición de la función es $f(x_1, \ldots, x_n) : A1 \times \ldots \times An \rightarrow B$, esto básicamente nos dice que si hay n variables en la función entonces su dominio está dado por el producto cartesiano de los conjuntos a donde dichas variables pertenecen.

Ejemplos de funciones de una variable

1) La función lineal

Se recordará que mencionamos al principio la ecuación de la recta $y = a + bx$ (que en realidad es una ecuación **afín** y no una lineal) donde x es una variable y a y b son constantes, a es la intersección de la línea respecto del eje y (donde $x = 0$) mientras que b es la pendiente de la recta. Así mismo.

En el libro dan el ejemplo de como el nivel educativo (x_{ed}) predice la probabilidad devoto (p_v), la ecuación es $p_v = 1.215 + 0.134 \times x_{ed}$. Aquí vemos que la intersección es de 1.215 y no tiene sentido dado que la probabilidad de un evento siempre es entre 0 y 1. Esto probablemente se deba a que en su muestra no hubo valores de $x_{ed} = 0$(sin educación) y por ende no es informativa aquí la intersección. Por otro lado, podemos ver que dada la unidad de cambio de x_{ed} la p_v aumenta en 0.134, y que esta relación de cambio de x_{ed} a p_v es constante a lo largo de los datos (es lineal).

2) Funciones lineales

Una **ecuación lineal** tiene variables de orden x^1y de $x^0 = 1$, o sea que sus exponentes no rebasan el 0 y/o el 1. Esto siendo a su lado derecho y por ende siendo **funciones afines**, las **funciones lineales** no aceptan $x^0 = 1$. Una función lineal se define como cualquier función con las siguientes propiedades:

- Aditividad (Superposición) : $f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$
- Escala (Homogeneidad : $f(ax) = af(x)\ para\ todo\ a$

La **escala** dice que la salida de la función es proporcional a su entrada, es decir que si la entrada es grande igualmente lo será la salida y si es pequeña pues pequeña. La **aditividad**, por otro lado, nos dice que la función de la suma de dos variables es igual a la suma de las funciones de dichas variables.

Para poder más clara la diferencia de la función lineal y la función afín considera la siguiente función afín $y = \alpha + \beta x$ y su función lineal $y = \beta x$, como se ve α desaparece dado a que su orden es de $x^0 = 1$ y no es aceptable en estas funciones. Luego veamos cómo difieren en cuanto a la propiedad de aditividad cuando se aplica al sustituir a la derecha x por $x1 + x2$. Primero para la función afín vemos:

$$f(x1 + x2) = \alpha + \beta(x1 + x2) = \alpha + \beta x1 + \beta x2$$

$$f(x1) + f(x2) = (\beta x1 + \alpha) + (\beta x2 + \alpha)$$

$$\alpha + \beta x1 + \beta x2 \neq 2\alpha + \beta x1 + \beta x2$$

Por ende con las funciones afines no se mantiene la propiedad de aditividad ($\alpha \neq 2\alpha$). Mientras que con las funciones lineales esta propiedad sí se mantiene:

$$f(x1 + x2) = \beta(x1 + x2) = \beta x1 + \beta x2$$

$$\beta x1 + \beta x2 = f(x1) + f(x2)$$

Ahora veamos la propiedad de escala en ambas funciones (afín y lineal) primero veamos la afín:

$$f(ax) = \alpha + (\beta(ax)) = \alpha + a\beta x$$

$$af(x) = a\alpha + a\beta x$$

$$\alpha + a\beta x \neq a\alpha + a\beta x$$

Es decir que en las funciones afines la propiedad de escala tampoco se cumple ($\alpha \neq a\alpha$). Ahora veamos como sí se mantiene en la funciones lineales:

$$f(ax) = \beta(ax) = a\beta x$$

$$a\beta x = af(x)$$

Como se ve la única diferencia radica en la constante (α) y las dos funciones son equivalentes solamente cuando $\alpha = 0$, es decir que la línea cruza el eje y en 0 cuando x=0. Por ende toda función lineal cruza el eje y en 0!

Funciones no lineales: exponentes logaritmos y radicales

De manera técnica las funciones no lineales son aquellas que no cumplen la propiedad de aditividad ni la de escala, pero para términos prácticos (y que probablemente mostrarían a un matemático) son aquellas que no grafican una línea recta. Ejemplos de estas funciones no lineales son el seno, coseno, tangente, exponente, logaritmo, ecuaciones cuadráticas y polinomiales, radicales o raíces, etc.

Los exponentes, los logaritmos y los radicales están relacionados y se pueden usar para resolver ecuaciones de la forma $b^n = x$ ya que cada una de estas sirve para obtener, por transformación, una o la otra. Esto es de la siguiente forma:

- Exponente para resolver para x
- Logaritmos para resolver para n
- Radicales para resolver para b

Exponentes y las funciones exponenciales

Los exponentes son una forma de abreviar la multiplicación de un número por sí mismo en N ocasiones. Por ejemplo, si uno tiene 2^3 es lo mismo que hacer $2 \times 2 \times 2$, de manera más general lo podemos expresar como $x^n = x \times x \times .....x\ (n\ veces)$. Esto es probablemente conocido por todos los que leen esto, pero hay exponentes más complejos como $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, así como que $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Cuando los exponentes son mixtos entonces ocurre que si tenemos algo como $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ y si tenemos algo como $x^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$.

Las funciones no lineales son de utilidad cuando hay diferentes interacciones de x a y dados diferentes valores de x (pendiente no constante). Consideremos la función lineal$y = x$ que genera una línea como la que se puede ver abajo. Esta conserva la propiedad escalar y por tanto los valores de x son equivalentes a los de y a lo largo de toda la línea.

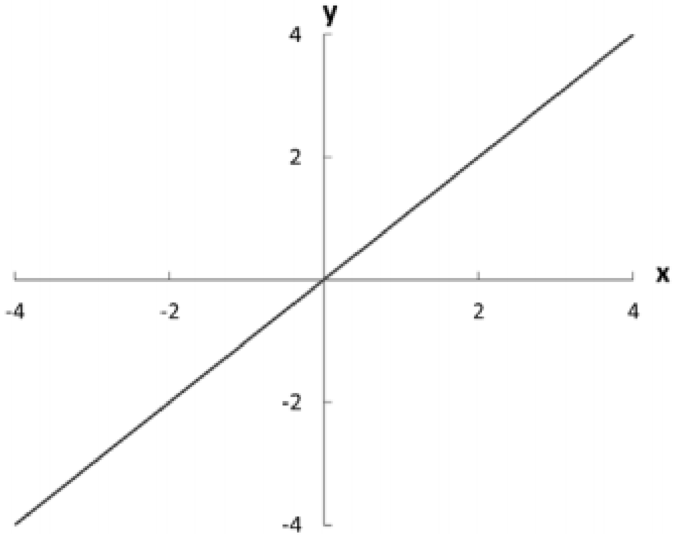


Figure 3.6: Graph of $y = x$

En cambio considera la función no lineal $y = x^2$, aquí la propiedad escalar no se conserva y por ende los valores de y varían a diferentes valores de x (siempre positivos), de hecho eso permite hacer la línea convexa (la forma en U; cuando es la U al revés se llama cóncava).

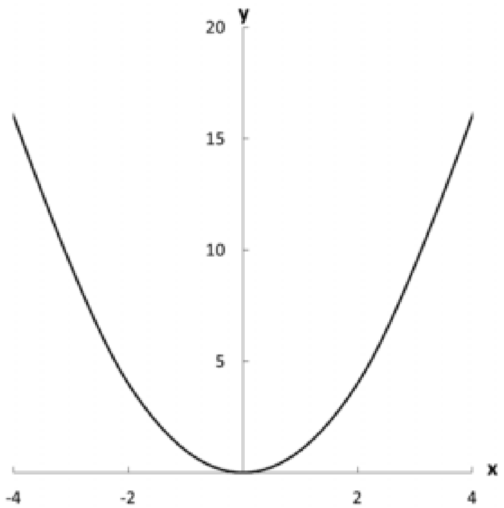


Figure 3.7: Graph of $y = x^2$

Reglas de los exponente:

- Multiplicación: **el producto de los exponentes es la suma de estos**. De tal manera que $x^m \times x^n = x^{m+n}$ .y sirve cuando los exponentes son positivos, negativos o cero.

- Elevar a una potencia otra: **es el producto de los exponentes**. Por lo que i $(x^m)^n = x^{mn}$.
- División: **si tienen la misma base entonces se saca la diferencia de estos**. Esto es que sacamos $\frac{x^{m,}}{x^n} = x^{m-n}$

Finalmente cuando tenemos que m^x tenemos un exponencial y la más común es la que usa la base del logaritmo natural e donde $e \approx 2.7183$ y suele escribirse como $y = exp(x)$ ó $también\ como\ y = e^x$. Su gráfico es

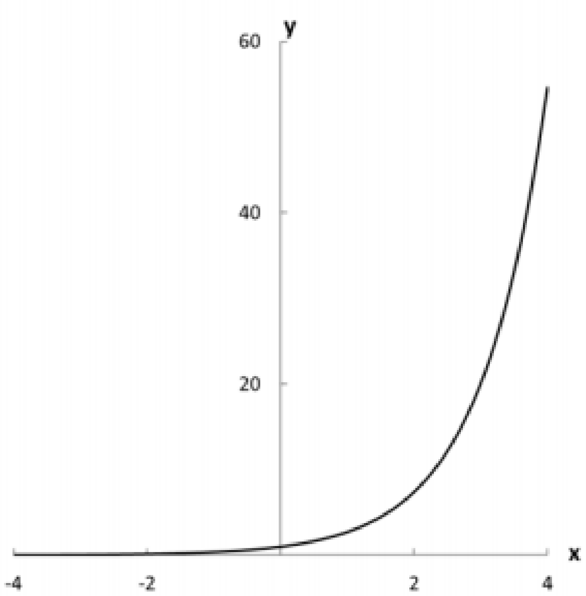


Figure 3.8: Graph of $y = e^x$

Así es, por eso es que la gente dice que algo tuvo un “crecimiento exponencial” cuando su valor aumentó drásticamente.

Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas describen una parábola y se escriben como $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, si $\beta_2 < 0$ entonces es una parábola cóncava (en U invertida), y si es $\beta_2 > 0$ entonces es una parábola convexa (en U).

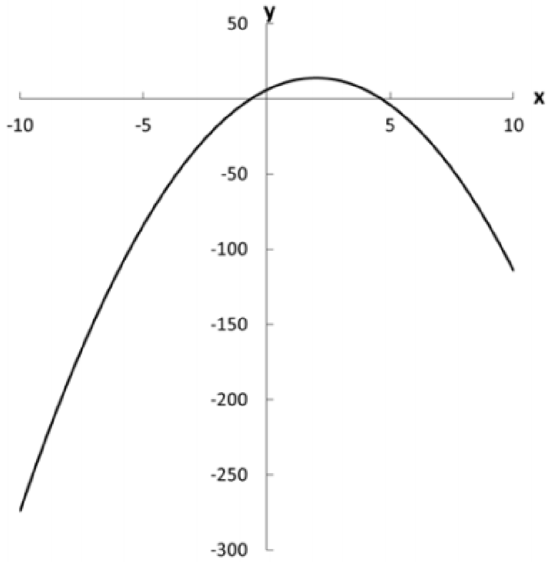


Figure 3.9: Graph of $y = 6 + 8x - 2x^2$

Es muy útil para modelar relaciones de variables donde la relación entre dos variables es positiva o negativa hasta un punto y luego se invierte. El ejemplo que se me ocurre podría ser la relación entre la cantidad de dinero que uno tiene y el bienestar que uno puede obtener gracias a ese dinero. Uno esperaría que una determinada cantidad de dinero sea positiva para nuestro bienestar ya que puede servir para obtener ocio, vivienda, servicios de salud, comida , etc, pero si uno tiene dinero en exceso uno tiene que sacrificar su propio bienestar para generar cantidades exorbitantes de este (se vuelve un esclavo de su fortuna).

Ecuaciones polinomiales de orden superior

Una ecuación polinomial tiene la forma $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n n^n$ y la n es un entero menor a ∞. Como se puede apreciar las cuadráticas son polinomiales pero orden inferior. Las de orden superior son aquellas que son cúbicas o superiores. Estas describen N límites donde la relación entre dos variables se invierte (como vimos con las parábolas y las cuadráticas). Por ejemplo, nota como una que es cúbica llega a tener 2 de estas inversiones de relación.

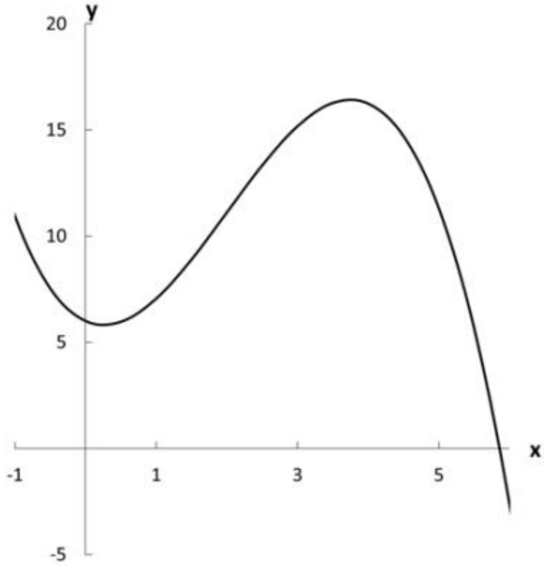


Figure 3.10: Graph of Cubic Polynomial

Logaritmos

Los logaritmos son la inversa de los exponentes y viceversa. Por lo cual pueden transformar funciones no lineales en lineales!! Log te dice cuantas veces multiplicar la base a para obtener x, si tienes $log_a x$ entonces $a^{log_a x} = x$ (recuérdese que es la inversa del exponente), y también $log_a a^x = x$. Las bases más comunes son el logaritmo natural ($ln\ es\ base\ e\ \approx\ 2.7183$) y el log base 10. Las gráficas de cada uno se aprecian abajo

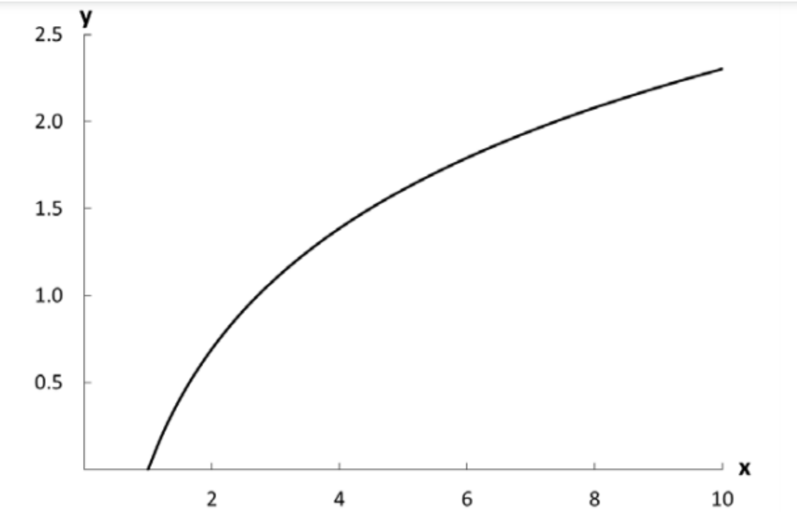


Figure 3.11: Graph of $y = \ln(x)$

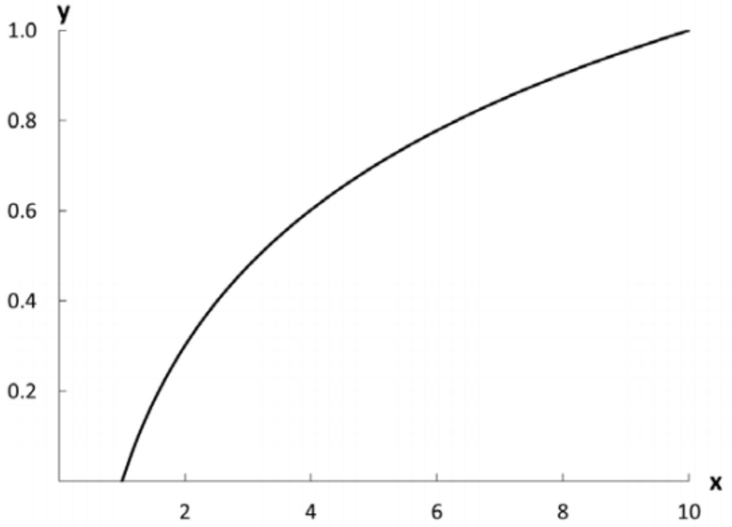


Figure 3.12: Graph of $y = \log(x)$

Como se ve, son buenas para modelar relaciones entre variables donde el impacto de x sobre y sea alto al principio y conforme aumenta esta menor es el impacto. Un ejemplo podría ser una vitamina hidrosoluble que brinda beneficios pero con forme llega a cierto punto el exceso simplemente es desechado, otro podría ser el nivel educativo sobre la probabilidad de voto.

Reglas algebraicas de los logaritmos de n base: 1) el logaritmo está definido para valores de x menores o iguales a cero ya que $a^{\log_a x} = x$ donde valores de cero generan contradicciones entre los términos a diferentes lados del igual; 2) el logaritmo del producto es igual a la suma de del logaritmo de cada término cuando los valores de x son mayores a cero, es decir, $ln(x_1 \cdot x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)\ cuando\ x_1, x_2 > 0$; 3) así mismo la división de los logaritmos es equivalente a la diferencia entre estos cuando los valores de x son mayores a cero $ln\frac{x_1}{x_2} = ln(x_1) - ln(x_2), cuando\ x_1, x_2 > 0$; 4) el principio distributivo no aplica para la suma y resta de tal modo que $ln(x_1 + x_2) \neq ln(x_1) + ln(x_2)\ , para\ x_1, x_2 > 0$ y lo mismo no aplica para la resta $ln(x_1 - x_2) \neq ln(x_1) - ln(x_2)\ , para\ x_1, x_2 > 0$ (cosa que como vimos aplicaba sin problemas en la multiplicación simple); 5) el logaritmo de una variable elevada a un exponente es igual al producto del logaritmo de la variable por el valor del exponente, es decir, $ln(x^b) = b\ ln(x), para\ x > 0$; 6) y finalmente tenemos que conforme x se aproxima a cero el valor del logaritmo de $1 + x$ se aproxima a x, esto es que $ln(1 + x) \approx x, para\ x > 0\ y\ es\ x \approx 0$.

Radicales o raíces

Las raíces o radicales son aquellas que tienen la forma $\sqrt[n]{x}$ y son casi la inversa de x elevada a la n tal que $\sqrt[n]{x^{x}} = x = (\sqrt[n]{x})^{n}$ lo cual solamente es válido si x es non y es mayor a cero. Estas funciones son no lineales y su gráfica es la siguiente para n=3 cuando x= [1,4]

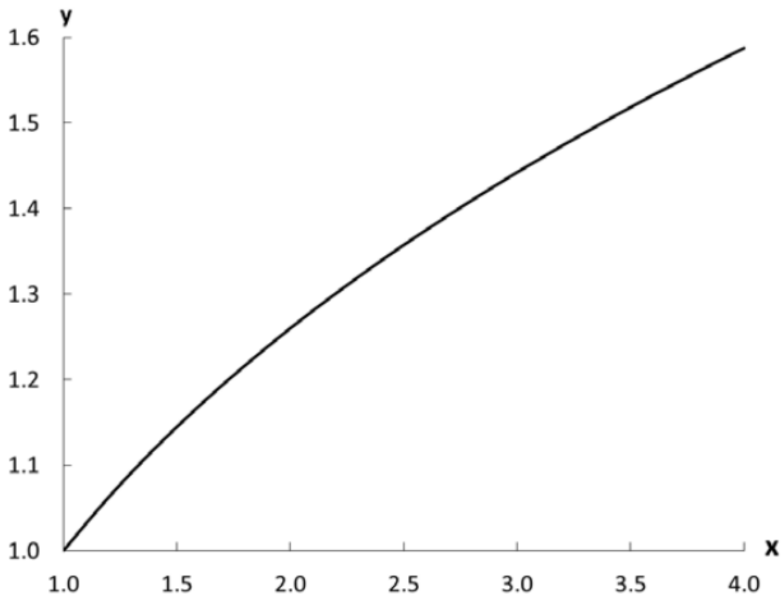


Figure 3.13: Graph of $y = x^{\frac{1}{3}}$

Como se ve abajo de la gráfica las raíces pueden representarse como exponentes de tipo fraccionarios ($x^{\frac{1}{n}}$) o si se quiere, de manera más general tenemos que $\sqrt[n]{x^{p}} = (\sqrt[n]{x})^{p} = x^{\frac{p}{n}}$.

Adición y sustracción con las raíces: 1) no se suman restar los radicales tal que $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} \neq \sqrt[x]{x + x}$ $cuando > 1$; $por\ ello\ es\ que$ $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 + 2}$; 2) tampoco podemos sumar ni sumar raízes $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} \neq \sqrt[n+n]{x + x}$ $donde\ n > 1$ por lo que $\sqrt{9} + \sqrt{9} = 3 + 3 = 6 \neq \sqrt[4]{18}$.

Multiplicación y división con raíces: 1) si los radicales tienen el mismo orden entonces podemos $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}\, cuando\; n > 1$; 2) cuando el cociente de dos radicales tienen $\frac{\sqrt[n]{x}}{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\;\, solamente\; cuando\;\, n\; >\; 1$.

Otras funciones

Otras como el valor absoluto pueden ser importantes para cuando queremos mantener el valor positivo $|x|$ o queremos mantener el valor negativo $-|x|$. Pero también está el coseno, seno, tangente, cotangente, etc (hay demasiadas como para ser exhaustivo).

También se pueden hacer funciones a pedazos, es decir que para ciertos valores de x sea tal, y para otros ciertos valores sea diferente. Un ejemplo de esto es $f(x) = -(x - 2)^{2}\; si\;\, x \leq 2$ además que $f(x) = ln(x - 2)\; si\;\, x > 2$; o sea que cambia a diferentes valores de x. Esto suele expresarse como:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & : x \leq 2, \\ \ln(x-2) & : x > 2. \end{cases}$$

Relaciones de preferencia y funciones de utilidad

Relaciones de preferencia son formuladas de la siguiente manera donde: aRb nos permite decir que a está **relacionada** con b tal que a es tan buena como b si queremos referirnos a la preferencia. Sin embargo, si son números entonces ocurre que $a \geq b$. Cuando ponemos que aPb relación de **preferencia**) entonces decimos que a es preferida a b, y si es numérico que $a > b$. También usamos relaciones de **indiferencia** aIb para decir que uno es indiferente si a ó b (que nos da igual cual sea) y se pone cuando es numérico como $a = b$.

Uno quiere que estas relaciones tengan ciertas propiedades:

- Completud dice que para algún a ó $b, ya\ sea\ aRb$ ó bRa, es decir que dados dos elementos a y b nos permite estar indecididos entre estos dos o indiferente (es diferente que la no opinión).
- Transitividad dice que si a es tan bueno como b y b es tan bueno como c, entonces a es tan bueno como c; lo que es $si\ \ aRb\ y\ bRc, entonces\ aRc$. Básicamente es la relación de un elemento con otro dada la relación con un intermediario.
- Simetría dice que si $aRb, entonces\ bRa\ para\ todos\ los\ \ a\ y\ b$. Esto es útil para la aIb dado a que es la única simétrica.
- Reflexividad dice que una relación en un conjunto A es reflexiva si para todos los $a \in A, aRa\ es\ verdadera$. Tal que $a \geq a\ \ y\ a = a$ son reflexivas.

La **función de utilidad** (u) es aquella en que relaciona elementos de un conjunto A por medio de una función u perteneciente a A. Los valores que asigna u pertenecen a los números reales y son para cada elemento en A. De tal manera que uno puede modelar preferencia s de la forma $aRbRc\ldots Rn$ y para simplicidad esto se representa como $u(x) = x$. SIn embargo estas funciones pueden ser de múltiples formas como $u(x) = ax^{2}$, $u(x) = ln(x)$, etc. Por ende podemos hacer que las preferencias se comporten como diferentes funciones.

Límites y continuidad, secuencias y series, y más de conjuntos

Secuencias y series

Las **secuencia** son listas ordenadas de números como {1,2,3,4,5…n}, estas pueden ser en principio infinitas pero también las hay finitas como {1,2,3,4,5}. Debido a que los elementos de estas son contables nosotros podemos identificar los elementos de la lista como x_i donde i indica el lugar en la secuencia. Dado a que pueden iniciar en 0 ó 1 uno puede especificar su punto de inicio como $\{xi\}_{i=1}^{N}$.
Podemos, así mismo, abreviar las secuencias, tal que si la secuencia es $\{1,2,3\ldots n\}$con $x_i = i$ la podemos abreviar como $\{i\}_{i=1}^{\infty}$; o podemos abreviar una lista de elementos $\{\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \ldots\}$ con $x_i = \frac{3}{10^{i}}$ como $\{\frac{3}{10^{i}}\}_{i=1}^{\infty}$.

Las **series** son la suma de una secuencia como {1+2+3+4+5+...n} o como $\{\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots\}$. Lo cual se expresa como $\sum_{i=1}^{N} x_i, donde\ N = \infty$.

Límites

Un **límite** describe el comportamiento de una función conforme se aproxima a un valor específico. Estos se conectan con las secuencias, consideremos las secuencias que usamos hace rato $\{i\}_{i=1}^{\infty}$ así como $\{\frac{3}{10^i}\}_{i=1}^{\infty}$. El **límite de una secuencia** $\{x_i\}$ es un número L tal que $lim_{i\to\infty}\ x_i = L$ que dice que el límite de x_i conforme se acerca al infinito es L. Lo que hace que x_i sea cada vez más grande aunque realmente nunca llega a L, solamente se aproxima a L.

Se dice que las secuencias, serie o función convergen si tiene un límite finito, y que diverge si el límite es $\pm\infty$. Volviendo a los ejemplo, tenemos que $\{i\}_{i=1}^{\infty}$ **diverge** ya que tiende al infinito, y que $\{\frac{3}{10^i}\}_{i=1}^{\infty}$ **converge** hacia cero (cero es su límite). Unos límites importantes son donde $lim_{i\to\infty}\ \delta^i = 0\ si\ |\delta| < 1$, es decir que si δ^i es una fracción esta se hace más pequeña con el tiempo y se aproxima a cero (su límite es cero). Así mismo está $lim_{i\to\infty}\ \frac{1}{i^z} = 0\ si\ z > 0$, o sea que dada una fracción que va aumentando su exponente al infinito esta tiende hacia cero (su límite es cero).

El **límite de una serie** pero en lugar de buscar un punto final uno está buscando la sumatoria final de la serie (la suma de todos sus elementos). Supón que tenemos una serie de la forma $\sum_{i=1}^{N} x_i, donde\ N = \infty$, en dicho caso el límite es $lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i = S$. Por ende la serie es divergente ya que $S = \infty$. Ahora considera el caso donde $lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \delta^t = \frac{1}{1-\delta}$ por lo que converge en $\frac{1}{1-\delta}$. Cuando tenemos algo como $lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{3}{10^i}$, esta tiene un comportamiento particular $.3 + .03 + .003 + .0003 + \ldots = .\underline{3}$, es decir, que su límite es ⅓ .

Podemos ahora considerar la paradoja de Zeno que dice que entre dos puntos cualquiera si continuamos dividiendo a la mitad N veces el espacio entre los dos puntos es infinito. Por lo tanto si uno recorriera de mitad en mitad del punto A al B uno jamás llegaría a B. Esto sería una serie de la forma $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\}$ por lo que $x_i = \frac{1}{2^{\ i}}$. Para saber si llegó o no necesitamos conocer la serie de dicha secuencia por lo que $S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{\ i}}$ y $S_N$se refiere a la suma parcial. Si ponemos unos pocos valores de la serie apreciamos que tiene un patrón de tipo $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots\}$ lo que su límite es 1.

Límites y funciones

Los límites de determinadas funciones donde su pendiente no es constante es útil para aproximar la pendiente de cualquier punto de la gráfica dado que su valor se aproxima al límite, siendo por ende 100% en L. Si lo ponemos en sentido de variables nos ayuda a aproximar la influencia de x sobre y a cualquier punto de la gráfica debido a que la pendiente indica la relación de cambio de la variable y respecto de x.

El **límite de una función** como $y = f(x)$ está dado por el valor de y dada una función conforme se aproxima a un valor arbitrario de x. Esto se define de manera formal como $lim_{x\to c} f(x) = L$ es decir que el límite deseado se da cuando $x = c$; e español dice “el límite de $f(x)$conforme x se aproxima a c es L”. Además de esto uno se puede aproximar a $x = c$ por dos direcciones distintas, si queremos decir que se aproxima desde abajo entonce tenemos $lim_{x\to c}\ {}^{+} f(x) = L$ y si se aproxima por arriba entonces $lim_{x\to c}\ {}^{-} f(x) = L$.

Hagamos un ejemplo más concreto, supón que tenemos la $f(x) = x^{\ 2}\, mientras\ x \to 2$. Si este es el caso vamos a tener el comportamiento (ver tabla de abajo) que conforme x se aproxima a 2 los valores de y se aproximan a 4 (debido a que el límite es dos), así mismo vemos que cuando sobrepasa x=2 esta sobrepasa 4 poco a poco.

Table 4.1: Limit of $f(x) = x^2$ as $x \to 2$

x	$f(x)$
1.9	3.61
1.95	3.8025
1.98	3.9204
1.99	3.9601
2.0	4
2.01	4.0401
2.02	4.0804
2.05	4.2025
2.1	4.41

Como todo en matemáticas los límites también tienen ciertas propiedades como que para todo $f(x), g(x)$donde ambos tienen un límite en x=c (tienen el mismo límite) tenemos que (al menos si $lim_{x\to c}\, g(x) \neq 0$):

$$lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = lim_{x\to c}\, f(x) + lim_{x\to c}\, g(x)$$

$$lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = lim_{x\to c}\, f(x) - lim_{x\to c}\, g(x)$$

$$lim_{x\to c}(f(x)\, g(x)) = (lim_{x\to c}\, f(x))(\, lim_{x\to c}\, g(x))$$

$$lim_{x\to c}(f(x)\, /g(x)) = (lim_{x\to c}\, f(x))/(\, lim_{x\to c}\, g(x))$$

Cuando el son indefinidas en c, como cuando $f = \frac{x^{2}-4}{x-2}$ que es indefinida cuando x=2 (ya que no se puede dividir entre 0). Sin embargo, para este caso podemos evitar este problema al factorizar $f = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = f = x + 2$ por lo que ahora en x=2 nos da 4!

Conjuntos abiertos, cerrados, compactos y convexos

Un **conjunto abierto** es uno que tiene cierta distancia dentro del conjunto por la que uno se pueda desplazar y aún mantenerse en el conjunto. Que literalmente sería que dado un conjunto de de los reales al cubo uno tiene un espacio esférico en donde si uno puede mover un subconjunto de dicho espacio entonces este es un conjunto abierto. De maner forma que dada una distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ $como\ d(x,y) \geq 0 \quad un\ conjunto\ A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para todos los $x \in A, existiendo\ un\ \epsilon > 0\ tal\ que\ todos\ los\ puntos\ y \in A$ con $d(x,y) < \epsilon\ están\ en\ A$.

Un ejemplo de lo anterior también es $(0,1)$ donde ni cero ni uno están en el conjunto pero sí lo está todo entre estos números. Mientras que $[0,1]$ es un conjunto cerrado, o sin espacios entre cero y uno, pero que sí contiene a uno y a cero. Estos **conjuntos cerrados** son aquellos que contienen todos sus puntos límites por lo que el complemento de un $[0,1]\ es\ (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ tal que el complemento no tiene ni cero ni uno porque están en $[0,1]$. Los **conjuntos compactos** son los que están confinados entre dos límites y están cerrados.

Un **conjunto convexo** es aquel en que todos los elementos del conjunto están unidos por una línea. Esto es que x y $y\ dentro\ de\ él\ y\ todos\ los\ \lambda \in [0,1], donde\ el\ punto\ (1-\lambda)\,x + \lambda y\ también\ está\ en\ el\ conjunto$; λ es la fuerza de la relación. La **cáscara convexa** de un conjunto A es A más todos los puntos requeridos para hacer A. Para una ilustración de esto obsérvese las siguientes imágenes.

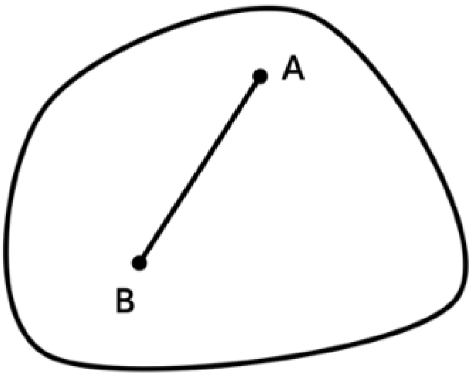


Figure 4.1: Convex Sets

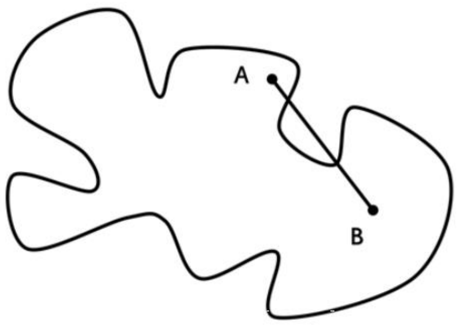


Figure 4.2: Nonconvex Sets

Los conjuntos convexos son útiles para poder modelar conjuntos donde necesitamos todas las combinaciones lineales de los elementos del conjunto. Por otro lado, cuando son no convexos vemos que las combinaciones lineales abarcan elementos fuera del conjunto.

Funciones continuas

Una **función continua** es una que no tiene espacios entre sí tal que la gráfica de esta no tiene saltos o cortes. Por ello una **función discontinua** al menos tiene un corte o salto. Es decir que es continua si un pequeño cambio arbitrario en x causa un pequeño cambio arbitrario en y. En términos matemáticos $f(x)\, es\, continua\, en\, x = c\, si\, y\, sólo\, sí\, lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, es decir que si el límite de $f(x)$ es $f(c)$ no hay espacios conforme se aproxima a c (siendo cualquier límite posible!).

Todas las funciones afines, lineales, polinomiales, etc son continuas, sin embargo hay otras como $f(x) = \frac{1}{x}$ donde si empleamos los números reales debemos aceptar que en cero es indefinida la función y por tanto hay un salto! También podemos arreglar funciones por medio de partición de estas, supón que tenemos $y = \frac{x^{2}}{x}$ esta es indefinida en cero pero la arreglamos si decimos que $y = 0\ en\, x = 0$ y que en el resto de los valores es $y = \frac{x^{2}}{x}$. Por ello su gráfico sería

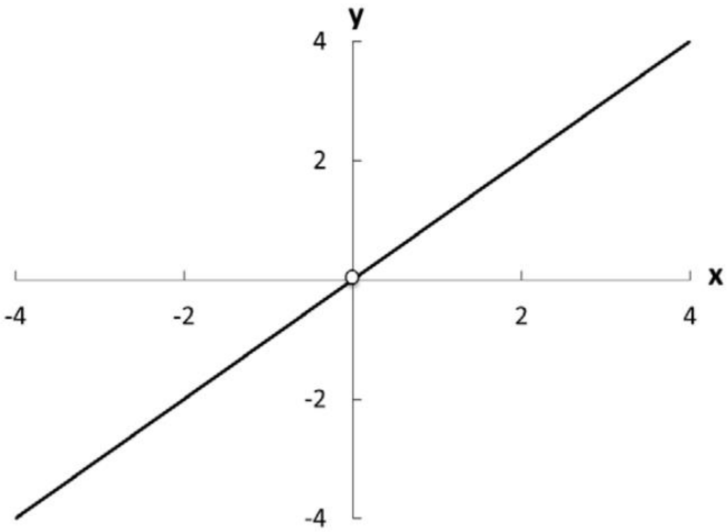


Figure 4.3: Graph of $y = \frac{x^2}{x}$, $x \in [-5, 5]$

Introducción al cálculo y a la derivada

Introducción breve al cálculo

Supón que tenemos una función $f(x) = x^2$ donde $x \in [1,2]$ por ende podemos hacer aseveraciones como $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(1.5) = 2.25$, etc. Aquí lo interesante es que lo podemos hacer hasta el límite de $[1,2]$ por lo que no puede pasar de ahí y por ende solamente nos podemos aproximar hasta que llega a uno o dos. Esto nos da el comportamiento de la función dado de que se aproxima al límite y este cambio de $f(x)$ conforme se acerca a L es justamente la **derivada** y el estudio de esto se llama **cálculo diferencial**; el estudio del cambio infinitesimal pequeño de una función.

Por ahora demos un ejemplo aunque no se entienda el cómo se hizo, ya se verá. La derivada de $f(x) = 3x$ es 3 que es justamente la pendiente (el índice de cambio de x a y) cuando $y = 3x$. Por ende la derivada solamente nos va a dar esa relación de cambio de y respecto de x en cualquier punto de la gráfica o de la función. Cuando queremos pasar de la derivada a la función original uno tiene que sumar todos los cambios infinitesimales desde el valor menor de x, y esto se logra mediante la antiderivada o la integral $\int$. Este símbolo literalmente es como $\sum$ que nos decía que sumemos todo lo del frente. Para nuestro caso sería de pasar de $f'(x) = 3$ (la integral de 3) a $f(x) = 3x + C$ con C, una constante, ya que la derivada no tiene información de x=0.

¿Qué es una derivada?

En pocas palabras la derivada es la proporción instantánea de cambio de una función. Seguro suena raro, pero vamos a ir diseccionando estos conceptos poco a poco.

Cambio discreto

La **primera diferencia** de una variable es el valor de esa en tiempo t menos el valor de esa variable en tiempo t-1. Por ejemplo véanse los siguientes valores

Table 5.1: Aggregate Heavy Weapons, China

Year	Total	First Difference
1995	37,095	——
1996	35,747	−1,348
1997	36,910	1,163
1998	37,032	122
1999	36,494	−538
2000	31,435	−5,059
2001	34,281	2,846

Source: SIPRI (`http://www.sipri.org/databases`).

Luego podemos calcular el porcentaje de cambio como $\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} \times 100$. Todo esto es solamente para poder introducir mejor los conceptos del cálculo y no porque esto sea cálculo. Como el **cambio discreto** que es simplemente la diferencia entre dos observaciones o dos momentos discretos de tiempo, es decir $(x_{t+1} - x_t)$.

Cambio instantáneo

Cuando lo que queremos saber es la relación de cambio en un punto x (**cambio instantáneo**) y no la diferencia de tiempo entre 2 puntos diferentes, entonces usamos la derivada para obtener este instante dado un límite (L) específico.

Secantes y tangentes

Cuando tenemos un función lineal como $f(x) = 3x$ tenemos que podemos obtener la pendiente mediante las diferencias de cambio de los ejes x y , es decir que hacemos uso de la llamada ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El índice de cambio entre dos puntos cualquiera en una línea es la **secante** que es otra línea que atraviesa esos dos puntos. Esto no es posible en una línea recta porque se empalman, pero se puede en una parábola convexa de función $f(x) = x^2$ como se ve abajo

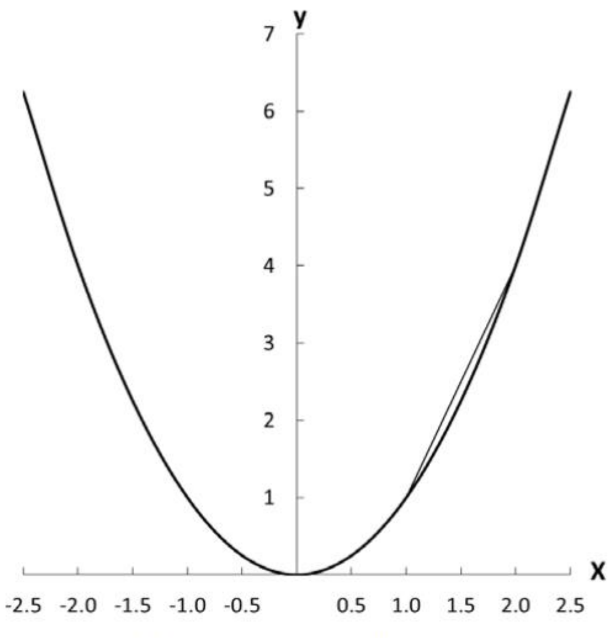


Figure 5.1: Graph of $y = x^2$ with Secant Line

Por otro lado, una **línea tangente** solamente toca la línea en un punto de tal manera que tiene una pendiente con la proporción de cambio de dicho punto. Consideremos la función que describe una parábola convexa $f(x) = x^2$, conforme los valores de la pendiente de la línea secante se hace más pequeña al acercarse a la línea secante al disminuir la distancia entre sus puntos, es decir, al acercarse a un límite (como se ve en la imagen) . En este caso se aproxima a la derivada, o donde toca la tangente, de 2.

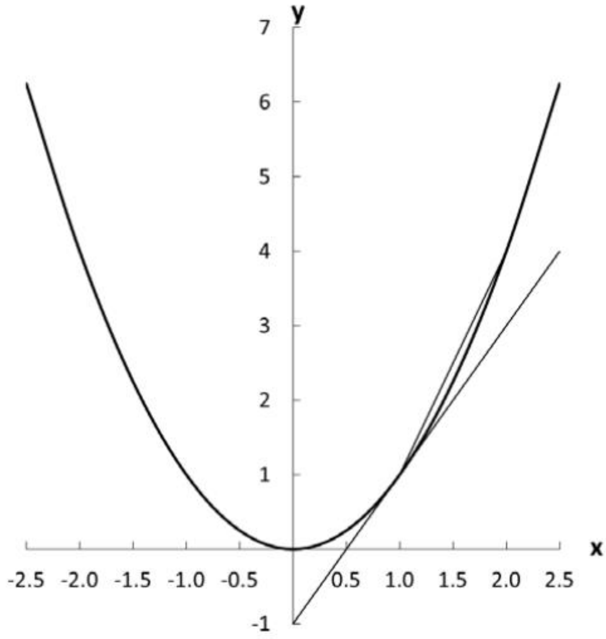


Figure 5.2: Graph of $y = x^2$ with Tangent Line

Notación de la derivada

La derivada fue representada por Newton como $\hat{y}$ es la derivada de $f(t)\ si\ y = f(t)$ y prácticamente sólo se usa para derivadas con respecto del tiempo. La notación que se usa es la de Leibniz que propuso $\frac{d}{dx}f(x)$ que se lee como la derivada de f de x respecto de x (que también se entiende como la proporción de cambio instantánea de f de x respecto de x. Si $y = f(x)$ y queremos la derivada de y respecto de x usamos $\frac{dy}{dx}$. Ojo, la $\frac{dy}{dx}$NO ES UNA FRACCIÓN.

También hay que notar que la notación de Leibniz permite indicar respecto de qué estamos derivando al ponerlo en el denominador, como en $\frac{d}{dx}$ que es respecto de x. De hecho, cuando tenemos solamente una variable x podemos usar la notación de Lagrange $f\,'\,(x)$ (“$f\ principal\ x$”) que es exactamente lo mismo que $\frac{d}{dx}f(x)$. Así mismo un puede usar la notación de Euler $Df(x)$ y todo esto es exactamente lo mismo!

Límites y derivadas

Se notó arriba que la derivada es la proporción instantánea de cambio en un punto dado, y que si teníamos la secante uno podía ir acercando y acercando los puntos hasta que se junten obtener esta proporción instantánea de cambio para un punto. Además se notó que esto anterior era como un límite. Bueno, con esto podemos definir la derivada! Pues básicamente este cálculo de cambio discreto al irse aproximando a L nos da una aproximación del cambio continúo (el cambio instantáneo).

Veamos cómo es que esto se logra, para ello empecemos con nuestra ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ahora permite que $x_2 = x_1 + h$ y que $h = x_2 - x_1$ y reescribimos la ecuación

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ojo, luego se expresa h como $\Delta x = x_2 - x_1$ por lo que que

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

finalmente hacemos que esta función se aproxime a L, en este caso $\Delta x \to 0$ y obtenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

Solamente hay que aclarar unas cosas. La derivada es en sí misma una función, la derivada solamente puede ser calculada donde un punto existe dado que tomamos tal como límite y se aproxima. Por último, puede haber funciones derivables donde no sea derivable en un punto pero en el resto de esta sí. También dejo un video para ayudar a la explicación: https://youtu.be/_6-zwdrqD3U

Algunos ejemplos con la derivada

Primero saquemos la derivada de $f(x) = 3x$ la cual es una función lineal:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{3(x + \Delta x) - 3x}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{\Delta x}$$

$$= \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

O sea que no se aplicó el límite dado a que la recta secante es igual a la recta misma y por ende la recta tangente corta igual a todos lados de la línea (Δx no se tuvo que hacer cada vez más chica!) Pero pueden ocurrir casos donde no es el caso como en $f(x) = x^2$ y su derivada es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^{2}}{\Delta x}$$

cuando Δx se aproxima a cero tenemos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 2x + \Delta x = 2x$$

Ahora una más complicada como $f(x) = x^{3} + x - 5$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{(x + \Delta x)^{3} + (x + \Delta x) - 5 - (x^{3} + x - 5)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}$$
$$= \frac{x^{3} + 3x^{2}\Delta x + 3x\Delta x^{2} + \Delta x^{3} + x + \Delta x - 5 - x^{3} - x + 5)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{3x^{2}\Delta x + 3x\Delta x^{2} + \Delta x^{3} + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 3x^{2} + 3x\Delta x + \Delta x^{2} + 1$$

pero cuando Δx se aproxima a cero tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 3x^{2} + 1$$

Finalmente resolvamos la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\frac{x}{x(x+\Delta x)} - \frac{(x+\Delta x)}{x\,(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

cuando Δx se aproxima a cero

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{-1}{x^{2}}$$

Funciones multivariadas y derivada parcial

Dado $f(x,z) == 3x^{2}z + 2z$, si quisiéramos saber cómo y cambia respecto de x mientras z se mantiene constante entonces usamos la **derivada parcial**. Esta se escribe como $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ que nos dice “toma todo lo demás como una constante y obtén la derivada respecto de x” En principio no son más complicadas que las que aplican a una variable, si tenemos $f(x,z) = 3z^{3} - 3z^{2} + \sqrt{z} + x$ su derivada parcial es $\frac{\partial}{\partial x} f(x,z) = 1$ ya que las demás son constantes y x es lineal.

Estas son el pan de cada día de la estadística, uno por lo general va a tener una función afín de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z + \beta_3 xz$ y si queremos saber como x afecta a y, entonces nosotros tenemos que $\frac{\partial}{\partial x} f(x, z) = \beta_1 + \beta_3 z$ ya que z es tratada como constante y varía respecto de esta como se ve (tanto x como y debido a x). Aquí un link para una explicación más detallada https://www.youtube.com/watch?v=RdxXv3lFjls&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex

Reglas de diferenciación

La derivada es un operador lineal

Se recordará que una función lineal es todo aquella función que cumpla con las propiedades de aditividad y de escala. En esencia un operador como $\frac{d}{dx}$ es lineal si $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$, aditividad, y si $\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$ para dos funcione f y g y una constante c. Veamos si esto jala con la derivada:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

la asertividad primero

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x + h) + g(x + h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{(f(x + h) - f(x)) + (g(x + h) - g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = (\frac{(f(x + h) - f(x))}{h} + \frac{(g(x + h) - g(x))}{h})$$

siendo exactamente lo mismo que:

$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Ahora veamos qué rollo con la propiedad escalar:

$$\frac{d(cf)}{dx} = f\,'(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{c(f(x + h)) - c(f(x))}{h}$$

$$= c(\frac{f(x + h)) - (f(x)}{h})$$

$$= c(\frac{df}{dx})$$

Así que realmente nuestra derivada es una función lineal! Bueno, esto que vimos es lo que va detrás de las reglas de suma y diferencia: $(f + g)´ = f\,´ + g\,'$ y la de resta $(f - g)´ = f\,´ - g\,'$. No es otra cosa que nuestra propiedad de aditividad. Una todavía más general es $(af + bg)´ = af´ + bg'$ donde a y b son constantes y f y g son funciones diferenciables.

Veamos unos ejemplos de esta bonita regla (que es un resultado de lo que hicimos arriba!). Si $h(x) = x + x^2$ pero además $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, entonces tenemos que debido al resultado de arriba $h'(x) = f\,'(x) + g'(x)$. Esta derivada anterior da $\frac{dh(x)}{dx} = 1 + 2x$ y si agregaramos cualquier constante tenemos el mismo resultado ya que la derivada de una constante es cero. O sea que si $h'(x) = (x + a) + x^2$ entonces su derivada sigue siendo $h'(x) = 1 + 2x$. Por lo que de las constantes podemos decir que o se van, o que se van a un lado como en $f(x) = ax$ tiene por derivada $f\,'(x) = a$.

Ahora apliquemos todo esto de manera más detenida pero con la función $h(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ donde sabemos que su derivada sería $h'(x) = 3x^2 + 12x - 3$:

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d(x^3 + 6x^2 - 3x + 1)}{dx}$$

$$= \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(6x^2)}{dx} - \frac{d(3x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx}$$

$$= \frac{d(x^3)}{dx} + 6\frac{d(x^2)}{dx} - 3\frac{d(x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx}$$

$$= 3x^2 + 6(2x) - 3(1) + 0$$

$$= 3x^2 + 12x - 3$$

Regla de la cadena

La regla de la cadena nos va a ayudar a simplificar funciones compuestas de la forma $f(g(x))$ como sería el caso de una función como $h(x) = e^{2x^2}$ donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = 2x^2$. Bueno, tratemos de obtener la regla de la cadena:

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

luego multiplicamos y dividimos por $f(x + h) - f(x)$

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x + h) - f(x)} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

si $z = f(x + h) - f(x)$ y tenemos que $u = f(x)$, entonces ocurre

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{z \to 0} \frac{g(u + z) - g(u)}{z} \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

si esto anterior es el caso, entonces tenemos que el segundo término a la derecha del igual tenemos que $f\,'(x)$mientras que el primero es $g'(u) = g'(f(x))$. Siendo la **regla de la cadena**:

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du}\frac{du}{dx}, donde\ u = f(x)$$

Esto también puede escribirse como $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$. Sin embargo lo importante es que podemos separar una derivada de una **función compuesta como dos derivadas siendo la de adentro la derivada evaluada por la función externa, y la derivada externa como la función evaluada en x**.

Hagamos uso de la regla de la cadena para $h(x) = x^9$ y la haremos de la manera complicada solamente para ilustrar este concepto. Podemos entender esta función como una compuesta donde $g(f(x)) = h(x) = (x^3)^3 = x^9$ por lo que $f(x) = x^3$y $g(x) = x^3$. Si sabemos que la derivada de x^3 es $3x^2$entonces $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2)(3x^2) = 3(x^3)^2(3x^2) = 9x^8$. Por lo que podemos hacer uso de derivadas que ya conocemos para hacer otras más fáciles, porque creeme que hacer esta a mano de manera tradicional es horriblemente largo y aburrido!

Veamos ahora esto pero con $g(f(x)) = h(x) = e^{2x^2}$ donde $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = e^x$. Ahora, sabemos que la derivada de $g'(x) = e^x$ y podemos hacer uso de que la derivada es un operador lineal para hacer que $2 \frac{dx^2}{dx} = 2(2x) = 4x$, y si todo esto es cierto entonces tenemos que $h'(x) = g'(u)f'(x) = e^u(4x) = 4xe^{2x^2}$ (recuérdese que u es f(x)).

Finalmente $g(f(x)) = h(x) = (2x - a)^2$ donde $g(x) = x^2$ y $f(x) = 2x - a$. Entonces ocurre que $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du}\frac{du}{dx} = 2(2x - a)(2) = 8x - 4a$. Por lo que vemos que lo único complicado de hacer uso de la regla de la cadena es tener en claro cuál es f(x) y cuál es g(x), y recordar que la x en g(x) es f(x).

De la regla de la cadena podemos sacar otras reglas! Primero veamos la inversa de la función $f(x)$ que es escrita como $f^{-1}(x)$. Podemos hacer que $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda función inversa, y si sacamos la derivada de cada lado tenemos que a la izquierda es uno:

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}x$$

sabemos que la derivada de x es 1

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = 1$$

para el lado izquierdo tenemos que

$$\frac{df(f^{-1}(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{df^{-1}(x)}{dx}, donde\ u = f^{-1}(x)$$

que es lo mismo que

$$f(f^{-1}(x)) \times f(x)$$

cuando se juntan

$$f(f^{-1}(x)) \times f(x)) = 1$$

un poco de álgebra y tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{f(f^{-1}(x))}$$

que también es

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Y así es como obtenemos nuestra **regla de la función inversa** desde el producto de la cadena. Aquí un video de esto mismo https://www.youtube.com/watch?v=XOs9vVmzE70&ab_channel=3Blue1Brown

Productos y cocientes

Hay dos versiones del producto de dos derivadas, la versión simple es cuando tenemos algo como $y = f(x) \times g(x) = (2x + 3) \times (x^2 - 15)$, lo cual da $2x^3 + 3x^2 - 30x - 45$ y después sacamos la derivada como $6x^2 + 6x - 30$. Pero esto casi no pasa, ya que no siempre se puede multiplicar antes de derivar, para estos casos debemos hacer algo distinto. Supón que tenemos las funciones $g(x)$ y $f(x)$, entonces la derivada de su producto es:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

Es decir que la **regla del producto** nos dice que el producto de las derivadas es la suma de estas, pero nótese que la función contraria multiplica, sin derivar, a la que se deriva. Como siempre, para que rayos significa esto hagamos un ejemplo donde tenemos las funciones $g(x)$ y $f(x)$:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (fg)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

luego sumamos y restamos $f(x)g(x + h)$ del lado derecho del igual

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (fg)'$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h) + f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

reorganizamos

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (fg)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

ahora sacamos los términos comunes a cada caso

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (fg)' = (\lim_{h\to 0}\frac{f(x + h)) - f(x)}{h})(\lim_{h\to 0} g(x + h)) + (\lim_{h\to 0}\frac{g(x + h) - g(x)}{h})(\lim_{h\to 0} f(x))$$

sacamos los límites y obtenemos la regla del producto

$$(fg)' = f'g + fg'$$

es igual que lo que sacamos arriba, o sea

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

Pues hagamos ejemplos ahora. Consideremos $y = f(x)g(x) = (2x + 3)(x^2 - 15)$

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{d(2x + 3)}{dx}(x^2 - 15) + (2x + 3)\frac{d(x^2 - 15)}{dx}$$

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (2)(x^2 - 15) + (2x + 3)(2x)$$

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = (2x^2 - 30) + (4x^2 + 6x)$$

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = 6x^2 + 6x - 30$$

Como se ve esto funciona de manera increíble y sumamente fácil aplicar la regla del producto! Otro caso que podríamos encontrar son $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ pero para esto necesitamos la **regla del cociente**. Esta es:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{g(x)}{dx}}{g(x)^2}$$

La única diferencia de la del producto como se puede observar es que es símbolo es de resta y se divide entre el cuadrado de g(x). Esta regla es una combinación de la regla de la cadena y la regla del producto! Veamos este chisme. Deja que $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, $y = f(x)h(x)$, sabemos que $y' = f'h + fh'$ (regla del producto), y por ende necesitamos conocer h'. Podemos pensar h como $h(x) = k(g(x))$ donde $k(x) = \frac{1}{x}$ y por ende sabemos que $k'(u) = -\frac{1}{u^2}$. Entonces por la regla de la cadena $h'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2}g'(x)$ y si ponemos esto en la regla del producto tenemos que $y' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$. Yo encuentro más intuitiva la comprobación de esto de aquí: https://www.youtube.com/watch?v=ho87DN9wO70&ab_channel=KhanAcademy.
Veamos:

primero notemos que podemos volver la fracción a algo donde aplique la regla de la cadena mediante la inversa del denominador

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)^{-1}) =$$

esto es igual a la regla del producto y para sacar la derivada de $g(x)^{-1}$ solamente multiplicamos el exponente por g(x) , le restamos uno y multiplicamos por g'(x); o sea:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)(-1)g'(x)^{-2}g'(x)$$

ya que tenemos esto simplifiquemos

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

multiplicamos por g(x) para el mínimo común múltiplo

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)}{g(x)^{2}} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^{2}}$$

simplificamos y obtenemos exactamente la regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^{2}}$$

Ahora sí hagamos un ejemplo donde usemos nuestra regla del cociente. Siendo este un caso de $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(x) = (3x - 7)$ y $g(x) = (x^{3} + 6)$ tenemos que

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(3)(x^{3} + 6) - (3x - 7)(3x^{2})}{(x^{3} + 6)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(3)(x^{3} + 6) - (3x - 7)(3x^{2})}{x^{6} + 12x^{3} + 36}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(3x^{3} + 18) - (9x^{3} - 21x^{2})}{x^{6} + 12x^{3} + 36}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-6x^{3} + 21x^{2} + 18}{x^{6} + 12x^{3} + 36}$$

Derivadas y funciones

Polinomiales y poderes

Esto lo hemos hecho varias veces pero no hemos mencionado que la cuando tenemos una función de la forma x^{n} podemos diferenciar esta de la siguiente manera:

$$\frac{dx^{n}}{dx} = nx^{n-1}$$

Esto es mover el valor del exponente como constante y restarle uno al exponente. De tal manera que si tenemos $f(x) = x^{4}$ su derivada es $f'(x) = 4x^{3}$. Esta se conoce como la **regla del poder** y es verdadera para cualquier número real o racional que tenga la forma de arriba. Una prueba de esto es que:

$$\frac{dx^{n}}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{n} - x^{n}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^{n} + nhx^{n-1} - x^{n}}{h}$$
$$= nx^{n-1}$$

Es decir que por lo único que nos preocupamos en este caso es nx^{n-1} debido a que lo demás se va a ir gracias a $-f(x)$, además que h en el denominador hace que no nos preocupemos por la constante h. De hecho de este principio y de la definición de la derivada se sigue la **regla de la constante** donde si $f(x) = constante$ tiene por derivada $f'(x) = 0$ debido a que la proporción de cambio instantáneo es cero para una constante, o sea, no hay cambio dadas dos variables x, y.

Ejemplos de este rollo son $f(x) = 2^{2}$ tiene $f'(x) = 2x$; $f(x) = 2^{9}$ tiene $f'(x) = 9x^{8}$; $f(x) = 2$ tiene $f'(x) = 0$; $f(x) = 10x^{5} + x^{2} - 3x$ tiene $f'(x) = 50x^{4} + 2x - 3$; $f(x) = f(x^{2} - 5x)g(6x^3 + 7)$ tiene $f'(x) = (2x - 5)(6x^3 + 7) + (x^{2} - 5x)(18x^2) = 12x^{4} + 14x - 30x^{4} - 35 + 18x^{4} - 90x^{3} = 18x^{4} - 90x^{3} + 14x - 35$; también algo como $f(x) = (a+b)^{5}$ como $f'(x) = 5(a+b)^{4}$; $f(x) = a^{-10}$ como $f'(x) = 10a^{-11}$, etc. Esta estrategia es sumamente útil para resolver derivadas de manera rápida y eficiente (para cualquier polinomial!).

Exponenciales

Empecemos por la derivada de un exponente clásico, esta es $f(x) = e^{x}$...de hecho su derivada es justamente $f'(x) = e^{x}$! Veamos cómo se logra esto. Hay dos formas de definir esta función:

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^{n}$$

la otra forma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{6} + \frac{x^{4}}{24} + \ldots.$$

Usando la segunda definición de e^{x} tenemos que su derivada es:

$$\frac{de^{x}}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^{x}}{h} = \frac{e^{x}e^{h} - e^{x}}{h} = \frac{e^{x}(e^{h} - 1)}{h}$$
$$= e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h} - 1}{h}$$

solamente queda mostrar que esta derivada es igual a uno a partir de la definición de e^{x}

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1 + 1 + h + \frac{h^{2}}{2} + \frac{h^{3}}{6} + \ldots}{h} = 1$$

en esencia lo que ocurre es que debido a que h está en el numerador nuestro terminis después de h son igual a cero por lo que nos quedamos con $-1 + 2 = 1$. Su forma más general se obtiene por medio de las propiedades del logaritmo y el exponente de tal manera que $a^x = e^{x\, ln(a)}$ y usamos la regla de la cadena al comprender $a^x = e^{x\, ln(a)}$ como una $f(x) = ln(a)$ y $g(x) = e^x$. Si esto es el caso entonces tenemos:

$$\frac{da^x}{dx} = (e^{x\, ln(a)})\, (ln(a))$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\, (ln(a))$$

Siendo esta la **regla del exponente**. Por lo que podemos ver unos cuantos ejemplos de esta poderosa regla (resultado realmente, recuérdese que siempre se pueden obtener desde cero gracias a los conceptos previos). Por ejemplo dado $f(x) = e^{x^2}$ entonces $f'(x) = (e^{x^2})\,(2x)$; otro sería $f(x) = e^{x^4 - 3x^2 + 1}$ por ende $f'(x) = (e^{x^4 - 3x^2 + 1})\,(4x^3 - 6x)$. Por lo que la regla del exponente regresa el mismo exponente por la derivada del término en el exponente!!

Logaritmos

Lo importante aquí es notar que el logaritmo es la inversa de la exponencial, como ya se mencionó anteriormente. Con esto en mente podemos hacer o la función inversa que vimos antes, o podemos hacer uso de la regla de la cadena para obtener nuestra ecuación. Siguiendo la última, sabemos que $f(x) = e^{ln(x)} = x$ y si esto es cierto podemos desmontar esto como $g(x) = e^x$ y como $f(x) = ln(x)$ así que gracias a la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{d\, ln(x)}{dx}(e^{ln(x)}) = \frac{d\, ln(x)}{x} x$$

que es el mismo rollo que

$$\frac{d\, ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Si quisiélamo hacerlo con log (inversa de a^{x}, o sea $a^{log_a x}$) sería exactamente la misma prueba pero acabaríamos con algo como:

$$\frac{d\ log_a(x)}{dx} = \frac{1}{xln(a)}$$

Cuando uno aplica una derivada de un logaritmo, por ende, uno obtiene su derivada como $\frac{1}{x}$. Supón que tenemos $f(x) = ln(x^{5} - 2x^{2} + 12)$, entonces ocurre que $f'(x) = \frac{1}{x^{5}-2x^{2}+12}(5x^{4} - 4x) = \frac{5x^{4}-4x}{x^{5}-2x^{2}+12}$. Lo cual es lo mismo que $f'(x) = \frac{1}{f(x)}\ f\,'(x) = \frac{f\,'(x)}{f(x)}$, la derivada del log de una función es la derivada de la función sobre la función .

Otras funciones

Hay otras funciones que podrían ser importantes como las de las funciones trigonométricas (no se da prueba de ellas): $(sin(x))' = cos(x), (cos(x))' = -sin(x), and\ (tan(x))' = 1 + tan^{2}(x)$. También podemos tener funciones partidas y sus derivadas, solamente que no tienen derivada donde son discontinuas; como:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & : x \leq 2, \\ \ln(x-2) & : x > 2. \end{cases}$$

sus derivadas

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2) & : x < 2, \\ \frac{1}{x-2} & : x > 2. \end{cases}$$

Lista de los métodos o reglas de derivación

Table 6.1: List of Rules of Differentiation

Sum rule	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
Difference rule	$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
Multiply by constant rule	$f'(ax) = af'(x)$
Product rule	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Quotient rule	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Chain rule	$(g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$
Inverse function rule	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
Constant rule	$(a)' = 0$
Power rule	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Exponential rule 1	$(e^x)' = e^x$
Exponential rule 2	$(a^x)' = a^x(\ln(a))$
Logarithm rule 1	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
Logarithm rule 2	$(\log_a(x))' = \frac{1}{x(\ln(a))}$
Trigonometric rules	$(\sin(x))' = \cos(x)$
	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
	$(\tan(x))' = 1+\tan^2(x)$
Piecewise rules	Treat each piece separately

Veamos un ejemplo complicado donde se pueden aplicar varias de estas reglas. Supón que tenemos un desastre como este $\frac{(5\,ln(x+3))e^{3x^3-10x}}{5x^2+2}$. Lo primero que podemos hacer es distinguirlas entre $f(x) = (5\,ln(x+3))e^{3x^3-10x}$ y $g(x) = 5x^2+2$. También sabemos que $g'(x) = 10x$. gracias a lo que aprendimos de las polinomiales. Podemos volver a aprtir $f(x)$como $u(x) = 5\,ln(x+3)$ y $v(x) = e^{3x^3-10x}$, y podría ser partido todavía más! Sin embargo lo vamos a dejar de partir hasta ahí y tenemos que $u'(x) = \frac{5}{x+3}$ y $v'(x) = (e^{3x^3-10x})\,(9x^2-10)$. Ahora podemos volver a armar este chisme:

usamos la regla del cociente, producto y la cadena para llegar a este punto

$$f'(x) = \frac{f'g\ -\ fg'}{g^2}$$

como se recordará descompusimos f(x)=v(x)u(x) (regla del producto), entonces:

$$f'(x) = \frac{f'g\ -\ fg'}{g^2} = \frac{(u'v+uv')g\ -\ fg'}{g^2}$$

$$= \frac{(((\frac{5}{x\ +\ 3})\,(e^{3x^3-10x})\ +\ (5\,ln(x+3)\,((e^{3x^3-10x})\,(9x^2-10)))\,((e^{3x^3-10 \cdots}}{(5x^2+2)^2 \cdots}$$

siendo sinceros esto es un desastre inmenso y no vale la pena simplificarlo, por lo que lo dejaré ahí pues después de todo lo importante era notar que podemos aplicar todas estas reglas para sacar derivadas complejas!

La integral que no es pan

Esta es usada cuando de en lugar de querer conocer la proporción de cambio en un punto entre dos o más variables queremos conocer el cambio neto de esta relación.

La integral definida como el límite de sumas

Pero qué pasa cuando uno quiere obtener el área bajo la curva en vez de solamente un punto la proporción de cambio de la gráfica? Como se puede ver, el área bajo la curva de entre dos puntos de la función es todo aquello que vemos marcado en color verde claro en la imagen de abajo. Si uno quisiera conocer el área bajo esa curva uno podría aplicar varias estrategias como dividir dicha área en múltiples subáreas más pequeñas (e.g círculos, cuadrados, etc), y en efecto eso es lo que se hace!

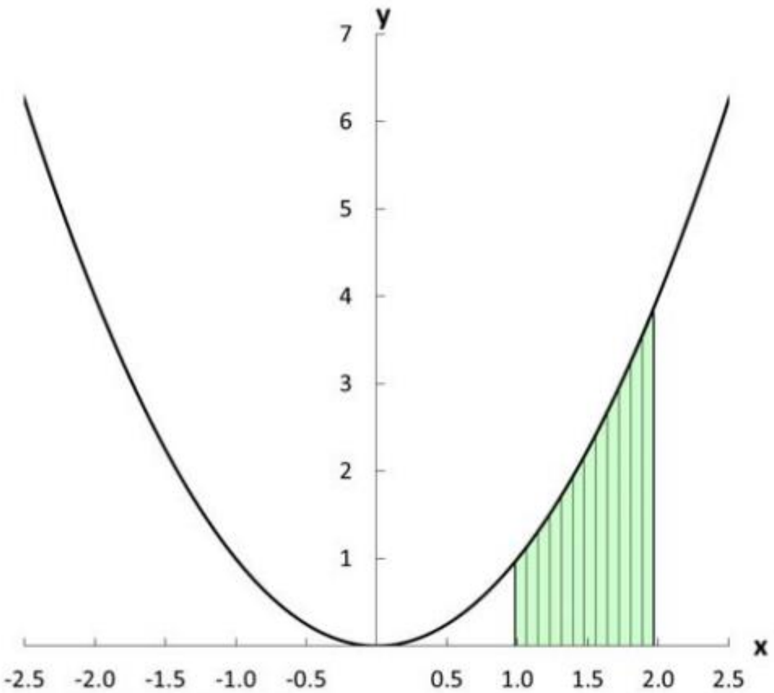


Figure 7.1: Area under $y = x^2$ from $x = 1$ to $x = 2$

En la siguiente imagen podemos ver que se puede aproximar esta área como la suma de n rectángulos bajo esta curva! (aunque en realidad podría ser cualquier figura).

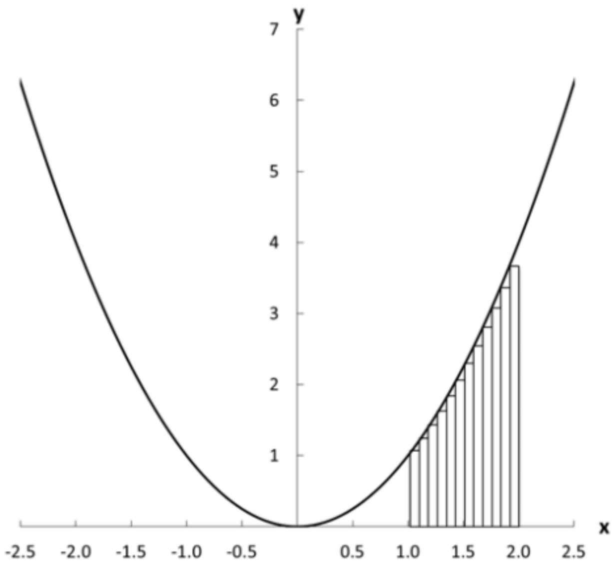


Figure 7.2: Area under $y = x^2$ from $x = 1$ to $x = 2$ with Rectangles

El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann propuso resolver el problema de que quedan huecos en las áreas de los rectángulos, u otras figuras, a partir de pensar en los rectángulos mientras estos acercan su ancho al límite de cero. Así uno podría usar los rectángulos no como una aproximación sino como un estimado real del área bajo la curva!

Veamos un poco de la notación de este chisme. El ancho de los cuadrado puede ser denotado como Δx y por ende el área de estos sería $f(x_i)\Delta x$ donde $f(x_i)$ es la función que describe el valor de cada punto escogido. Por lo que el área total puede ser descrita como $\sum_i f(x_i)\Delta x$ y podemos sacar el límite de la suma como $\lim_{\Delta x \to 0}$ para obtener el área real. Esto se llama **integral definida** y se escribe como $\int_a^b f(x)dx$.

La $\int$ de la integral dice que sumemos, dx indica la variable de integración (el ancho de los rectángulos), $f(x)$ es el **integrando**, la a y b son los límites de la integración (límite inferior y superior) y dicen dónde empezar y terminar la integración.

Integral indefinida y el teorema central del cálculo

La antiderivada o la integral indefinida es a la derivada como la suma a la resta, o la multiplicación a la división, en sentido de que si uno hace la operación de misma magnitud pero con el operador opuesto uno vuelve al punto de inicio (e.g $10 + 3 - 3 = 10$).

Antiderivadas y la integral indefinida

Si la derivada toma una función y regresa otra función que describe la relación de cambio de la primera función a cualquier punto de esta. Bueno, si le damos $f(x)$ regresa $f'(x)$ pero por la antiderivada uno puede volver a $f(x)$ la antiderivada de se denota como $F(x)$. O sea que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Un ejemplo de esto es que si tenemos la $f'(x) = 1$ entonces $F(x) = x$. Bueno, en realidad no es tan fácil pues como sabemos si $f'(x) = 1$ entonces pudo haber sido $f(x) = x + cualquier\ constante$! Para remediar esta ambigüedad se dice que $F(x) = x + C$ donde C es la **constante de integración** y que nos dice que justamente es cualquier valor que no depende de x.

Otro ejemplo de esto es que si tenemos $f(x) = x$ entonces $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ porque como se recordará para sacar la derivada uno multiplica el valor del exponente por x y le resta uno al exponente. Pero también podría ser algo como $f(x) = \frac{1}{x}$ y en este caso $F(x) = ln|x| + C$ y el valor absoluto solamente es para notar que el ln no está definido por números negativos.

La **integral indefinida**[1] se escribe como $\int f(x)dx = F(x)$, o sea que no tiene unos límites definidos y esta regresa una función que cuando se diferencía da el **integrando** de la función ; esto tiene la forma matemática $\int f(x)dx = \frac{d \int f(x)dx}{dx} = f(x)$. Por otro lado la **integral definida** da el área bajo la curva, como vimos anteriormente.

---

[1] Un video sobre la integral indefinida : (https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-7/v/antiderivatives-and-indefinite-integrals)

El teorema fundamental del cálculo

El **teorema fundamental del cálculo** nos ayuda a unir el cálculo integral con el diferencial y este dice:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

O sea que la integral de a a b es igual a la antiderivada de b menos la antiderivada de a. Por lo que para calcular el área bajo la curva uno solamente necesita sacar la integral definida ya que las constantes no importan ya que se cancelan por la resta ($C - C = 0$); por ello se llama derivada definida pues no hay incertidumbre como en la indefinida.

Hagamos un el ejemplo de las gráficas de arriba, si $f(x) = x^2$ entonces $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Y si aplicamos $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ debido a que sabemos que el área deseada cae entre 2 y uno tenemos que $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, el área bajo la curva es de $\frac{7}{3}$ cuando $f(x) = x^2$ y entre 1 y 2.

Ahora hagamos otro ejemplo pero para la función $f(x) = 1 + 2x + x^2$ que tiene por gráfico la siguiente imagen y estamos interesados en el área bajo los límites 0 a 3.

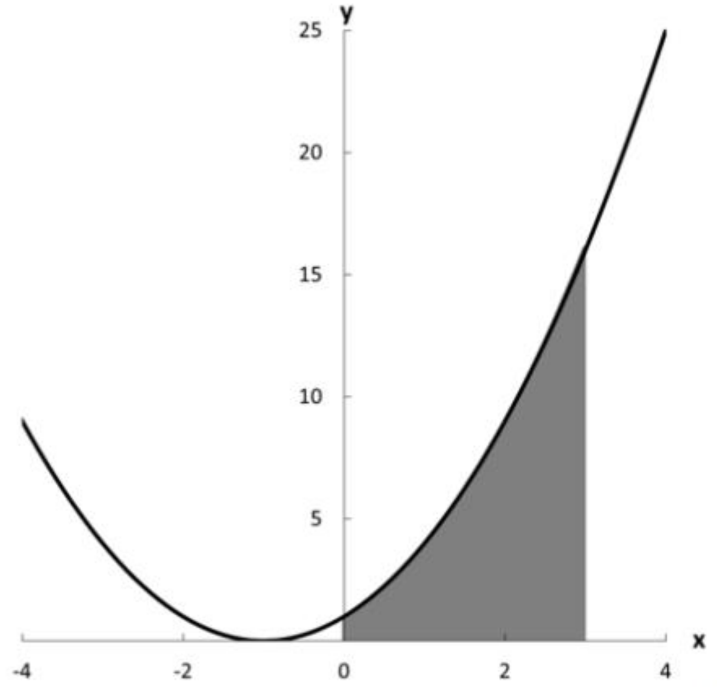


Figure 7.3: Shaded Area under $y = 1 + 2x + x^2$

Sabemos que $F(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ y que por ende la integral debe ser $\int_a^b f(x)dx = (3 + 3^2 + \frac{1}{3}3^3) - (0 + 0^2 + \frac{1}{3}0^3) = 21$. El área bajo la curva de $f(x) = 1 + 2x + x^2$ entre 0 y 3 es de 21.

Esto lo vamos a encontrar en estadística en nuestras conocidisimos gráficos de distribución ya sea la normal, la t, la binomial, la de poisson, la de chi cuadrada, la distribución F, la gamma, etc. Siendo el numerito de cada una de estas, como z, un valor que nos indica el área bajo la curva desde la media a ese punto! (como se recordará $z = \frac{\hat{x} - x}{s}$). Conceptualmente, por ende, el valor z nos está diciendo el número de desviaciones estándar que está este de la media y su área en relación a la media nos indica la probabilidad de ocurrencia de obtener dicho valor al azar de la distribución. Así que esto nos muestra que tan importante es la integral, el cálculo en general, para poder comprender realmente que ocurre en otros métodos matemáticos como la estadística y el porqué es horrible que no nos enseñan matemáticas avanzadas como alumnos de psicología (para mi caso) y/o otras áreas de las ciencias sociales y del comportamiento.

Resolviendo integrales

Aquí uno se refiere a la integral de manera general ya que las reglas que aplican para una aplican para la otra (definida e indefinida), sin embargo se avisará cuando apliquen solamente para los límites y por ende para la integral definida solamente.

Empecemos con algunas propiedades de la integral que nos da el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Notamos que si $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ es verdadera, entonces ocurre que $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$ es verdadera que es lo mismo que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$; invertimos los límites básicamente. Así que también es cierto que $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$. Por último, nuestros límites no son necesariamente constantes y pueden ser una función en sí mismo, esto se puede escribir como $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ para una función de distribución acumulativa y su única restricción es que no están los límites dentro lo que integramos.

Polinomiales y poderes

Recordemos que para derivar polinomiales uno hace uso de $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ para poder y que nuestra antiderivada debe darnos $F(x) = x^n$. Entonces uno tendría que hacer los pasos opuestos por jerarquía, primero sumarle 1 al exponente y dividir entre ese nuevo número del exponente! Esto es en términos de la integral:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; si \; n \neq -1$$

Primero, nunca olvidamos la constante de integración; luego, el menos uno no está permitido debido a que daría una integración de x^0 lo cual no es posible si en su derivada tiene x!

Exponenciales

Como se recordará la derivada de $\frac{de^x}{dx} = e^x$ así que su antiderivada (F(x)) debe ser igual también si no no se mantendría dicha igualdad. Es por ello que tenemos que:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

al similar aplica para el caso general de a^x donde, si se recuerda, $\frac{da^x}{dx} = (ln(a))a^x$, así que nuestra antiderivada debe regresarnos a^x y como lo que ocurre es multiplicar entonces la inversa es dividir dándonos que:

$$\int (ln(a))a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

Logaritmos

Aquí queremos conocer la antiderivada de algo como $f(x) = ln(x)$. Supón que tenemos $xln(x)$ su derivada sería, gracias a la regla del producto:

$$f'(x) = (ln(x))\,(1) + (x)\left(\frac{1}{x}\right) = ln(x) + \frac{x}{x} = ln(x) + 1$$

por lo que su antiderivada sería

$$\int \quad ln(x)dx = xln(x) - x + C$$

para el caso general de log tenemos que lidiar con el ln que surge tras la diferenciación ($\frac{1}{x(ln(a))}$)por lo que su antiderivada es:

$$\int \quad log(x)dx = \frac{xln(x) - x}{ln(a)} + C$$

esto es básicamente dividir los dos términos la integral de ln por el ln(a)

Otras funciones

Para casos donde la función se corte como en:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & : x \leq 2, \\ \ln(x-2) & : x > 2. \end{cases}$$

podemos integrar por partes

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \int_a^2 \quad (-(x - 2) \quad ^2)dx + \int_b^2 \quad ln(x - 2)dx$$

También hay antiderivadas de las funciones trigonométricas: $\int \quad sin(x)dx = - cos(x) + C, \int \quad cos(x)dx = sin(x) + C, \int \quad tan(x)dx = - ln(| cos(x)|) + C.$

La integral es también un operador lineal

En el capítulo anterior vimos que la derivada era un operador lineal tal que $(af + bg)' = af' + bg'$ y si esto es cierto nuestra antiderivada también debe ser un operador lineal para poder dar un operador lineal tal que cada término corresponde en relación 1:1. Esto en términos formales es que la antiderivada es un operador lineal porque $\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$. Para mostrar esto necesitamos la definición de la antiderivada que es $y(x) = \int \frac{dy}{dx}dx$ y $z(x) = \int \frac{dz}{dx}dx$ y al multiplicar cada lado por a y b respectivamente; tenemos que:

$$ay + bz = a\int \frac{dy}{dx}dx + b\int \frac{dz}{dx}dx$$

luego hacemos uso del hecho de que si es un operador lineal entonces ocurre $\frac{d(ay+bz)}{dx} = a\frac{dy}{dx} + b\frac{dz}{dx}$; integramos ambos lados y se obtiene

$$\int \frac{d(ay+bz)}{dx}dx = \int (a\frac{dy}{dx} + b\frac{dz}{dx})dx$$

Finalmente, por la definición de la antiderivada tenemos que

$$ay + bz = \int (a\frac{dy}{dx} + b\frac{dz}{dx})dx$$

Si la primera y la segunda son iguales, entonces

$$a\int \frac{dy}{dx}dx + b\int \frac{dz}{dx}dx = \int (a\frac{dy}{dx} + b\frac{dz}{dx})dx$$

si las derivadas de y y z son funciones entonces tenemos que $f = \frac{dy}{dx}dx$ y $g = \frac{dz}{dx}dx$, y haciendo estas sustituciones obtenemos

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Esto es útil para simplificar múltiples integrales unidas como la suma de cada una de esas integrales! Todos los polinomios pueden ser tratados de esta manera. Por ejemplo $f(x) = 4x^5 + 2x^2 + 5$ y podemos hacer una integral por cada término $5\int x^5 dx = \frac{2x^6}{3} + C$, $2\int x^2 dx = \frac{2x^3}{3} + C$, $5\int x^0 dx = 5x + C$ por lo que en conjunto sería $\int (4x^5 + 2x^2 + 5)dx = \frac{2x^6}{3} + \frac{2x^3}{3} + 5x + C$. Este mismo principio se puede aplicar para casos más complejos como $\int (5x^2 + e^x)dx = \frac{5x^3}{3} + e^x + C$. Así que es una regla terriblemente útil. Se conoce como **regla lineal**.

Integración por substitución

En esencia uno puede cambiar la función de la integral por cualquier término o conglomerado de términos. Si la integral es $\int f(x)dx$, entonces $\int f(x)dx = \int f(u)du$, o $\int f(i)di$, etc. Pero también podemos hacer que tengamos funciones compuestas como $\int g(f(x))dx$. Bueno, supón que $x = g(u)$ luego que $f(x) = f(g(u))$, la integración por sustitución dice que:

$$\int_a^b f(g(u))g'(u)du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Ahora hagamos una comprobación de esto anterior gracias al empleo del concepto de la integral, el teorema fundamental del cálculo, y la regla de la cadena que usábamos con las derivadas. Primero establezcamos que supón que $x = g(u)$ luego que $f(x) = f(g(u))$. Así que podemos componer la antiderivada como $F(g(u))$ y esto se expresa, gracias a la regla de la cadena como $(F(g(u)))' = F'(g(u))\, g'(u) = f(g(u))\, g'(u)$, en el último paso solamente se hace uso de que la antiderivada es igual a la función (integrando).

Cuando aplicamos el teorema fundamental del cálculo obtenemos que $\int_a^b \quad (F(g(u)))'du = Fg(b) - Fg(a)$. Cuando lo combinamos con nuestro resultado anterior podemos poner en el lado izquierdo del igual, en el integrando, $\int_a^b \quad f(g(u))\, g'(u)du = Fg(b) - Fg(a)$. Volviendo a usar el teorema fundamental del cálculo tenemos que $\int_{g(a)}^{g(b)} \quad f(x)du = Fg(b) - Fg(a)$, lo cual nos da el resultado que buscábamos al sustituir $\int_a^b \quad f(g(u))g'(u)du = \int_{g(a)}^{g(b)} \quad f(x)dx$!!

Esta regla de sustitución es como el equivalente de la regla de la cadena que permite partir o descomponer las funciones. Sin embargo esta, a diferencia de la de la cadena suele fallar! Pero al ser potencialmente útil vale la pena intentar su uso. Hagamos unos ejemplos de esto.

Dada una función $f(x) = \frac{1}{2\pi} xe^{-\frac{x^2}{2}}$ y esta es justamente la función de la distribución de probabilidad de una distribución normal multiplicada por x. No sabemos cómo resolver $e^{-\frac{x^2}{2}}$ pero sí sabemos cómo resolver e^{u} donde $u = g(x) = -\frac{x^2}{2}$ y por la regla de poder sabemos que $g'(x) = -x$ por lo que $\frac{du}{-x} = \frac{-xdx}{-x}$ siendo $\frac{du}{-x} = dx$. Así que la integral se puede reescribir como $\int \quad (\frac{1}{2\pi} g'(x)e^{g(x)})dx$ pero la integración por sustitución nos dice que esto es lo mismo que $\int \quad (\frac{1}{2\pi}x\, e^{u})\frac{du}{-x} = \int \quad (\frac{1}{2\pi}e^{u})du = \frac{1}{2\pi} e^{u} + C = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} + C$. Acabamos con la integral! Un video de como se hace esto: https://www.youtube.com/watch?v=IAh00vU3FSY&ab_channel=TheOrganicChemistryTutor

Pero cuando ocurre esto $f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, entonces la integral es $\int_{-\infty}^{\infty} \quad \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ pero no podemos aplicar el mismo truco porque no hay un g(x), o sea que todo $\frac{1}{2\pi}e$ es una constante y no hay una segunda función compuesta! Por ende para poder saber si uno va a poder usar el truco de sustitución uno debe ver si se cumple la composición de $f(g(x))$ y si es el caso uno puede sustituir $g(x) = u$ e igualmente $g'(u)$.

Otro ejemplo, supón que tenemos $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ si $u = x^3$ y $du = 3x^2 dx$, entonces $dx = \frac{du}{3x^2}$ por lo que $\int 3x^2 e^u dx = \int (3x^2 e^u) \frac{du}{3x^2} = \int (e^u) du$ por ende nuestra integral es $e^{x^3} + C$. Si por otro lado tuviésemos $\int x^2 e^{x^3} dx$, entonces $u = x^3$ y $du = 3x^2 dx$ por lo que $dx = \frac{du}{3x^2}$ así que tenemos que $\int x^2 e^u dx$ y por sustitución $\int (x^2 e^u) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

Esto al menos con las integrales indefinidas, pero para las definidas hay que hacer algo similar, si tenemos $\int_1^3 3x^2 e^{x^3} dx$. Hacemos lo mismo en tanto que tenemos $u = x^3$ y $du = 3x^2 dx$ siendo $\frac{du}{3x^2} = dx$. Así que $\int_1^3 3x^2 e^{x^3} dx = \int_1^{27} e^u du$ y esto es igual a $\int_1^{27} e^u du = e^{27} - e^1$. Esto último es debido al teorema fundamental del cálculo donde $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Integración por partes

Esta es el análogo de la regla del producto de la derivada y esta dice que:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

aunque luego también se escribe como:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ahora pasemos a probar esta regla, nuestra regla del producto dice que $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ y si integramos ambos lados obtenemos que $\int f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$, sin embargo si aplicamos el concepto de la derivada $\int f(x)dx = f(x)$ del lado izquierdo obtenemos que $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$. Así que si restamos a ambos lados del igual $f'(x)g(x)dx$ obtenemos la regla que es $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x)dx$.

Esta regla se va a usar para casos como $\int xe^{x}dx$ donde no podemos usar la sustitución debido a que solamente hay una función y por ende sus derivadas son simples 1 para x y e^{x} se queda igual al derivarse. Por lo que $f(x) = x$ y que $g'(x) = e^{x}$ así que $\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x} = xe^{x} - e^{x} + C$ y voila! Ahora uno más complicado $\int x^{2}e^{x}dx$ aquí vemos que $f(x) = x^{2}$ y $g(x) = e^{x}$ por lo que tenemos $\int x^{2}e^{x}dx = x^{2}e^{x} - \int 2xe^{x} + C$ lo cual tiene por integral, aprovechando el ejemplo anterior, $\int x^{2}e^{x}dx = x^{2}e^{x} - 2(xe^{x} - e^{x}) + C$. Lo cual implica que hubiésemos tenido que hacer dos integrales por partes y luego unir los resultados.

Otro ejemplo más sería la integral $\int x(x+1)^{-\frac{3}{2}}dx$ donde podemos tomar $f(x) = x$ y $g'(x) = (x+1)^{-\frac{3}{2}}$. Si $f'(x) = 1$ y $g(x) = \int (x+1)^{-\frac{3}{2}}dx$, además podemos hacer por sustitución que $u = h(x) = x + 1$ siendo $h'(x) = 1$. Así que podemos reescribir la integral como $\int u^{-\frac{3}{2}}du$ por lo que por la regla de poder tenemos que esta integral es $2u^{-\frac{1}{2}} + C = 2(x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Esto nos permite volver a la integración por partes $\int x(x+1)^{-\frac{3}{2}}dx = 2x(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2\int (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ por lo que debemos usar sustitución nuevamente para $2\int (x+1)^{-\frac{1}{2}}$ donde $u = x + 1$ y entonces $\int u^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{x+1} + C$. Si sustituimos esto tenemos que la derivada por partes es de $\int x(x+1)^{-\frac{3}{2}}dx = 2x(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 4\sqrt{x+1} + C$ y voila!

Sí, esta es complicada.

Todo esto es sin embargo solamente para la integral indefinida, para la definida tenemos que :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Table 7.1: List of Rules of Integration

Fundamental theorem of calculus	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Rules for bounds	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\int_a^a f(x)dx = 0$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ for $c \in [a, b]$
Linear rule	$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
Integration by substitution	$\int_a^b f(g(u))g'(u)du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$
Integration by parts	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Power rule 1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ if $n \neq -1$
Power rule 2	$\int x^{-1}dx = \ln\|x\| + C$
Exponential rule 1	$\int e^x dx = e^x + C$
Exponential rule 2	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
Logarithm rule 1	$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$
Logarithm rule 2	$\int \log_a(x)dx = \frac{x\ln(x) - x}{\ln(a)} + C$
Trigonometric rules	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$ $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$ $\int \tan(x)dx = -\ln(\|\cos(x)\|) + C$
Piecewise rules	Split definite integral into corresponding pieces

Extrema in one dimension

El máximo y el mínimo son dos tipos de **extremos** y pueden ser útiles para poder modelar las decisiones de las personas a partir de la función que describe cada uno de estos puntos. Siendo estas decisiones del tipo donde uno maximiza algo como una ganancia y minimiza las pérdidas. Aunque como veremos también son útiles en estadística para la regresión de mínimos cuadrados.

Extremos

Como uno lo pensó, efectivamente estos son los puntos **extremos** de una función, ya sea el **máximo** o el **mínimo**. También pueden ser pensados como el punto máximo o mínimo de la gráfica de una función. Para ver esto considera la función $f(x) = x^2$:

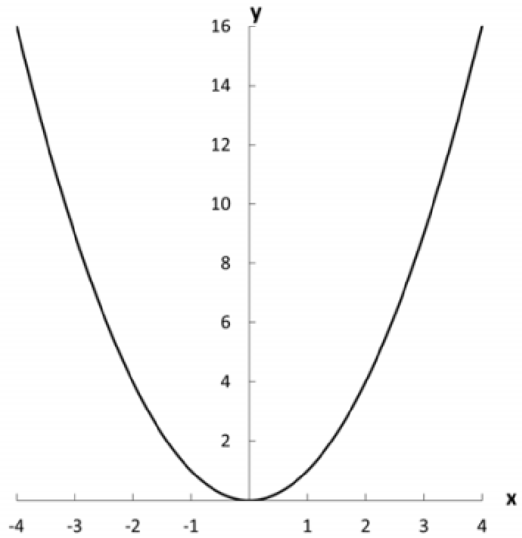


Figure 8.1: Graph of $f(x) = x^2$

aquí podemos ver que el mínimo está en $x = 0$, sin embargo considera el caso donde $f(x) = -x^2$

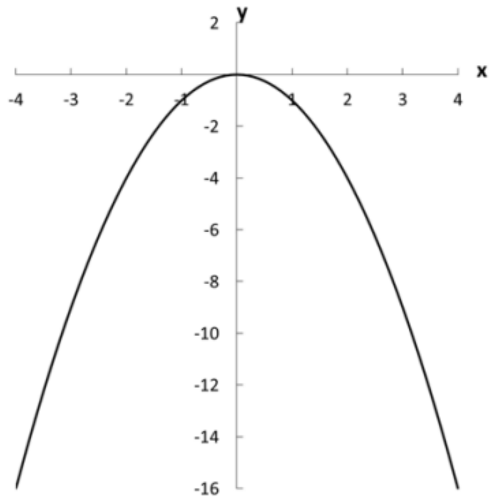


Figure 8.2: Graph of $f(x) = -x^2$

aquí vemos lo contrario, o sea, que el máximo de la función es en $x = 0$. Por otro lado, nota que $f(x) = x^2$ no tiene un máximo mientras que $f(x) = -x^2$ sí tiene un máximo.

Otra cosa que podemos notar es que si generamos una línea tangente a la derecha de $f(x) = x^2$ obtenemos una pendiente positiva y a su izquierda negativa. Mientras que para $f(x) = -x^2$ obtenemos una pendiente positiva a su izquierda y una negativa a su derecha (en esencia se invierte la relación). Esto es más evidente si graficamos sus derivadas, o sea $f'(x) = 2x$ y $f'(x) = -2x$:

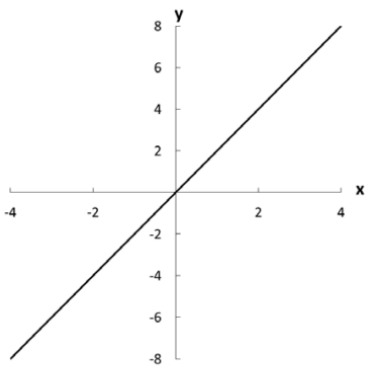


Figure 8.3: Graph of First Derivative of $f(x) = x^2$

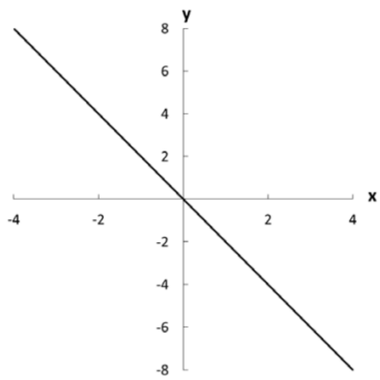


Figure 8.4: Graph of First Derivative of $f(x) = -x^2$

Nuestros máximos y mínimos pueden ser **locales** cuando hablamos de que son el máximo o mínimo para un intervalo de valores de x; lo mismo para el mínimo. Pero también hay mínimos y máximos **absolutos** cuando son para el conjunto total de valores de x. Las funciones que vimos anteriormente son absolutas, pero también puede haber locales como es el caso de la función $ff(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$que tiene una gráfica:

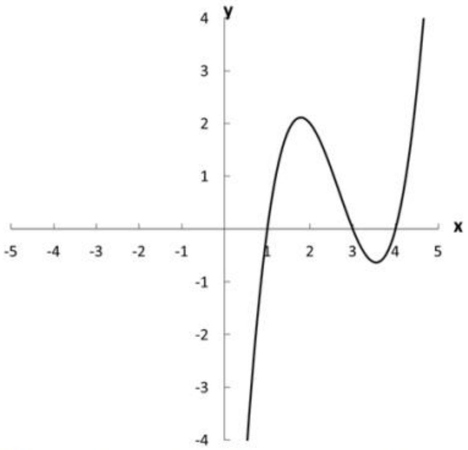


Figure 8.5: Graph of $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$

aquí vemos que hay un mínimo y máximo local entre 1 y 4 pero que no son globales porque la función continúa al infinito! Si uno considera los valores del dominio $x \in [1,4]$ vemos que los montes sí son los máximos y mínimos globales pero que al considerar algo como el dominio $x \in [-1,8]$ esto ya no es cierto.

Otro caso es cuando tenemos una función como $f(x) = x$ con un dominio de (0,1), en este caso habría un aparente máximo o mínimo pero en realidad no es el caso ya que siempre puede incrementar hasta el infinito. Si este es el caso entonces tenemos que el máximo y el mínimo son aparentes y para estos casos los llamamos **supremo** e **ínfimo**. Estos son para el caso de los límites superiores e inferiores de un conjunto dado.

Derivadas de orden superior, concavidad, y convexidad

Las **derivadas de segundo orden** son un indicador de la proporción del cambio de la proporción del cambio. Así la tercera sería un indicador de la proporción de cambio de la segunda derivada, y la cuarta de este y así. El proceso para obtener estas es el mismo que el de la derivada normal, solamente se van concatenando una tras otra tras otra, etc. Para marcar cuántas veces se puede derivar las marcamos con C^n donde si pertenece a los miembros de la primera derivada se marca con C^1, si a la segunda C^2, y así.

Así mismo nos podemos encontrar con más de una notación como sería $\frac{df(x)}{dx}$ para la primera derivada, $\frac{d^2f(x)}{dx}$ para la segunda, $\frac{d^3f(x)}{dx}$ para la tercera y así. Pero también podemos encontrar la notación de prima como $f'(x)$ para la primera, $f''(x)$ para la segunda, $f'''(x)$ para la tercera, etc (esta es menos estética y práctica para órdenes mayores). Debido a este inconveniente de la notación prima se suele preferir $f^{(n)}(x)$ pues es más flexible y menos desastroso. Finalmente podemos encontrar la notación D_x para la primera, y D_x^n para las posibles después de esta (más usado en cálculo multivariado).

Hagamos un ejemplo para ver cómo funciona este chisme: $y = f(x) = 2x^3$, tendríamos que $\frac{df(x)}{dx} = 6x^2$, luego $\frac{d^2f(x)}{dx} = 12x$, posteriormente $\frac{d^3f(x)}{dx} = 12$, y finalmente sería $\frac{d^4f(x)}{dx} = 0$. Así que todas las derivadas mayores a el cuarto orden son cero.

Otro bonito ejemplo sería: $f(x) = 6x^4 + x^2 - 3$, por lo que $\frac{df(x)}{dx} = 24x^3 + 2x$, la de segundo orden $\frac{d^2f(x)}{dx} = 72x^2 + 2$, de tercero $\frac{d^3f(x)}{dx} = 144x$, cuarta $\frac{d^4f(x)}{dx} = 144$, y finalmente $\frac{df(x)}{dx} = 0$.

¿Qué significan las otras derivadas? Bueno, en física es fácil ver esto. La primera significa la velocidad de un objeto o su proporción de cambio en la posición respecto del tiempo. Cuando vemos la segunda hablamos de la aceleración, la proporción de cambio de la velocidad misma. Sin embargo, de manera más general estas sirven para decirnos algo acerca de la función en cuestión. La primera nos dice la dirección de esta, va en decremento o en aumento. La segunda nos dice qué tanto se va acelerando o disminuyendo ese cambio. Las de orden mayor son más complicadas de explicar y no se van a tratar, pues por lo general nos va a bastar con la primera y la segunda.

Concavidad y convexidad

Las funciones cóncavas (U al revés) son aquellas que tienen una velocidad de cambio que disminuye conforme aumenta x. Las convexas (forma de U), por el contrario, aumentan su velocidad de cambio conforme aumenta x.

Una función es cóncava si para cualesquiera puntos x_1y x_2 en su dominio y con pesos $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

siendo estrictamente cóncava si su inecualidad es tal que del lado izquierdo es más grande que la del derecho. Cuando este es el caso, si uno dibuja una secante en la función debe estar por debajo de esta, como se ve en la imagen de abajo.

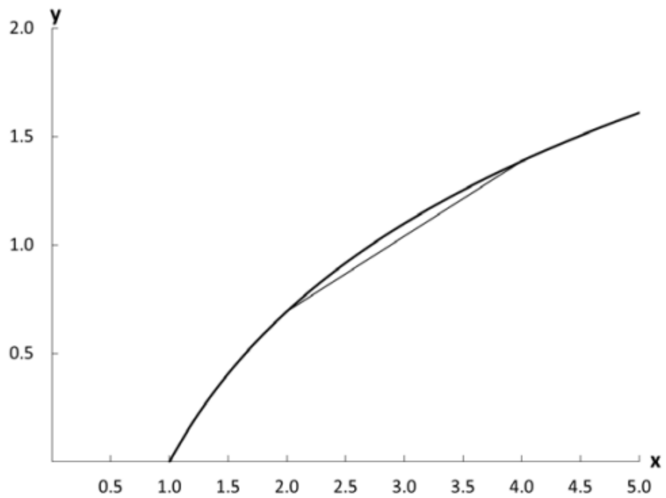


Figure 8.6: Graph of $f(x) = \ln(x)$ with Secant

Es decir que nuestra función se va desacelerando y esto se observa cuando uno saca las derivadas, pues van a ir de positivo a negativo marcando justamente esta tendencia hacia la reducción de la velocidad de cambio (de / a \ ). Como ocurre con $f(x) = -x^2$ conforme se acerca x a cero.

Por otro lado tenemos justamente el efecto contrario para las funciones convexas para cualesquiera puntos x_1y x_2 en su dominio y con pesos $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

como se ve la inecualidad ahora es mayor a la derecha que a la izquierda. Esto implica que va de menos a más la proporción de cambio y que va hacia el positivo.

Series de Taylor

Como ya se dijo anteriormente, nuestras derivadas tienen información de la función (velocidad, aceleración, etc) por lo que uno puede reconstruir la función a partir de estas derivadas! Cuando uno hace esto estamos hablando de una **serie de Taylor**, que nos dice que si una función $f(x)$es infinitamente diferenciable cerca de un número, entonces uno puede reescribir esta función como la suma infinita de estas derivadas:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots$$

es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

donde $n$indica el orden de la derivada.

Lo cool es que permite reemplazar una función compleja por una serie de sus derivadas. Quizá se recuerde que esto es muy familiar a $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$, esto es debido a que su derivada es siempre e^{x} al infinito.

Pero para lo que queremos las series de Taylor es para poder aproximar la función en cualquier punto deseado. Supón que queremos hacer $f(x) = ln(1 + x)$ con centro a=0, en este caso primero sacaremos $f(x) = ln(1) = 0$; posteriormente tendríamos que obtener su derivada que sería $f'(x) = \frac{1}{x+1} = (1 + x)^{-1}$ y esto sería $\frac{1}{1!}x$; luego haríamos $f''(x) = -1(1 + x)^{-2}$ y esto sería $\frac{-1}{2!}x^{2}$, etc. Sip, es muy tedioso a mano pero para eso tenemos computadoras!

Puntos críticos y puntos de inflexión

Cuando tenemos que en la primera o la segunda derivada hay un cambio de positivo a negativo, o viceversa, tenemos que hay una parada por el cero y esto es importante como veremos.

Veamos primero el caso de la primera derivada. Definamos un **punto crítico** como cualquier punto x^{*} que tiene $f'(x^{*}) = 0$ o no existe. También se dice que este **punto es estacionario** debido a que en dicho punto no hay un cambio de la función y es importante porque uno de los teoremas de Fermat dice que en ese punto se encuentra el extremo.

Sin embargo puede ocurrir el caso donde estos puntos crítico no marcan un extremo sino solamente el cambio de una función de cóncava a convexa (un **punto de inflexión**) como sería el caso de una función $f(x) = x^{3}$(o viceversa $f(x) = -x^{3}$); la siguiente imagen es su gráfico. En este caso vemos que va de pendiente positiva del lado izquierdo a positiva del lado derecho que esto se definía como $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ para las cóncavas y como $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ para las convexas.

Gráfico de x^3

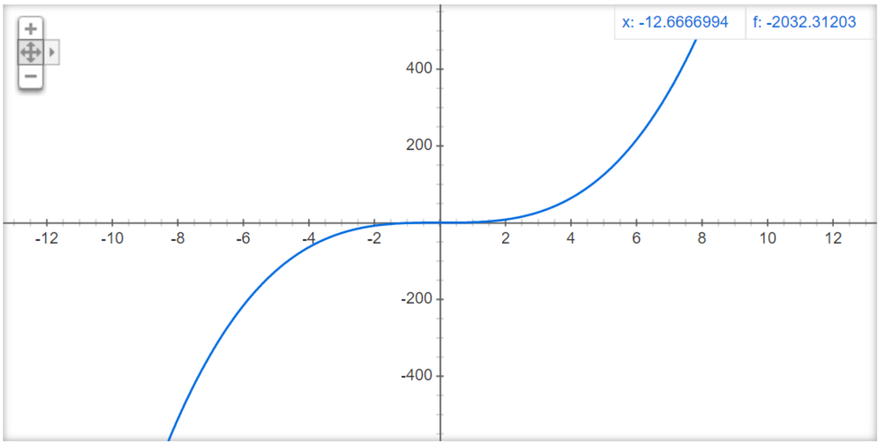
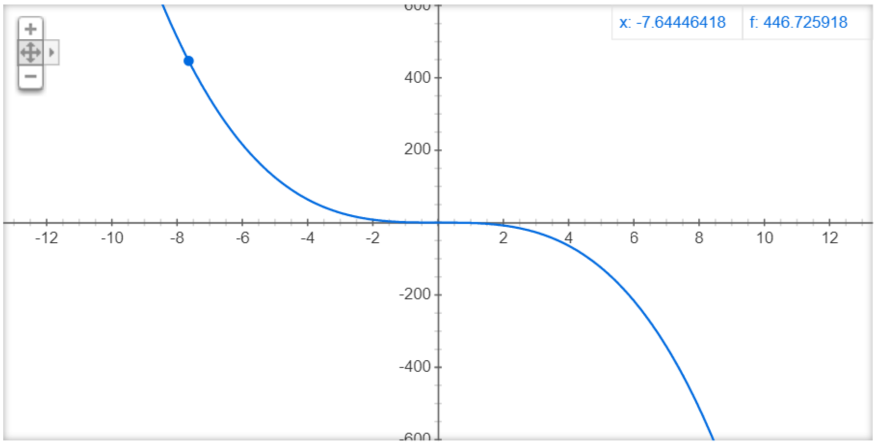


Gráfico de -(x^3)



Esto, como se esperaría, también se ve reflejado en su derivada de segundo orden que conforme se aproxima a cero sufre un cambio cuando x=0, siendo negativa, y luego vuelve a ser positiva.

Cuando ocurre que la $f'(x) = 0$ y la $f''(x) = 0$ tenemos un punto de silla de montar (saddle point) y no son extremos pero puede ser un punto de inflexión, o un mínimo o máximo local.

Puntos estacionarios y la prueba de la primera derivada

Uno puede pensarlo así, cuando uno encuentra un extremo uno ha llegado a un punto estacionario de la función tal que de un lado la pendiente de la tangente es positiva y del otro lado es negativa (dependiendo si es cóncava o convexa). Así que lo primero que uno puede hacer es encontrar estos puntos estacionarios de la función.

Para hacer esto anterior uno establece que $f'(x) = 0$ y se resuelve para la x y nos da $f'(x^*) = 0$ y se llama la condición de primer orden. Esto a su vez nos permitiría obtener valores de y para los valores de x^*que obtuvimos en el paso anterior, y por ende candidatos posibles para el extremo de la función.

Hagamos un ejemplo donde tenemos $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, su primera derivada sería $f'(x) = 3x^2 - 6x$ y establecemos que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ par obtener las posibles soluciones de x; o sea:

$$3(x^*)^2 - 6x^* = 0$$

$$x^*(3x^* - 6) = 0$$

$$x^* = 0 \text{ ó } x^* = 2$$

Cuando sustituimos en $x^3 - 3x^2 + 7$ nos da que $y = 7$ y $y = 3$, aunque solamente sabemos que son puntos estacionarios y lo que queremos conocer es si son puntos de inflexión, un mínimo, o un máximo.

Prueba de la segunda derivada

Usamos la segunda derivada para saber si los puntos estacionarios son extremos o si son puntos de inflexión. Cuando es un punto de inflexión esperamos que la segunda derivada tenga un cambio tal que indique el cambio de cóncava a convexa. Así que debemos revisar más allá del x=0, así como ver si hay un cambio de símbolo que indique el paso de cóncava a convexa. Así que debemos encontrar un cambio de símbolo en nuestra segunda derivada así como se encontraba un cambio de símbolo en la primera derivada para encontrar el extremo así lo haríamos pero buscando la tercera derivada. **Si es cero, la tercera derivada, al evaluarse en x_i entonces decimos que no es un punto de inflexión y si es mayor a cero entonces decimos que es un punto de inflexión**.

Cuando tenemos derivadas más complicadas que una de la forma x^n y es inconclusa la prueba de la segunda derivada, sea es cero, podemos continuar haciendo derivadas, de n orden, en los puntos estacionarios hasta que obtengamos un punto. Si es de orden non, entonces será un punto de inflexión y si es par será un mínimo o máximo. Finalmente si el resultado de esta evaluación, de la segunda derivada o la de orden superior, **es positivo, entonces es un mínimo local y si es negativo es un máximo local**.

Ahora podemos volver a nuestro ejemplo donde $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, y que habíamos visto que la $f'(x) = 3x^2 - 6x$, si sacamos la segunda derivada obtenemos que $f''(x) = 6x - 6$. Si evaluamos en los puntos estacionarios $x = 0$ y $x = 2$, entonces sabemos que $6(0) - 6 = -6$ siendo un máximo local; y que $6(2) - 6 = 6$siendo un mínimo local. Así mismo podemos ver que es verdaderamente un punto de inflexión debido a que $f'''(x) = 6 > 0$, o sea, que sí es un punto de inflexión.

Fronteras y extremos globales

La función $f(x) = 3x + 2$, con un dominio de [1,3], es una función que no tiene un extremo local debido a que no tiene solución para la primera derivada ya que $f'(x) = 3$ no tiene ninguna x! Lo que sí podemos decir es que en su dominio tiene un máximo y un mínimo ya que se incrementa monotónicamente, es lineal pues, un máximo en 3 y un mínimo en 1. Pero podemos tratar con una función más complicada como con la que hemos estado trabajando, o sea, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7.$ con un dominio de [-4,4].

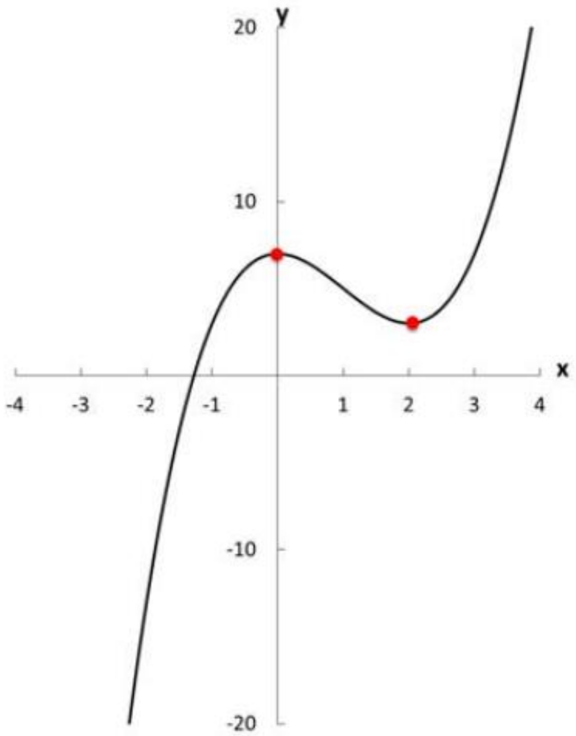


Figure 8.9: Local Extrema for Cubic Equation

Podemos notar que su máximo local está en $x = 0$ y $y = 7$, y su mínimo local está en $x = 2$ y $y = 3$; es lo marcado en rojo. Así que tienen mínimo y máximo locales, relativos al dominio, pero no son globales porque claramente la función aumenta y decrementa más allá de estos valores.

Luego ¿cómo es que encontramos extremos globales? Bueno, esto puede ser por el **teorema del valor extremo** que establece que para toda función que escupe número reales y es continua pero cerrada entre un intervalo cerrado como [a,b], debe tener su mínimo y/o máximo global al menos una vez entre ese intervalo. Posteriormente también se demostró que también aplicaba para cualquier conjunto compacto.

Esto implica que tenemos que tiene que haber un extremo global si la función es continua y esta tiene un dominio cerrado [a,b]. Así mismo, tenemos que en una función lineal donde no hay puntos críticos tenemos que los extremos están en los puntos cerrados del dominio, si [1,5] entonces uno en 1 y el otro en 5. Por otro lado, si la función solamente tiene un punto crítico, entonces el otro debe estar en uno de los puntos cerrados del dominio.

Así que para encontrar nuestro mínimo o máximo global solamente tenemos que poder comparar el dominio con el máximo y mínimo global. Volviendo a nuestro ejemplo de trabajo $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ tenemos que el mínimo local está en $f(0) = 7$, y el máximo local está en $f(2) = 3$, sin embargo debido al dominio [-4,4] tenemos que el máximo y el mínimo global se encuentran en $f(-4) = -105$ y $f(4) = 23$; al menos en este dominio!

Resumen del método

1. Encuentra $f'(x)$
2. Iguala $f'(x)$ a cero, $f'(x) = 0$, y encuentra los puntos estacionarios (x^*)
3. Encuentra $f''(x)$
4. Sustituye cada valor de x^*en $f''(x)$
    a. Si $f''(x^*) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo en x^*
    b. Si $f''(x^*) > 0$, entonces $f(x)$tiene un mínimo en x^*
    c. Si $f''(x^*) = 0$, entonces puede ser un punto de inflección; puedes checar esto por medio de:
        i. Calcular la derivada de orden superior hasta que una no sea cero
        ii. Si se encuentra el valor diferente de cero en un derivada de n non entonces es un punto de inflexión (donde cambia de cóncava a convexa) y no es es un extremo; no continuar con los pasos siguientes.
        iii. Si $f^{(n)}(x^*) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo en x^*
        iv. Si $f^{(n)}(x^*) > 0$, entonces $f(x)$tiene un mínimo en x^*
5. Sustituye el valor del extremo local en $f(x)$ para conocer el valor de la función en esos puntos-
6. Sustituye los valores del dominio en $f(x)$ para conocer los valores de la función en dichos puntos.
7. Según los resultados de los dos pasos anteriores obtén el mínimo global y el máximo global a partir del valor más pequeño y el más grande respectivamente.