

EDA0001 – Estruturas de Dados

Árvores AVL

Prof. Rui Jorge Tramontin Junior
Departamento de Ciência da Computação
UDESC / Joinville

Tópicos a serem apresentados

- Árvores;
 - Conceitos, aplicações, implementação;
- Árvores Binárias;
 - Conceitos, aplicações, implementação;
- Árvores Binárias de Busca;
 - Aplicações e implementação;
- **Árvores AVL;**
 - **Conceitos e implementação.**

Recapitulando...

- **Árvores Binárias de Busca (ABB)** oferecem algoritmos eficientes, na ordem de $O(\log n)$;

Recapitulando...

- **Árvores Binárias de Busca (ABB)** oferecem algoritmos eficientes, na ordem de $O(\log n)$;
 - Mas precisam estar **balanceadas**!

Recapitulando...

- **Árvores Binárias de Busca (ABB)** oferecem algoritmos eficientes, na ordem de $O(\log n)$;
 - Mas precisam estar **balanceadas**!
- Entretanto, uma ABB não consegue garantir o balanceamento!

Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;

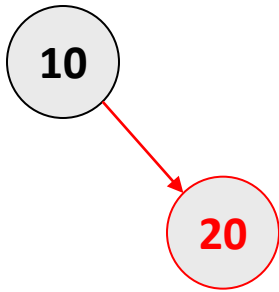
Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;

10

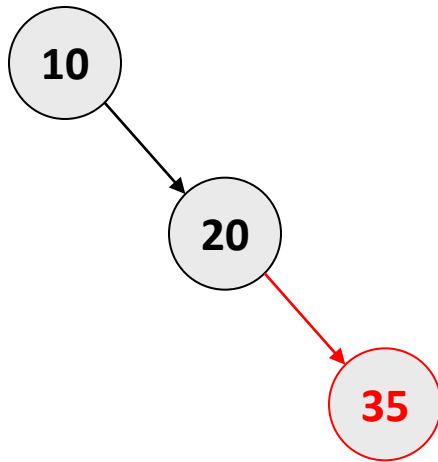
Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;



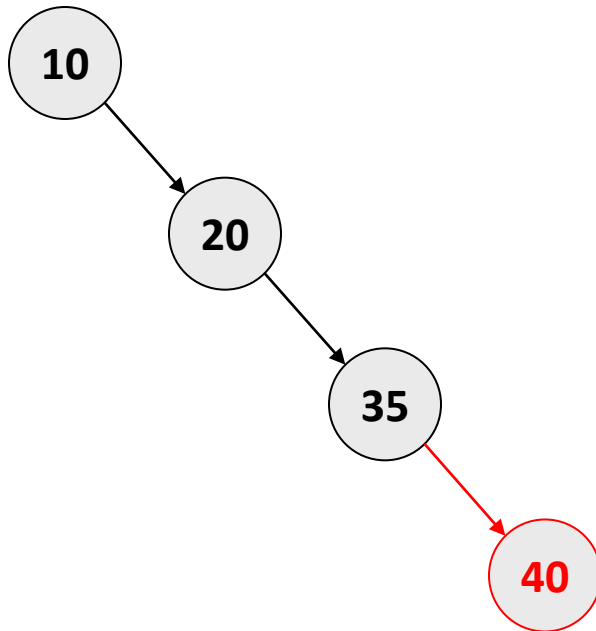
Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;



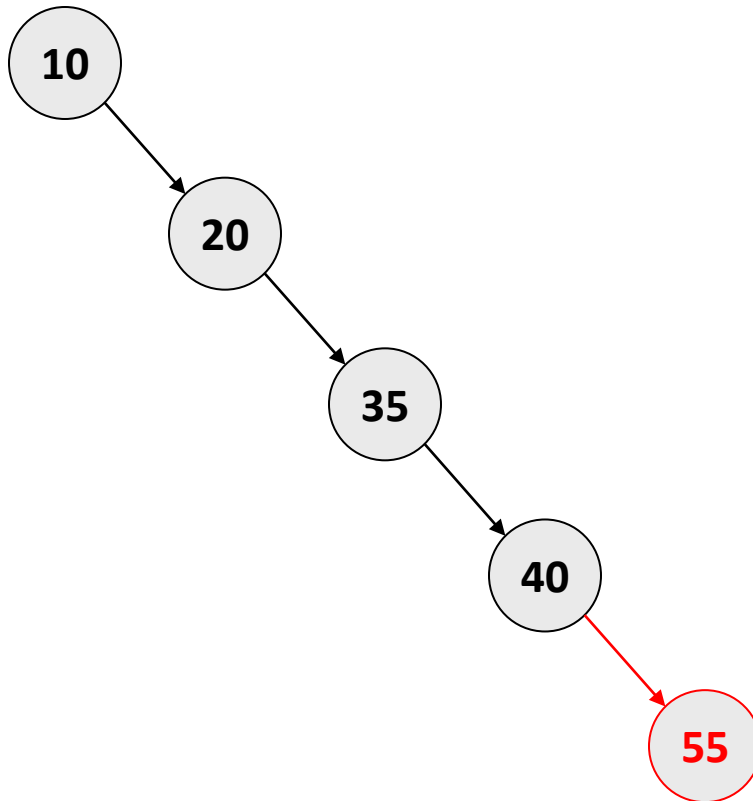
Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;



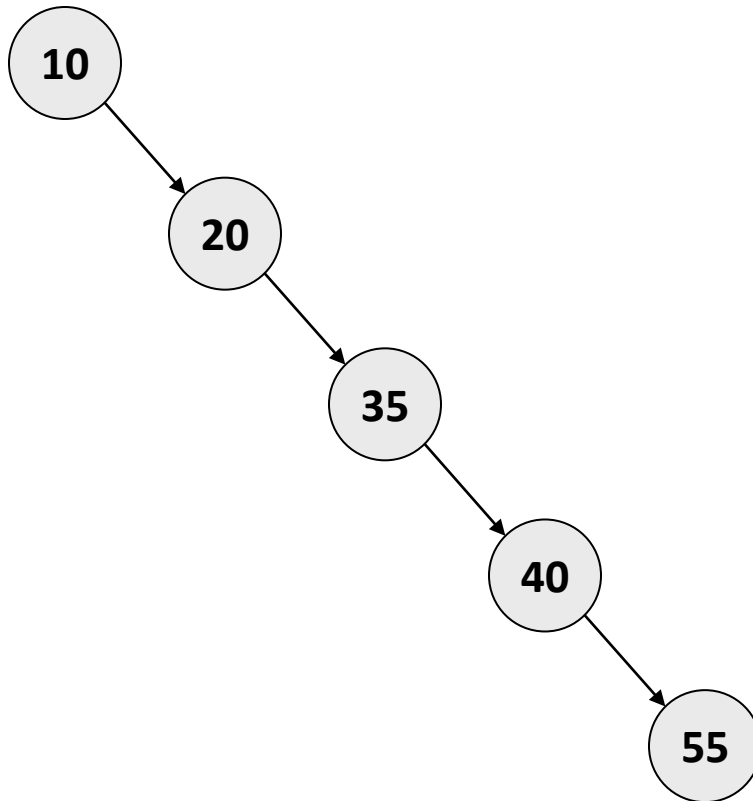
Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;



Problemas de balanceamento

- Exemplo: inserção dos valores 10, 20, 35, 40, 55;



Árvore Degenerada!
(Lista Encadeada)

Problemas de balanceamento

- A manipulação de uma ABB pode levar ao seu desbalanceamento!

Problemas de balanceamento

- A manipulação de uma ABB pode levar ao seu desbalanceamento!
- O caso extremo é quando a árvore se torna **degenerada** (equivalente a uma lista encadeada);

Problemas de balanceamento

- A manipulação de uma ABB pode levar ao seu desbalanceamento!
- O caso extremo é quando a árvore se torna **degenerada** (equivalente a uma lista encadeada);
- Neste caso, o desempenho dos algoritmos cai, tendendo à ordem linear $\rightarrow O(n)$.

Solução: ABB balanceadas

- Para lidar com este problema, existem algumas implementações de **ABBs autobalanceáveis**;

Solução: ABB balanceadas

- Para lidar com este problema, existem algumas implementações de **ABBs autobalanceáveis**;
 - Organizam sua estrutura a cada manipulação;

Solução: ABB balanceadas

- Para lidar com este problema, existem algumas implementações de **ABBs autobalanceáveis**;
 - Organizam sua estrutura a cada manipulação;
 - Garantem que a altura da ABB seja sempre $O(\log n)$;

Solução: ABB balanceadas

- Para lidar com este problema, existem algumas implementações de **ABBs autobalanceáveis**;
 - Organizam sua estrutura a cada manipulação;
 - Garantem que a altura da ABB seja sempre $O(\log n)$;
- Exemplos:
 - Árvores AVL;
 - Árvores Bicolores (red-black trees);
 - *Splay Trees*;

ÁRVORES AVL

Árvores AVL

- Esse tipo de árvore tem o nome formado pelas iniciais de seus inventores (1962):
 - G. M. **A**delson-**V**elskii e E. M. **L**andis;

Árvores AVL

- Esse tipo de árvore tem o nome formado pelas iniciais de seus inventores (1962):
 - G. M. **A**delson-**V**elskii e E. M. **L**andis;
- Uma árvore AVL é dita **autobalanceável**, pois realiza operações de balanceamento (*rotações*) após cada manipulação, se necessário;

Árvores AVL

- Esse tipo de árvore tem o nome formado pelas iniciais de seus inventores (1962):
 - G. M. **A**delson-**V**elskii e E. M. **L**andis;
- Uma árvore AVL é dita **autobalanceável**, pois realiza operações de balanceamento (*rotações*) após cada manipulação, se necessário;
- Para tal, utiliza uma *métrica* chamada **Fator de Balanceamento**.

Fator de Balanceamento

- Dada a função **A** que calcula a altura de uma árvore;

Fator de Balanceamento

- Dada a função **A** que calcula a altura de uma árvore;
- ***Fator de Balanceamento (FB)*** de um nó é definido da seguinte forma:

Fator de Balanceamento

- Dada a função **A** que calcula a altura de uma árvore;
- ***Fator de Balanceamento (FB)*** de um nó é definido da seguinte forma:

$$FB = A_{(sub-árv. esquerda)} - A_{(sub-árv. direita)}$$

Definição de Árvore AVL

- **Árvore AVL** é uma ABB que está balanceada, ou seja, todos os nós possuem FB igual a **-1, 0** ou **+1**;

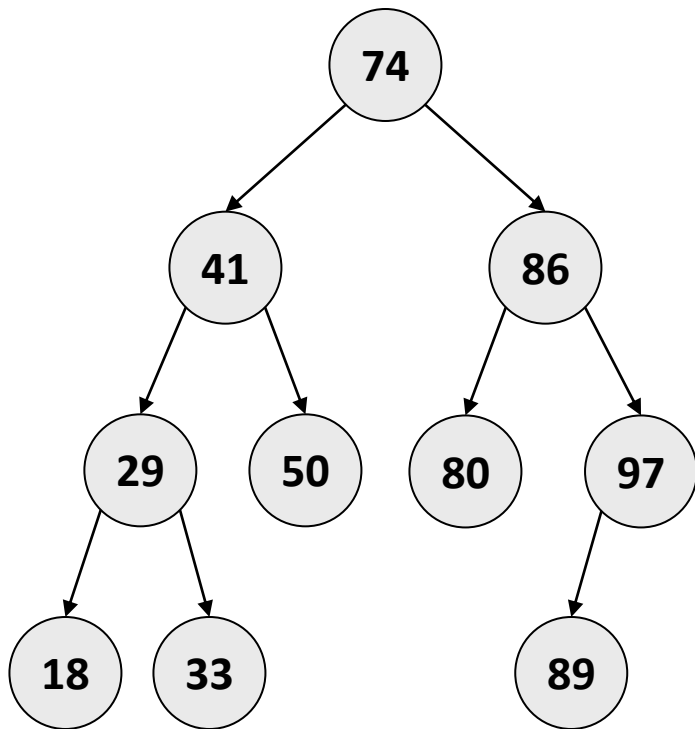
Definição de Árvore AVL

- **Árvore AVL** é uma ABB que está balanceada, ou seja, todos os nós possuem FB igual a **-1, 0** ou **+1**;
- Uma inserção ou remoção pode tornar uma árvore desbalanceada;

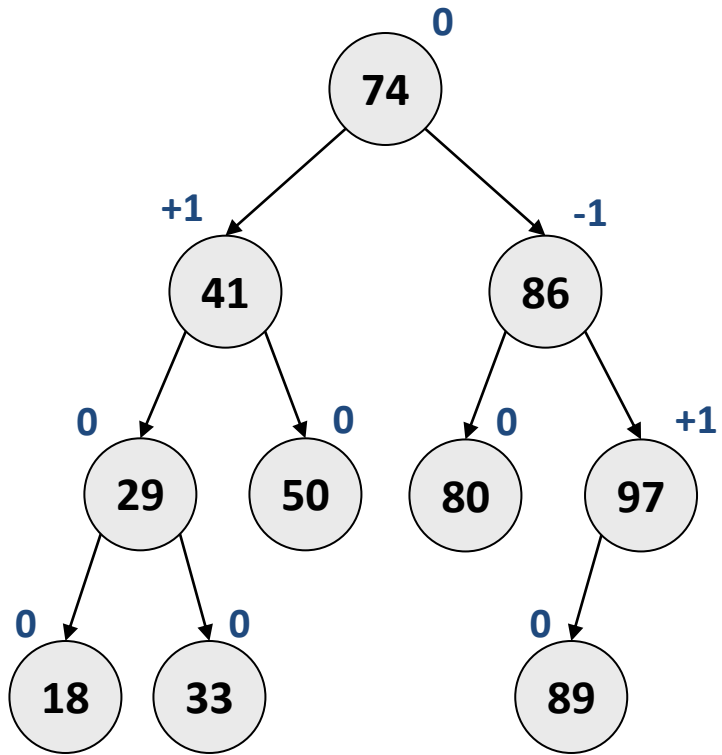
Definição de Árvore AVL

- **Árvore AVL** é uma ABB que está balanceada, ou seja, todos os nós possuem FB igual a **-1, 0** ou **+1**;
- Uma inserção ou remoção pode tornar uma árvore desbalanceada;
 - *Um ou mais nós com FB valendo -2 ou +2.*

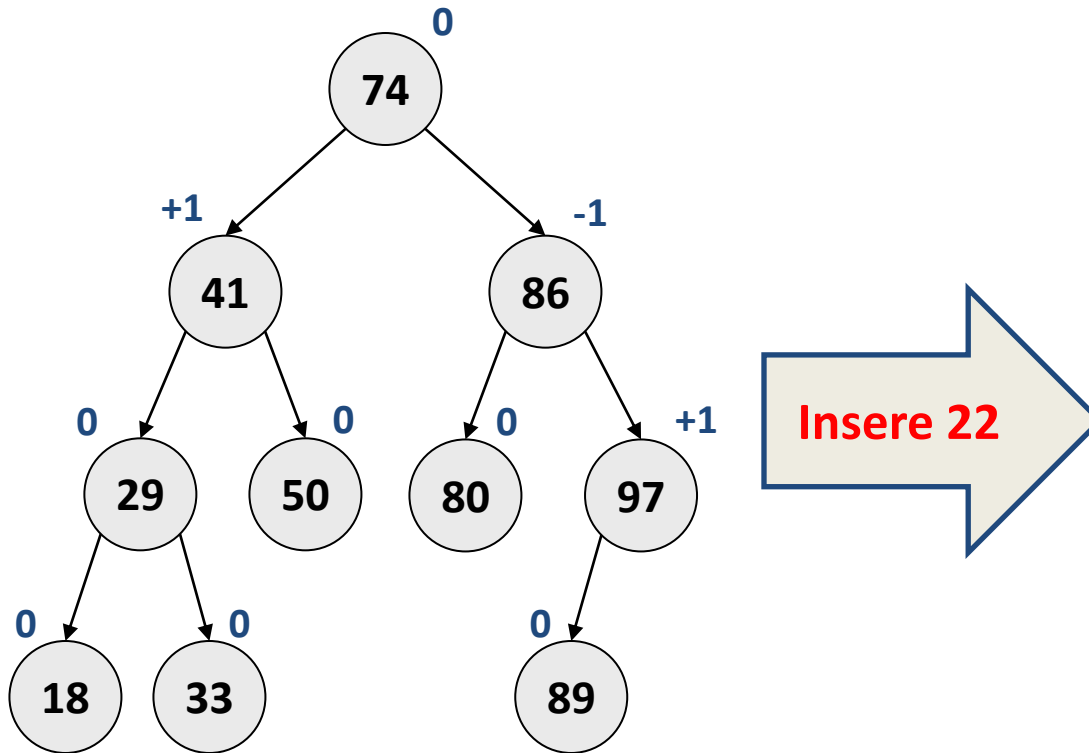
Exemplo



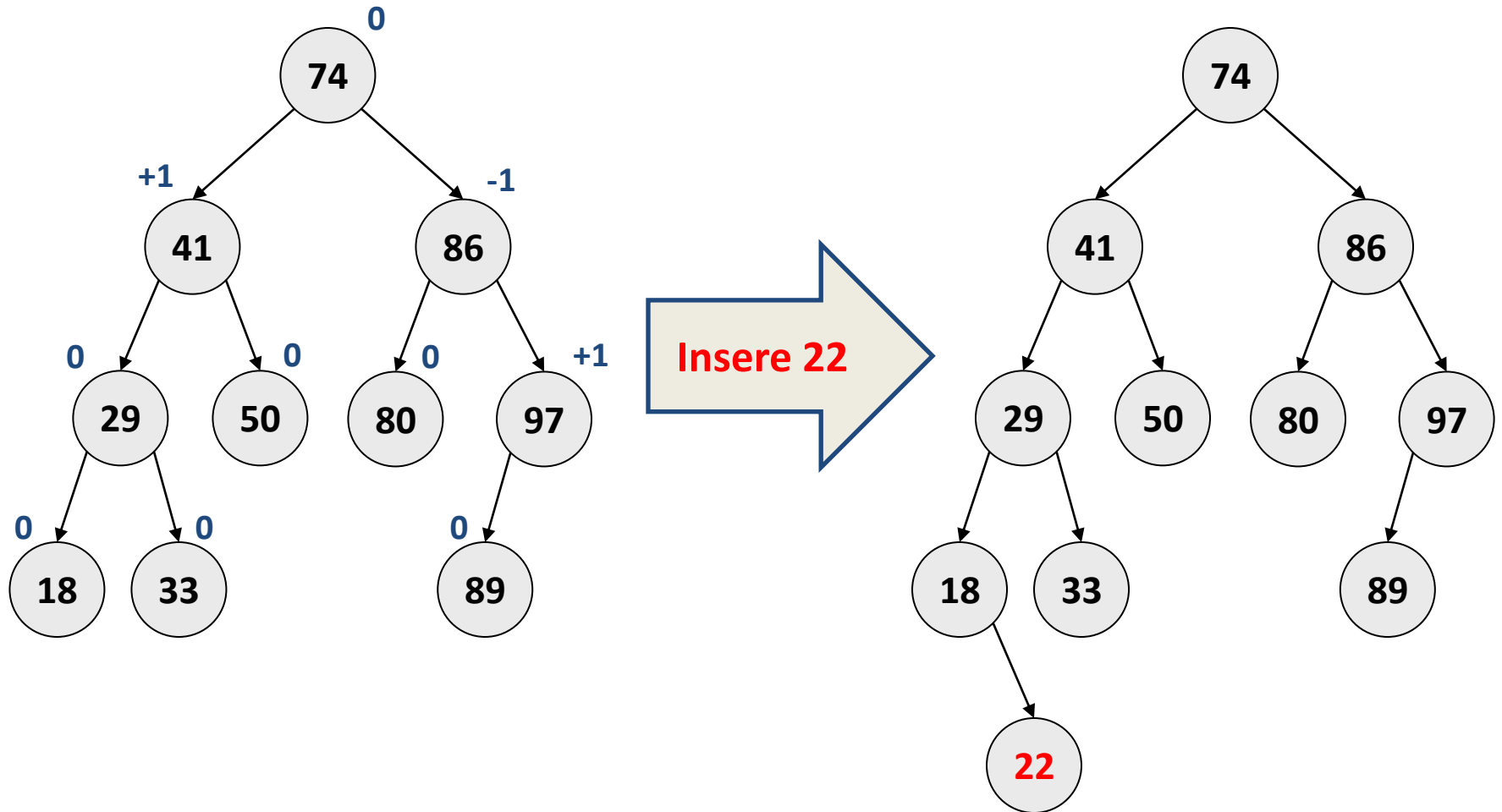
Exemplo



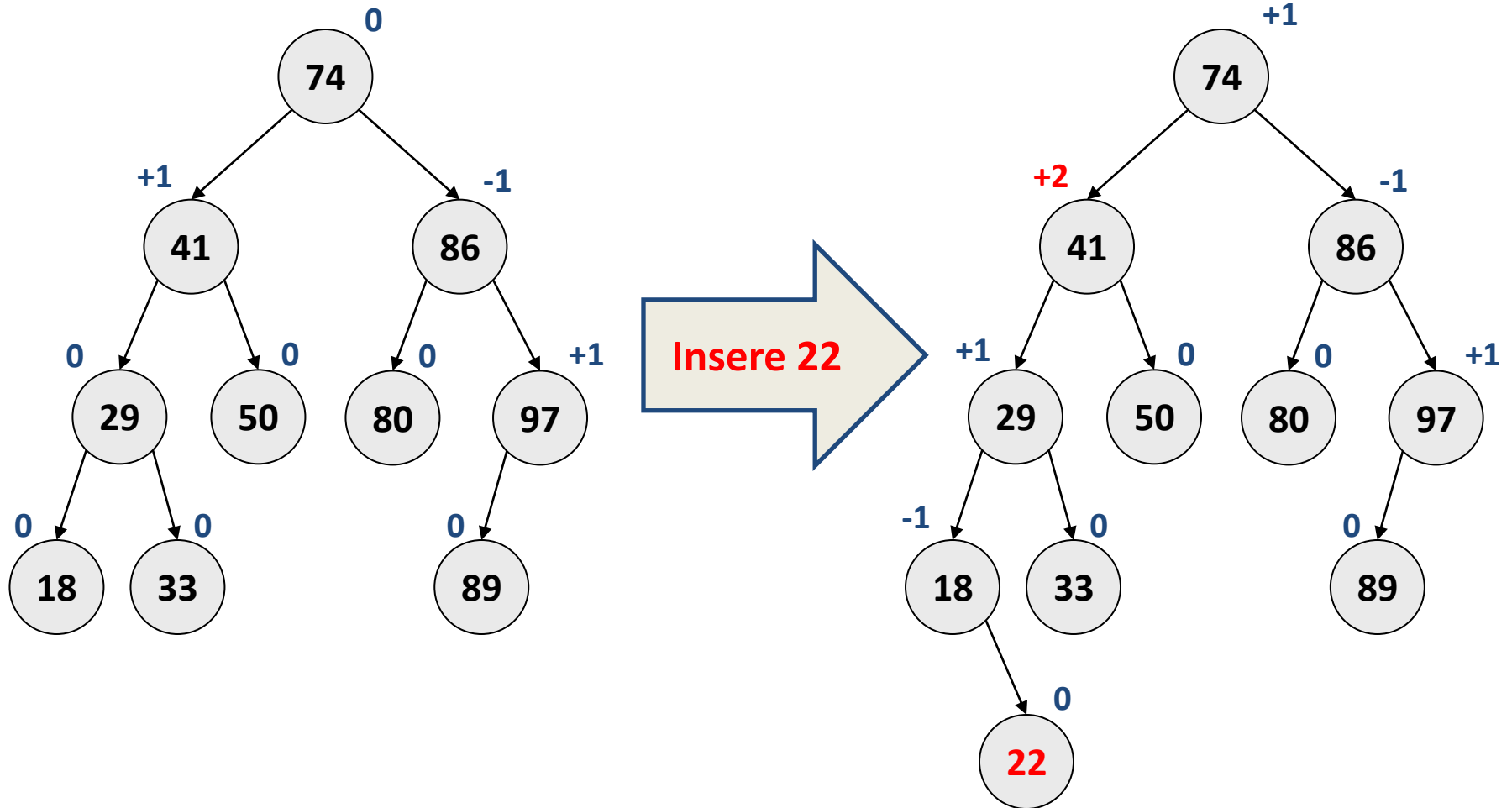
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Rotação

- Quando um nó apresenta FB +2 ou -2, é necessário realizar um procedimento para balanceá-lo;
 - Procedimento é chamado de ***Rotação***;

Rotação

- Quando um nó apresenta FB +2 ou -2, é necessário realizar um procedimento para balanceá-lo;
 - Procedimento é chamado de ***Rotação***;
- Uma *rotação* consiste na troca de papéis entre o nó e seu filho (que está na direção do desbalanceamento);
 - Na prática, é um ajuste de ponteiros;

Rotação

- Quando um nó apresenta FB +2 ou -2, é necessário realizar um procedimento para balanceá-lo;
 - Procedimento é chamado de ***Rotação***;
- Uma *rotação* consiste na troca de papéis entre o nó e seu filho (que está na direção do desbalanceamento);
 - Na prática, é um ajuste de ponteiros;
- Uma rotação preserva a ordem dos valores;
 - Condição para ABB.

ROTAÇÃO À DIREITA

Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB +2 e seu filho à esquerda Y tem FB +1 ou 0.

Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB + 2$ e seu filho à esquerda Y tem $FB + 1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).

Rotação simples à direita

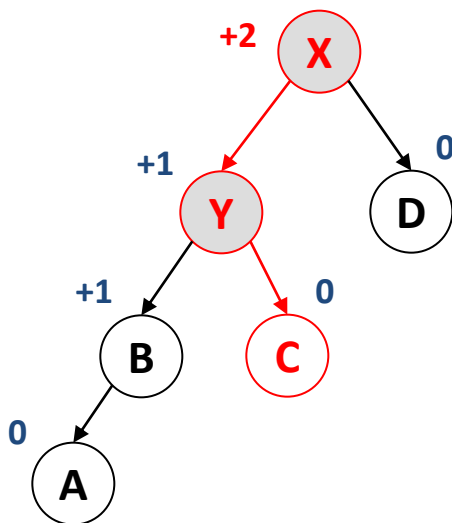
- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB + 2$ e seu filho à esquerda Y tem $FB + 1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à direita de Y ;

Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB + 2$ e seu filho à esquerda Y tem $FB + 1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à direita de Y ;
 - Caso exista, o nó C que ficou órfão de Y , é assumido pelo nó X (como seu filho à esquerda).

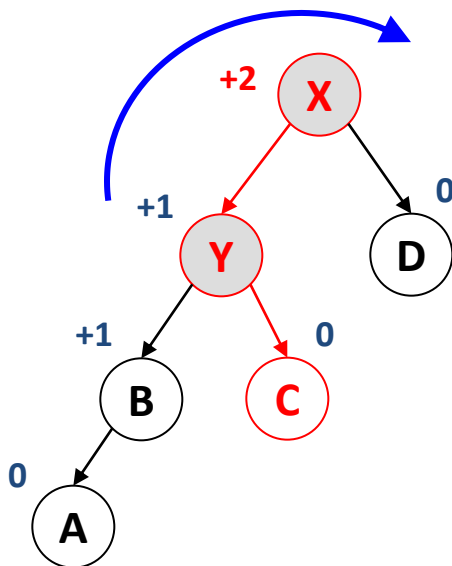
Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB +2 e seu filho à esquerda Y tem FB +1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à direita de Y;
 - Caso exista, o nó C que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à esquerda).



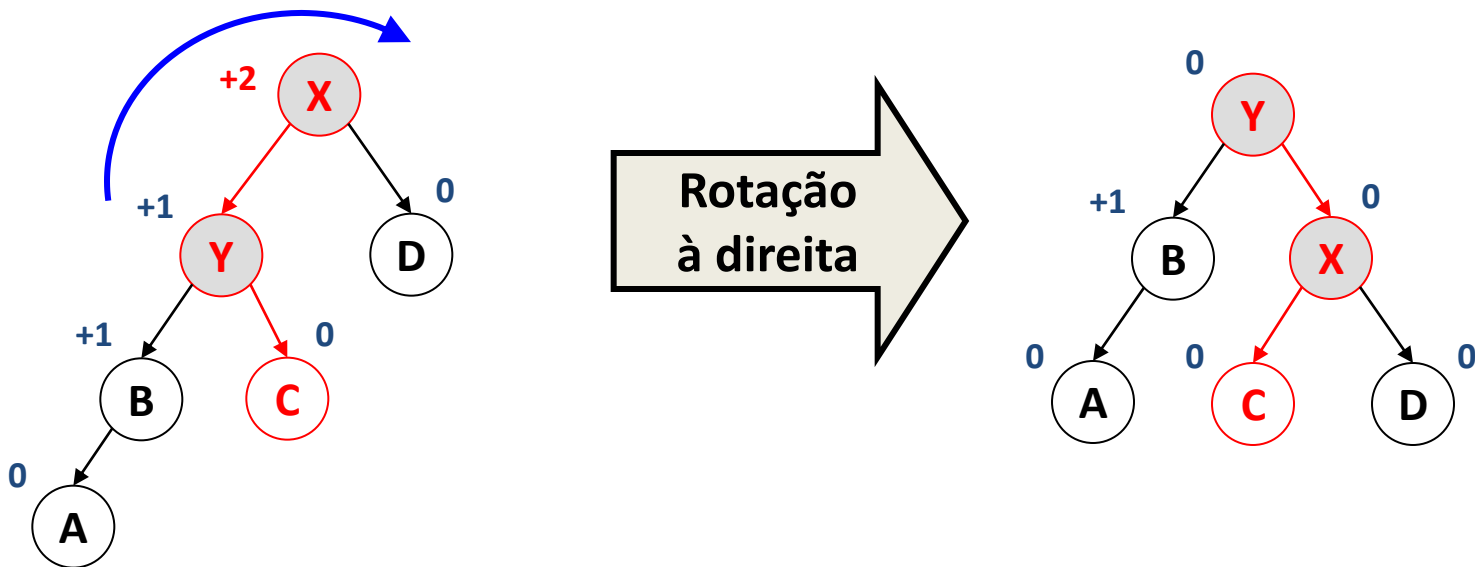
Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB +2 e seu filho à esquerda Y tem FB +1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à direita de Y;
 - Caso exista, o nó C que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à esquerda).



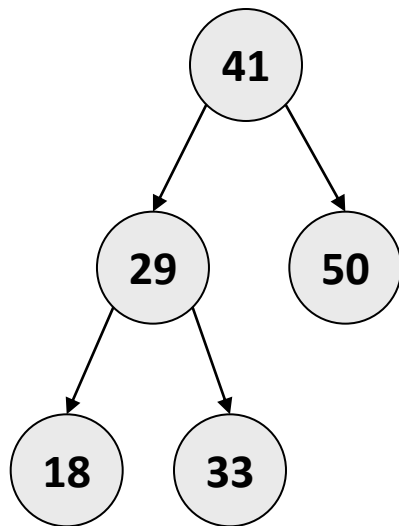
Rotação simples à direita

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB +2 e seu filho à esquerda Y tem FB +1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à direita de Y;
 - Caso exista, o nó C que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à esquerda).



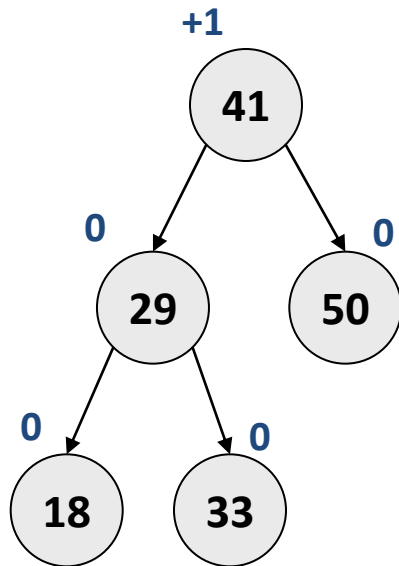
Exemplo: rotação à direita

- Árvore balanceada?



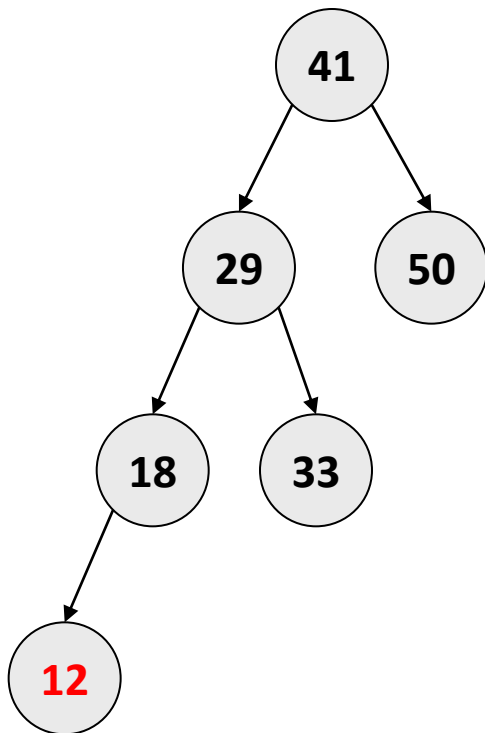
Exemplo: rotação à direita

- Árvore balanceada? Sim!



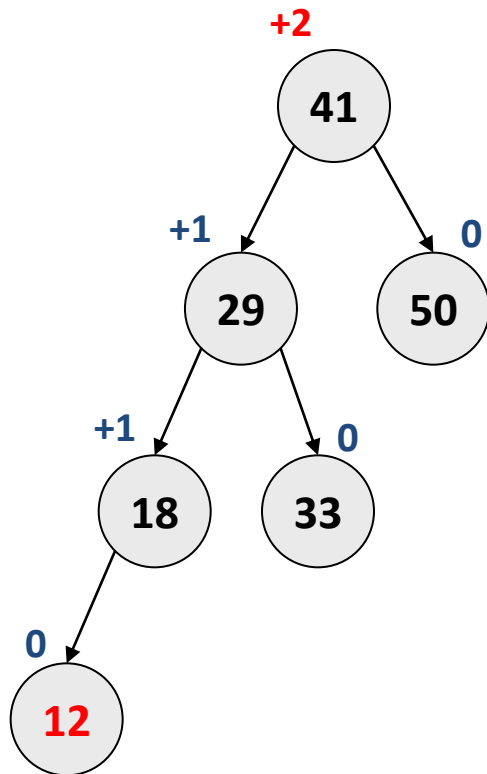
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12;



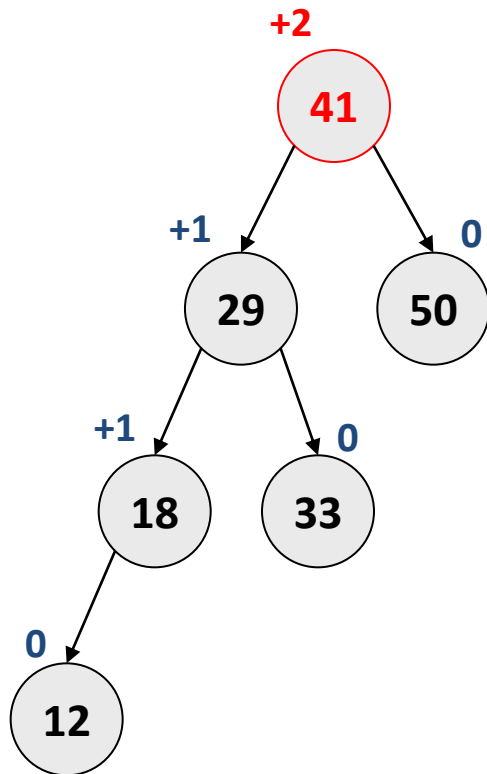
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12;



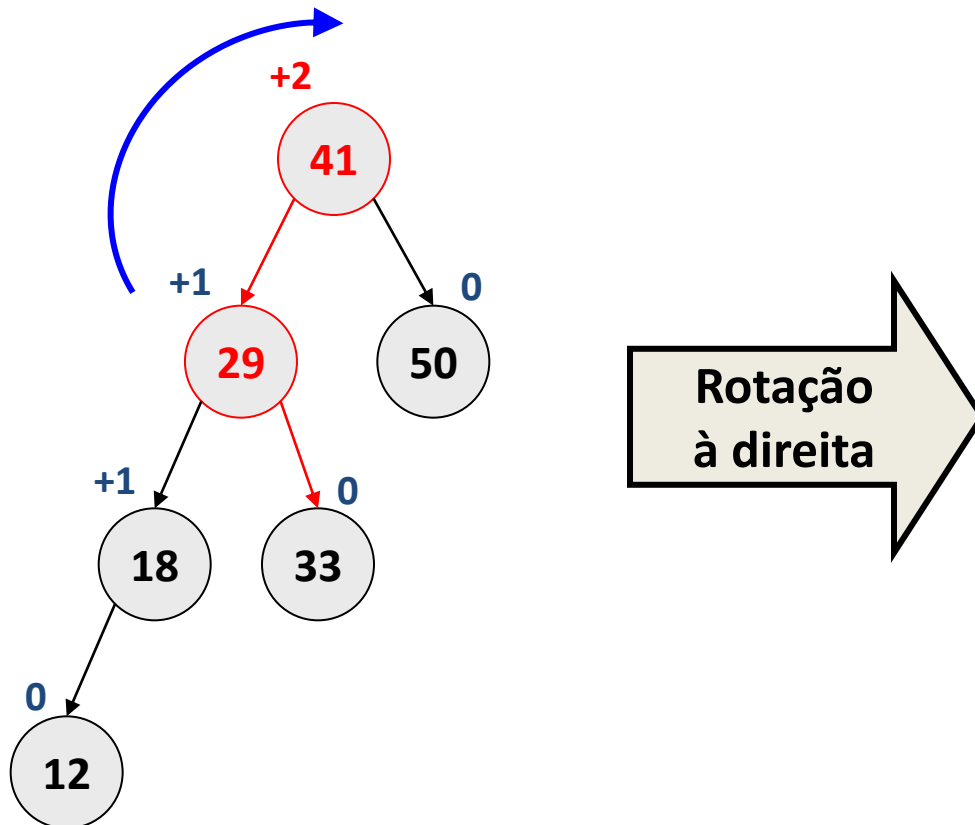
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



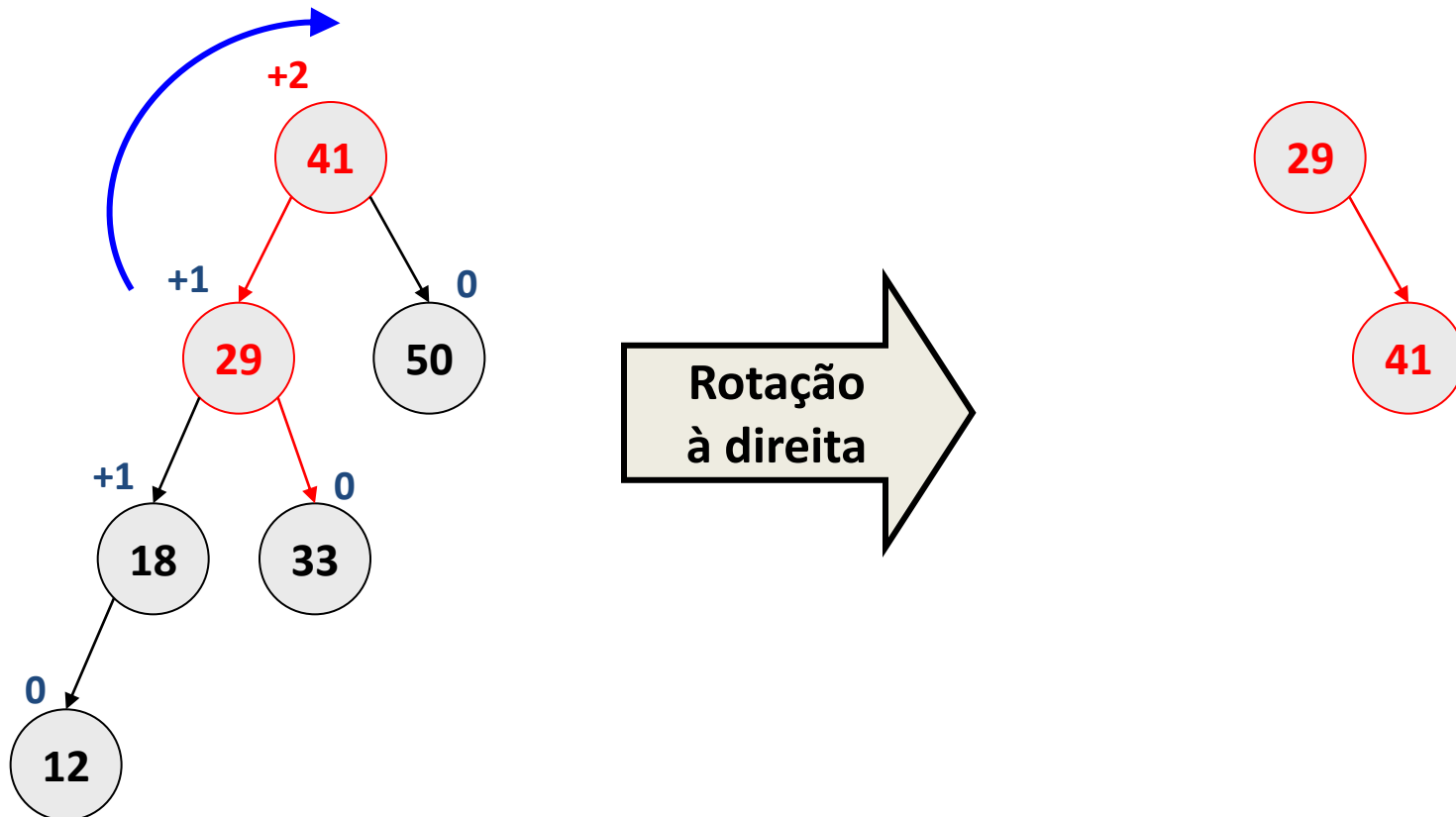
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



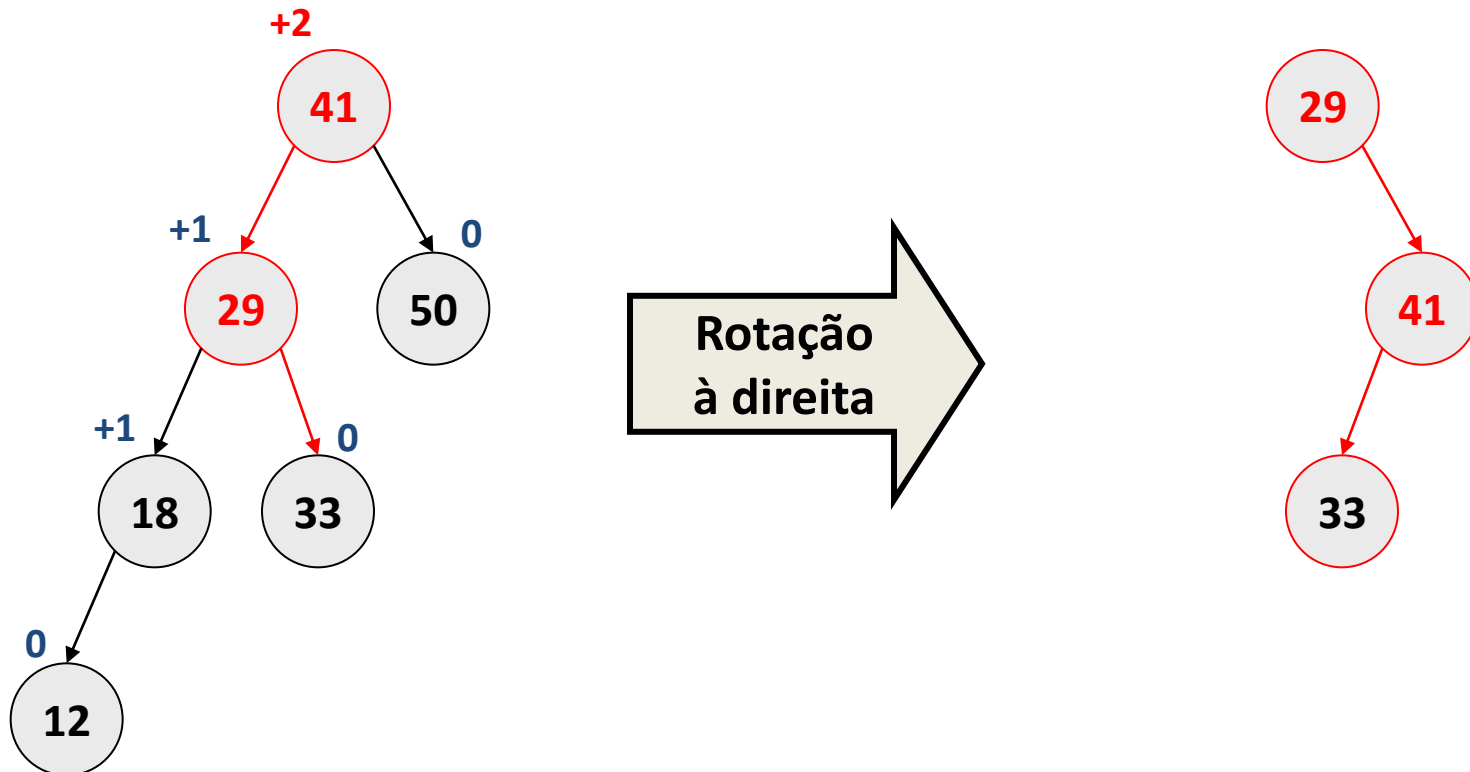
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



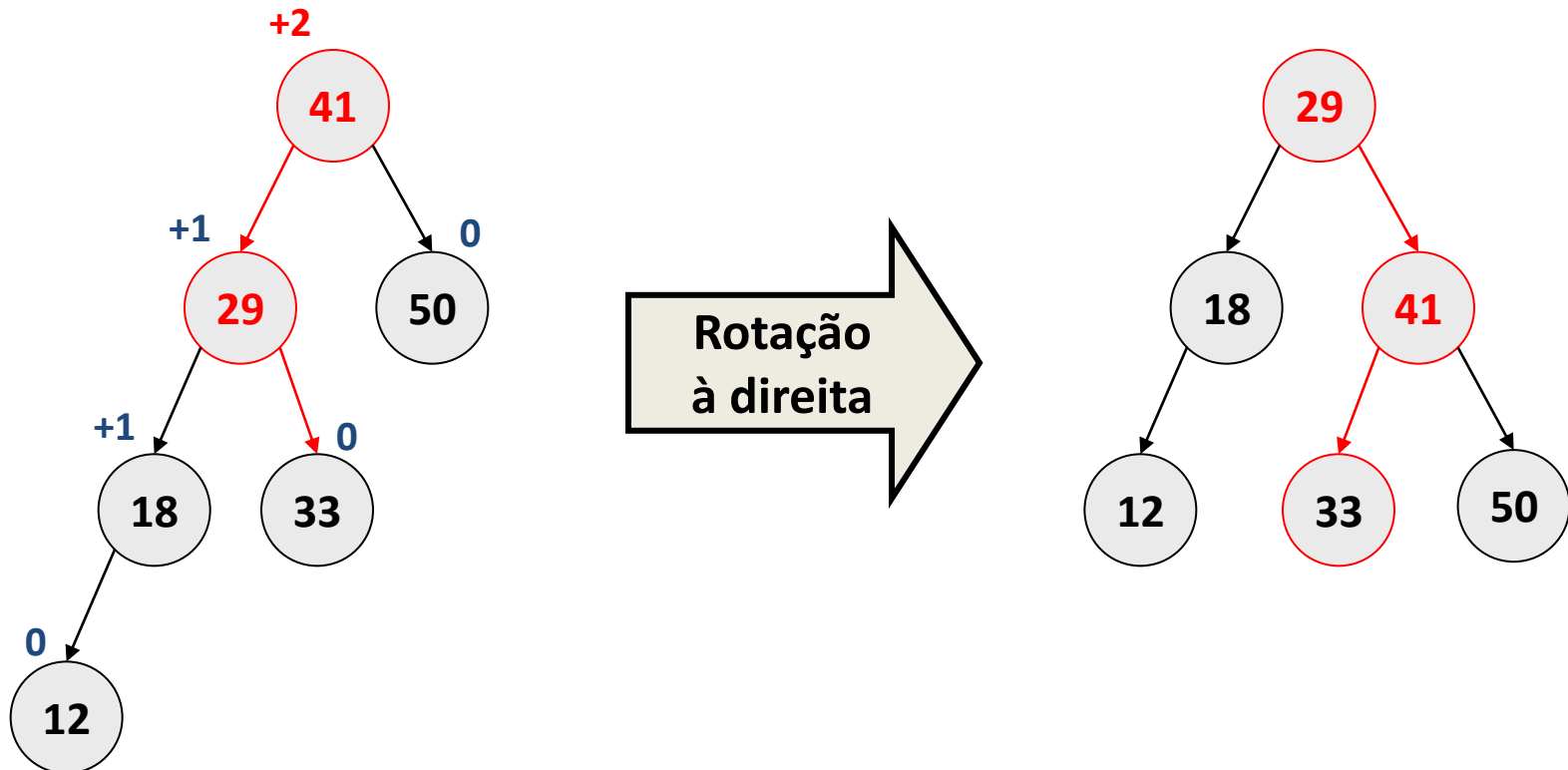
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



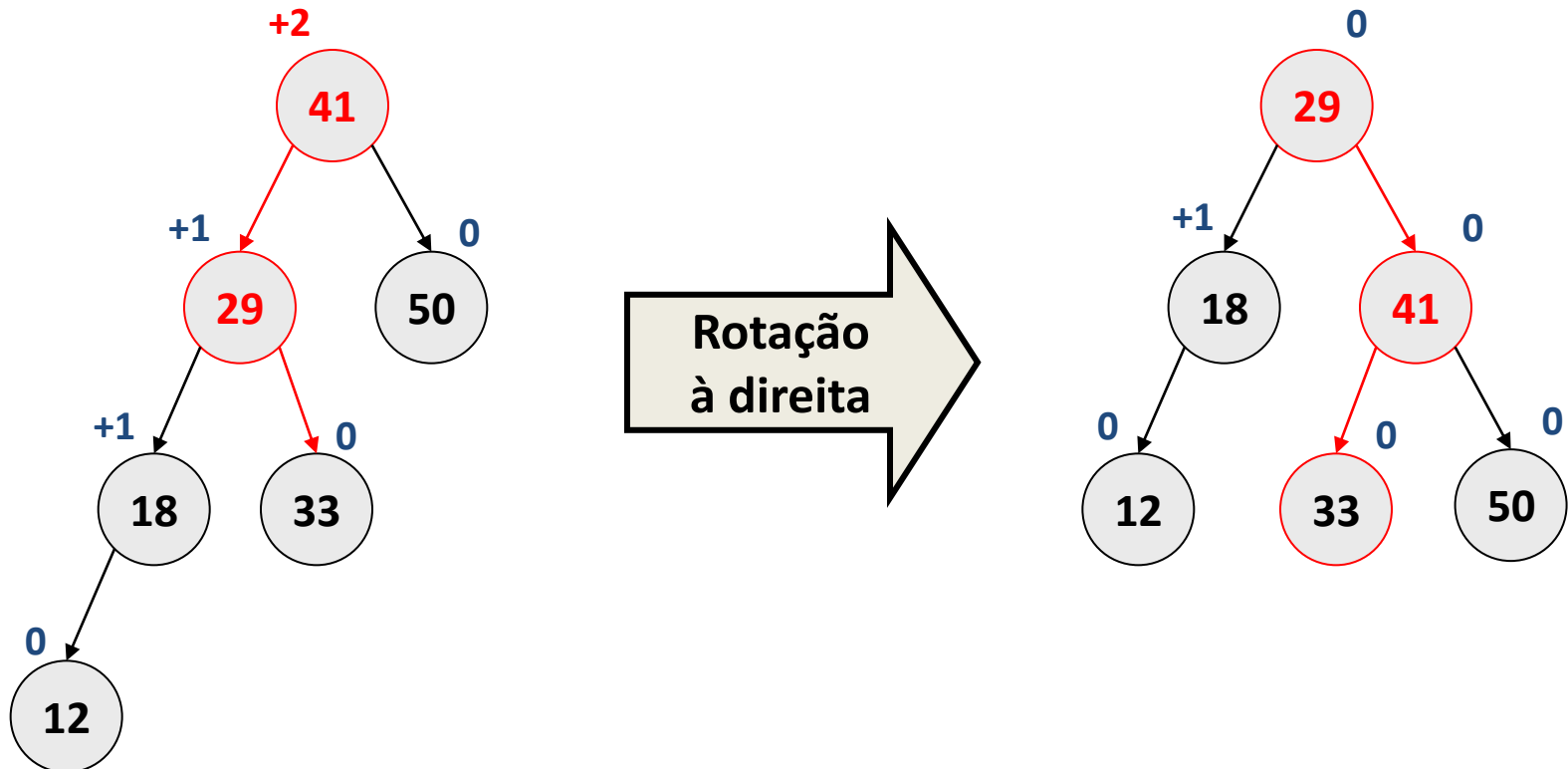
Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



Exemplo: rotação à direita

- Inserção do valor 12 → Rotação à direita do nó 41!



ROTAÇÃO À ESQUERDA

Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB -2 e seu filho à direita Y tem FB -1 ou 0.

Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB -2$ e seu filho à direita Y tem $FB -1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).

Rotação simples à esquerda

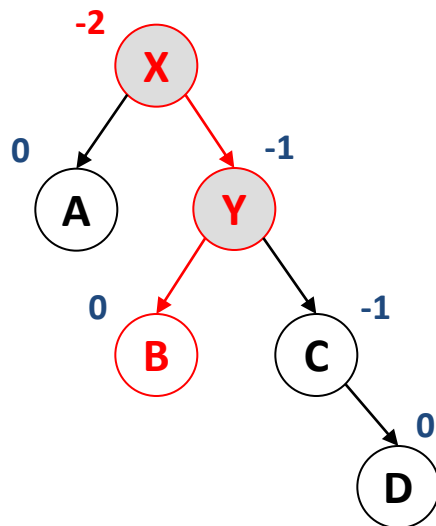
- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB -2$ e seu filho à direita Y tem $FB -1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à esquerda de Y ;

Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem $FB -2$ e seu filho à direita Y tem $FB -1$ ou 0 .
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à esquerda de Y ;
 - Caso exista, o nó B que ficou órfão de Y , é assumido pelo nó X (como seu filho à direita).

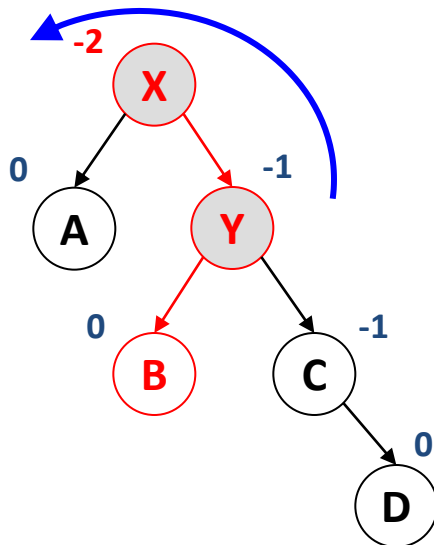
Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB -2 e seu filho à direita Y tem FB -1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à esquerda de Y;
 - Caso exista, o nó B que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à direita).



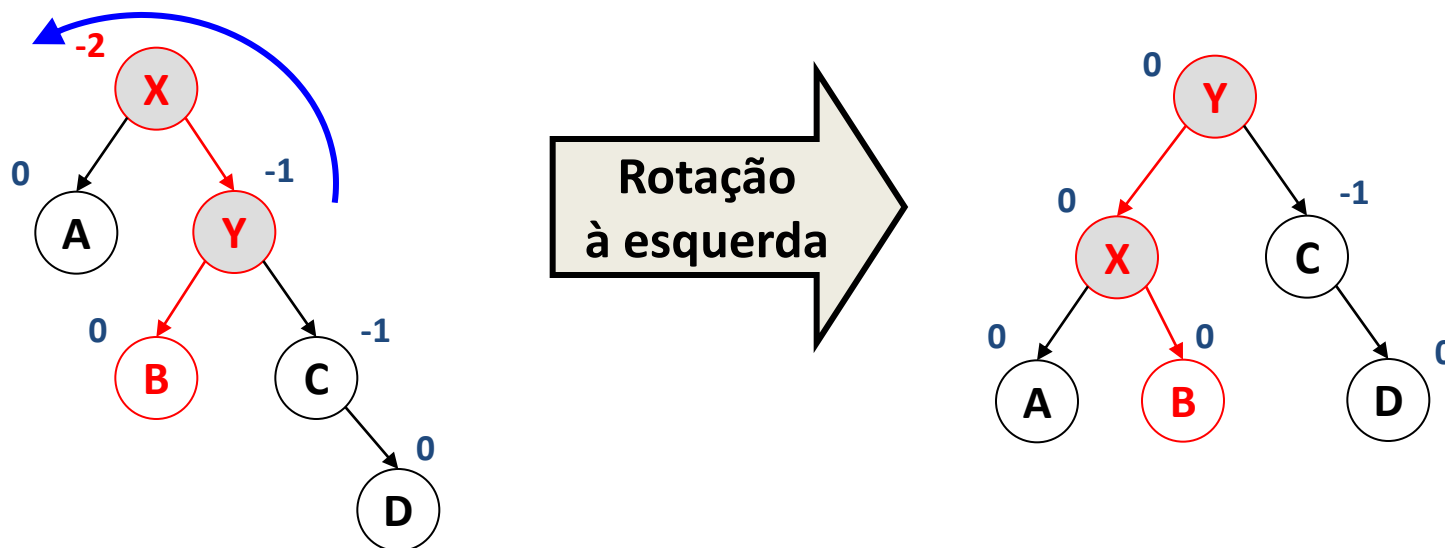
Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB -2 e seu filho à direita Y tem FB -1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à esquerda de Y;
 - Caso exista, o nó B que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à direita).



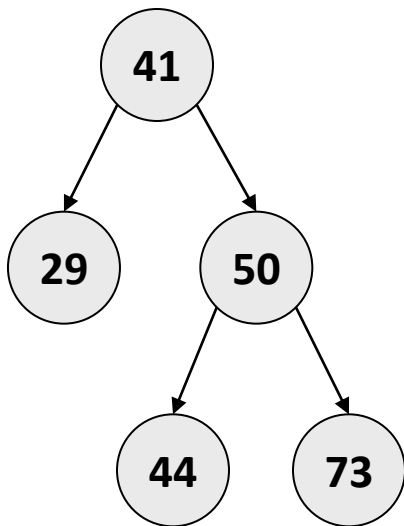
Rotação simples à esquerda

- **Condição:** sempre que um nó X tem FB -2 e seu filho à direita Y tem FB -1 ou 0.
- **Execução:** Filho (Y) assume a posição nó pai (X).
 - X torna-se o filho à esquerda de Y;
 - Caso exista, o nó B que ficou órfão de Y, é assumido pelo nó X (como seu filho à direita).



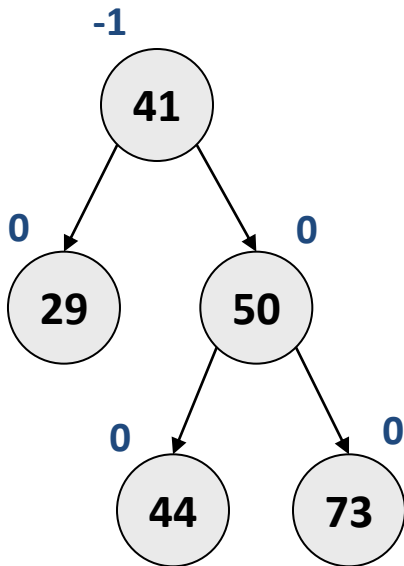
Exemplo: rotação à esquerda

- Árvore balanceada?



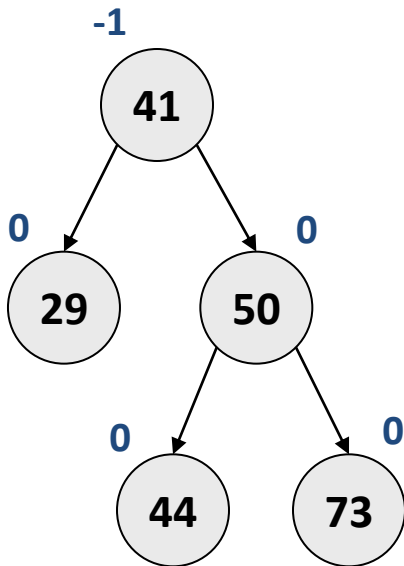
Exemplo: rotação à esquerda

- Árvore balanceada? Sim!



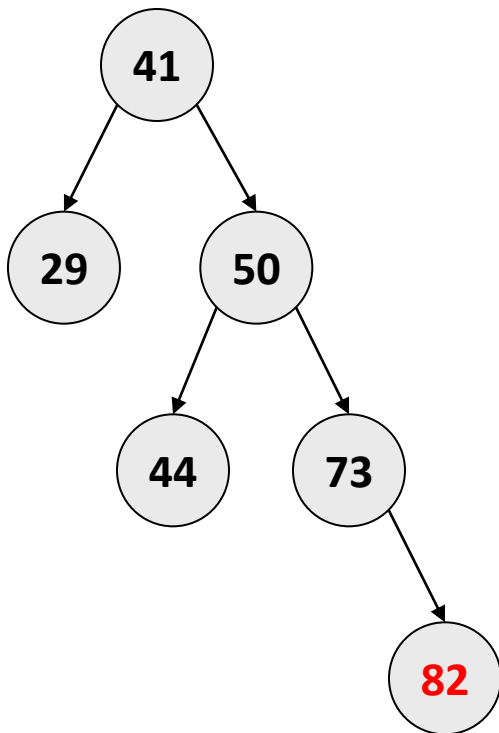
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82;



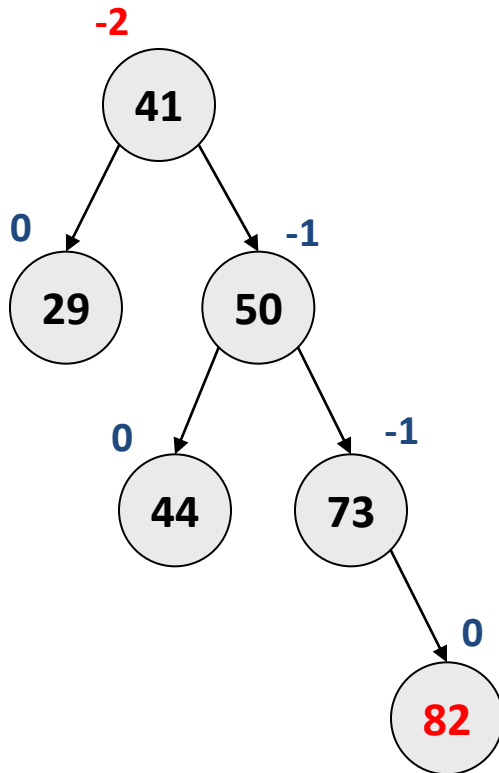
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82;



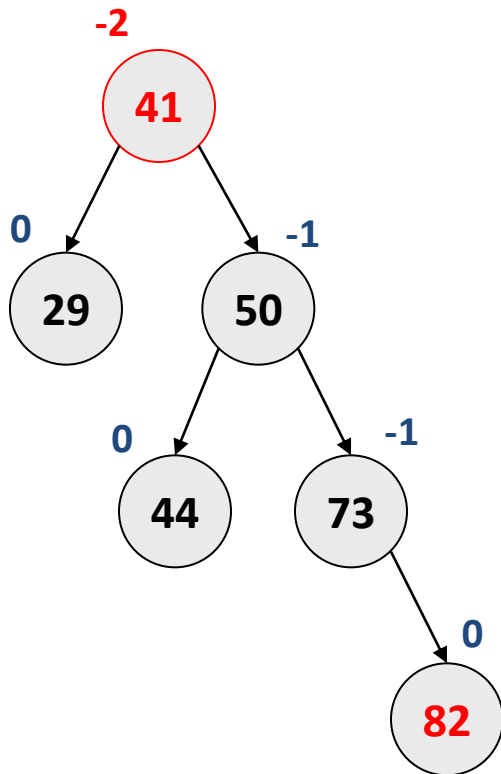
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82;



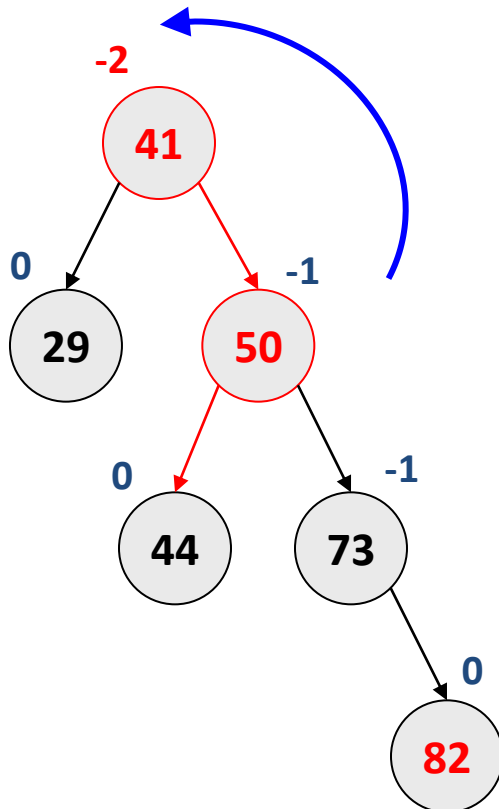
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



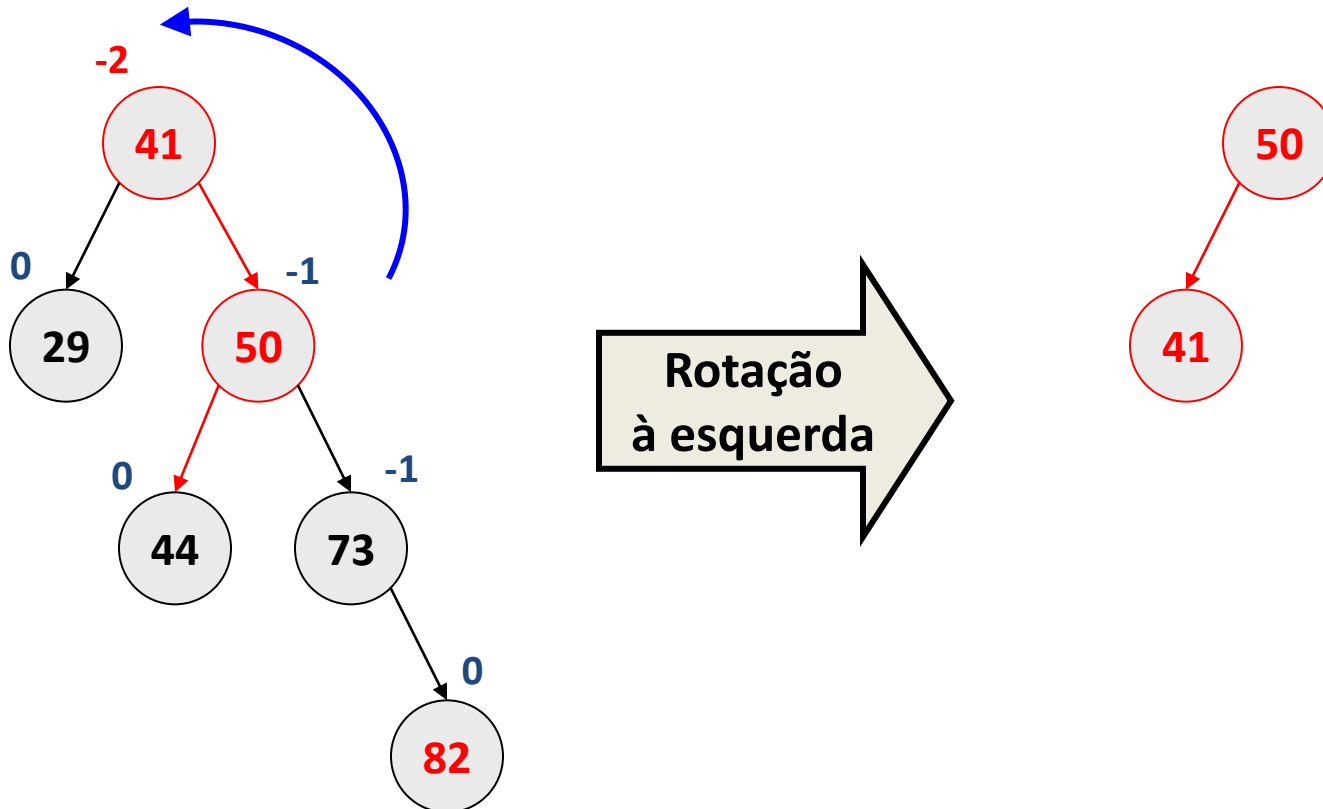
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



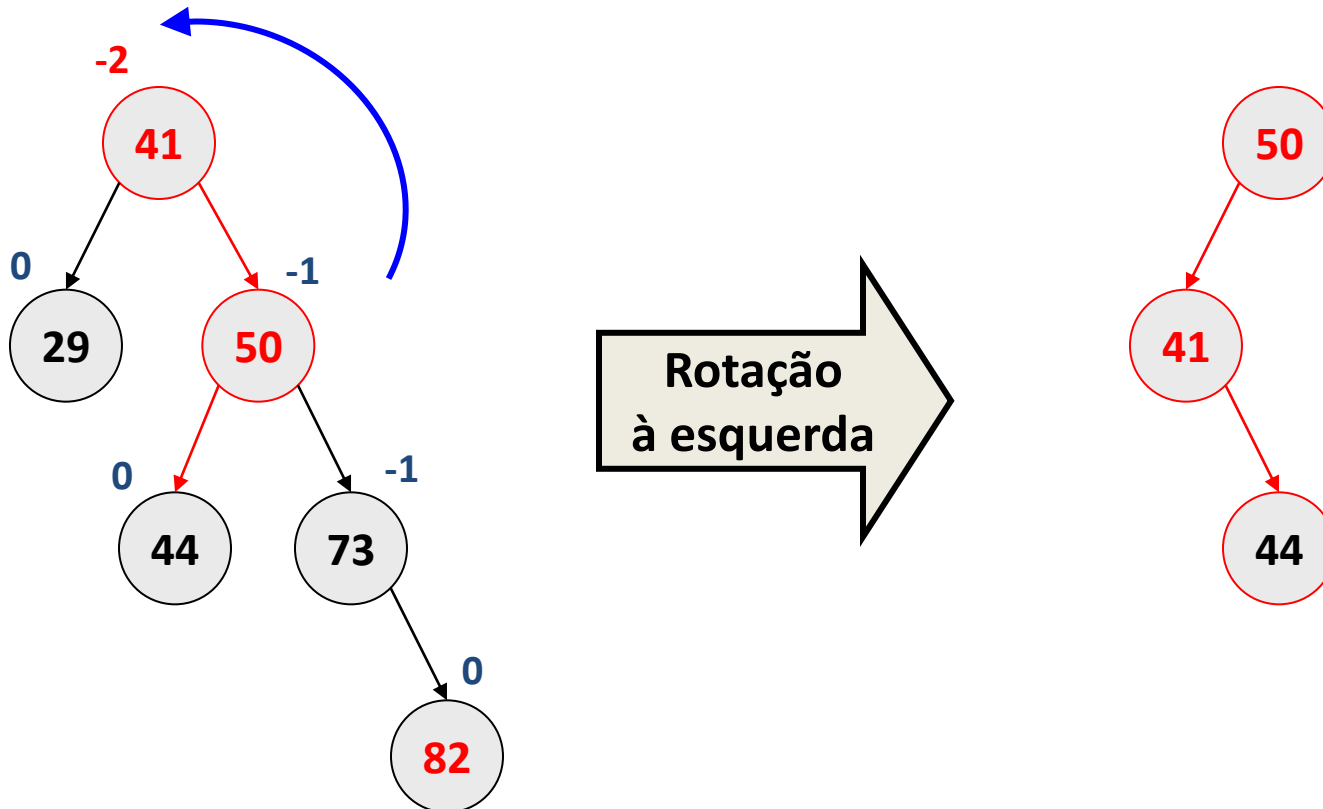
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



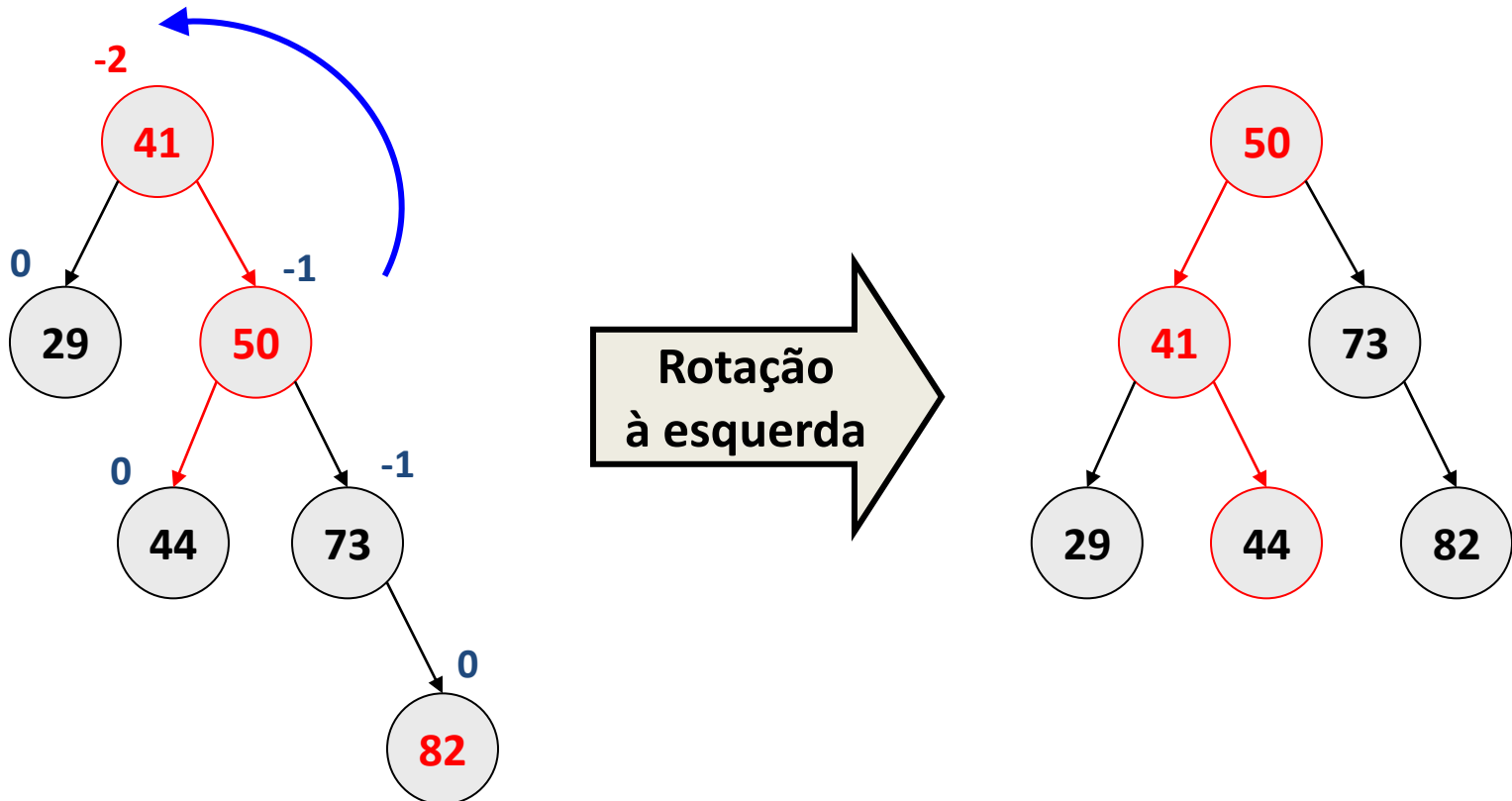
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



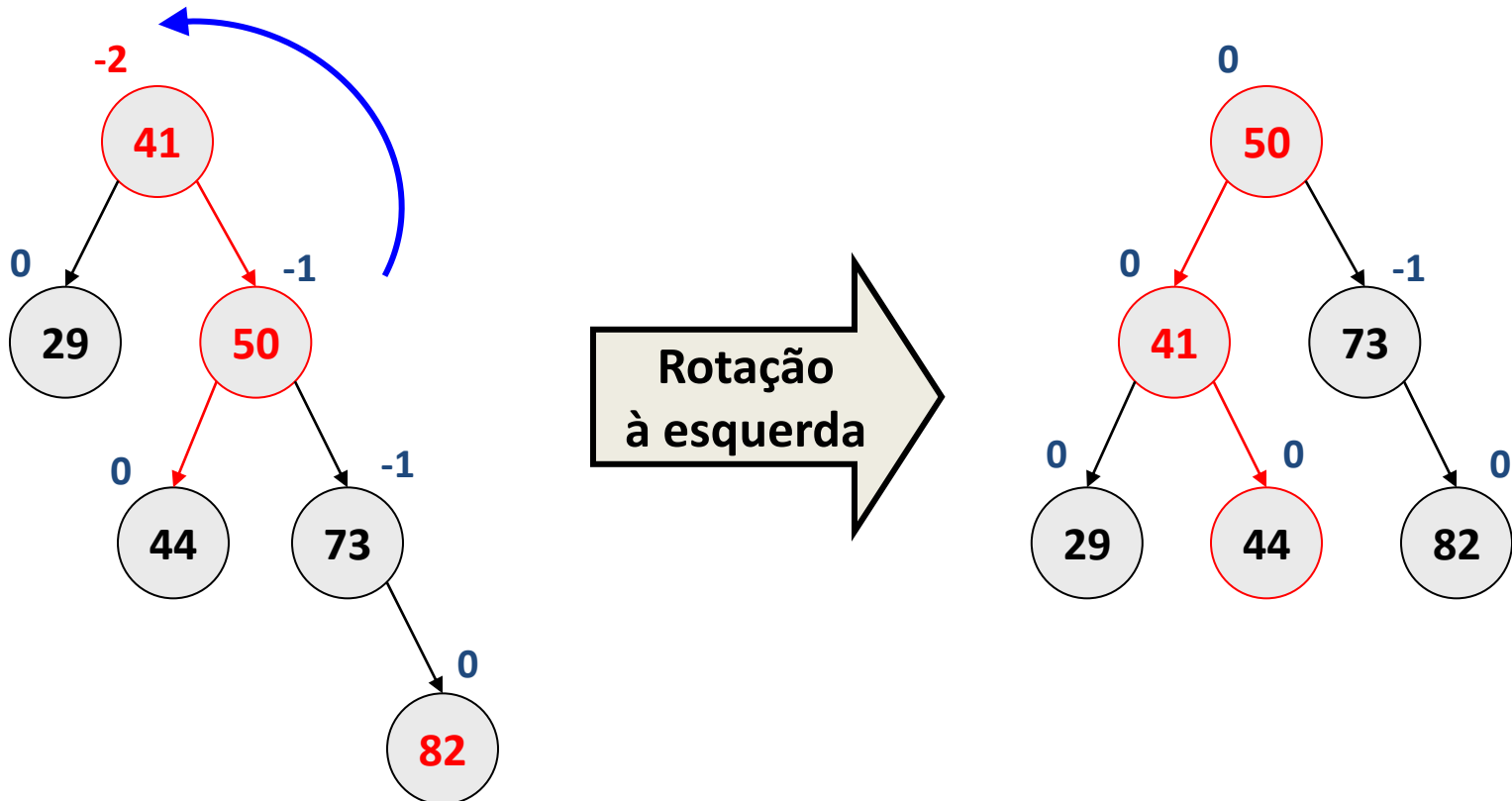
Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



Exemplo: rotação à esquerda

- Inserção do valor 82 → Rotação à esquerda do nó 41!



Considerações

- É possível que mais de um nó fique com FB +2 ou -2;

Considerações

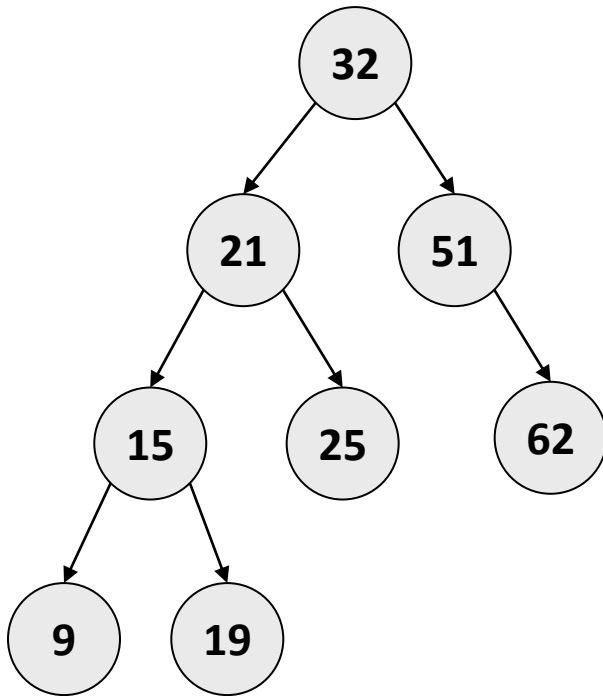
- É possível que mais de um nó fique com FB +2 ou -2;
- Neste caso, basta balancear o de **maior nível**;
 - Maior nível significa “mais abaixo”;

Considerações

- É possível que mais de um nó fique com FB +2 ou -2;
- Neste caso, basta balancear o de **maior nível**;
 - Maior nível significa “mais abaixo”;
- Balanceando o nó mais abaixo, o(s) nó(s) acima dele são também balanceados.

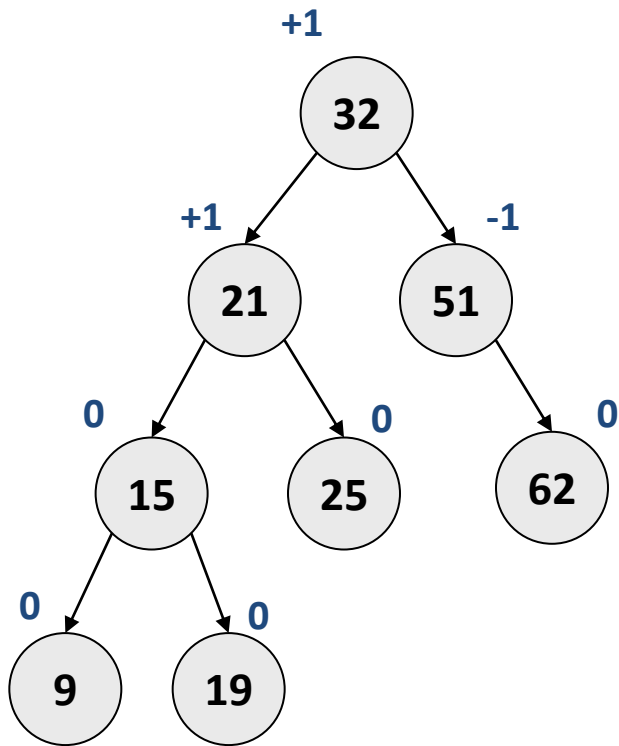
Mais um exemplo

- Árvore balanceada?



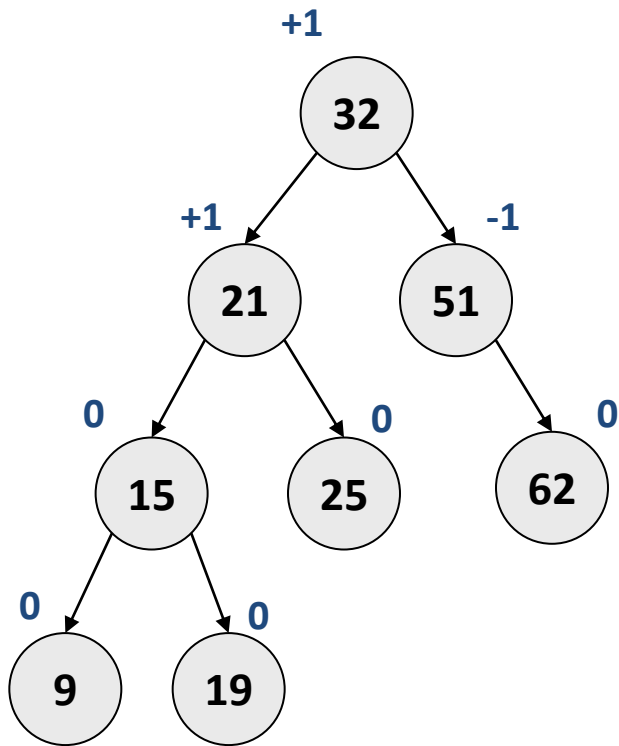
Mais um exemplo

- Árvore balanceada? Sim!



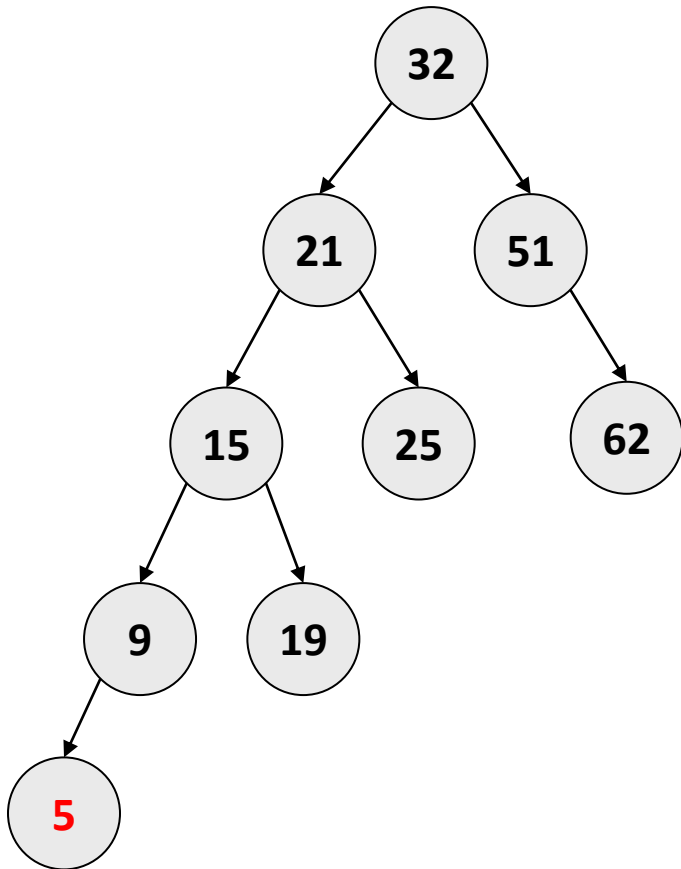
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5;



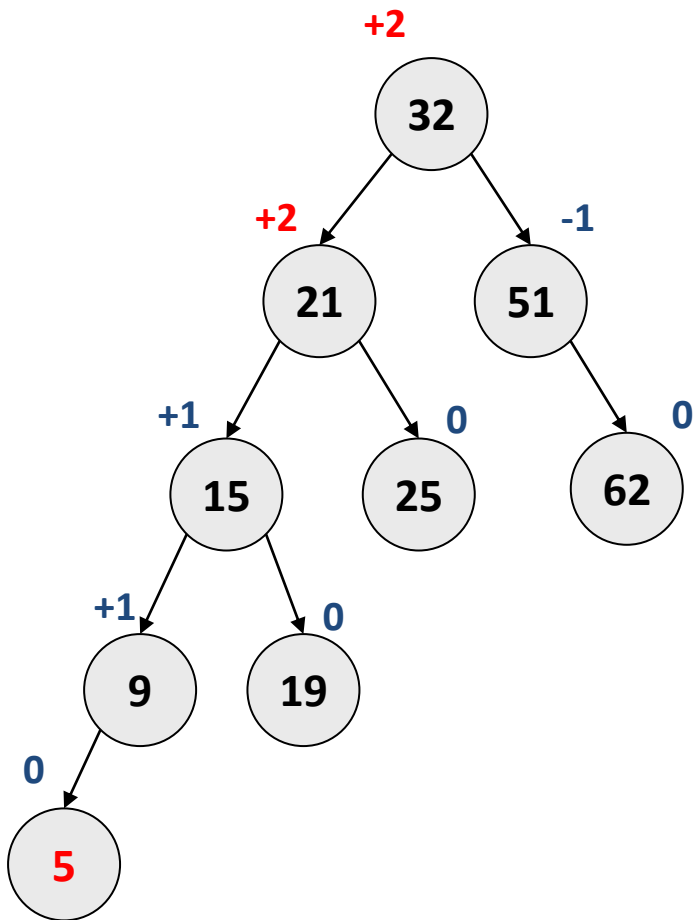
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5;



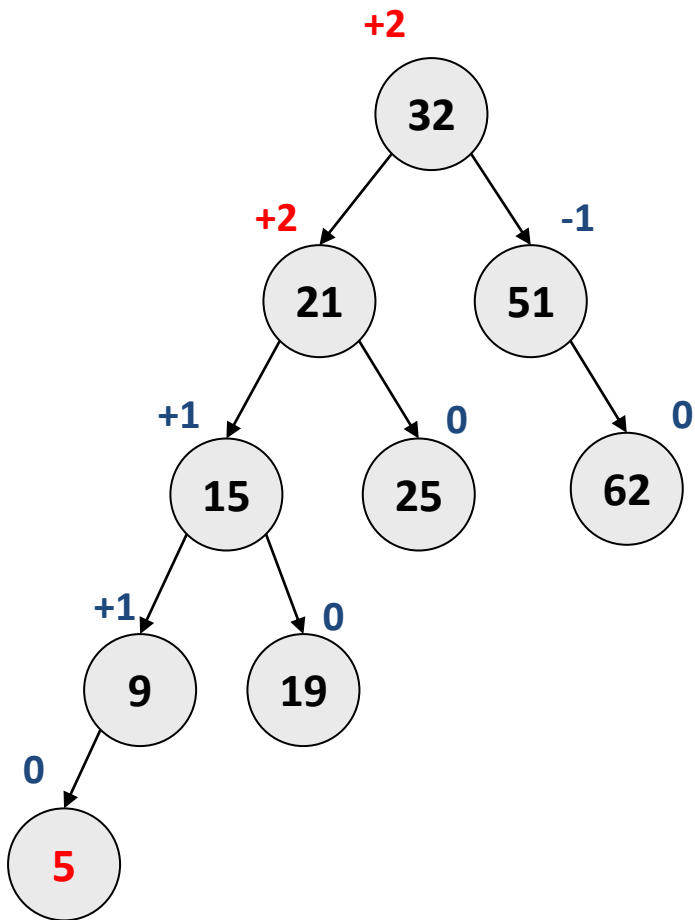
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5;



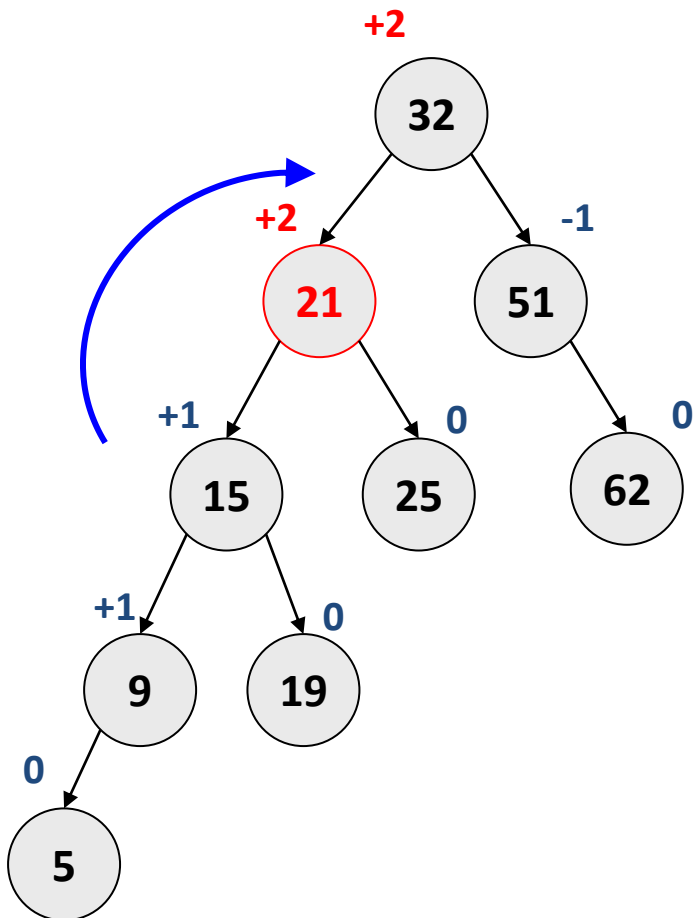
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5 → Qual nó deve ser balanceado?



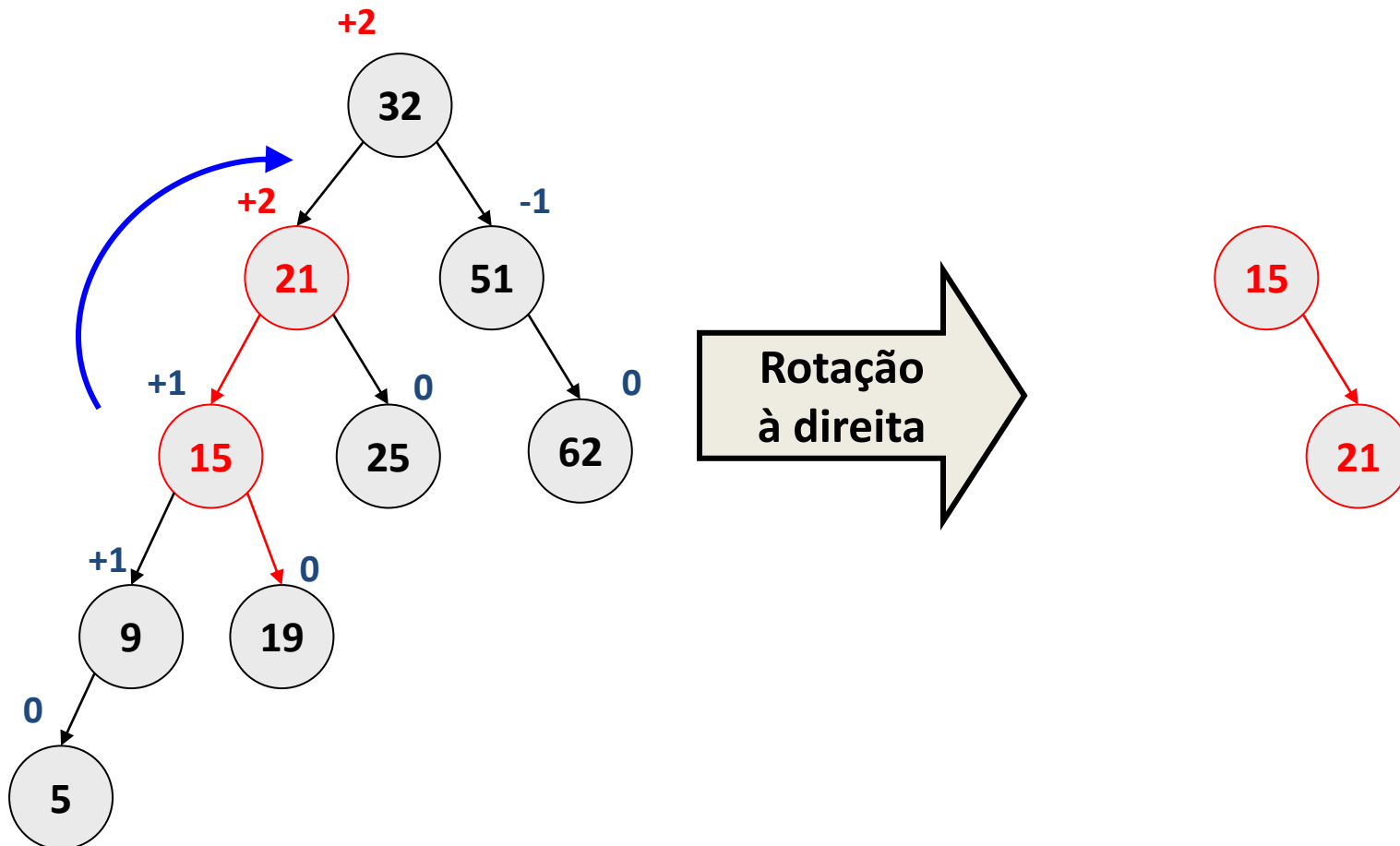
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5 → Rotação à direita do nó 21!



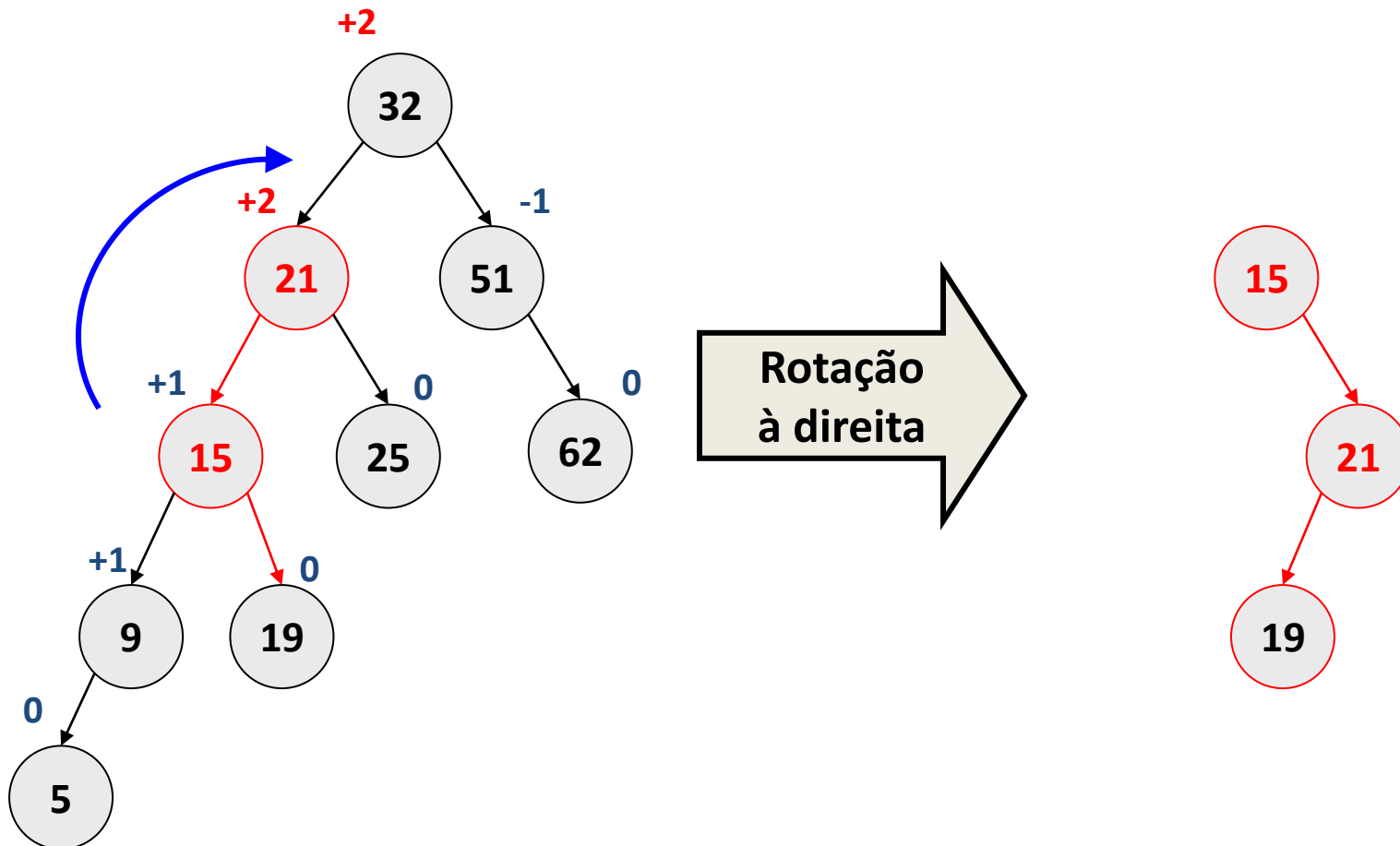
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5 → Rotação à direita do nó 21!



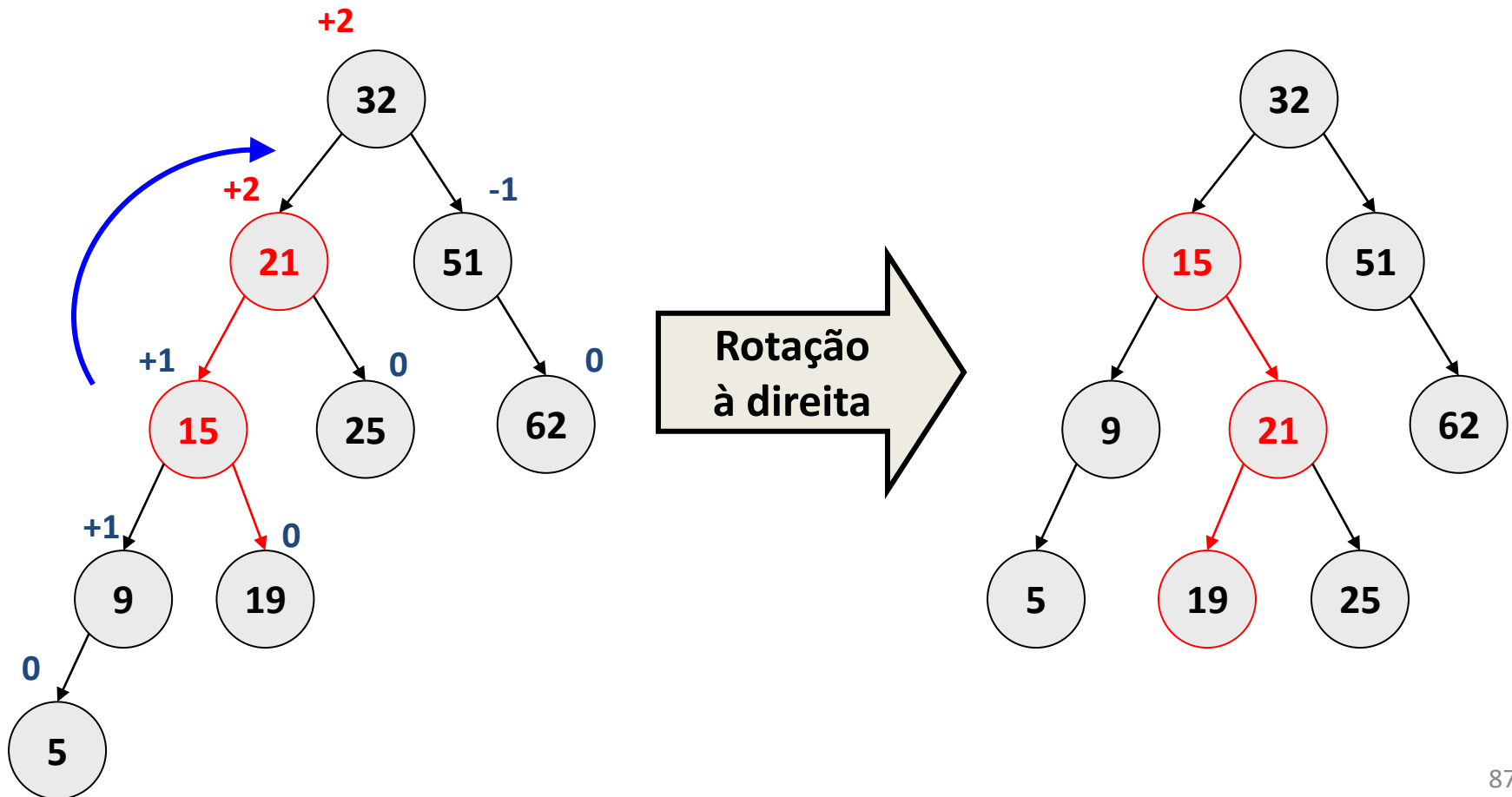
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5 → Rotação à direita do nó 21!



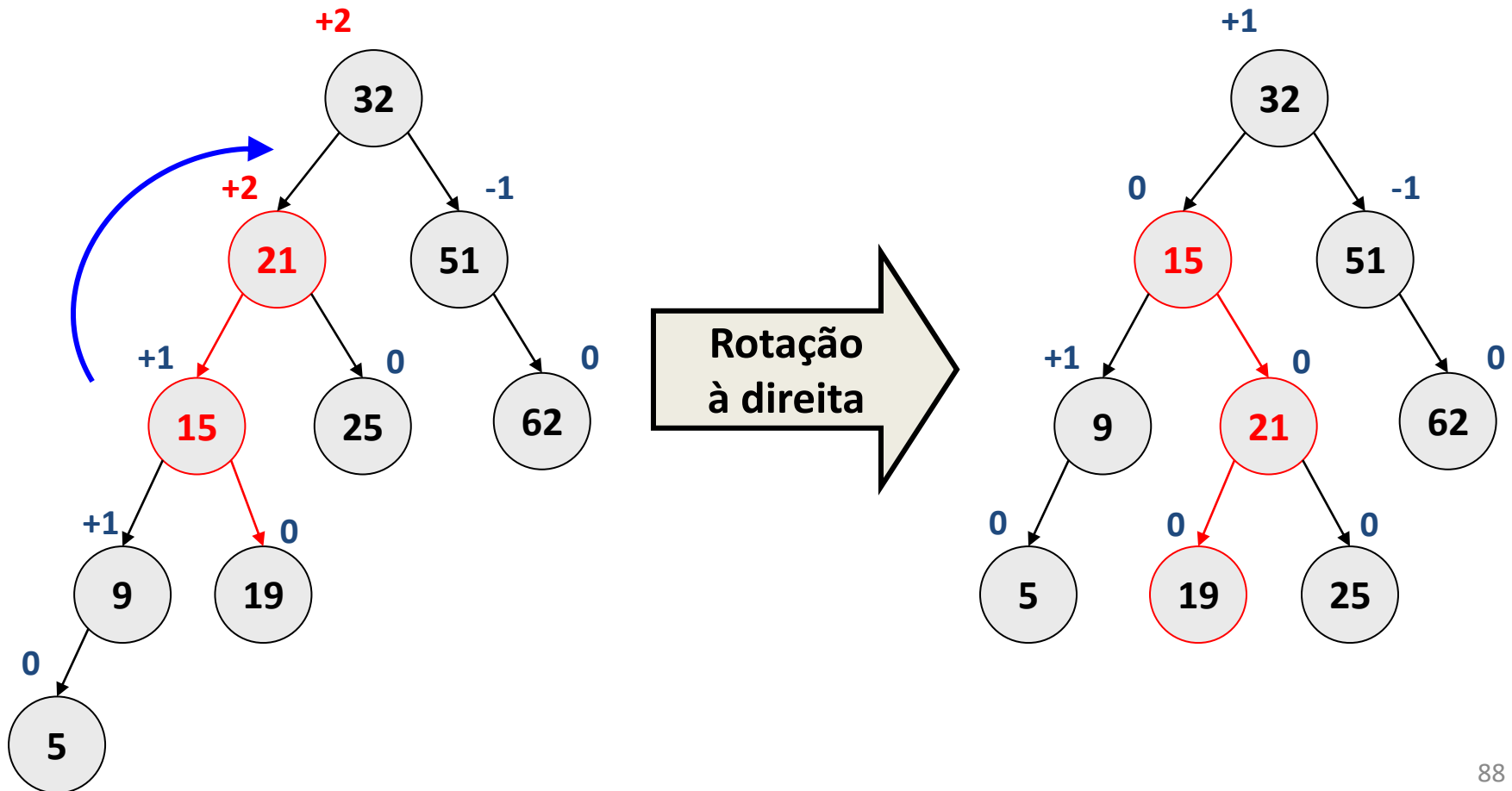
Mais um exemplo

- Inserção do valor 5 → Rotação à direita do nó 21!



Mais um exemplo

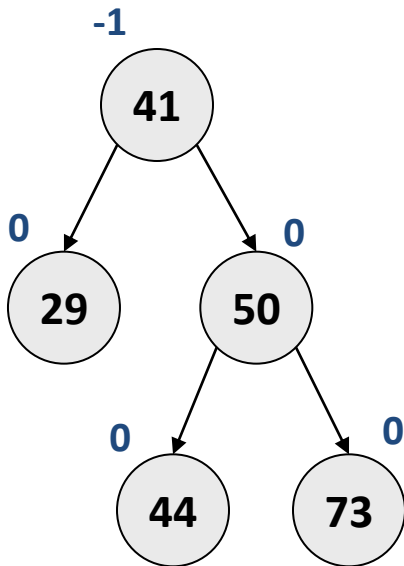
- Inserção do valor 5 → Rotação à direita do nó 21!



OUTRO EXEMPLO...

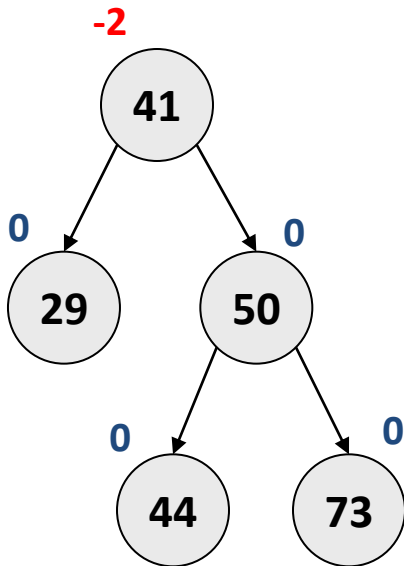
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Árvore balanceada!



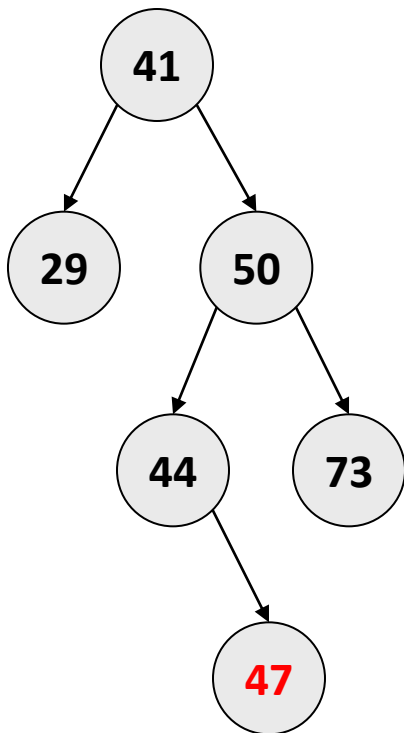
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47;



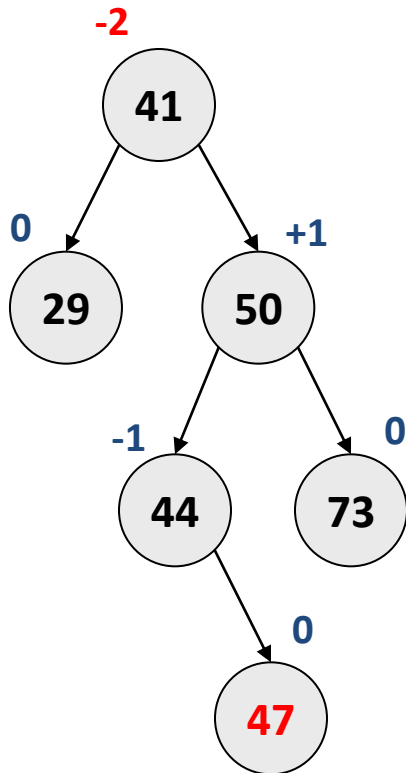
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47;



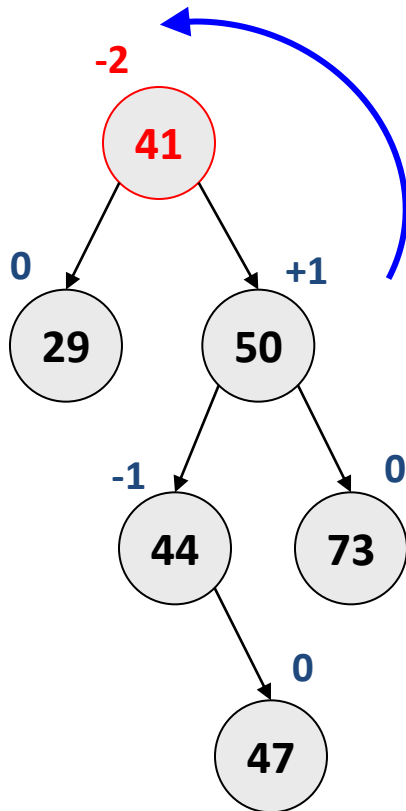
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47;



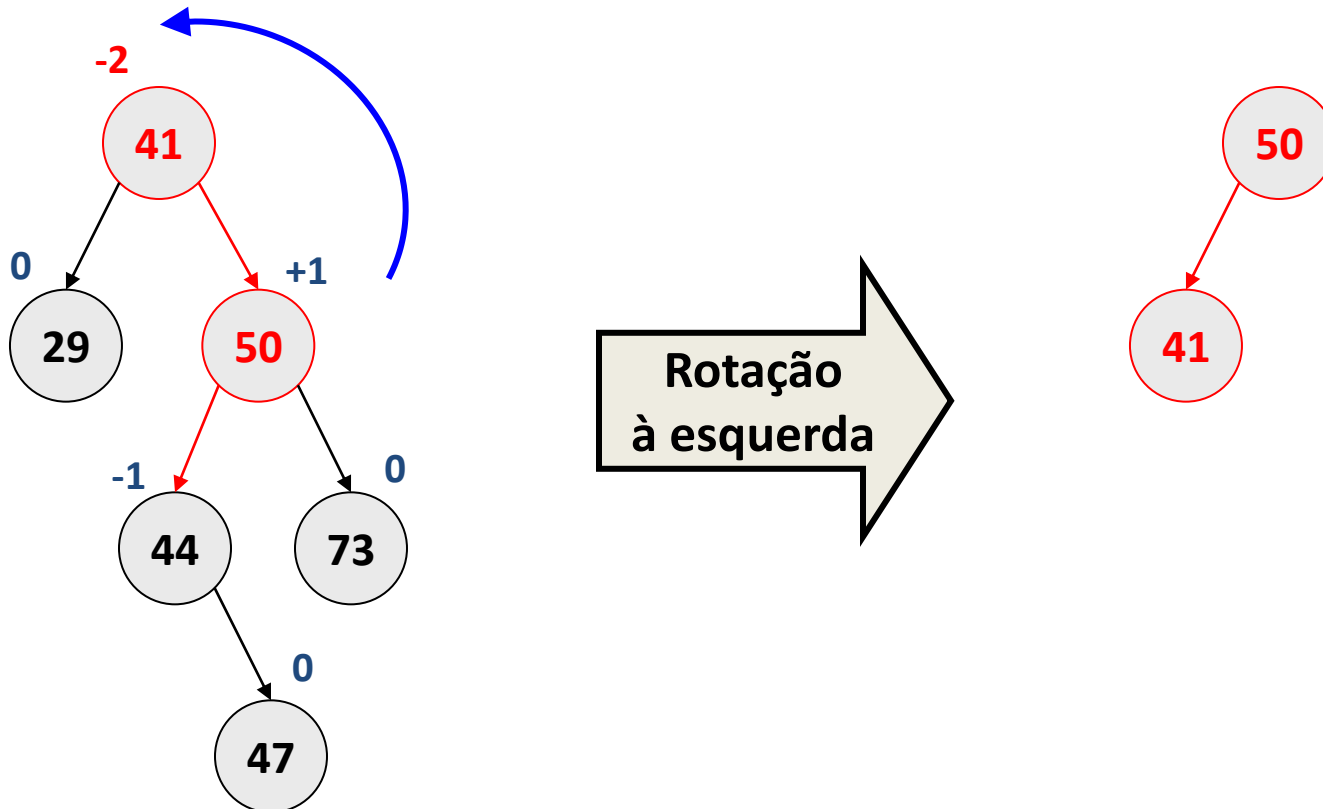
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47 → Rotação à esquerda do nó 41!



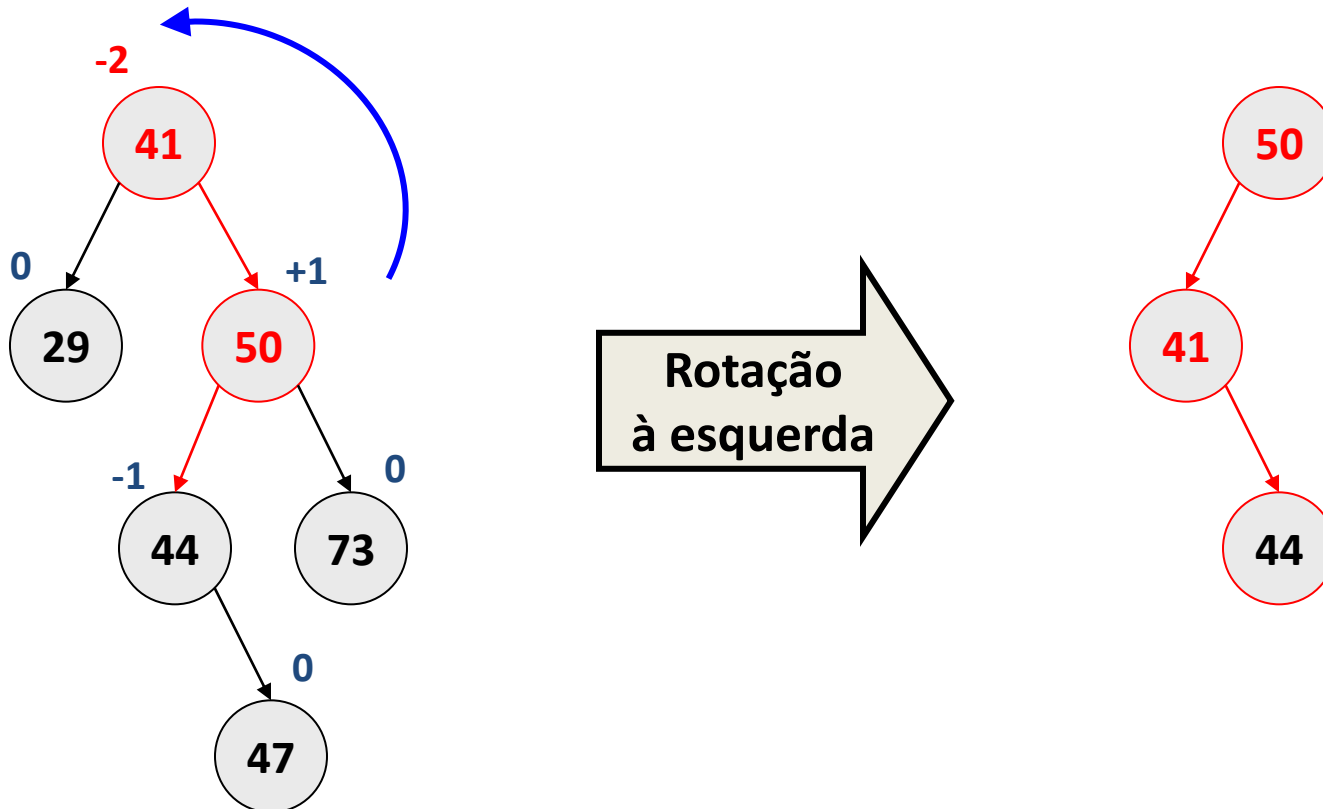
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47 → Rotação à esquerda do nó 41!



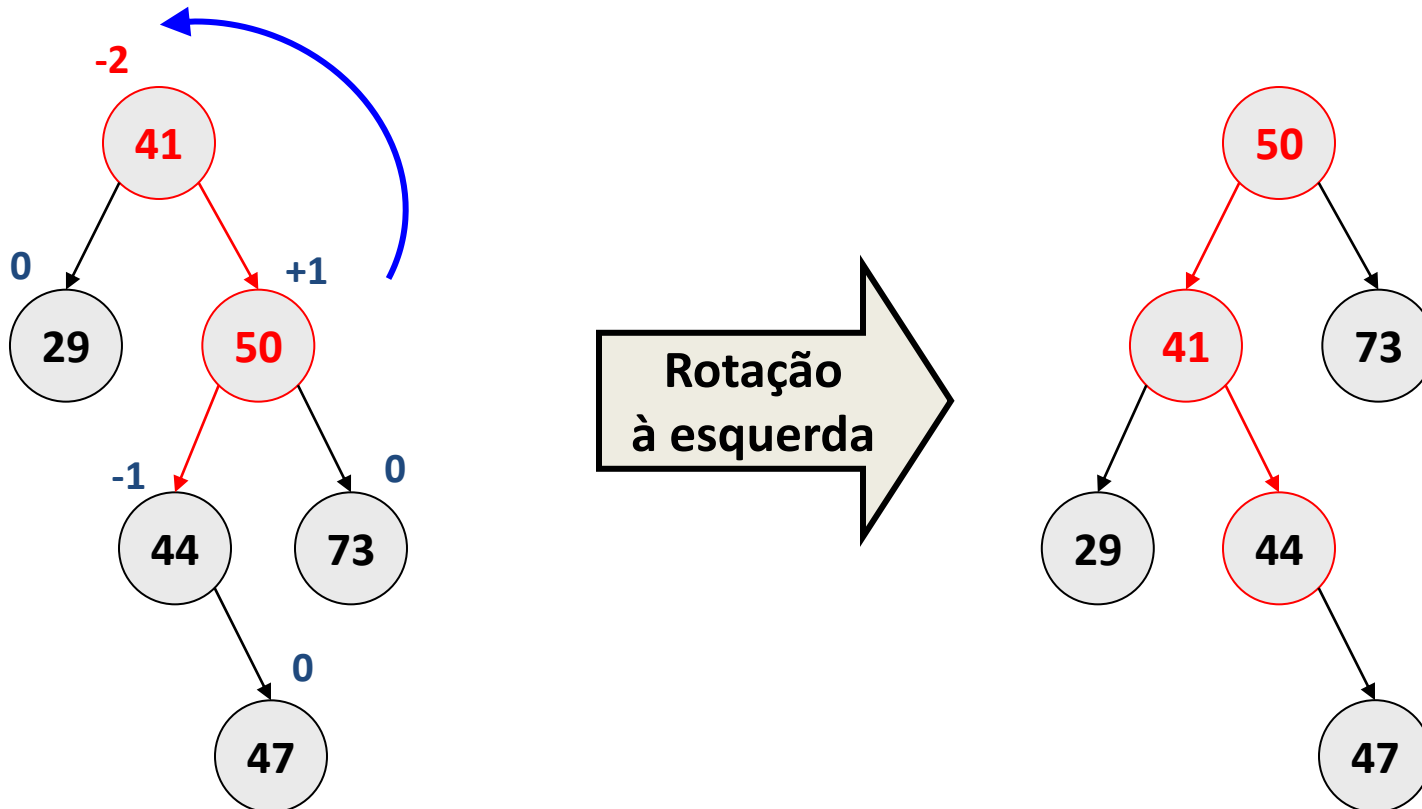
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47 → Rotação à esquerda do nó 41!



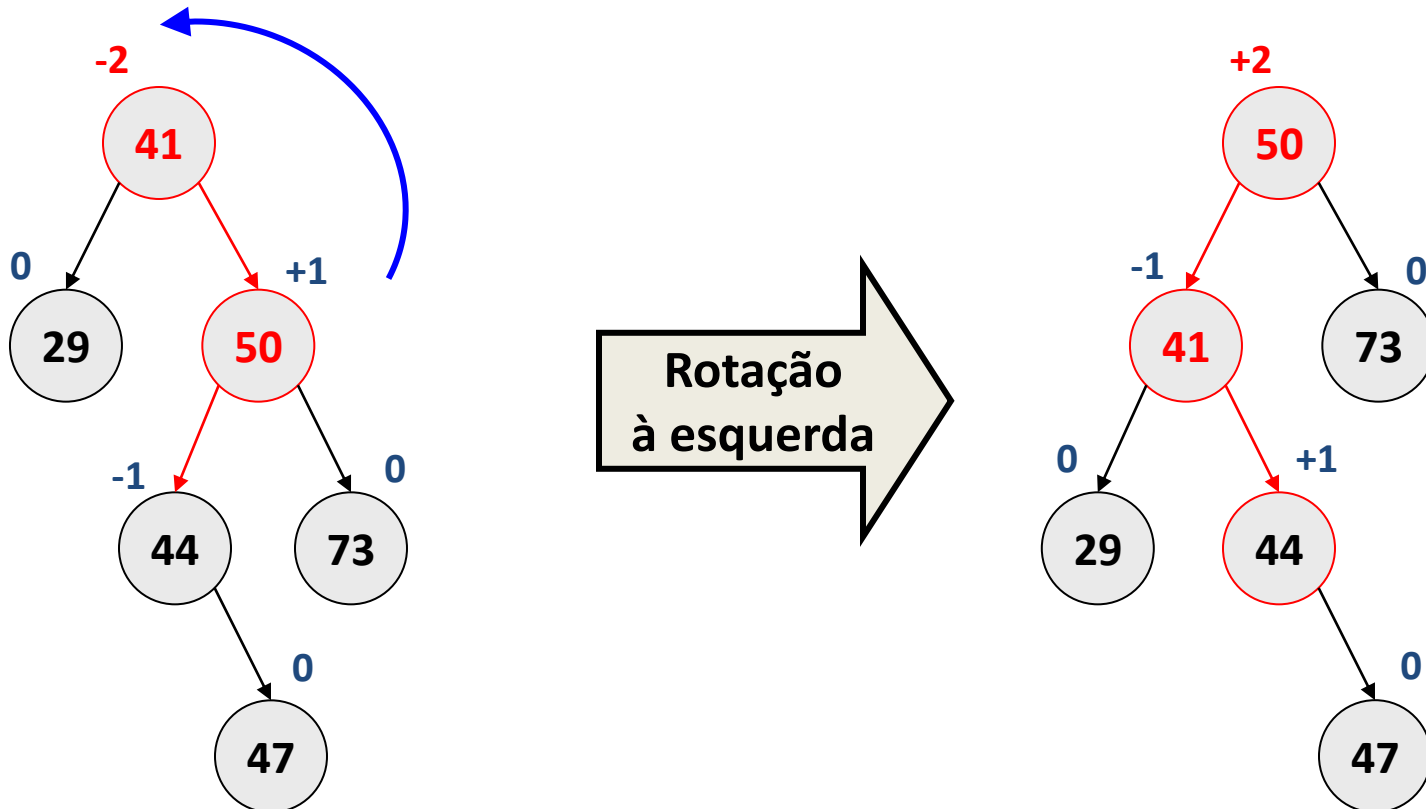
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47 → Rotação à esquerda do nó 41!



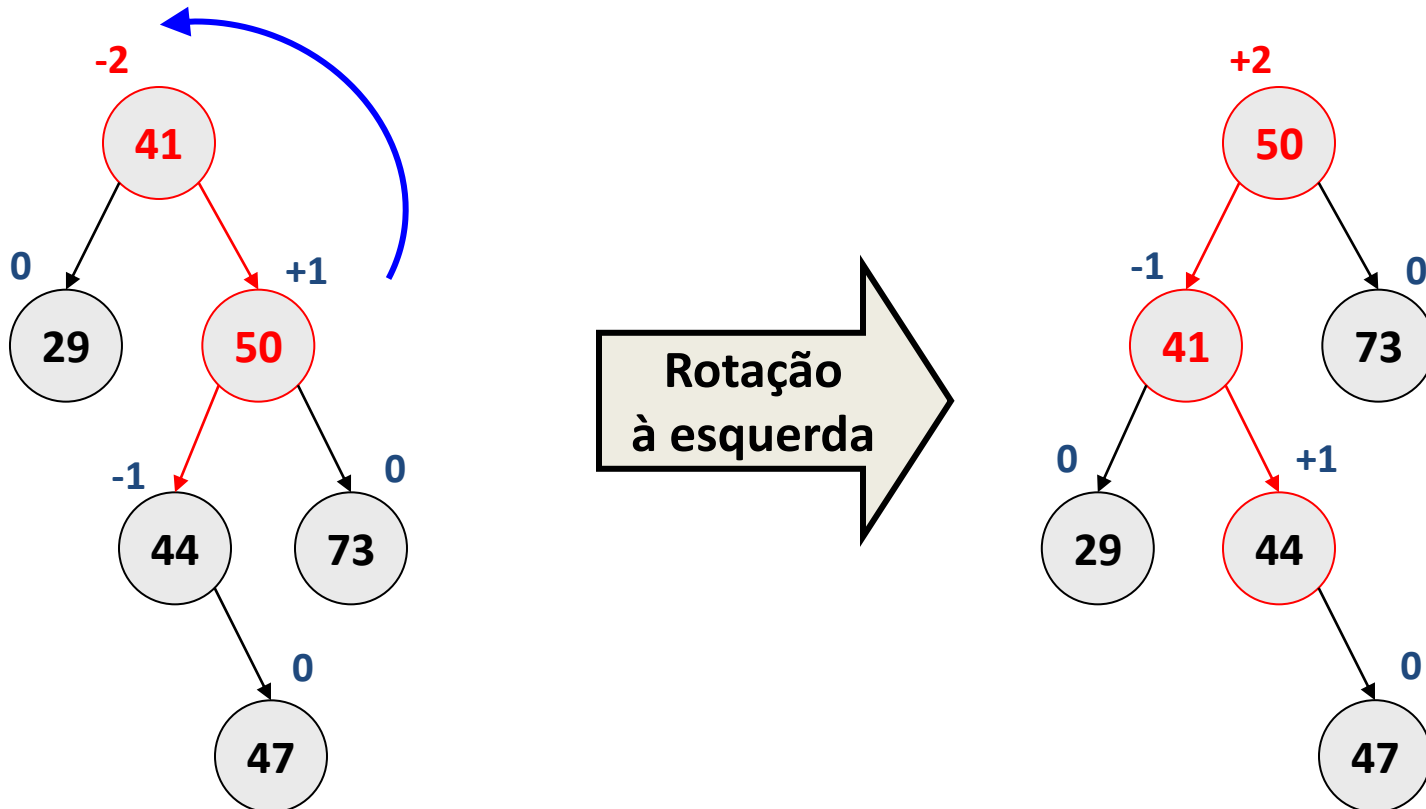
Outro exemplo de rotação à esquerda

- Inserção do valor 47 → Rotação à esquerda do nó 41!



Outro exemplo de rotação à esquerda

- Rotação simples não funcionou! **Sinais diferentes!**



ROTAÇÃO DUPLA

Rotação Dupla

- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;

Rotação Dupla

- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;
 - Execução:
 1. Rotação à esquerda no nó filho da esquerda;

Rotação Dupla

- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;
 - Execução:
 1. Rotação à esquerda no nó filho da esquerda;
 2. Rotação à direita no próprio nó.

Rotação Dupla

- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;
 - Execução:
 1. Rotação à esquerda no nó filho da esquerda;
 2. Rotação à direita no próprio nó.
- **À esquerda:**
 - Condição: nó com FB -2 e seu filho à direita com FB +1;

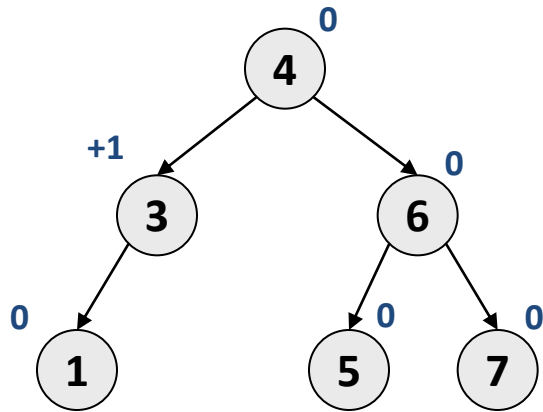
Rotação Dupla

- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;
 - Execução:
 1. Rotação à esquerda no nó filho da esquerda;
 2. Rotação à direita no próprio nó.
- **À esquerda:**
 - Condição: nó com FB -2 e seu filho à direita com FB +1;
 - Execução:
 1. Rotação à direita no nó filho da direita;

Rotação Dupla

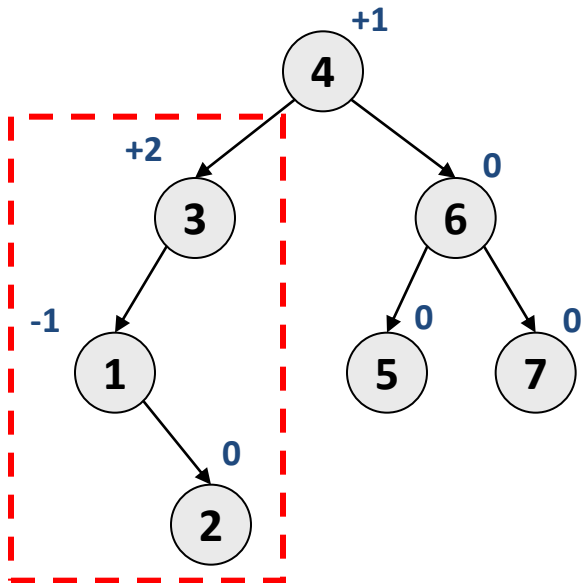
- **À direita:**
 - Condição: nó com FB +2 e seu filho à esquerda com FB -1;
 - Execução:
 1. Rotação à esquerda no nó filho da esquerda;
 2. Rotação à direita no próprio nó.
- **À esquerda:**
 - Condição: nó com FB -2 e seu filho à direita com FB +1;
 - Execução:
 1. Rotação à direita no nó filho da direita;
 2. Rotação à esquerda no próprio nó.

Exemplo de rotação dupla



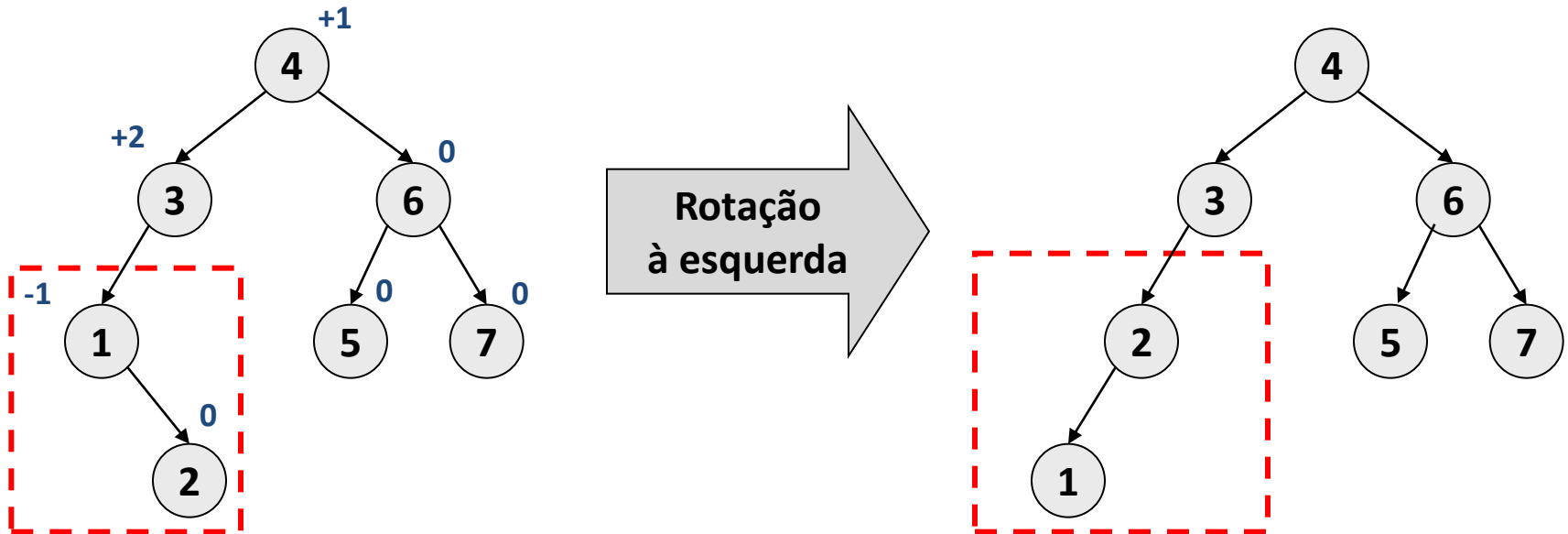
- Árvore balanceada.

Exemplo de rotação dupla

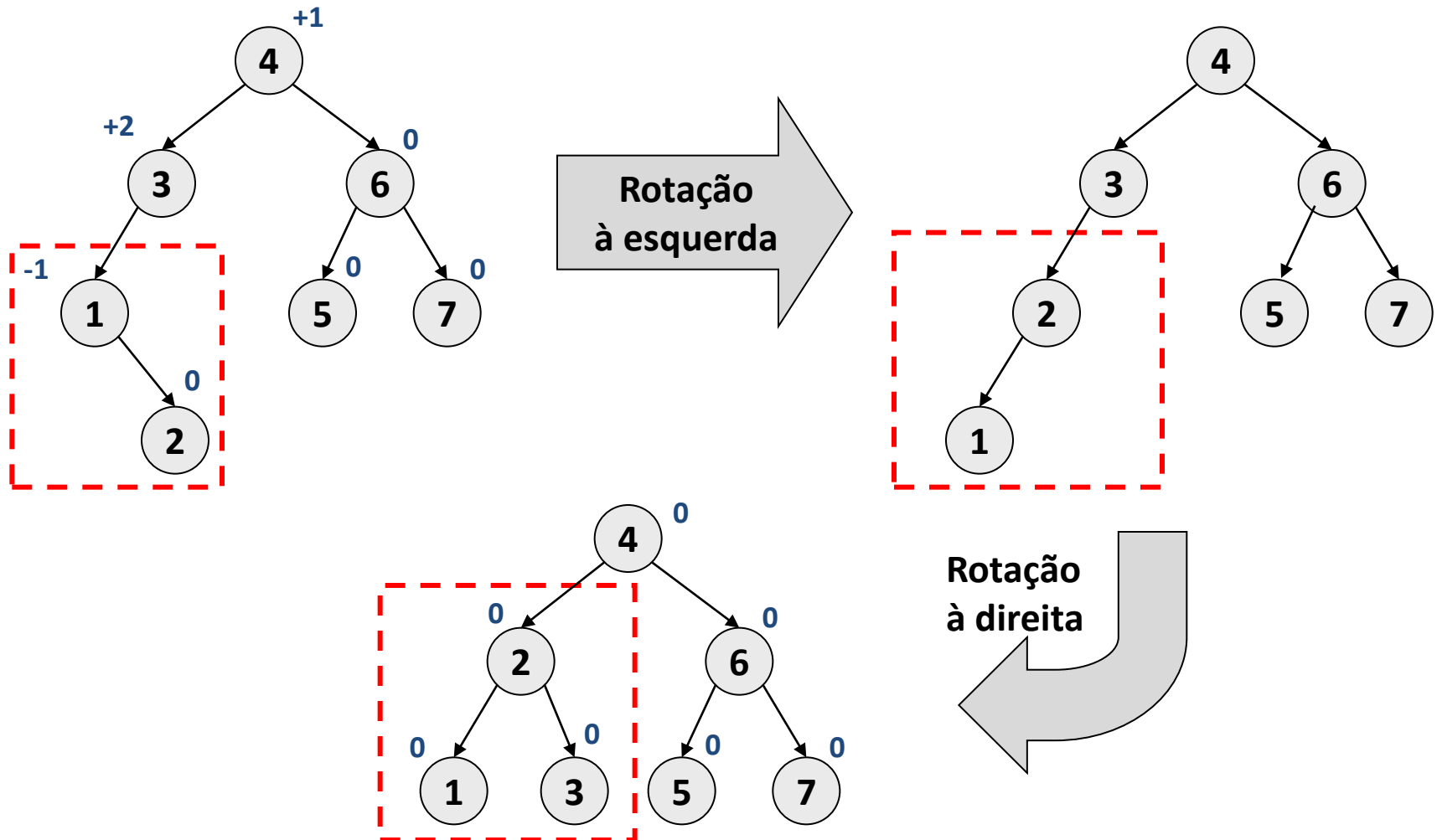


- Ao se inserir o valor 2, o nó 3 torna-se desbalanceado.
- É preciso fazer uma rotação dupla à direita.

Exemplo de rotação dupla



Exemplo de rotação dupla



Considerações

- É importante se lembrar que, no final, o nó deve ser rotacionado, conforme o sinal:

Considerações

- É importante se lembrar que, no final, o nó deve ser rotacionado, conforme o sinal:
 - +2 → à direita;
 - 2 → à esquerda;

Considerações

- É importante se lembrar que, no final, o nó deve ser rotacionado, conforme o sinal:
 - +2 → à direita;
 - 2 → à esquerda;
- Porém, como o filho tem sinal invertido, é preciso rotacioná-lo antes, na direção contrária;

Considerações

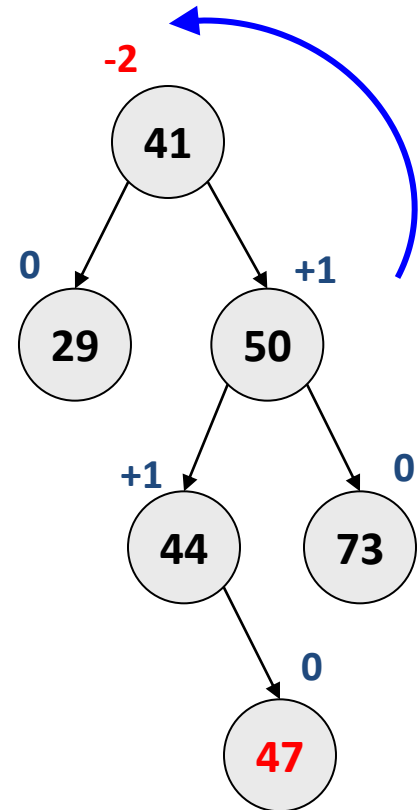
- É importante se lembrar que, no final, o nó deve ser rotacionado, conforme o sinal:
 - +2 → à direita;
 - 2 → à esquerda;
- Porém, como o filho tem sinal invertido, é preciso rotacioná-lo antes, na direção contrária;
 - Portanto, rotaciona-se primeiro o filho (com o “neto”);

Considerações

- É importante se lembrar que, no final, o nó deve ser rotacionado, conforme o sinal:
 - +2 → à direita;
 - 2 → à esquerda;
- Porém, como o filho tem sinal invertido, é preciso rotacioná-lo antes, na direção contrária;
 - Portanto, rotaciona-se primeiro o filho (com o “neto”);
 - Depois, rotaciona-se o próprio nó.

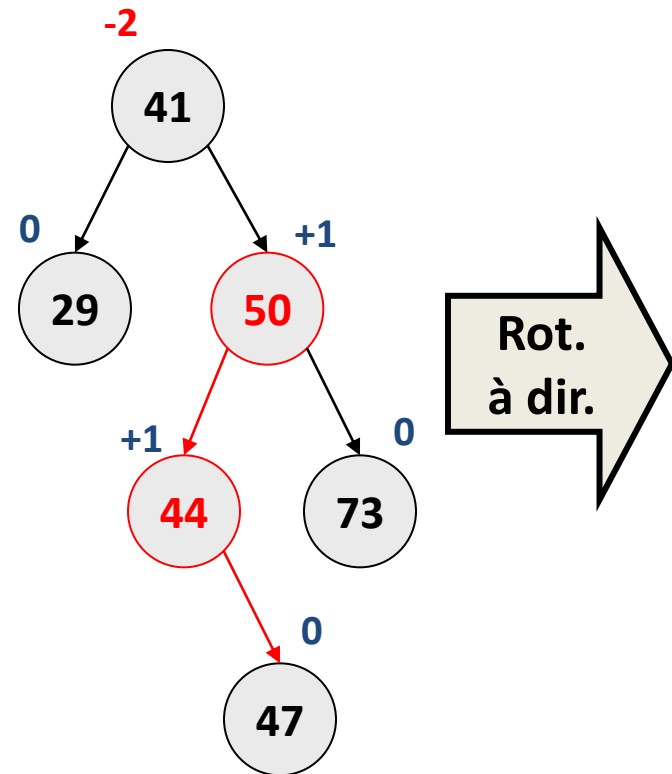
Voltando ao exemplo problemático...

- Valor 47 foi inserido → Rotação dupla à esquerda!



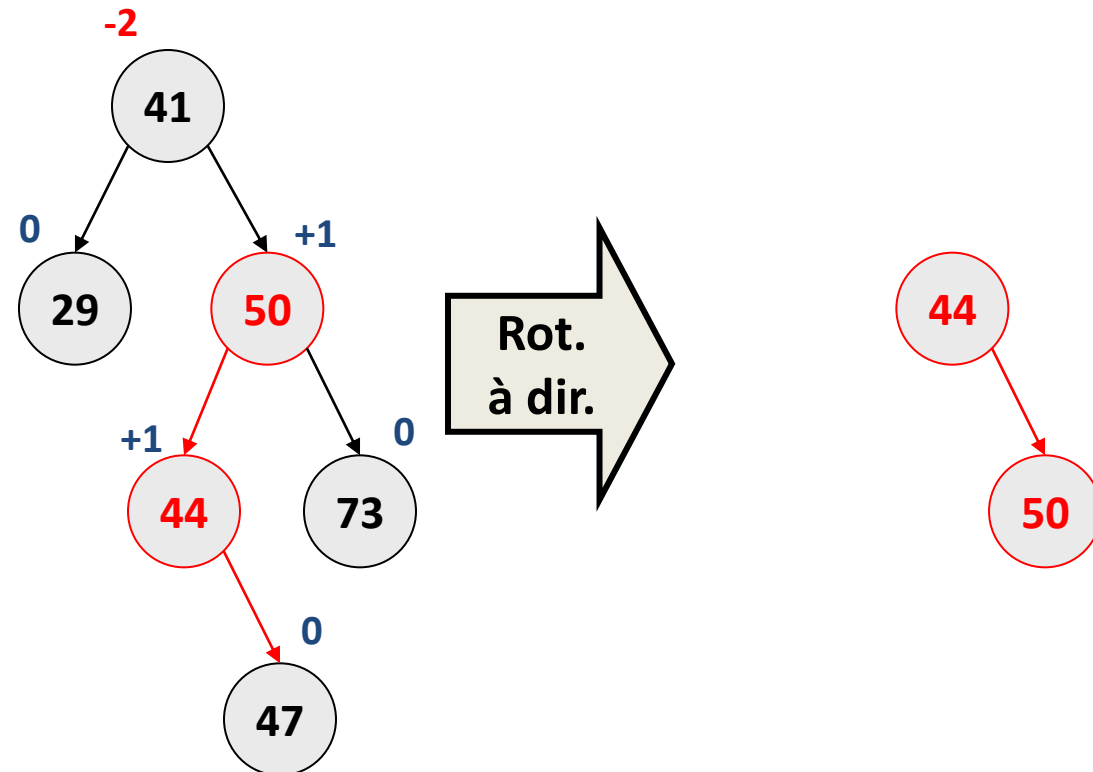
Voltando ao exemplo problemático...

- 1ª rotação: nó 50, à direita;



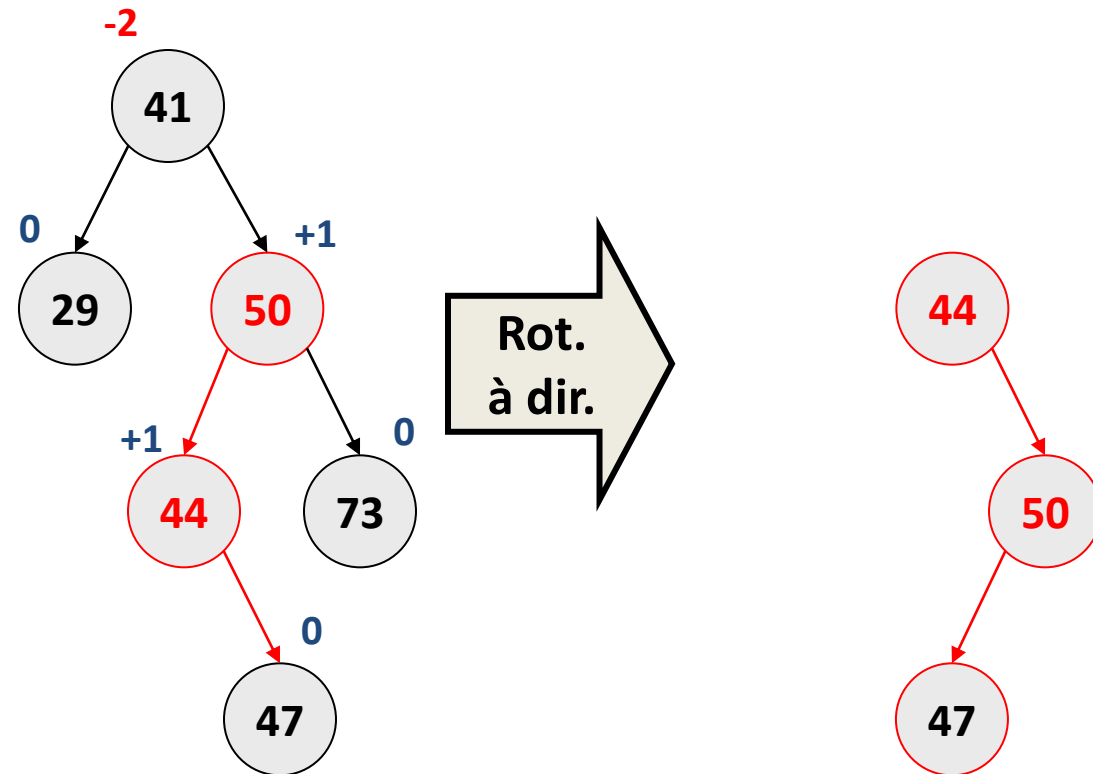
Voltando ao exemplo problemático...

- 1ª rotação: nó 50, à direita;



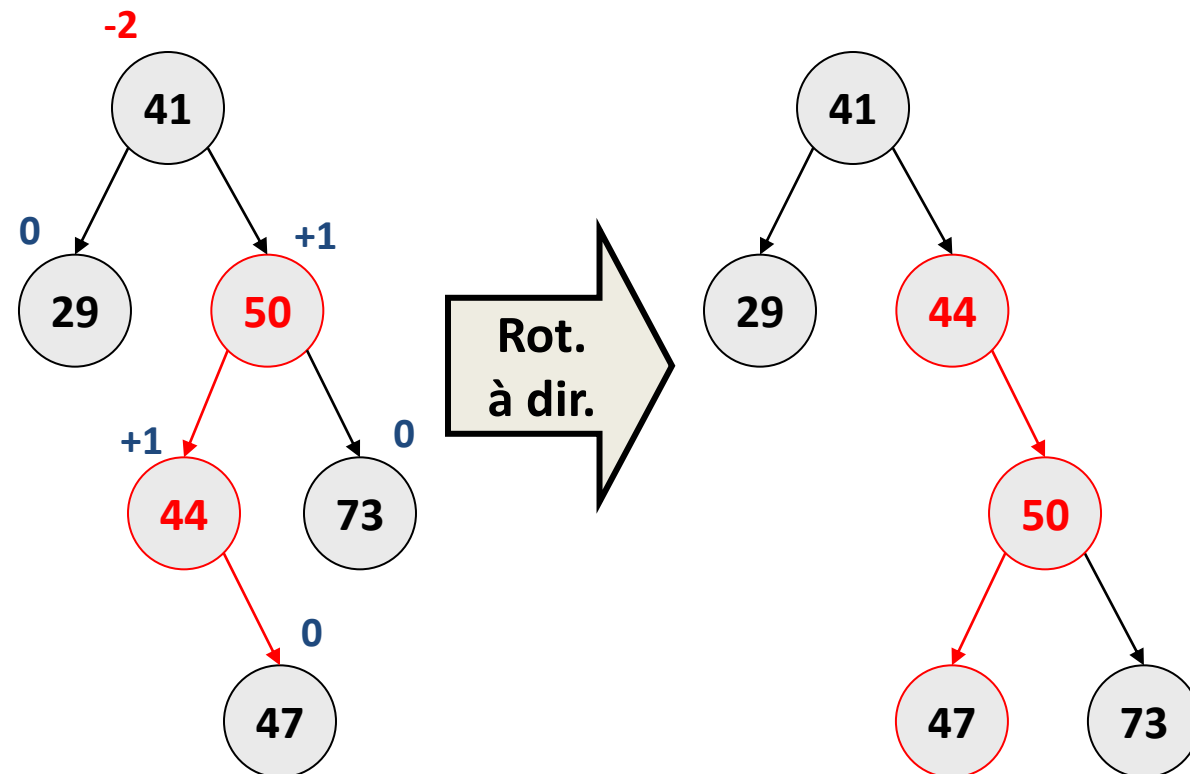
Voltando ao exemplo problemático...

- 1ª rotação: nó 50, à direita;



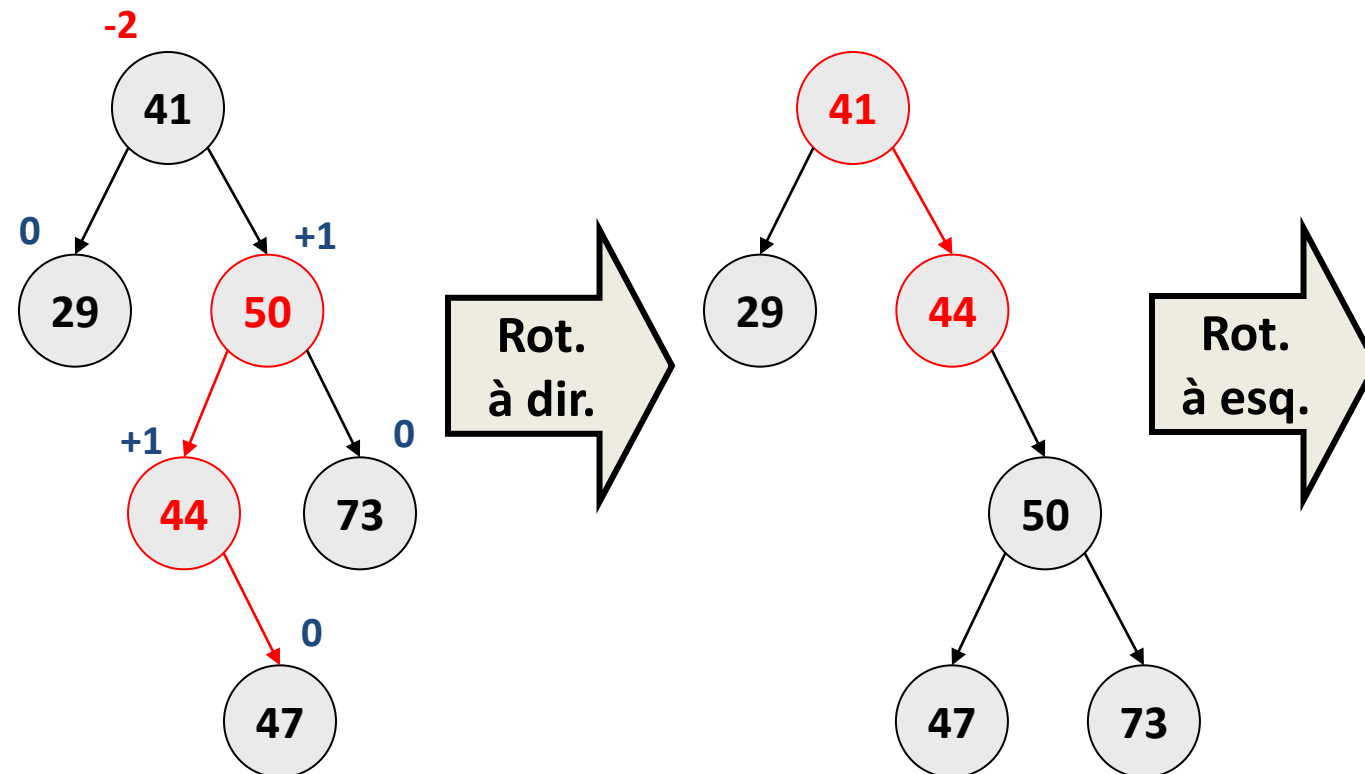
Voltando ao exemplo problemático...

- 1ª rotação: nó 50, à direita;



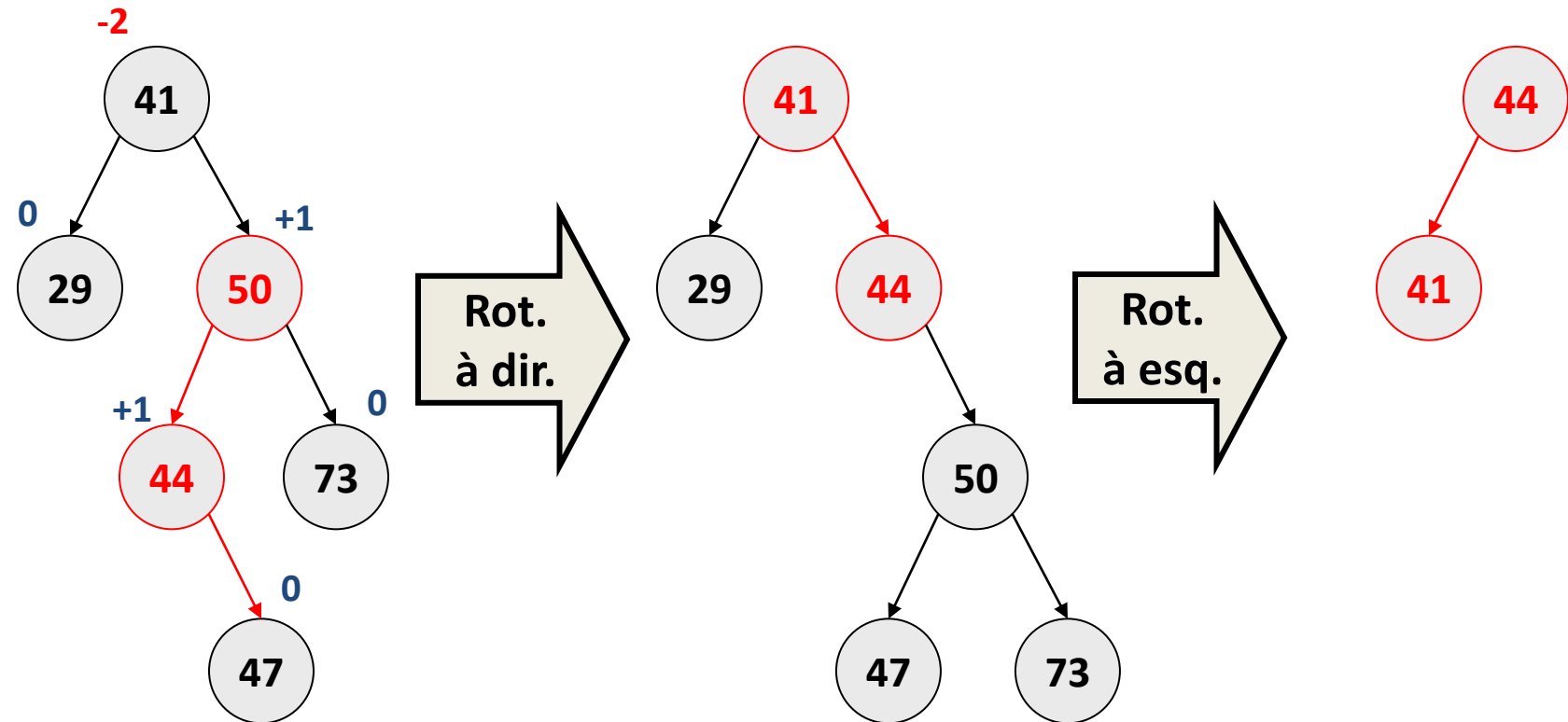
Voltando ao exemplo problemático...

- 2ª rotação: nó 41, à esquerda;



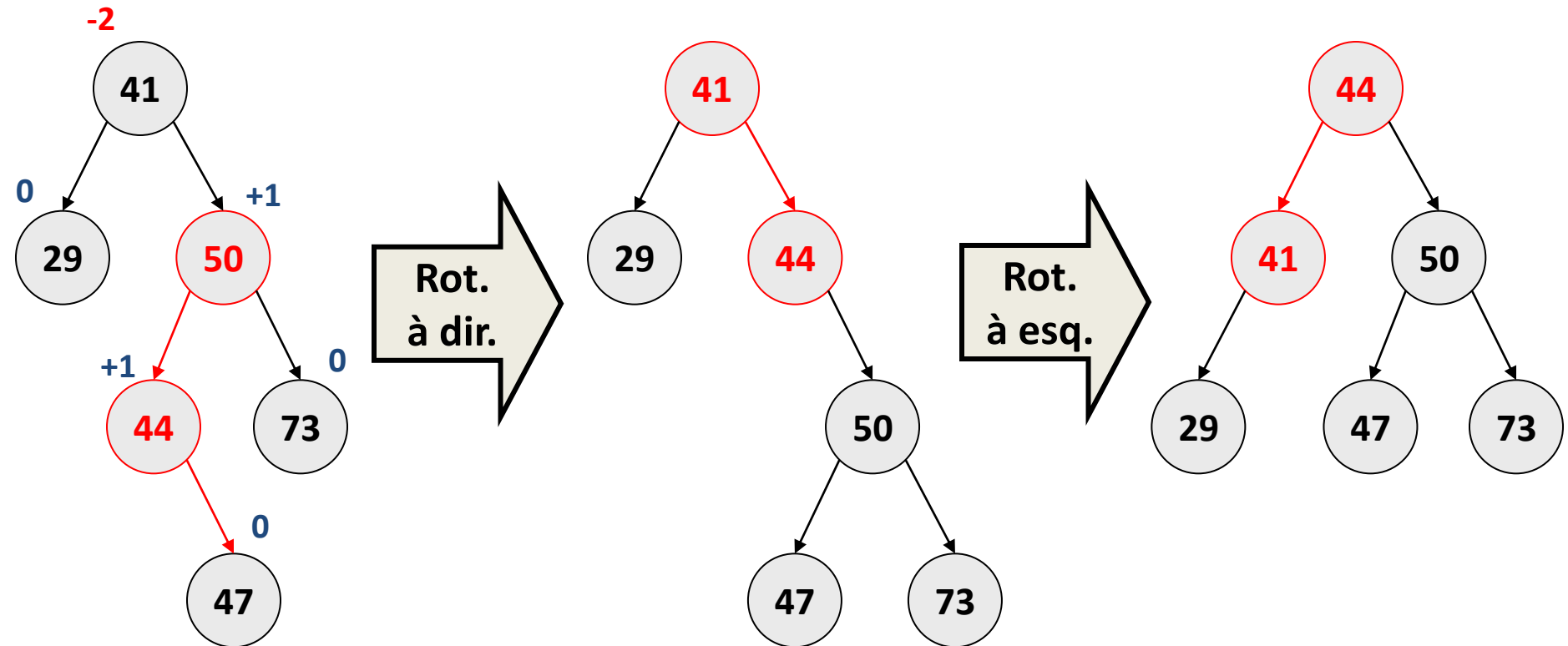
Voltando ao exemplo problemático...

- 2ª rotação: nó 41, à esquerda;



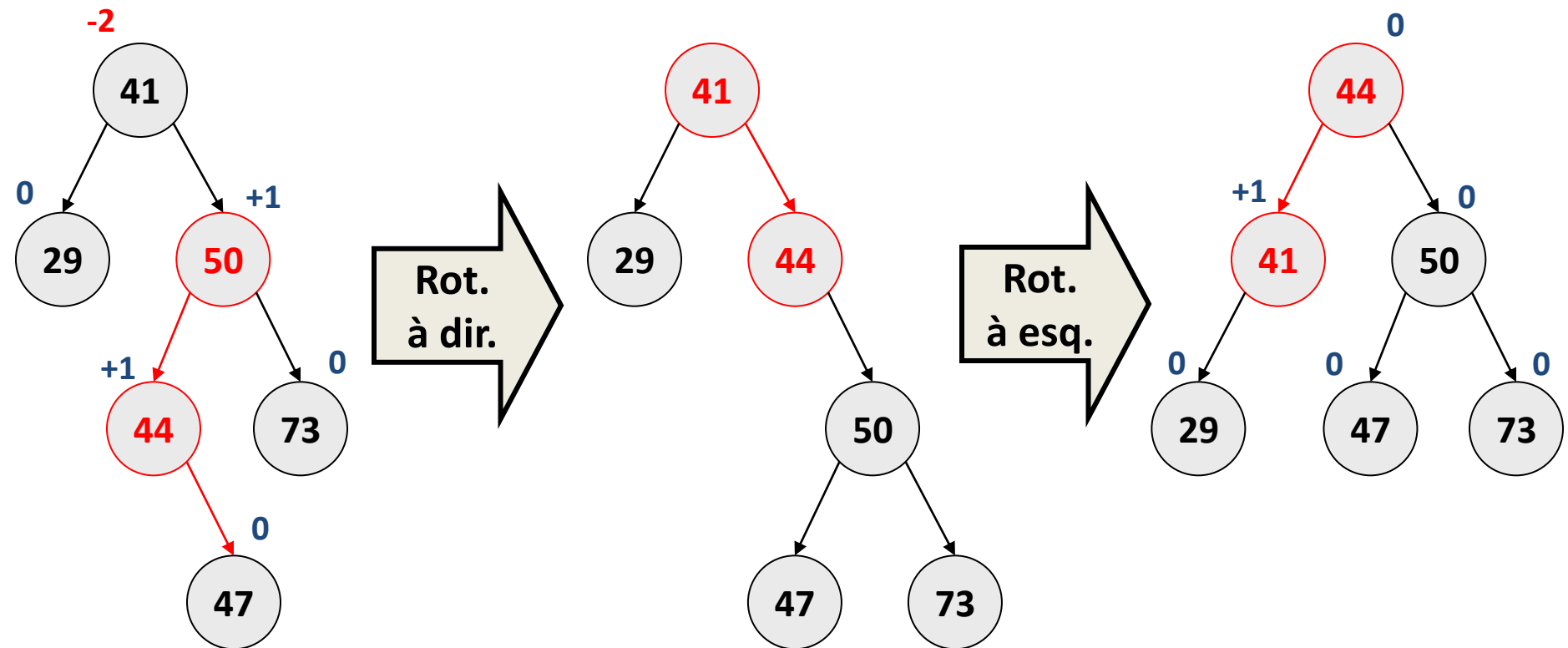
Voltando ao exemplo problemático...

- 2ª rotação: nó 41, à esquerda;



Voltando ao exemplo problemático...

- 2ª rotação: nó 41, à esquerda;



Considerações

- Para a operação de inserção, basta incluir o novo nó, avaliar o tipo de rotação, e executar a rotação.

Considerações

- Para a operação de inserção, basta incluir o novo nó, avaliar o tipo de rotação, e executar a rotação.
 - Se mais de um nó tiver $FB \pm 2$, basta balancear o nó de maior nível.

Considerações

- Para a operação de inserção, basta incluir o novo nó, avaliar o tipo de rotação, e executar a rotação.
 - Se mais de um nó tiver $FB \pm 2$, basta balancear o nó de maior nível.
- No entanto, a operação de remoção é mais complexa:

Considerações

- Para a operação de inserção, basta incluir o novo nó, avaliar o tipo de rotação, e executar a rotação.
 - Se mais de um nó tiver $FB \pm 2$, basta balancear o nó de maior nível.
- No entanto, a operação de remoção é mais complexa:
 - Caso haja alguma rotação, o balanceamento local pode causar outro(s) desequilíbrio(s);

Considerações

- Para a operação de inserção, basta incluir o novo nó, avaliar o tipo de rotação, e executar a rotação.
 - Se mais de um nó tiver $FB \pm 2$, basta balancear o nó de maior nível.
- No entanto, a operação de remoção é mais complexa:
 - Caso haja alguma rotação, o balanceamento local pode causar outro(s) desequilíbrio(s);
 - Se necessário, será preciso realizar recursivamente várias rotações a partir do novo nó desbalanceado até o raiz.

Exercício

- Remova o nó 8 (será preciso balancear mais de uma vez).

