Prove formalmente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas

(a)
$2n + 10$ é $O(n)$

$f(n)=2n + 10$
$g(n)=n$

$f(n)<= c*g(n)$ onde c é uma constante

$2n + 10 <= cn$

$2n+10=cn$
$c=(2n+10)/n$

considerando n=100
$c=(2*100+10)/100$
c=2,1
considerando n=1000
$c=(2*1000+10)/1000$
c=2,01

dessa forma prova-se que há uma constante positiva que pode ser definida para que a função $f(n) \in O(n)$. Ou seja, pode-se definir uma constante c que para qualquer tamanho de n a afirmação

$f(n)<= c*g(n)$ torna-se verdadeira

(b)
$2n^2+20n+5$ é $O(n^3)$

$f(n)=2n^2+20n+5$
$g(n)=n^3$

$f(n)<= c*g(n)$ onde c é uma constante
$2n^2+20n+5 <= cn^3$

considerando n=100
$2(100)^2+20(100)+5=c(100)^3$
c=0,022005
considerando n=1000
$2(1000)^2+20(1000)+5=c(1000)^3$
c=0,00202005

Dessa forma prova-se que há uma constante positiva que pode ser definida para que a função $f(n) \in O(n^3)$. Ou seja, pode-se definir uma constante c que para qualquer tamanho de n a afirmação

$f(n)<= c*g(n)$ torne-se verdadeira

(c)
$3n^3 + 2n^2 + n + 1$ é $O(n^3)$

$f(n)=3n^3 + 2n^2 + n + 1$
$g(n)=n^3$

$f(n) <= c*g(n)$ onde c é uma constante
$3n^3 + 2n^2 + n + 1 <= cn^3$

considerando n=100
$3(100)^3+2(100)^2+100+1=c(100)^3$
c=3,020101
considerando n=1000
$3(1000)^3+2(1000)^2+100+1=c(1000)^3$
c=3,002000101

Dessa forma prova-se que há uma constante positiva que pode ser definida para que a função $f(n) \in O(n^3)$. Ou seja, pode-se definir uma constante c que para qualquer tamanho de n a afirmação

$f(n) <= c*g(n)$ torne-se verdadeira

(d)

$7n^2$ é $O(n)$

$f(n) = 7n^2$
$g(n) = n$

$f(n) <= c*g(n)$ onde c é uma constante
$7n^2 <= cn$

considerando n=100
$7(100)^2 = c(100)$
c=700
considerando n=1000
$7(1000)^2 = c(1000)$
c=7000

Desta forma prova-se que a afirmação não é verdadeira pois não é possível determinar um valor pra constante c para que a afirmação se sustente em qualquer n. Isto se deve ao fato que quanto maior é o valor de n maior é o valor da constante.

(e)

$3(2^{n+1})$ é $O(2^n)$

$f(n) = 3(2^{n+1})$
$g(n) = 2^n$

$f(n) <= c*g(n)$ onde c é uma constante
$3(2^{n+1}) <= c2^n$

considerando n=2
$3(2^{2+1}) = c(2^2)$
c=4
considerando n=3
$3(2^{3+1}) = c(2^3)$
c=6

Desta forma prova-se que a afirmação não é verdadeira pois não é possível determinar um valor pra constante c para que a afirmação se sustente em qualquer n. Isto se deve ao fato que quanto maior é o valor de n maior é o valor da constante.