

Relaxação Lagrangiana

1

$$P: \min_x c^T x \text{ s.a. } Ax=b, \forall x \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Situação de interesse: problemas em que, retirando $Ax=b$, são fáceis de resolver (apesar de mantermos $x \in \mathbb{Z}_+^n$).

O que fazer?

↳ penalizar $Ax=b$ na F.O.

$$P(u): \min_x c^t x + u^t (Ax - b)$$

$$\text{s.a. } Dx \leq e, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n.$$

(2)

- $L(x, u) = c^t x + u^t (Ax - b)$ é chamada função lagrangiana.
- u é o vetor de multiplicadores de Lagrange (relativos à $Ax - b = 0$).

Damos supor que (*) seja fácil de resolver, para cada u fixado, em relação à P .

Objetivo: "resolver" P através de $P(u)$ (3)

Sejam

$$f^* = \min_x \{ c^t x ; Ax = b, Dx \leq e, x \in \mathbb{R}_+^n \}$$

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b) ; Dx \leq e, x \in \mathbb{R}_+^n \}$$

os valores ótimos de P e $P(u)$, respect.

Teorema: $L^*(u) \leq f^*$, $\forall u$.

Prova: $L^*(u) \leq c^t x^* + \underbrace{u^t (Ax^* - b)}_0 = f^*$, onde x^* é ótimo de P . ◻

Seja, $P(u)$ fornece limitantes (4)
inferiores para f^* . Chamamos $P(u)$ de
relaxação lagrangiana de P (de fato é uma).

↳ o ideal é encontrar u tal que
 $L^*(u) = f^*$. Mesmo não sendo possível,
queremos $\max_u L^*(u)$.

↳ o limitante $L^*(u) \leq f^*$ pode ser
usado em um branch-and-bound.

Em determinados problemas, um problema (5) do tipo $P(u)$ fornece limitantes melhores que a relaxação linear usual (a obtida trocando $x \in \mathbb{Z}_+^n$ por $x \geq 0$).

Vale notar que um branch-and-bound com $P(u)$ nos nós só será eficiente se $P(u)$ for fácil.

Podemos usar $P(u)$ em alguns nós e a relaxação linear em outros.

Example 1: GAP - Generalized Assignment Prob.

$$P: \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

Penalizando (ou "dualizando") $\sum_i x_{ij} - 1 = 0 : \text{L7}$

$$P_1(u): \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n u_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} - 1 \right)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

A F.O. pode ser escrita como $\sum_i \sum_j (c_{ij} + u_j) x_{ij} - \sum_j u_j$.

Este problema tem uma estrutura separável, e é equivalente a resolver m problemas

$$\min_x \sum_j (c_{ij} + u_j) x_{ij}$$

$$\text{s.a. } \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall j,$$

um para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Os problemas acima são o problema da mochila 0-1, que pode ser resolvido com prog. dinâmica em tempo pseudo-polinomial.

Agora, podemos penalizar $\sum a_{ij} x_{ij} \leq b_i$ 19
ao invés das restrições de igualdade. Neste
caso, o parâmetro de penalização λ_i é
 ≥ 0 :

$$P_2(\lambda) : \min_{\mathbf{x}} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i \lambda_i \left(\sum_j a_{ij} x_{ij} - b_i \right)$$

$$\text{s.a. } \sum_i x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

Este problema tem solução trivial: basta fazer
 $x_{ij} = 1$ quando $c_{ij} + \lambda_i a_{ij} = \min_i \{c_{ij} + \lambda_i a_{ij}\}$ e

$x_{ij} = 0$ caso contrário.

// (10)

Uma observação: porque $x \geq 0$ para restrições de desigualdade?

Lembre-se da otimalidade (dualidade / KKT):

$$L(x, u, v) = c^t x + u^t (Ax - b) + v^t (Dx - e)$$

$$\nabla_x L(x, u, v) = c + A^t u + D^t v = 0, \quad \boxed{v \geq 0} \quad (\dots)$$

Com isso, mantemos

$$L^*(u, v) \leq f^* \quad (\text{verifique!})$$

Pergunta: como $L^*(u) \leq f^*$ para qualquer u , como escolher um bom u ? 11

↳ o ideal é aquele que maximiza L^* , isto é, devemos resolver o problema

$$D: \max_u L^*(u).$$

Lembre-se que

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b); Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n \}.$$

Assim,

[12]

$$D: \max_u \min_x \{c^t x + u^t (Ax - b); Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

Este é exatamente o problema dual de P
ao dualizarmos as restrições $Ax - b = 0$.
(veja dualidade em PNL — "Otimização II")

Da mesma forma,

$$\max_{u \geq 0} \min_x \{c^t x + u^t (Dx - e); Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

De fato, tudo o que vimos pode ser 13
obtido por dualidade. Note que $L^*(u) \leq f^*$
é o teorema de dualidade fraca...

Neste sentido, poderia-se perguntar: vale
dualidade forte ($\max_u L^*(u) = f^*$) ?

↳ Nem sempre, pois as restrições de
integralidade $x \in \mathbb{Z}^n$ tornam P não
convexo. As vezes $\max_u L^*(u)$ só alcança
o valor ótimo da relaxação linear de P .