

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON

NORMA DE MATRIZES: A MATRIZ $m \times m$,

$\| \cdot \|$ NORMA EM \mathbb{R}^m .

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

EXERCÍCIOS:

1) MOSTRE QUE $\|A\|$ É UMA NORMA NO ESPAÇO DAS MATRIZES.

2) MOSTRE QUE $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

LEMA: SEJA A_* NÃO SINGULAR. SE $\|A - A_*\| \leq \frac{1}{\|A_*^{-1}\|}$

ENTÃO A É NÃO SINGULAR E $\|A^{-1}\| \leq 2\|A_*^{-1}\|$.

PROVA: VER LIVROS DE ANÁLISE MATRICIAL (GOLUB, WATCHKINS)

HIPÓTESE COMUM:

H1: A FUNÇÃO $\nabla^2 f(x)$ É LIPSCHITZ, ISTO É,
EXISTE $L > 0$ TAL QUE

$$\|\nabla^2 f(\tilde{x}) - \nabla^2 f(x)\| \leq L \|\tilde{x} - x\|.$$

TEOREMA (CONVERGÊNCIA DE NEWTON)

SUPONHA QUE f TENHA DERIVADAS ATÉ A SEGUNDA ORDEM CONTÍNUAS. SEJA x^* TAL QUE $\nabla f(x^*) = 0$.

SUPONHA QUE $\nabla^2 f(x^*)$ É NÃO SINGULAR.

EXISTE ENTÃO $\varepsilon > 0$ TAL QUE, SE $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$ TEMOS

(i) A SÉQUENCIA DEFINIDA POR $x^{k+1} = x^k - (\nabla f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$
ESTÁ BEM DEFINIDA.

(O PASSO NEWTONIANO É POSSÍVEL)

(ii) $\lim x^k = x^*$ COM ORDEM SUPERLINEAR.

(iii) SE VALE H1 (ISTO É, SE $\nabla^2 f(x)$ É LIPSCHITZ) ENTÃO
A ORDEM DE CONVERGÊNCIA É QUADRÁTICA.

PROVA:

(ii) Supomos por hora que a sequência esteja bem definida para todo k. Temos

$$\|x^{k+1} - x^*\| = \|x^k - x^* - (\nabla f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)\|$$

$$= \|(\nabla f(x^k))^{-1} [-\nabla^2 f(x^k)(x^k - x^*) + \nabla f(x^k) - \nabla f(x^*)]\|$$

$$\Rightarrow \|x^{k+1} - x^*\| \leq \|\nabla f(x^k)^{-1}\| \cdot \|\nabla f(x^k) - \nabla f(x^*) - \nabla^2 f(x^k)(x^k - x^*)\|$$

CONSIDERAMOS A FUNÇÃO

$$\varphi(t) = Df(tx^* + (1-t)x^*) , \quad t \in [0,1].$$

TEMOS

$$\varphi'(t) = D^2f(tx^* + (1-t)x^*)(x^* - x^*).$$

POR O TEO. DO VALOR MÉDIO EXISTE $\bar{t} \in (0,1)$

TAL QUE

$$\varphi'(\bar{t}) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1-0} = Df(x^*) - Df(x^*).$$

DAÍ, PARA TODO K SUFICIENTEMENTE GRANDE,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \cdot \|\nabla^2 f(\bar{t}x^k + (1-\bar{t})x^*) (x^k - x^*) \\ - \nabla^2 f(x^k) (x^k - x^*)\|$$

$$\leq \|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \|x^k - x^*\| \cdot \|\nabla^2 f(\bar{t}x^k + (1-\bar{t})x^*) - \nabla^2 f(x^k)\|$$

$$\leq \|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \|x^k - x^*\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla^2 f(tx^k + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^k)\|$$

DEFINIMOS

$$r_k = \|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \underline{\|\nabla^2 f(tx^k + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^k)\|}.$$

PARA $t \in [0, 1]$ TEMOS

$$\|t\tilde{x} + (1-t)x^* - \tilde{x}\| = (1-t)\|\tilde{x} - x^*\| \leq \|\tilde{x} - x^*\|$$

ASSIM, PELA CONTINUIDADE DE $\nabla^2 f$ e pelo Lema, existe

$$\varepsilon > 0 \text{ TAL QUE } \|\tilde{x} - x^*\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|\nabla f(\tilde{x})^{-1}\| \leq 2\|\nabla f(x^*)^{-1}\|$$

$$\text{e } 2\|\nabla f(x^*)^{-1}\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla^2 f(t\tilde{x} + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}$$

ASSIM, $\|x^* - x^k\| \leq \varepsilon \Rightarrow r_0 \leq \frac{1}{2}$.

COMO

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq r_k \|x^k - x^*\|,$$

SE $\|x^* - x^k\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x^1 - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. NOVAMENTE,

$$\|x^1 - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow r_1 \leq \gamma_2.$$

DAÍ,

$$\|x^2 - x^*\| \leq \gamma_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

REPETINDO O ARGUMENTO, TEMOS

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}. \quad (1)$$

PELA CONTINUIDADE DE $\nabla^2 f$, TEMOS

$$\|x^k - x^*\| \rightarrow 0 \Rightarrow 2\|\nabla^2 f(x^*)\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla^2 f(tx^* + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^*)\| \rightarrow 0.$$

OU SEJA, $r_k \rightarrow 0$ (A CONVERGÊNCIA É SUPERLINEAR).

(i) Voltamos à boa definição da sequência $\{x^k\}$: pelo Lema e pela continuidade da Hessiana, x^1 está bem definido se tomarmos x^0 próximo a x^* . Da expressão (1), x^1 está próximo à x^* , e logo x^2 também está bem definido. A boa definição x^k segue de forma indutiva, usando o Lema e (1).

(ii) Aqui, ESTAMOS SUPONDO QUE $\nabla^2 f$ É LIPSCHITZ,
ISO É,

$$\|\nabla^2 f(\tilde{x}) - \nabla^2 f(x)\| \leq L \|\tilde{x} - x\|, \quad L > 0.$$

TEMOS

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma_k \|x^k - x^*\|$$

$$\leq 2 \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla^2 f(tx^* + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^*)\| \cdot \|x^k - x^*\|$$

$$\leq 2 \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \sup_{t \in [0,1]} L \underbrace{\|tx^* + (1-t)x^* - x^*\|}_{(1-t)\|x^k - x^*\|} \cdot \|x^k - x^*\|$$

$$= 2 \|\nabla f(x^*)^{-1}\| L \sup_{t \in [0,1]} (1-t) \cdot \|x^k - x^*\|^2$$

$$\Rightarrow \|x^{k+1} - x^*\| \leq \left[2L \|\nabla f(x^*)^{-1}\| \right] \cdot \|x^k - x^*\|^2.$$

(A CONVERGÊNCIA É QUADRÁTICA).



OBS: O MÉTODO DO GRADIENTE ($d^k = -\nabla f(x^k)$) CONVERGE

NO MÁXIMO EM ORDEM LINEAR. OU SEJA, LONGE DA

SOLUÇÃO \Rightarrow CONVERG. LENTA (com GRAD.) ; PERTO DA SOL \Rightarrow CONV. RÁPIDA (NEWTON).