BOA DEFINIÇÃO DO SQP BÁSICO

NO SQP BÁSICO, RESOLVEMOS UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS

$$QP_k : \min_{d_x} \ \tfrac{1}{2} d_x^t H^k d_x + \nabla f(x^k)^t d_x$$
$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) = 0 \ ,$$

E FAZEMOS O PASSO:

$$x^{k+1} = x^k + d_x^k \ ,$$

ONDE d_x^k É SOLUÇÃO DE QP_k.

HIPÓTESES:

H1) $\nabla h(x^*)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO.

$$\nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \nabla h_1(x^*) & \cdots & \nabla h_m(x^*) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

DIZER QUE $\nabla h(x^*)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO É O MESMO QUE DIZER QUE x^* É REGULAR

H2) H^k É DEFINIDA POSITIVA

TEOREMA: SE VALEM H1 E H2, EXISTE UMA VIZINHANÇA ABERTA $V(x^*)$ DE x^* PARA A QUAL QP_k TEM SOLUÇÃO SEMPRE QUE $x^k \in V(x^*)$.

PROVA: DE H1, AS COLUNAS DE $\nabla h(x^*)$ SÃO L.I.'s. COMO $\nabla h(x)$ É CONTÍNUA ("HIPÓTESE GERAL"), EXISTE UMA VIZINHANÇA $V(x^*)$ DE x^* TAL QUE $\nabla h(x^k)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO SEMPRE QUE $x^k \in V(x^*)$. PARTICIONANDO/REORDENANDO AS COLUNAS DE $\nabla H(x^k)^t$, PODEMOS ESCREVÊ-LA COMO

$$\begin{bmatrix} B^k & N^k \end{bmatrix},$$

ONDE B^k $m \times m$ É INVERSÍVEL. ASSIM,

$\nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) = 0$ É EQUIVALENTE À

$$\begin{bmatrix} B^k & N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_x^N \end{bmatrix} + h(x^k) = 0 \implies B^k d_x^B + N^k d_x^N + h(x^k) = 0$$

$$\implies d_x^B = -(B^k)^{-1} \left(N^k d_x^N + h(x^k) \right).$$

OBSERVE QUE TODA SOLUÇÃO DE $\nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) = 0$ POSSUI ESSA FORMA. TOMANDO $d_x^N = 0$, TEMOS UMA SOLUÇÃO PARTICULAR. ASSIM MOSTRAMOS QUE QP_k É VIÁVEL.

CONCLUÍMOS DE H2 QUE QP_k É PROBLEMA QUADRÁTICO, ESTRITAMENTE CONVEXO E VIÁVEL. LOGO POSSUI MINIMIZADOR ÚNICO (VOCÊ PODE ENCONTRÁ-LO VIA KKT). //

O TEOREMA ACIMA DIZ QUE, PRÓXIMO À x^*,

O SQP BÁSICO É BEM DEFINIDO.

OBS.: SOB AS HIPÓTESES DE QUE $D^2 f$ E $D^2 h_i$, $i=1,\dots,m$, SÃO LIPSCHITZIANAS, É POSSÍVEL PROVAR QUE A SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO

$$x^{k+1} = x^k + d_x^k$$ CONVERGE À x^*.

PROBLEMAS:

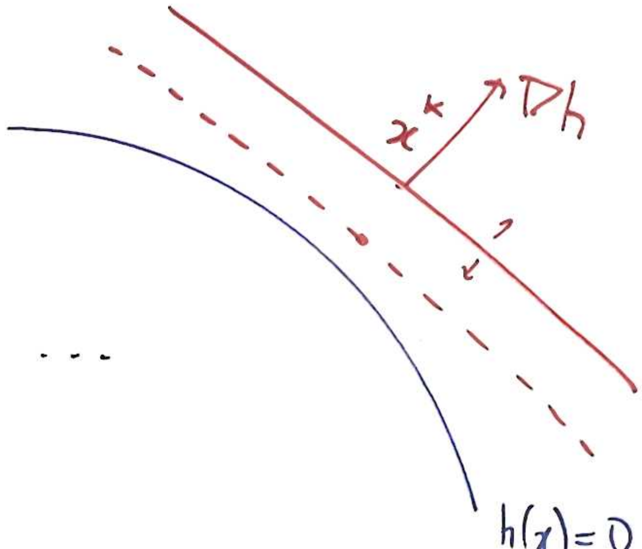
CONSEGUIMOS NA PRÁTICA SATISFAZER H2 (H^k É DEF. POSIT.
(AULAS FUTURAS).

MAS H1 ($\nabla h(x^*)$ POSTO COL. COMPLETO) NÃO É RAZOÁVEL VERIFICAR NA PRÁTICA...

SE NÃO PODEMOS GARANTIR H1, QP_k PODE SER INVIÁVEL:

$$\nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) = 0$$

EX.: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \ldots$$



UMA FORMA DE CONTORNAR ESSE PROBLEMA:

MODIFICAR A LINEARIZAÇÃO ("DESLOCAR").

QUERO DESLOCAR, OU SEJA, MUDAR $h(x^k)$ ... QUAL O DESLOCAMENTO?

PRIMEIRO, RESOLVEMOS O PROBLEMA AUXILIAR

$$\min \| \nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) \|^2 \quad (P_{AUX})$$

LEMBRE QUE $x^{k+1} = x^k + d_x^k \implies d_x = x - x^k$. DAÍ (P_{AUX}) FICA

$$\min \| \nabla h(x^k)^t (x - x^k) + h(x^k) \|^2 .$$

CONSIDERE x^k_{nor} UMA SOLUÇÃO DESSE PROBLEMA.

TROCAMOS $\nabla h(x^k)^t (x - x^k) + \underline{h(x^k)} = 0$ POR

$$\nabla h(x^k)^t (x - x^k) - \underline{\nabla h(x)^t (x^k_{mn} - x^k)} = 0$$

ESTE SISTEMA SEMPRE POSSUI SOLUÇÃO (P. EX., $x = x^k_{mn}$)

O QP_k FICA

$$QP_k : \min \ \tfrac{1}{2} (x - x^k)^t H^k (x - x^k) + \nabla f(x^k)^t (x - x^k)$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x^k)^t (x - x^k) - \nabla h(x^k)^t (x^k_{mn} - x^k) = 0$$

<u>MELHORIAS</u>:

1°) É COMUM TERMOS RESTRIÇÕES $l \leq x \leq u$. PODEMOS INCLUIR ESSAS RESTRIÇÕES DIRETO EM QP_k.

2^o) QP_k SÓ É CONFIÁVEL ENQUANTO MODELO PARA O PROBLEMA ORIGINAL PRÓXIMO À x^k $\longrightarrow$ USAMOS REGIÕES DE CONFIANÇA.

ASSIM,

$$QP_k: \quad \min_x \ \frac{1}{2}(x-x^k)^t H^k (x-x^k) + \nabla f(x^k)^t (x-x^k)$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x^k)^t (x-x^k) - \nabla h(x^k)^t (x^k_{nor} - x^k) = 0$$

$$l \leq x \leq u \quad , \quad \|x - x^k\|_\infty \leq \Delta_k$$

NO INTUITO DE QUE ESTE QP_k MAIS REPRESENTATIVO TENHA MINIMIZADOR, ADAPTAMOS O DESLOCAMENTO x^k_{mod} PARA COMPORTAR 1°) E 2°): x^k_{mod} SERÁ MINIMIZADOR DE

$$P_{AUX}: \quad \min_x \; \| \nabla h(x^k)^t (x - x^k) + h(x^k) \|^2$$
$$\text{s.a.} \quad l \leq x \leq u, \quad \| x - x^k \| \leq r \Delta_k ,$$

ONDE $r \in (0,1]$.

OBS.: O CONTROLE DO RAIO DE CONFIANÇA Δ_k É REALIZADO CONFORME ESQUEMA PARA REGIÕES DE CONFIANÇA JÁ VISTO.

REF.: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO