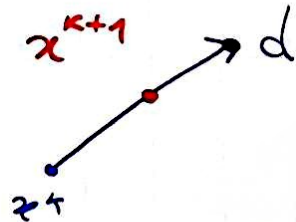


ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA.

REFS:

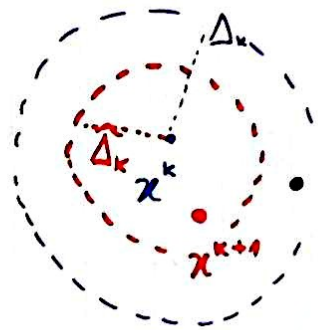
- 1) RIBEIRO, KARAZ. OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA. CENGAGE. 2013.
- 2) MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO. UNICAMP, 1998.

ESTRATÉGIA DE BUSCA LINEAR



- (i) CALCULAR DIREÇÃO d
- (ii) BUSCA LINEAR: PROCURA x^{k+1} AO LONGO DE d .

ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA



- (i) BUSCO UM PONTO QUE DIMINUA UM MODELO SIMPLIFICADO DO PROBLEMA ORIGINAL, RESTRITO A UMA VIZINHANÇA DE x^k .
- (ii) SE O PONTO FOI REJEITADO, REDUZO A VIZINHANÇA.

A ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA PERMITE TENTAR MINIMIZAR f EM TODAS AS DIREÇÕES A PARTIR DE x^k .

POR OUTRO LADO, O CÁLCULO DE x^{k+1} É MAIS CUSTOSO QUE A BUSCA LINEAR. A IDEIA É TROCAR O PROBLEMA ORIGINAL POR UM MODELO SIMPLIFICADO.

PROBLEMA IRRESTRITO:

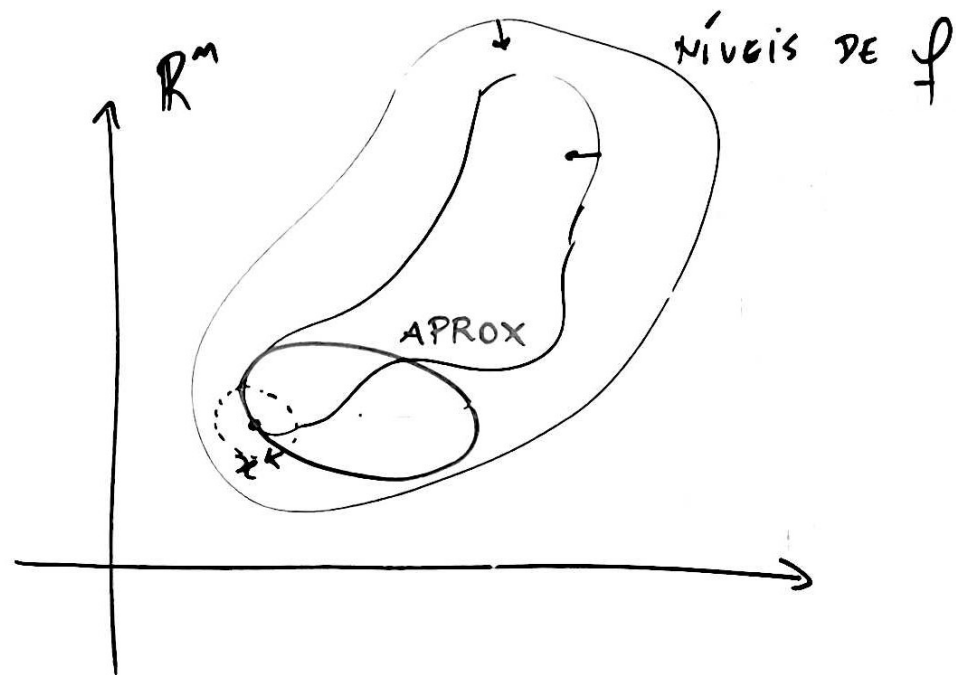
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.o.} & x \in \mathbb{R}^m \end{array}.$$

MODELO SIMPLIFICADO: SUPONHA f DE CLASSE C^2 , OU SEJA, f TEM 2ª DERIVADAS CONTÍNUAS.

APROXIMAÇÃO DE TAYLOR DE 2ª ORDEM (AO REDOR DE x^k):

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)^t (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^t \nabla^2 f(x^k) (x - x^k)$$

($x \approx x^k$).



$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \xrightarrow{x^k \text{ Fixo}}$$

$$\begin{array}{ll} \min & m(d) \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array}$$

ONDE

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d$$

E

$$d = x - x^k.$$

CASO f "REDUZA", DAMOS O PASSO "COMPLETO" NA
DIREÇÃO d CALCULADA PELO MODELO:

$$x^{k+1} = x^k + d^k.$$

- O MODELO QUADRÁTICO SÓ É CONFIÁVEL PRÓXIMO À x^* .
OU SEJA, QUANDO $\|x - x^*\| \leq \Delta_k$ (RAIO DE CONFIANÇA).

- NO MODELO QUADRÁTICO, PODEMOS TROCAR A HESSIANA $\nabla^2 f(x^*)$ POR UMA MATRIZ B_k SEMI-DEFINIDA POSITIVA BARATA DE CALCULAR.

* $\nabla^2 f(x^*)$ PODE NÃO SER SEMI-DEF. POSIT
 \Rightarrow MODELO QUADRÁTICO É NÃO-CONVEXO.

* $\nabla^2 f(x^*)$ PODE SER CARA DE CALCULAR.

* B_k (QUASE-NEWTON: BFGS, DFD, ...)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \xrightarrow{x^k \text{ Fixo}}$$

$$\begin{array}{ll} \min & m(d) \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array}$$

onde

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d$$

e

$$d = x - x^k.$$

Caso f "REDUZA", DAMOS O PASSO "COMPLETO" NA
DIREÇÃO d CALCULADA PELO MODELO:

$$x^{k+1} = x^k + d^k.$$

• REDUÇÃO REAL DE f :

$$ared = f(x^k) - f(x^k + d^k)$$

• REDUÇÃO DO MODELO (REDUÇÃO PREDITA)

$$pred = m(0) - m(d^k)$$

MEDIDA DE ACEITAÇÃO:

$$\rho_k = \frac{ared}{pred} .$$

SITUAÇÃO BOA: QUANDO α FOR GRANDE EM RELAÇÃO À ρ ,
OU SEJA, QUANDO ρ_k FOR GRANDE.



ESQUEMA DE REGIÕES DE CONFIANÇA

• DADOS $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_0 > 0$, $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$, $k=0$.

• REPITA ENQUANTO $\nabla f(x^k) \neq 0$

→ RESOLVA APROXIMADAMENTE O MODELO QUADRÁTICO CENTRADO EM x^k :

$$\min m(d)$$

$$\text{s.a. } \|d\| \leq \Delta_k$$

→ OBTENHAMOS ASSIM UMA SOLUÇÃO d^k .

CALCULE ρ_k .

→ SE $\rho_k > \eta$

$$\hookrightarrow x^{k+1} = x^k + d^k$$

(REDUÇÃO FOI BOA
 \Rightarrow ACEITO O PONTO)

SENÃO

$$\hookrightarrow x^{k+1} = x^k$$

(REDUÇÃO RUIM \Rightarrow NÃO REALIZE O PASSO)

$$\rightarrow \text{SE } \rho_k < \frac{1}{4}$$

$$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = \frac{1}{2} \Delta_k$$

REDUÇÃO RUIM \Rightarrow MODELO NÃO
É BOM \Rightarrow REDUZO O RAIO

SENÃO

$$\hookrightarrow \text{SE } \rho_k > \frac{3}{4} \quad \text{E} \quad \|d\| = \Delta_k$$

$$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = 2 \Delta_k$$

REDUÇÃO MUITO BOA E O
MODELO ALCANÇOU A BORDA \Rightarrow
SE O RAIO FOSSE MAIOR, TALVEZ
HOVESSE MAIOR REDUÇÃO.

SENÃO

$$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = \Delta_k$$

\hookrightarrow CASO CONTRÁRIO,
O RAIO É BOM.

$$\hookrightarrow k \leftarrow k+1$$

COMO RESOLVER O MODELO QUADRÁTICO

$$\min m(d)$$

$$\text{s.a. } \|d\| \leq \Delta_k.$$

1º) APLICAR UM MÉTODO DE DESCIDA (POR EX. COM DIREÇÕES $-\nabla m$).

2º) APLICAR GRADIENTES CONJUGADOS PARA RESOLVER

$$\min m(d)$$

$$\text{s.a. } d \in \mathbb{R}^m.$$

SE A SOLUÇÃO d^k SATISFAZER $\|d^k\| \leq \Delta_k$, ACEITE.
CASO CONTRÁRIO, USE A ESTRATÉGIA 1.

3º) MÉTODO DOG-LEG: CONSISTE NA COMBINAÇÃO DAS DIRE

CÔES $-V_m$ COM A DIREÇÃO DE NEWTON.

DETALHES: VEJA A REF. 1.