

Método dual afim escala

1

$$P: \min_x c^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ x \geq 0$$

$$D: \max_{y, z} b^t y \\ \text{s.a. } A^t y + z = c \\ z \geq 0$$

Primal afim escala: dá passos na var. primal.

$$Ax^k = b, x^k > 0 \rightarrow \text{estima } y^k, z^k \rightarrow d^k \rightarrow x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

Dual afim escala: dá passos nas var. duais.

$$A^t y^k + z^k = c, z^k > 0 \rightarrow \text{estima } x^k \rightarrow d_y^k, d_z^k \\ \rightarrow y^{k+1} = y^k + \alpha_k d_y^k, z^{k+1} = z^k + \alpha_k d_z^k.$$

Dado (y^0, z^0) dual viável e interior [2]
(i.e., $A^t y^0 + z^0 = c$, $z^0 > 0$), buscamos uma
boa estimativa para x . Lembre-se que as
condições de otimalidade são

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$A^t y + z = c, \quad z \geq 0 \quad \checkmark$$

$$x z e = 0 \quad (\Leftrightarrow z x e = 0 \Leftrightarrow z x = 0)$$

Buscamos minimizar $\|z x\|$ mantendo viabilidade primal:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Zx\|_2^2$$

$$\text{s.a. } Ax = b.$$

3

Resolvendo: pelas condições KKT, devemos ter

$$Z^2 x - A^t w = 0, \quad Ax = b.$$

Como $z > 0$, temos $x = Z^{-2} A^t w$ e

$$Ax = b \Rightarrow A Z^{-2} A^t w = b \Rightarrow w = (A Z^{-2} A^t)^{-1} b$$

Considere a direção $d_z = -Z^2 x$. Queremos uma direção d_y que aumente a F.O. dual

$b^t y$ e que forneça $(y + \alpha d_y, z + \alpha d_z)$ [4]
dual viável para algum $\alpha > 0$:

$$(i) \quad A^t(y + d_y) + z + d_z = c \Rightarrow \underbrace{A^t y + z}_c + \underbrace{A^t d_y + d_z}_0 = c \\ \Rightarrow A^t d_y + d_z = 0 \Rightarrow d_z = -A^t d_y.$$

$$\text{Assim } d_z = -Z^2 x = -A^t d_y \Rightarrow Z^2 (Z^{-2} A^t w) = \\ A^t d_y \Rightarrow A^t d_y = A^t w.$$

$$\text{Como posto } A = m \leq n, \text{ só pode ser} \\ d_y = w \Rightarrow \boxed{d_y = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b}$$

Em resumo,

5

$$d_y = (AZ^{-2}A^t)^{-1}b, \quad dz = -A^t d_y.$$

(ii) y é variável livre. Portanto, α_k deve garantir apenas que $z^{k+1} > 0$. Como antes,

$$\alpha_k = \min_i \left\{ -\frac{z_i^k}{d_{z_i}^k} \right\}; \quad dz_i < 0 \quad \{,$$

onde $\zeta \in (0, 1)$.

$$(iii) \quad b^t(y + d_y) = b^t y + \underbrace{b^t(AZ^{-2}A^t)^{-1}b}_{>0} > b^t y.$$

Método dual afim escala

16

Dado (y^0, z^0) dual viável interior.

para $k=0, \dots, \maxit$

$$d_y^k = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b, \quad d_z^k = -A^t d_y^k$$

$$\alpha_k = \min_i \left\{ -\frac{z_i^k}{d_{z_i}^k} ; d_{z_i}^k < 0 \right\}$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_k d_y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_k d_z^k \quad (\text{melhor: } z^{k+1} = c - A^t d_y^{k+1})$$

até "convergir"

$$x = -Z^{-2} d_z^k \quad (\text{retorna solução de P})$$

Ponto inicial

17

Precisamos de (y^0, z^0) com $A^t y^0 + z^0 = c$ e $z^0 > 0$. (FASE 1)

$$1) \tilde{y}^0 = \frac{\|c\|}{\|A^t b\|} b$$

$$2) \text{ se } \tilde{z}^0 = c - A^t \tilde{y}^0 > 0, \text{ então } (y^0, z^0) = (\tilde{y}^0, \tilde{z}^0).$$

$$3) \text{ se } \tilde{z}^0 \not> 0 \text{ então tome } M = 10^5 \frac{\|b^t \tilde{y}^0\|}{\tilde{z}_0^0},$$

$$\text{onde } \tilde{z}_0^0 = -2 \min \tilde{z}_0 > 0.$$

4) Resolva $\min_{y, z, \sigma} -(b^t y - M\sigma)$

18

s.a. $A^t y - \sigma e + z = c, z \geq 0$,
onde $e = (1, \dots, 1)$, pelo método dual afim
escala. Note que $(\tilde{y}^0, c - A^t \tilde{y}^0 + \sigma^0 e, \sigma^0)$
é viável e interior. Obtenha (y^*, z^*, σ^*) .

• $\sigma^* > 0 \Rightarrow D$ não tem solução
 $\Rightarrow P$ ilimitado ou inviável.

• Se $\sigma^k \leq 0$ então podemos parar e
retornar y^k e $z^k = c - A^t y^k > 0$.

Critério de parada

9

Ideia: parar quando a F.O. dual não melhora de uma iteração para a seguinte em relação à sua magnitude.

$$\frac{|b^t y^{k+1} - b^t y^k|}{\max\{1, |b^t y^k|\}} \leq \varepsilon \quad (\text{p.ex. } \varepsilon = 10^{-8})$$