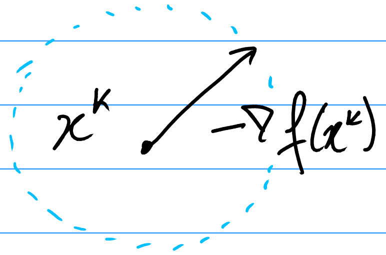
Regiões de confiança

Referência 1: Ribeiro, A. A; Karas, E. W. Otimização contínua. Cengage, 2014

Estratégia de busca linear

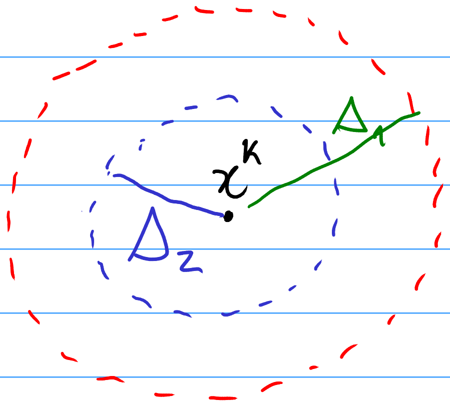


$$x^{k+1} = x^k + t_k(-\nabla f(x^k)), \quad t_k \in (0,1]$$

$$f(x^{k+1}) < f(x^k)$$

- diminui f ao longo de uma direção de descida (local) d a partir do ponto corrente.

Estratégia de regiões de confiança



$$\min_x \cancel{f(x)}$$

trocamos por um modelo de f.

$$\text{s.a.} \quad \|x - x^k\| \leq \Delta_1$$

O modelo de f (aproxima localmente f) é fácil de minimizar.

Problema: o minimizador do modelo na bola de raio Δ pode aumentar f. !

↳ diminuimos o raio Δ até f diminuir.

- Buscar um ponto que minimiza um modelo simplificado de f restrito à uma vizinhança de x^k.

Que modelo simplificado?

$$\min_{x} f(x) \qquad \text{(irrestrito)}$$
$$\text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

Modelo usual: aproximação quadrática de f em x^k

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^t (x - x^k) + \frac{1}{2}(x-x^k)^t \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) + r(\|x - x^k\|)$$

onde $\dfrac{r(\|x-x^k\|)}{\|x - x^k\|} \xrightarrow[x \to x^k]{} 0$ (Taylor de ordem 2).

(supomos f com derivadas de 2ª ordem contínuas)

Assim, para $x \approx x^k$,

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^k) + \nabla f(x^k)^t (x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^t \nabla^2 f(x^k)(x - x^k)}_{\text{modelo } m}$$

Notação: $d = x - x^k$

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(x^k) d.$$

$$\begin{array}{l} \min_x f(x) \\ \text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \min_d m(d) \\ \|d\| \leq \Delta_k. \end{array}$$

$$\Big\downarrow \; d^k \text{ solução}$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k.$$

---

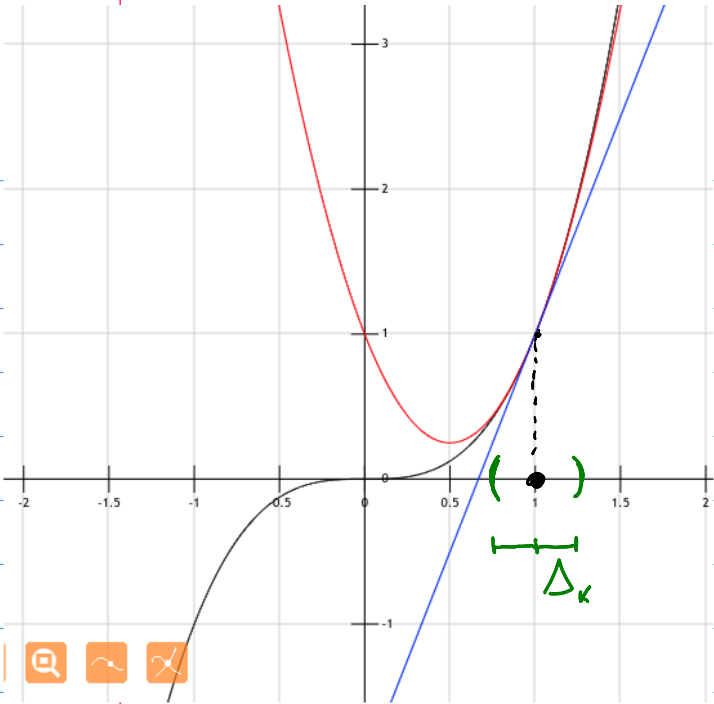
m aproxima f localmente...

↳ Δ_k deve ser controlado

↳ Se f aumentar, diminua Δ_k

↳ Se f diminuir "pouco", mantenha Δ_k

↳ Se f diminuir "muito", aumente Δ_k



$f(x) = x^3$

$x^k = 1$

AZUL = aprox. linear

VERMELHO = aprox. quad.

"O modelo só é confiável próximo à x^k".

$\|x - x^k\| \leq \Delta_k$ $(\|d\| \leq \Delta_k)$: Δ_k é o raio de confiança.

Problemas com uso de $\nabla^2 f(x^k)$ em $m(d)$:

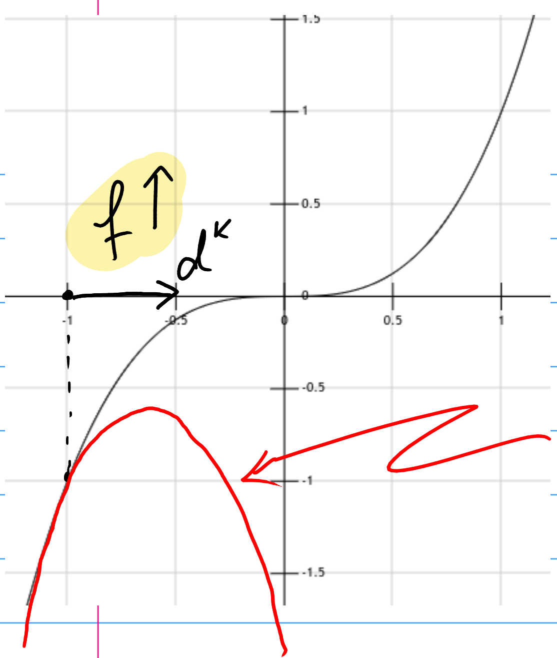
1) alto custo computacional / armazenamento de $\nabla^2 f(x^k)$.

2) Se $\nabla^2 f(x^k)$ não for semidefinida positiva então m não é convexa. Daí resolver

$$\min_{\text{s.a. } \|d\| \leq \Delta} m(d)$$

fica complicado.

Pior: d^k pode ser de subida!



$f(x) = x^3$

$x^k = -1$

Em $x^k = -1$,
$m(d) = 3d - 3d^2$,
cujo minimizador
é $d^k = \frac{1}{2}$ ($f \uparrow$)

aproximação quadrática não convexa.

Uma solução: trocar $\nabla^2 f(x^k)$ por uma matriz B_k simétrica e definida positiva, e que aproxime $\nabla^2 f(x^k)$ em algum sentido.

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^t d + \frac{1}{2} d^t B_k d.$$

Alternativas para B_k:

1) quase-Newton (BFGS, DFP)

bons resultados numéricos

2) $B_k = \nabla^2 f(x^k) + \sigma_k I$, onde $\sigma_k \gg 1$ é tal que B_k seja definida positiva.

↳ σ_k: estimativa do menor autovalor de

$\nabla^2 f(x^k)$ ($\uparrow$ custo) ou "discos de Gerschgorin" + heurísticas ($\downarrow$ custo).

$$\min f(x) \longrightarrow \min m(d) \quad \text{s.a. } \|d\| \leq \Delta$$

$$\downarrow$$

$$x^{k+1} = x^k + d^k$$

$f(x^{k+1})$ melhorou em relação à $f(x^k)$?

Critério de aceitação/rejeição do novo ponto

Ponto corrente: x^k

Novo ponto: $x^k + d^k$.

- redução real de f:

$$ared = f(x^k) - f(x^k + d^k)$$

- redução do modelo (redução predita)

$$pred = m(0) - m(d^k)$$

Medida de aceitação

$$\rho_k = \frac{ared}{pred}$$

Situação "boa": ared é grande em relação à pred $\longrightarrow$ ρ_k grande.

Situação "ruim": ared é pequeno em relação à pred $\longrightarrow$ ρ_k pequeno.

Esquema de regiões de confiança

- Dados $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_0 > 0$, $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$, $k=0$
- Repita enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$ $(\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon)$
  - $\rightarrow$ resolva o modelo quadrático centrado em x^k:

$$\begin{aligned} &\min \ m(d) \\ &\text{s.a. } \|d\| \leq \Delta_k \end{aligned}$$

  obtendo d^k
  - $\rightarrow$ calcule ρ_k

→ se $\rho_k > \eta$ (redução boa, aceitamos o ponto)

↳ $x^{k+1} = x^k + d^k$

senão (redução ruim ↳ não damos o passo)

↳ $x^{k+1} = x^k$

se $\rho_k < 1/4$ (redução ruim, reduzimos o raio)

↳ $\Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_k$

senão

↳ se $\rho_k > 3/4$ e $\underbrace{\|d^k\| = \Delta_k}$

↳ $\Delta_{k+1} = 2\Delta_k$

(redução boa e o modelo alcançou a borda da região de confiança → aumentamos o raio)

senão

↳ $\Delta_{k+1} = \Delta_k$

(redução foi boa, mas a borda não foi atingida → o raio atual é adequado)

↳ $k \leftarrow k+1$