Notas de aula – Sistemas Lineares

Esta notas de aula apresentam os principais resultados discutidos em aula, bem como demonstrações e exemplos. Apesar de servirem de apoio, **elas não substituem os livros-texto!**

Uma *equação linear* nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma equação do tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ onde os a_i's e b são escalares. Um *sistema de equações lineares* (ou simplesmente um *sistema linear*) com m equações e n incógnitas é dado por

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Uma *solução* do sistema linear (1) é uma lista de n números $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz cada uma de suas m equações.

Tomando $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, podemos escrever o sistema (1) na forma matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Neste caso, $\mathbf{A}$ é dita *matriz dos coeficientes* de (1); $\mathbf{X}$ é dita *matriz das incógnitas* de (1) e $\mathbf{B}$ é dita *matriz dos termos independentes* de (1). Em particular, se $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ então o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ é dito *sistema homogêneo*. Considerando a forma matricial de um sistema linear, diremos também que a matriz $\mathbf{X}_0$ é *solução* do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se $\mathbf{AX}_0 = \mathbf{B}$.

A matriz

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

é a *matriz ampliada* do sistema (1).

Operações e matrizes elementares

Numa matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, consideramos três operações sobre suas **linhas**:

(i) troca da linha i com a linha j $(i \neq j)$. Indicaremos essa operação por $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) multiplicação da linha i por um número real $k \neq 0$ $(L_i \to kL_i)$.

(iii) substituição da linha i pela linha i somada ao múltiplo k da linha j $(i \neq j)$. Neste caso pode-se ter $k = 0$. Indicaremos essa operação por $L_i \to L_i + kL_j$.

As três operações acima são chamadas *operações elementares.*

Exemplo 1. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

- realizemos a operação elementar $L_1 \leftrightarrow L_2$ sobre $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \to \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar $L_3 \to 2L_3$ sobre $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \to \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar $L_2 \to L_2 + 3L_1$ sobre $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \to \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Definição 1. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{C}$ *matrizes de mesma ordem. Dizemos que* $\mathbf{C}$ *é* ***linha equivalente*** *(ou simplesmente* ***equivalente****) à* $\mathbf{A}$ *se* $\mathbf{C}$ *pode ser obtida de* $\mathbf{A}$ *pela aplicação de finitas operações elementares.*

Assim, no exemplo anterior $\mathbf{C}$ é linha equivalente à matriz $\mathbf{A}$.
O estudo de matrizes equivalentes é útil na resolução de sistemas lineares.

Teorema 1. *Dois sistemas lineares cujas matrizes ampliadas são linha equivalentes têm mesmas soluções (sistemas equivalentes).*

Em outras palavras, o Teorema anterior afirma que ao aplicarmos operações elementares sobre a matriz ampliada de um sistema, mantemos soluções do sistema. Logo, podemos resolver um sistema linear transformando-o em um sistema mais fácil, como no exemplo a seguir. **Essa é a justificativa para o processo de escalonamento.**

Exemplo 2. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & & +x_3 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Apliquemos operações elementares em sua matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to 1/2 L_1]{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{L_1 \to L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \to 1/2 L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] = [\mathbf{C}|\mathbf{D}].$$

O sistema $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ dado por

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 3/2 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1/2 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema original S, e claramente tem única solução $(3/2, 1, -1/2)$. Portanto o sistema inicial S tem esse terno como única solução. □

A última matriz $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$ do exemplo anterior tem uma forma interessante pois o sistema associado é de fácil resolução. A fim de resolver sistemas lineares de uma forma geral, procuraremos formalizar a estrutura dessa matriz.

Definição 2. *Uma matriz* $\mathbf{A}$ *de ordem* $m \times n$ *está na* ***forma escalonada reduzida por linhas*** *(FERL) satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *O primeiro elemento não nulo (da esquerda para a direita) de uma linha não nula é* 1 *(esse é o* elemento pivô/líder *da linha);*

(ii) *Cada coluna que contém o pivô de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos;*

(iii) *Toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;*

(iv) *Em duas linhas consecutivas não nulas, o pivô da primeira linha ocorre à esquerda do pivô da segunda linha (forma escada).*

Exemplo 3. Estão na FERL:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{I}_n$
- $\mathbf{0}_{m \times n}$

□

Teorema 2. *Toda matriz* $\mathbf{A}$ *é linha equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida por linhas.*

O Teorema acima diz que o processo de escalonamento feito no exemplo anterior é universal: ele **sempre** é possível, para **qualquer** sistema linear.

Relacionaremos agora operações elementares com produtos de matrizes.

Definição 3. *Uma matriz* $\mathbf{A}$ *quadrada de ordem* n *é dita* ***elementar*** *se pode ser obtida da identidade* I_n *por uma única operação elementar.*

Exemplo 4. São exemplos de matrizes elementares:

- $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \leftrightarrow L_2$ sobre a matriz identidade I_3)
- $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \to 2L_1$ sobre I_2)
- $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2$ sobre I_3)

$\square$

Quando convenienete, denotaremos por $e(\mathbf{A})$ a matriz resultante da aplicação da operação elementar e sobre a matriz $\mathbf{A}$.

Teorema 3. *Seja* e *uma operação elementar e* $\mathbf{E} = e(\mathbf{I}_m)$ *a matriz elementar correspondente. Então para toda matriz* $\mathbf{A}$ *de ordem* $m \times n$ *temos*

$$e(\mathbf{A}) = \mathbf{EA}.$$

Em outras palavras, o Teorema 3 diz que aplicar uma operação elementar em $\mathbf{A}$ é o mesmo que multiplicar $\mathbf{A}$ a esquerda pela matriz elementar correspondente.

Cada matriz elementar é inversível, e sua inversa é a **matriz elementar correspondente à operação que desfaz** a original:

- a operação $L_i \to \frac{1}{k}L_i$ desfaz a operação $L_i \to kL_i$. Assim por exemplo, se $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ então $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$ (verifique este fato constatando que $\mathbf{EE}^{-1} = \mathbf{I}_2$).
- a operação $L_i \to L_j$ desfaz a própria operação $L_i \to L_j$. Assim por exemplo, se $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$ (verifique!).
- a operação $L_i \to L_i - kL_j$ desfaz a operação $L_i \to L_i + kL_j$. Assim por exemplo, se $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ então $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (verifique!).

Atividade 1. Faça exemplos de inversas de matrizes elementares de ordem 3. Mostre que em geral matrizes elementares tem inversas descritas anteriormente.

Uma consequência imediata do Teorema 3 é o seguinte:

Corolário 1. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes de mesma ordem. Então* $\mathbf{B}$ *é linha equivalente a* $\mathbf{A}$ *se, e somente se* $\mathbf{B} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ *para certas matrizes elementares* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$.

Exemplo 5. Mostre que são linha equivalentes as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular a FERL de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to 1/3 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, sendo $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ as matrizes elementares correspondentes às operações realizadas, temos

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}.$$

Agora, calculemos a FERL de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to 1/9 L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to 1/6 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Sendo $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$ temos

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{B},$$

e assim $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{B} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{B} = \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_4^{-1}\mathbf{E}_1\mathbf{A}$. Pelo Corolário anterior, $\mathbf{B}$ é linha equivalente à $\mathbf{A}$. $\square$

Em particular, se $\mathbf{B}$ é matriz quadrada de ordem n, linha equivalente à $\mathbf{I}_n$, então $\mathbf{B} = \mathbf{E}_k\cdots\mathbf{E}_1\mathbf{I}_n$. O produto $\mathbf{E}_k\cdots\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}$ é inversível com inversa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\cdots\mathbf{E}_k^{-1}$ (verifique!). Assim, $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$, e $\mathbf{B}$ é inversível com inversa $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\cdots\mathbf{E}_k^{-1}$. **Concluímos então que se $\mathbf{B}$ é linha equivalente à $\mathbf{I}_n$** (ou equivalentemente, se $\mathbf{B}$ é produto de matrizes elementares) **então $\mathbf{B}$ é inversível.**

A recíproca deste fato também é verdadeira, isto é, se $\mathbf{B}$ é inversível então é linha equivalente a $\mathbf{I}_n$. Resumindo esse fato e considerando o Corolário 1, temos o

Teorema 4. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada de ordem* n. *São equivalentes as afirmações:*

(*i*) $\mathbf{A}$ *é inversível.*

(*ii*) $\mathbf{A}$ *é linha equivalente à* $\mathbf{I}_n$.

(*iii*) $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k\cdots\mathbf{E}_1$, *para certas matrizes elementares* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$.

Com as operações e matrizes elementares, estabeleceremos uma maneira de

1. Resolver um sistema linear;

2. Inverter uma matriz, ou constatar que não há inversa.

Veremos isso nas seções seguintes.

Resolução de sistemas lineares

A possibilidade de simplificação da matriz ampliada de um sistema linear para a forma reduzida, garantida pelo Teorema 2, resulta em um processo sistemático para resolução de qualquer sistema linear.

Este processo (de escalonamento) nos fornecerá:

- as soluções do sistema, caso existam;
- se o sistema possui única ou várias soluções;
- se o sistema não possui solução.

O estudo da quantidade/existência de soluções está relacionado com a noção de *posto* e *nulidade* das matrizes associadas ao sistema linear.

Definição 4. *Dada uma matriz* $\mathbf{A}$ *de ordem* $m \times n$*, seja* $\mathbf{B}$ *sua FERL. Então o* ***posto*** *de* $\mathbf{A}$ *é o número de linhas não nulas de* $\mathbf{B}$*. A* ***nulidade*** *de* $\mathbf{A}$ *é o número* $n - p$*, onde* p *é o posto de* $\mathbf{A}$*.*

Exemplo 6. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$. A FERL de $\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto o posto de $\mathbf{A}$ é 2, e a nulidade de $\mathbf{A}$ é $3 - 2 = 1$. □

Exemplo 7. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$. A FERL de $\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto o posto de $\mathbf{A}$ é 2, e a nulidade de $\mathbf{A}$ é $3 - 2 = 1$. □

Teorema 5. *Seja* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *um sistema linear, com* m *equações e* n *incógnitas (*$\mathbf{A}$ *tem ordem* $m \times n$*). Então*

(*i*) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada* $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ *é igual ao posto da matriz dos coeficientes* $\mathbf{A}$*.*

(*ii*) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ *têm mesmo posto* $p = n$ *então* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *tem única solução.*

(*iii*) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ *têm mesmo posto* $p < n$ *então* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *tem infinitas soluções. Dizemos neste caso que a nulidade de* $\mathbf{A}$ *é o* grau de liberdade *de* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$*.*

Exemplo 8. Para cada sistema linear abaixo, diga se há ou não solução e, caso possua, se é única, infinitas; neste caso, calcule-as (faremos durante a aula):

(a) $S : \begin{cases} 2x_1 \ +4x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\quad x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

Calculemos a FERL da matriz ampliada do sistema, escalonando-a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_2]{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vemos que o número de linhas não nulas da FERL da matriz ampliada e da FERL da matriz dos coeficientes (as três primeiras colunas da última matriz acima) são iguais a 3. Ou seja,

$$p = \text{posto}\,[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \text{posto}\,\mathbf{A} = 3 = n.$$

Pelo Teorema 5(ii), o sistema S admite única solução. O sistema equivalente, associado à FERL da ampliada, é

$$S' : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & -5 \\ & x_2 & & = & 3 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array} \right. ,$$

cuja solução é $\mathbf{X} = (-5, 3, 1)$. Geometricamente, o sistema original S é a interseção de três planos 2 a 2 não paralelos.

(b) $S : \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ & +x_2 & +x_3 & & = & 2 \end{array} \right.$

Primeiro escalonamos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Vemos que o número de linhas não nulas na matriz ampliada escalonada é 3, igual ao número de linhas não nulas da matriz dos coeficientes escalonada (as quatro primeiras colunas da última matriz acima). Ou seja,

$$p = \text{posto}\,[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \text{posto}\,\mathbf{A} = 3 < 4 = n.$$

Pelo Teorema 5(iii), o sistema S admite infinitas soluções. Para encontrá-las, consideramos o sistema escalonado, proveniente da forma reduzida da matriz ampliada,

$$S' : \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & -x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ & & +x_3 & -2x_4 & = & 1 \end{array} \right. ,$$

cujo *conjunto solução* é

$$\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4 \mid X = (\,-1 + x_4\,,\ 1 - 2x_4\,,\ 1 + 2x_4\,,\ x_4\,),\ x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Veja que a nulidade desse sistema é $n - p = 1$, o que indica que temos “1 grau de liberdade”, isto é, podemos escolher *qualquer* valor para uma das variáveis (no conjunto acima, x_4), obtendo várias soluções. Assim, x_4 faz o papel de variável livre, enquanto as demais estão em função de x_4.

É interessante observar a geometria do conjunto solução: trata-se de uma reta em $\mathbb{R}^4$, passando pelo ponto $(-1, 1, 1, 0)$ na direção do vetor $(1, -2, 2, 1)$.

(c) $S : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & = & 0 \end{array} \right.$

Escalonemos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{2}L_2]{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, as matrizes reduzidas à forma escalonada da ampliada e da matriz dos coeficientes são, respectivamente,

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

Essas matrizes têm posto diferente: a primeira tem posto 3, e a segunda, 2. Do Teorema 5(i), concluímos que o sistema S não possui solução.

□

Um processo para inversão de matrizes

Sabemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é inversível se, e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}$, onde $\mathbf{E}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{E}_k^{-1}$ são matrizes elementares. Neste caso,

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{I}.$$

Assim, aplicando as operações elementares relativas às matrizes elementares $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$ sobre $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, obtemos a sequência

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \xrightarrow{\mathbf{E}_1} [\mathbf{E}_1\mathbf{A}|\mathbf{E}_1\mathbf{I}] \xrightarrow{\mathbf{E}_2} \cdots \xrightarrow{\mathbf{E}_k} [\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A}|\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}].$$

Em outras palavras, $\mathbf{A}$ é inversível se, e somente se $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ é linha equivalente a uma matriz $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$, e neste caso $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S}$.

Exemplo 9. Calcular a inversa de cada matriz abaixo, se existir.

(a) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_2]{L_2 \to L_2 - L_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}]{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \to 1/2L_3 \\ L_1 \to L_1 + L_3}]{L_2 \to 1/2L_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right].$$

Logo $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\left[\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Observe que a FERL de $\mathbf{B}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$, e daí $\mathbf{B}$ não é inversível.

□

Demonstrações

Demonstração do Teorema 1. Seja $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ um sistema linear. É suficiente mostrar que cada uma das três operações elementares sobre $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ resulta num sistema linear $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ com as mesmas soluções de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Façamos a prova para a operação $L_i \to L_i + kL_j$ $(i \neq j)$; as outras trivialmente não alteram as soluções do sistema linear. Supomos que ao realizar a operação $L_i \to L_i + kL_j$ sobre $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$, obtemos a matriz linha equivalente $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$. Comparando os sistemas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$, vemos que a única diferença está na linha i:

- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ é a linha i de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$;
- $(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = (b_i + kb_j)$ é a linha i de $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$;

Então,

$$\begin{gathered}
(x_1, \dots, x_n) \text{ é solução de } \mathbf{CX} = \mathbf{D} \\
\Updownarrow \\
(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = (b_i + kb_j), \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
\Updownarrow \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i - k\underbrace{(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - b_j)}_{0}, \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
\Updownarrow \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \\
\Updownarrow \\
(x_1, \dots, x_n) \text{ é solução de } \mathbf{AX} = \mathbf{B},
\end{gathered}$$

isto é, $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ e $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ têm as mesmas soluções. □

Demonstração do Teorema 3. Deixamos a prova do resultado para as operações $L_i \leftrightarrow L_j$ e $L_i \to kL_i$ para o leitor. Seja e a operação $L_i \to L_i + kL_j$ $(i \neq j)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $i = 1$ e $j = 2$. Assim

$$\mathbf{EA} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} & \cdots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = e(\mathbf{A}).$$

□

Notas

O método de resolução de sistemas lineares visto em aula é conhecido como **método da eliminação de Gauss-Jordan**. O **método do escalonamento**, ou **método da eliminação de Gauss** é similar à eliminação de Gauss-Jordan, mas só zera os elementos abaixo dos pivôs.

Resolver sistemas lineares numericamente é uma necessidade frequente: aparece em computação gráfica, otimização, resolução de equações diferenciais etc.

A ideia de escalonar um sistema é muito antiga, data, pelo menos, do século 18. A eliminação de Gauss ou Gauss-Jordan consiste em uma maneira sistemática, implementável em computador, para resolução de sistemas lineares quaisquer usando as 3 operações elementares sobre linhas da matriz ampliada do sistema. As operações são aplicadas de forma ordenada, de modo que os zeros na matriz ampliada apareçam primeiro nas colunas à esquerda, depois nas colunas à direita.

Mas, e daí?

Daí que, por incrível que pareça, a ideia deste método resiste até hoje em pacotes computacionais modernos. Talvez o exemplo mais famoso seja a "rotina MA57". Esta rotina é usada em inúmeros métodos computacionais de hoje em dia, e é considerada como uma espécie de "padrão de qualidade" na resolução de sistemas. Evidentemente, os métodos implementados nas rotinas modernas são versões melhoradas daquele exposto aqui; eles envolvem, por exemplo, técnicas "espertas" para escolha de operações elementares, e os chamados pré-condicionadores.

Você pode consultar a implementação em Fortran da MA57 de um grande grupo de pesquisa do Reino Unido em `http://www.hsl.rl.ac.uk/catalogue/ma57.html`. A descrição do pacote diz que ele implementa uma variante do método da eliminação de Gauss. A última versão deste pacote é de 2023, e baseia-se em um artigo científico de 1983. É certo que artigos científicos foram publicados em revistas especializadas este ano usando esta rotina. Ou seja, a ideia de escalonar uma matriz está presente na pesquisa de ponta até hoje.