MÉTODO DE NEWTON

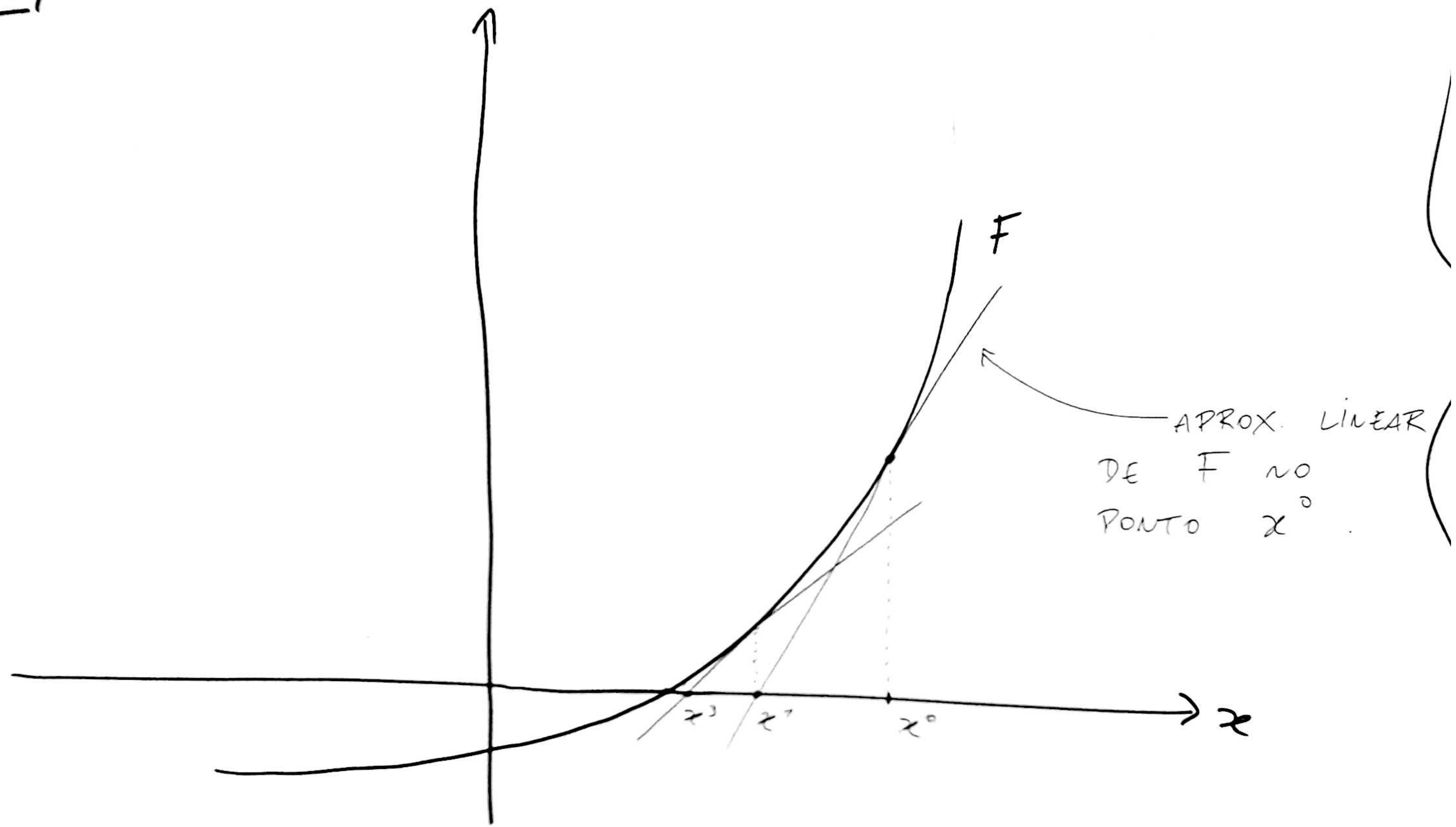
- RESOLVE SISTEMAS NÃO LINEARES DE EQUAÇÕES

$$F(x) = 0,$$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1.

- O INTERESSE EM OTIMIZAÇÃO É RESOLVER $F(x) = \nabla f(x) = 0$.

$\boxed{n=1}$



IDEIA: TROCAR O PROBLEMA COMPLICADO $F(x) = 0$ POR UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS FÁCEIS.

QUE PROBLEMAS FÁCEIS?

RESOLVER O SISTEMA QUE ANULA APROXIMAÇÕES LINEARES.

APROX. LINEAR NO PONTO x^k:

$$F'(x^k)(x - x^k) + F(x^k) = 0.$$

O ITERANDO x^{k+1} É SOLUÇÃO DESSE SISTEMA LINEAR.

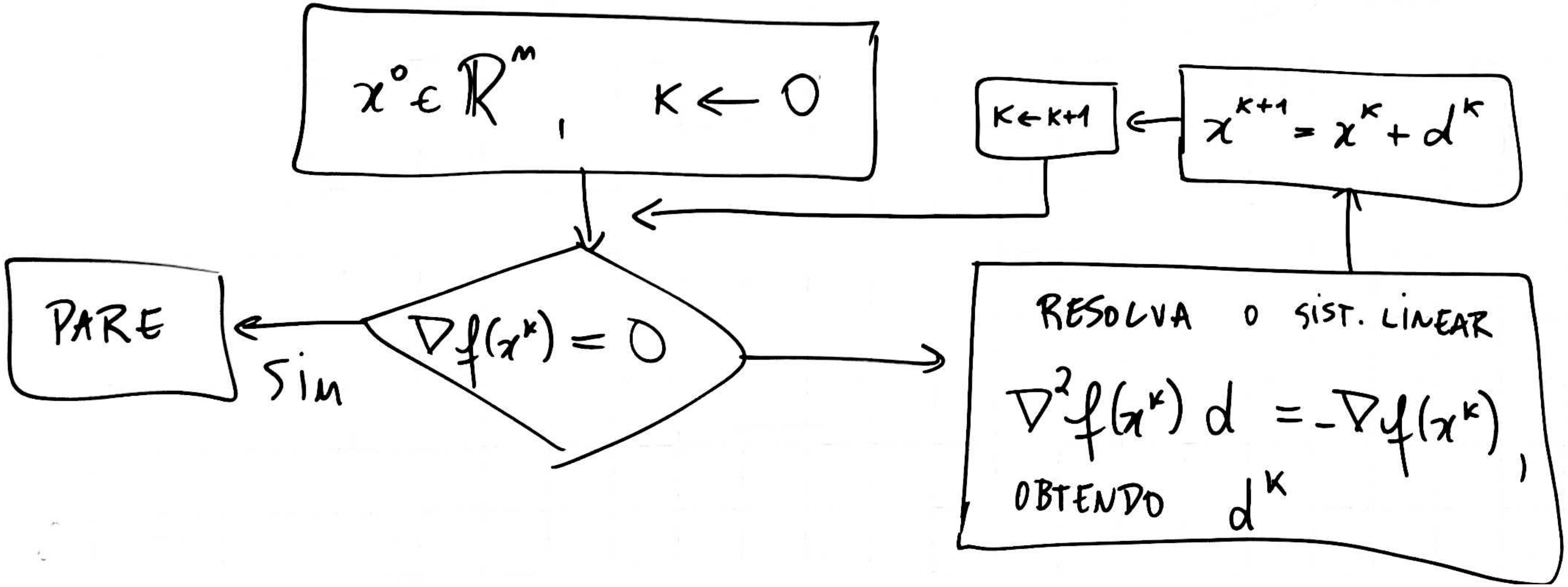
$$F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -F(x^k).$$

TOMANDO $d^k = x^{k+1} - x^k$ $\left(\iff x^{k+1} = x^k + d^k\right)$, A DIREÇÃO NEWTONIANA É DADA POR

$$\nabla^2 f(x^k)\, d^k = -\nabla f(x^k)$$

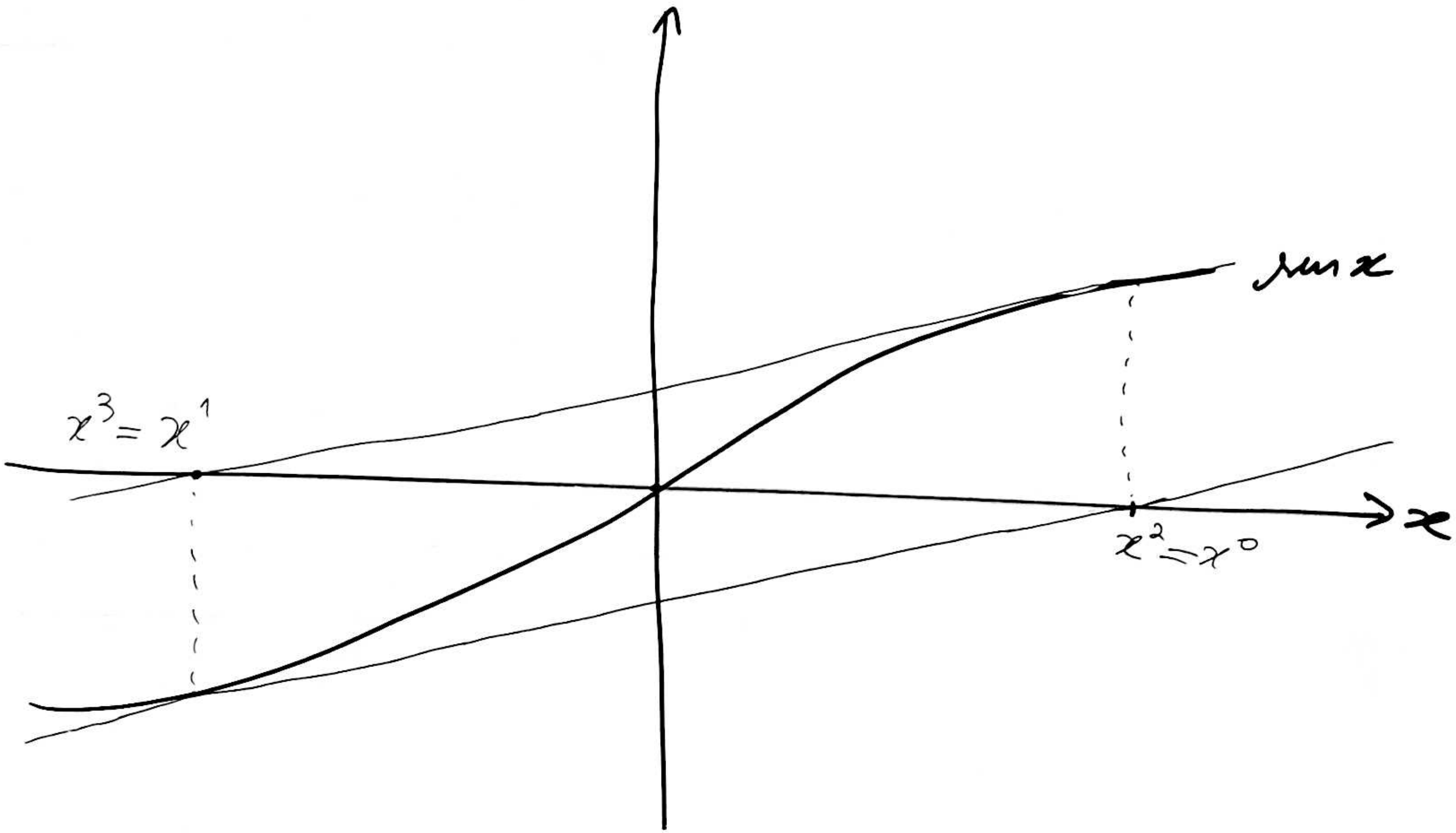
$$\left(\iff d^k = -\left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k)\right)$$

MÉTODO DE NEWTON (PURO)



EXEMPLO: $f(x) = -\cos x$

QUERO RESOLVER $f'(x) = \operatorname{sen} x = 0$. $\left(f''(x) = \cos x \right)$



(O MÉTO DE NEWTON PODE OSCILAR!)

PASSO DE NEWTON: DADO x^k, RESOLVER

$$f''(x^k)\, d = -f'(x^k)$$

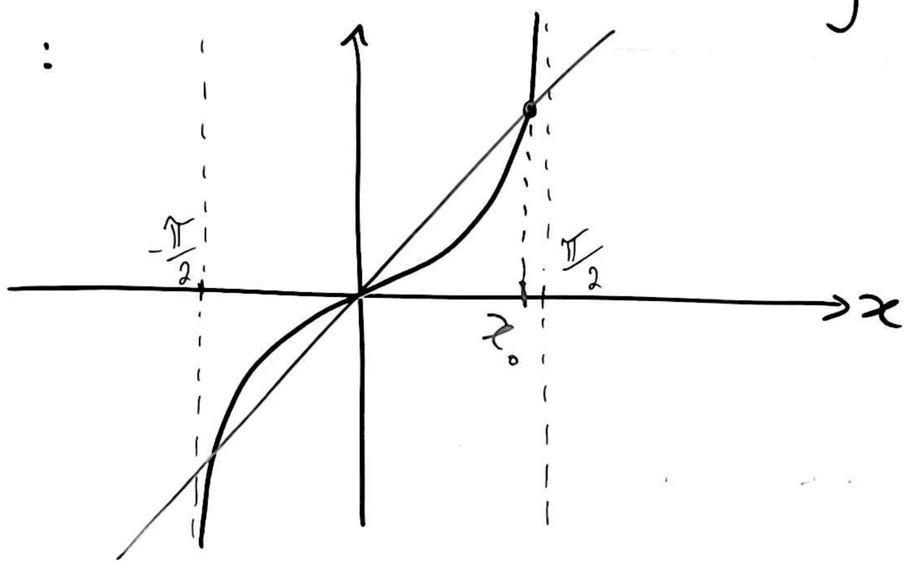
$$\iff (\cos x^k)\, d = -\operatorname{sen} x^k$$

$$\iff d^k = -\operatorname{tg} x^k$$

$$\implies x^{k+1} = x^k - \operatorname{tg} x^k .$$

TOME $x^0 \neq 0$ TAL QUE $\operatorname{tg} x^0 = 2x^0$.

x^0 EXISTE:



DAÍ,

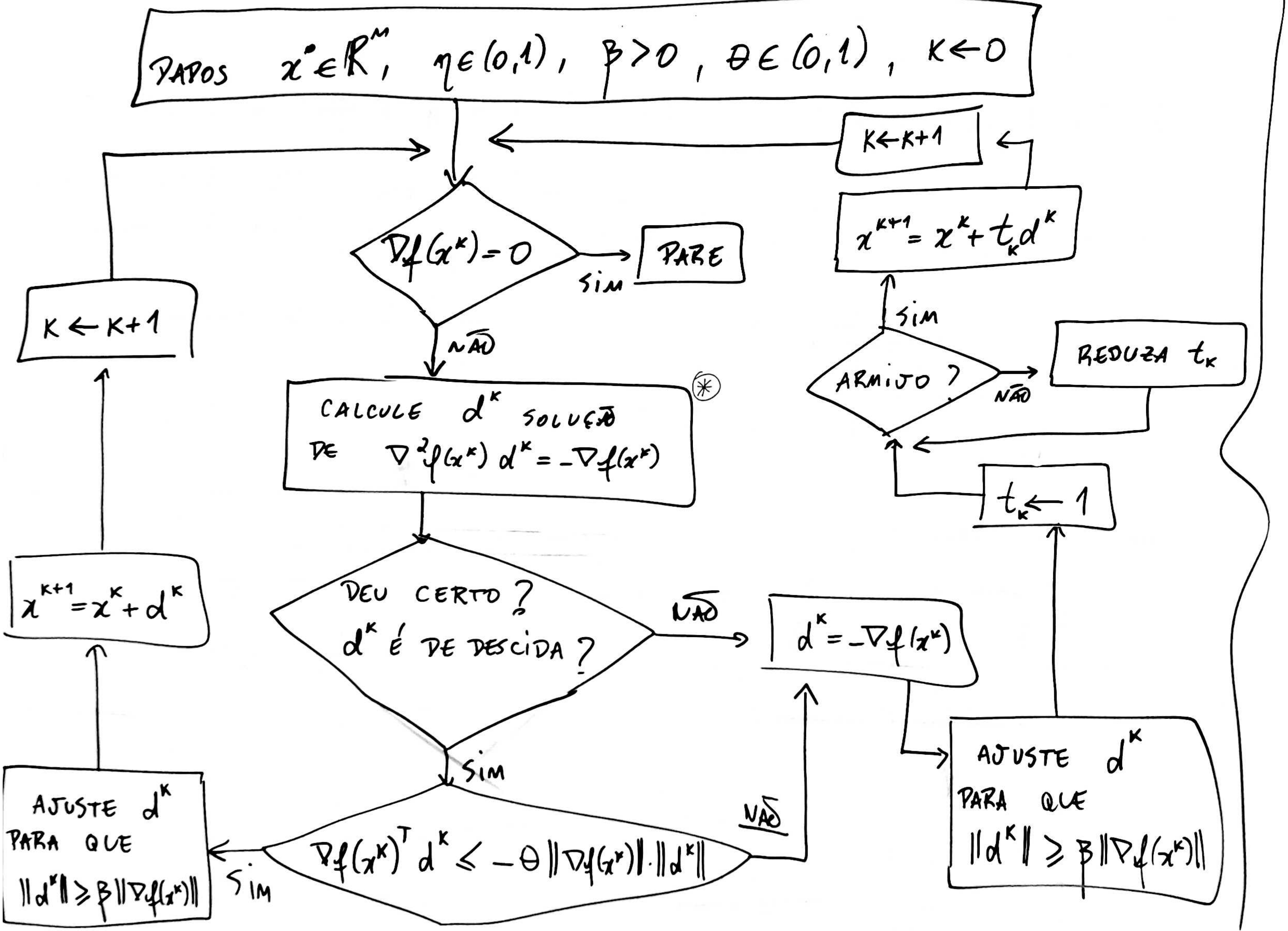
$$x^1 = x^0 - tg\, x^0 = x^0 - 2x^0 = -x^0 \; ;$$

$$x^2 = x^1 - tg\, x^1 = -x^0 - tg(-x^0) = -x^0 + tg\, x^0 = x^0$$

$$x^3 = -x^0 \, , \quad x^4 = x^0 \, , \; \ldots$$

ESSE EXEMPLO MOSTRA QUE O MÉTODO DE NEWTON <u>NÃO</u> CONVERGE GLOBALMENTE.

<u>SOLUÇÃO</u>: COLOCAR NEWTON NO ESQUEMA DE DESCIDA GERAL, QUE POSSUI CONVERGÊNCIA GLOBAL !!!



DADOS $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\theta \in (0,1)$, $k \leftarrow 0$
$\nabla f(x^k) = 0$
SIM
PARE
NÃO
CALCULE d^k SOLUÇÃO DE $\nabla^2 f(x^k)\, d^k = -\nabla f(x^k)$
(*)
DEU CERTO? d^k É DE DESCIDA?
NÃO
$d^k = -\nabla f(x^k)$
SIM
$\nabla f(x^k)^T d^k \leq -\theta \|\nabla f(x^k)\| \cdot \|d^k\|$
SIM
NÃO
AJUSTE d^k PARA QUE $\|d^k\| \geq \beta \|\nabla f(x^k)\|$
$x^{k+1} = x^k + d^k$
$k \leftarrow k+1$
AJUSTE d^k PARA QUE $\|d^k\| \geq \beta \|\nabla f(x^k)\|$
$t_k \leftarrow 1$
ARMIJO?
NÃO
REDUZA t_k
SIM
$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
$k \leftarrow k+1$

COMO RESOLVER (*) NA PRÁTICA ?

- $\nabla^2 f(x^*)$ É SIMÉTRICA
- SE $\nabla^2 f(x^k)$ FOR DEFINIDA POSITIVA, EXISTE A CHAMADA "FATORAÇÃO DE CHOLESKY". ISTO É, É POSSÍVEL ESCREVER

$$\nabla^2 f(x^k) = GG^T,$$

ONDE G É TRIANGULAR INFERIOR COM DIAGONAL POSITIVA. ASSIM, DEVEMOS RESOLVER

$$G\underbrace{G^T d^k} = -\nabla f(x^k).$$

RESOLVA 2 SISTEMAS TRIANGULARES:

$$Gy = -\nabla f(x^k), \qquad G^T d^k = y.$$

• PARA $n \gg 1$, É MELHOR UTILIZAR UM MÉTODO ITERATIVO PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES. (GRADIENTES CONJUGADOS).

"SORTE": AMBAS AS ESTRATÉGIAS IDENTIFICAM SE $D^2 f(x^k)$ NÃO É DEFINIDA POSITIVA.

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

QUERO RESOLVER $Ad = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

FATORAÇÃO DE CHOLESKY:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{G^T}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ ac = 3 \\ c^2 + b^2 = 5 \end{cases} \qquad \boxed{a=3, \quad c=1 \quad e \quad b=2.}$$

ENTÃO

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

RESOLVENDO $Ad = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{y} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>1° SISTEMA</u>:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3}, \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

<u>2° SISTEMA</u>: $(G^T d = y)$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} d_1 = -\frac{1}{18} \\ d_2 = -1/6 \end{cases}$$

//