LAGRANGEANO AUMENTADO (CONVERGÊNCIA)

TEOREMA: SEJAM $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO, E x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO VIÁVEL PARA P.

SE $g_j(x^*) < 0$ ENTÃO

$$\mu_j^{k+1} = \left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k)\right)_+ \quad , \quad \forall k \gg 1.$$

PROVA: AULA PASSADA ∎

$$P: \min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x) = 0 \ , \ g(x) \leq 0 .$$

O MÉTODO DE L.A. ENCONTRA

- PONTOS KKT DE P SE x^* É VIÁVEL.
- PONTOS KKT DA INVIABILIDADE.

ESPECIFICAMENTE:

<u>TEOREMA</u>: SEJAM $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO, E x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO.

(a) SE x^* FOR VIÁVEL PARA P E <u>REGULAR</u>, ENTÃO x^* É PONTO KKT DE P.

(b) x^* É PONTO KKT DO PROBLEMA DA INVIABILIDADE

$$\min_x \ \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 .$$

PROVA:

(a) O MÉTODO RESOLVE SUBPROBLEMAS

$$SP(\rho_k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k): \ \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} + h_i(x)\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\bar{\mu}_j^k}{\rho_k} + g_j(x)\right)_+^2\right].$$

OU SEJA, A SEQUÊNCIA GERADA $\{x^k\}$ SATISFAZ

$$\left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)\right)}_{\lambda^{k+1}} \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k)\right)_+}_{\mu^{k+1}} \nabla g_j(x^k) \right\| \leq \varepsilon_k \downarrow 0 \qquad (1)$$

ASSIM, A SOMA NA NORMA TENDE A ZERO.

VAMOS ARGUMENTAR QUE AS ESTIMATIVAS $\{(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\}$ SÃO LIMITADAS. DE FATO, DEFINIMOS

$$\delta^{k+1} = \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|_\infty, \quad \forall k.$$

SUPOMOS POR CONTRADIÇÃO QUE $\delta^{k+1} \longrightarrow \infty$. DIVIDINDO (1) POR δ^{k+1}, OBTEMOS

$$\underbrace{\frac{\nabla f(x^k)}{\delta^{k+1}}}_{\to 0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^{k+1}}{\delta^{k+1}} \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu^{k+1}}{\delta^{k+1}} \nabla g_j(x^k) \longrightarrow 0.$$

PELA DEFINIÇÃO DE δ^{k+1}, CONSEGUIMOS EXTRAIR UMA SUBSEQUÊNCIA COM ÍNDICES EM $K \subset \mathbb{N}$, TAL QUE

$$\left\{\frac{\lambda_i^{k+1}}{\delta^{k+1}}\right\}_{k\in K} \to 1 \quad \text{PARA ALGUM } i$$

OU $$\left\{\frac{\mu_j^{k+1}}{\delta^{k+1}}\right\}_{k\in K} \to 1 \quad \text{PARA ALGUM } j$$

OBSERVE QUE PELO TEOREMA ANTERIOR, ESSES TAIS j'S, SE EXISTIREM, SÃO TAIS QUE $g_j(x^*) = 0$.

PASSANDO O LIMITE, OBTEMOS ENTÃO

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j:\, g_j(x^*)=0} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0,$$

ONDE PELO MENOS UM DOS TERMOS λ_i^* OU μ_j^* SÃO 1.

MAS ISSO CONTRARIA O FATO DE x^* SER REGULAR.

LOGO $\{\delta^{k+1}\}$ É LIMITADA.

COMO $\{\delta^{k+1}\}$ É LIMITADA, AS SEQUÊNCIAS $\{\lambda_i^{k+1}\}$ E $\{\mu_j^{k+1}\}$ POSSUEM PONTOS DE ACUMULAÇÃO, DIGAMOS

$$\lambda_i^* = \lim_{k \in K'} \lambda_i^{k+1}, \quad \forall i, \qquad \mu_j^* = \lim_{k \in K'} \mu_j^{k+1}, \quad \forall j.$$

PASSANDO O LIMITE EM (1), OBTEMOS

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

DO TEOREMA ANTERIOR, $\mu_j^{k+1} = 0 \ \forall k \gg 1$ SEMPRE QUE $g_j(x^*) < 0$.
ASSIM, $\mu_j^* = 0$ SEMPRE QUE $g_j(x^*) < 0$. OU SEJA, x^* É KKT.

(b) QUEREMOS PROVAR QUE, EM GERAL, x^* É KKT DE

$$\min_x \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2.$$

CASO 1: $\{\rho_k\}$ É LIMITADA.

NESTE CASO, O TESTE DE ADMISSIBILIDADE DEU CERTO $\forall k \gg 1$. ISTO É,

$$\max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\},$$

$\forall k \gg 1$, ONDE $\tau < 1$ E

$$V_j^k = \min\{\bar{\mu}_j^k, -g_j(x^k)\}.$$

EM PARTICULAR,

$$\lim_{k} \| h(x^k) \|_\infty = 0 ,$$

OU SEJA, $h(x^*) = 0$. TAMBÉM,

$$\lim_{k} \| V^k \|_\infty = 0 .$$

SE $g_j(x^*) > 0$ ENTÃO

$$g_j(x^k) \geq \frac{g_j(x^*)}{2} > 0 \quad , \forall k \gg 1 .$$

DAÍ,

$$V_j^k \leq -g_j(x^k) \leq -\frac{g_j(x^*)}{2} < 0 \; , \; \forall k \gg 1 .$$

DESTA FORMA TERÍAMOS $V_j^k \not\to 0$, UM ABSURDO. CONCLUÍMOS ASSIM QUE $g_j(x^*) \leq 0$. OU SEJA, x^* É VIÁVEL.

NESTE CASO, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE

$$\min \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2,$$

E LOGO É KKT DESTE PROBLEMA.

<u>CASO 2:</u> $\rho_k \longrightarrow \infty$.

DO MÉTODO,

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} (\bar{\lambda}^k + \rho_k h_i(x^k)) \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} (\bar{\mu}^k + \rho_k g_j(x^k))_+ \nabla g_j(x^k) \longrightarrow 0$$

DIVIDINDO POR ρ_k E PASSANDO O LIMITE,

$$\sum_{i=1}^{m} 2 h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} 2 g_j(x^*)_+ \nabla g_j(x^*) = 0$$

OU SEJA, O GRADIENTE DA F.O.

$$\|h(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (h_i(x))^2 + \sum_{j=1}^{p} (g_j(x))_+^2$$

SE ANULA EM x^* (x^* É KKT DESTE PROBLEMA) $\blacksquare$