PENALIZAÇÃO EXTERNA

REFERÊNCIA: CAP 2 DE MARTINEZ. OTIMIZAÇÃO PRÁTICA USANDO O LAGRANGEANO AUMENTADO. CAMPINAS, 2009 (?)

(REF. COMPLEMENTAR – SÍTIO DA DISCIPLINA)

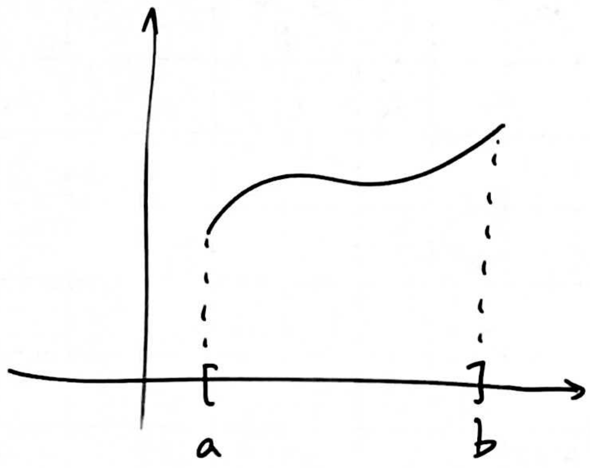
$$P: \min f(x)$$
$$\text{s.a. } h(x) = 0$$
$$g(x) \leq 0$$
$$x \in D$$

ONDE $D \subset \mathbb{R}^n$ É UM CONJUNTO LIMITADO E FECHADO (COMPACTO).

HIPÓTESE: P TEM SOLUÇÃO (P É VIÁVEL)

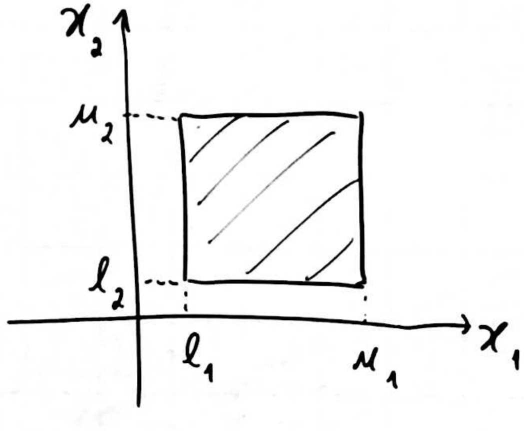
D COMPACTO $\Rightarrow$ P TEM MINIMIZADOR GLOBAL.

(TEOREMA DE WEIERSTRASS).



- $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$: RESTRIÇÕES "DIFÍCEIS".
- $x \in D$: RESTRIÇÕES "FÁCEIS".

P. EX. $D = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ l_i \leq x_i \leq u_i , \forall i \}$.



IDEIA DA PENALIZAÇÃO EXTERNA: TRATAR AS RESTRIÇÕES DIFÍCEIS COLOCANDO-AS NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\min \; f(x) + \frac{\rho}{2}\Big[\underbrace{\|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x),0\}\|^2}_{\phi(x)}\Big]$$

$$\text{s.a. } x \in D.$$

$$\phi(x) = 0 \iff h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0.$$

"x É VIÁVEL".

ϕ: MEDIDA DE INVIABILIDADE.

EXEMPLO: $h(x) = x_1 + x_2^2 = 0$, $g(x) = 2x_1 + x_2 \leqslant 0$.

$$\phi(x) = \| h(x) \|^2 + \| \max\{ g(x), 0 \} \|^2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = | x_1 + x_2^2 |^2 + | \max\{ 2x_1 + x_2, 0 \} |^2 .$$

$\tilde{x} = (-1, 1)$: $\phi(\tilde{x}) = | -1 + 1^2 |^2 + | \max\{ -2 + 1, 0 \} |^2$

$$\Rightarrow \phi(\tilde{x}) = 0 \quad ✓ .$$

$\tilde{x}$ É VIÁVEL !

$\hat{x} = (1, 0)$: $\phi(\hat{x}) = | 1 + 0^2 |^2 + | \max\{ 2 + 0, 0 \} |^2 = 5 > 0$

$\hat{x}$ <u>NÃO</u> É VIÁVEL !

$\bar{x} = (-0{,}99, 1)$: $\phi(\bar{x}) = | -0{,}99 + 1^2 |^2 + | \max\{ 2(-0{,}99) + 1, 0 \} |^2 = 10^{-4} .$

$\hat{x}$ É "MAIS INVIÁVEL" DO QUE $\bar{x}$. //

<u>IDEIA DA ESTRATÉGIA</u>: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS

$$SP(\rho_k): \min \; f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2\right]$$
$$\text{s.a. } x \in D$$

COM $\rho_k \longrightarrow \infty$.

À MEDIDA QUE ρ_k CRESCE, OS MINIMIZADORES DE $SP(\rho_k)$ FICAM "MAIS VIÁVEIS", POIS A PARCELA $\phi(x)$ SE TORNA MAIS RELEVANTE NA MINIMIZAÇÃO.

ρ_k: PARÂMETRO DE PENALIZAÇÃO.

EXEMPLO:
$$\min\ x \quad \text{s.a.}\ -x \leq 0. \qquad D = \mathbb{R}.$$

SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k): \quad \min\ x + \frac{\rho_k}{2} \left| \max\{-x, 0\} \right|^2$$
$$\text{s.a.}\ x \in \mathbb{R}.$$

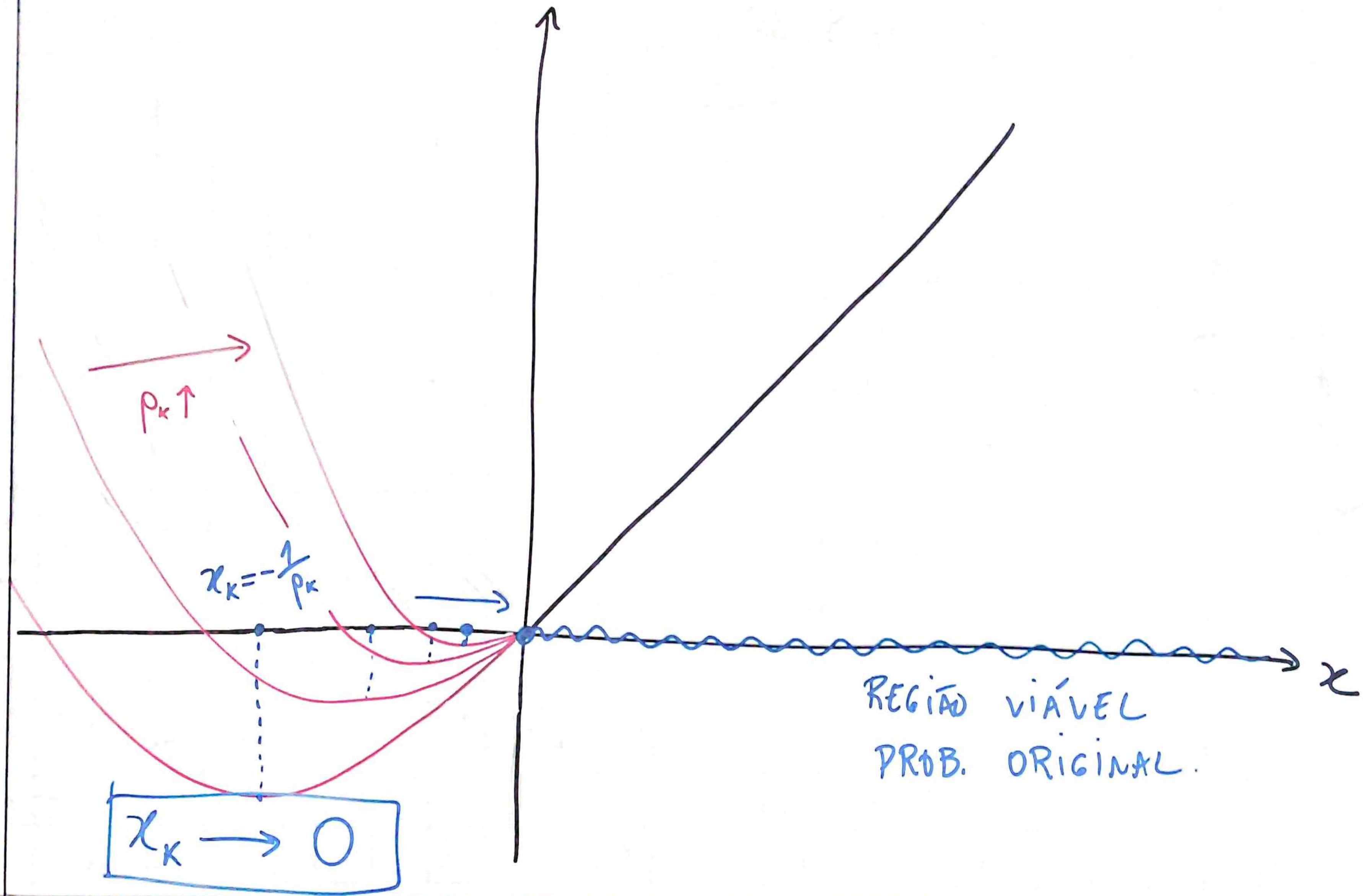
RESOLVENDO $SP(\rho_k)$:

SE $x < 0$ ENTÃO $\max\{-x, 0\} = -x$. O SUBPROB. FICA

$$\min\ x + \frac{\rho_k}{2} x^2.$$

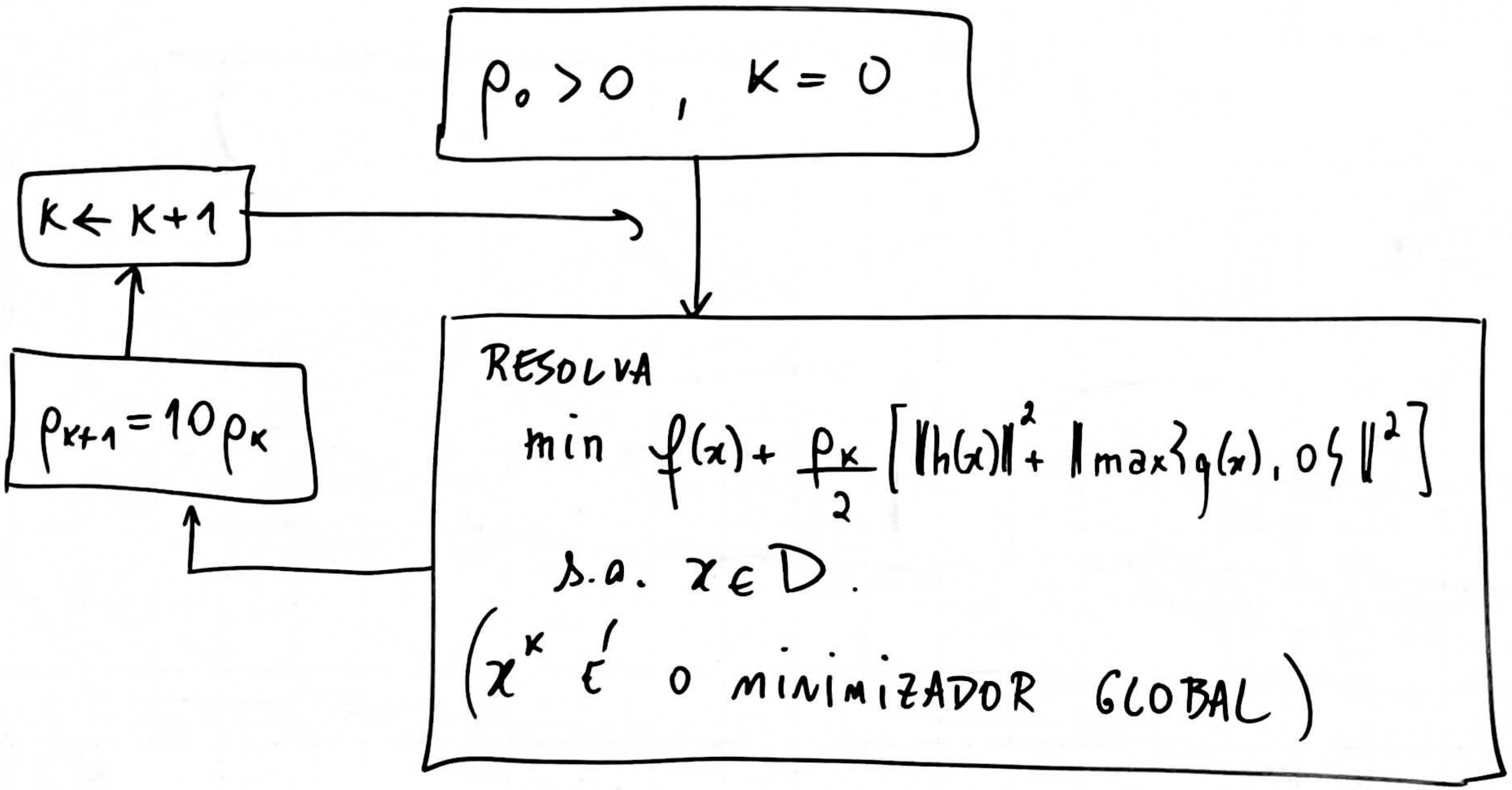
RESOLVENDO, $1 + \rho_K x_K = 0 \Rightarrow x_K = -\dfrac{1}{\rho_K} < 0.$

(DE FATO, x_K É NEGATIVO)



"EXTERNA" VEM DO FATO DOS ITERANDOS x^k ESTAREM FORA DO CONJUNTO VIÁVEL. NO EXEMPLO, $x_k = -\frac{1}{\rho_k}$ ESTÁ FORA $\Omega = \{x \geq 0\}$.

FORMALIZAÇÃO DO MÉTODO:



ESSE MÉTODO NÃO É PRÁTICO POIS

(i) QUANDO ρ_k CRESCE MUITO, HÁ INSTABILIDADES NUMÉRICAS

(ii) PEDIR QUE x^k SEJA MINIMIZADOR <u>GLOBAL</u> NÃO É RAZOÁVEL.

PORÉM ...

(i) TEM ÓTIMAS PROPRIEDADES TEÓRICAS !

(ii) A IDEIA DE PENALIZAÇÃO É <u>MUITO</u> USADA EM ALGORITMOS PRÁTICOS

UM DELES É O MÉTODO DE <u>LAGRANGEANO AUMENTADO</u>.

CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO EXTERNA

$\rho_0 > 0$, $k = 0$

CALCULE x^k MINIMIZADOR GLOBAL DE

$$\min \; f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2\right]$$
$$\text{s.a.} \quad x \in D$$

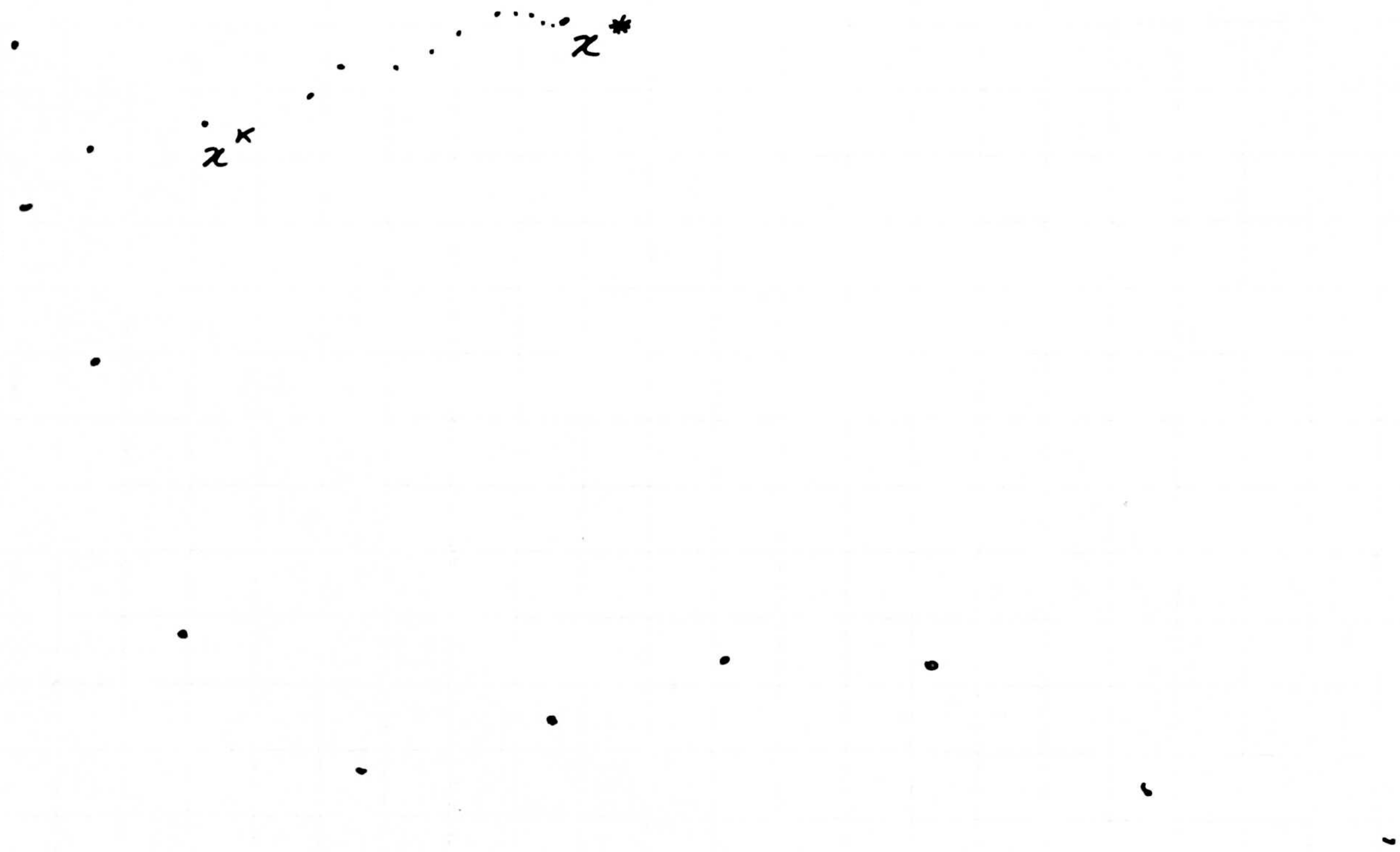
$\rho_{k+1} = 10\,\rho_k$

<u>NOTAÇÃO</u>: $g(x)_+ = \max\{g(x), 0\}$.

- O ESQUEMA GERA UMA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$.
- D É COMPACTO <u>E</u> O PROB. ORIGINAL TEM SOLUÇÃO. ASSIM x^k ESTÁ BEM

DEFINIDO.

SEJA DADA UMA SEQUÊNCIA $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$.



EXEMPLO: $x^k = (-1)^k$.

$x^0 = 1, \quad x^1 = -1, \quad x^2 = 1, \ldots$

$x^{2k} = 1, \quad x^{2k+1} = -1$

- $\lim_{k \in \mathbb{N}} x^k$ NÃO EXISTE
- $\lim_{k \text{ PAR}} x^k = 1$
- $\lim_{k \text{ ÍMPAR}} x^k = -1$

1 E -1 SÃO PONTOS DE ACUMULAÇÃO. OU SEJA, EXISTEM SUBSEQUÊNCIAS DE $\{x^k\}$ CONVERGINDO À 1 E -1.

EXEMPLO: $x^k = \left(\frac{1}{k}, \varphi(k) \right)$, ONDE

$$\varphi(k) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{SE } k \text{ É ÍMPAR} \\ k & \text{SE } k \text{ É PAR}. \end{cases}$$

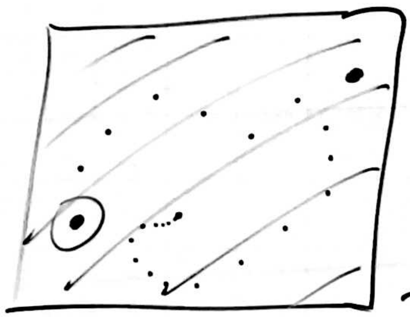
$$x^{2k+1} = \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \xrightarrow[k \to \infty]{} (0,0).$$

$$x^{2k} = \left(\frac{1}{2k}, 2k \right) \quad \text{DIVERGE QUANDO } k \to \infty.$$

SUBSEQ. DIVERGENTE.

$\underbrace{\hspace{3cm}}_{\text{SUBSEQ. CONVERGENTE}} \longrightarrow (0,0)$ É PONTO DE ACUMULAÇÃO.

• O ESQUEMA GERA $\{x^k\} \subset D$.



TEOREMA: SE $\{x^k\} \subset D$, D COMPACTO, ENTÃO $\{x^k\}$ ADMITE UM PONTO DE ACUMULAÇÃO x^*.

(TEOREMA DA ANÁLISE)

NOTAÇÃO: x^* PONTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}$: $\lim_{k \in K} x^k = x^*$,

$K \subset \mathbb{N}$ SUBCONJ. INFINITO DE ÍNDICES.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \min f(x) \\
& \text{s.a. } h(x) = 0 \\
& \qquad g(x) \leq 0 \\
& \qquad x \in D.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SP(\rho_k): \quad & \min f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2\right] \\
& \text{s.a. } x \in D.
\end{aligned}
$$

PERGUNTAS:

1) SE x^* É UM PONTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}$ ENTÃO x^* É VIÁVEL PARA P? Sim!

2) x^* É UM MINIMIZADOR DE P? Sim!

1) <u>TEOREMA</u>: SE x^* É UM PONTO DE ACUMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$ GERADA PELO ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO E P É VIÁVEL, ENTÃO x^* É VIÁVEL PARA P.

<u>PROVA</u>: COMO x^* É PONTO DE ACUMULAÇÃO, TOME UM CONJ. INFINITO DE ÍNDICES K TAL QUE

$$\lim_{k \in K} x^k = x^*.$$

SUPONHA QUE x^* NÃO É VIÁVEL PARA P.

ASSIM, EXISTE $z \in D$ TAL QUE

$$\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 > 0 = \|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 .$$

EXISTE $c > 0$ TAL QUE

$$\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)\|^2 > \|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 + c$$

PARA TODO $k \in K$ SUFICIENTEMENTE GRANDE. LOGO, PARA ESTES k's GRANDES,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2\right]$$

$$> f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2\right] + \frac{\rho_k}{2} c$$

$$= f(z) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2\right] + \left(f(x^k) - f(z) + \frac{\rho_k}{2} c \right)$$

COMO $\rho_k \to \infty$, $\lim\limits_{k \in K} \left(f(x^k) - f(z) + \frac{\rho_k}{2} C \right) = \infty$. ASSIM,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2 \right]$$

$$> f(z) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 \right]$$

PARA TODO $k \in K$ GRANDE. ISSO CONTRARIA O FATO DE x^k SER MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$.

CONCLUÍMOS PORTANTO QUE x^* É VIÁVEL PARA P ∎

2) TEOREMA: SE x^* É UM PONTO DE ACUMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$ GERADA PELO ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO E P É VIÁVEL, ENTÃO x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P.

PROVA: PELO TEOREMA ANTERIOR, x^* É VIÁVEL (PARA P. PELA CONSTRUÇÃO DO MÉTODO, x^k É MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$, OU SEJA,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2\right]$$

$$\leqslant f(z) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2\right], \quad \forall z \in D$$

PARA $z \in D$ VIÁVEIS PARA P ($h(z)=0$ E $g(z) \leq 0$),

OBTEMOS

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2\right] \leqslant f(z),$$

$\forall k$. DAÍ,

$$f(x^k) \leqslant f(z),$$

$\forall k$ E $\forall z \in D$ VIÁVEL PARA P. PASSANDO AO LIMITE COM $k \in K$, OBTEMOS

$$f(x^*) \leqslant f(z), \quad \forall z \in D \text{ VIÁVEL P/ } P.$$

OU SEJA, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P ∎