

Capítulo 6

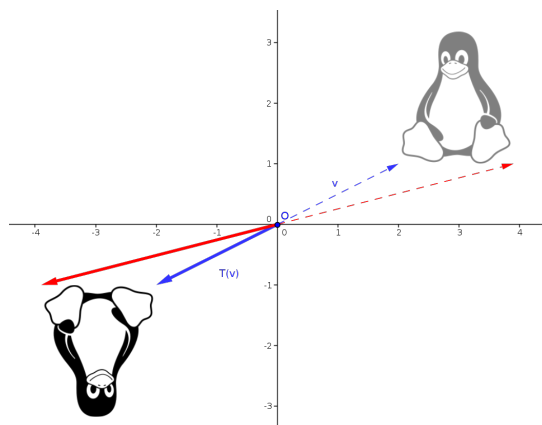
Autovalores e Autovetores

Considere a operador linear $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre \mathbb{R}^2 . Podemos nos perguntar o seguinte: para quais vetores $v \in \mathbb{R}^2$, a imagem $S(v) \in \mathbb{R}^2$ tem a mesma direção de v ? Isto é, queremos saber se para um dado $v \in \mathbb{R}^2$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$S(v) = \lambda v. \quad (6.1)$$

Exemplo 6.1. Considere a reflexão no plano ao redor da origem,

$$F(x, y) = (-x, -y).$$



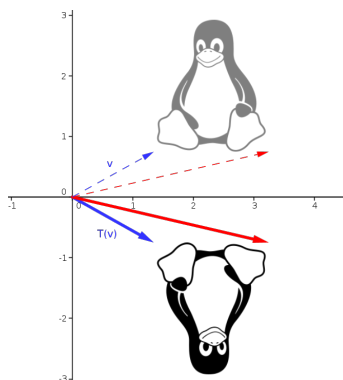
Como

$$F(x, y) = -1(x, y),$$

e logo (6.1) é satisfeita para todo (x, y) e $\lambda = -1$. □

Exemplo 6.2. Considere a reflexão em torno do eixo x , dada por

$$Q(x, y) = (x, -y).$$



Os únicos vetores (x, y) que satisfazem (6.1) são da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$. Veja que

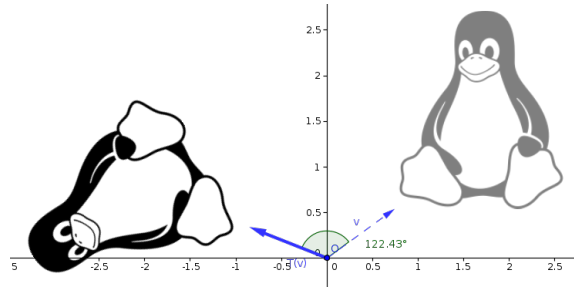
$$Q(x, 0) = 1(x, 0) \quad \text{e} \quad Q(0, y) = -1(0, y)$$

para $x, y \neq 0$, mas $Q(x, y) \neq \lambda(x, y)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ quando $y \neq 0$ e $x \neq 0$. Geometricamente, os únicos vetores que permanecem inalterados por reflexão ao redor do eixo x são aqueles na direção do eixo x , enquanto que os vetores na direção do eixo y mudam de sentido.

□

Exemplo 6.3. Considere a rotação ao redor da origem por um ângulo θ no sentido anti-horário,

$$R(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta).$$



- Se $\theta = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo nulo + voltas completas), então para todo (x, y) temos

$$R(x, y) = (x, y).$$

- Se $\theta = \pi + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo 180° + voltas completas), então para todo (x, y) temos

$$R(x, y) = -(x, y).$$

- Se $\theta \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ ($0 < \theta < \pi$ + meias voltas) então R não mantém a direção de vetor algum, isto é, após rotação por um ângulo desses, os vetores mudam de direção.

□

Atividade 6.1. Interprete geometricamente os três itens do exemplo anterior fazendo figuras.

Podemos levar esta ideia para um espaço vetorial qualquer: dada um operador linear $T : V \rightarrow V$, estamos interessados em determinar os pares (λ, v) para os quais

$$T(v) = \lambda v. \tag{6.2}$$

Neste caso, o escalar λ é chamado *autovalor* de T e v é chamado *autovetor* de T associado a λ . Podemos ainda dizer que (λ, v) é *autopar* de T .

Evidentemente, em qualquer caso, $v = \mathbf{0}$ satisfaz a equação (6.2) para qualquer λ , e logo o caso interessante é quando $v \neq \mathbf{0}$. Com isso, determinamos a noção de autovalor/autovetor de um operador qualquer.

Definição 6.1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre V . Se existirem $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, então dizemos que λ é **autovalor** de T e v é **autovetor** de T associado a λ .

Note que a definição exige que

$$T(v) = \lambda v \in V.$$

Logo, a imagem $T(v)$ deve ser elemento de V . Por isso **só definimos autovalores/autovetores para transformações entre um mesmo espaço vetorial V** (operador sobre V).

Um fato é que se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ , então av , $a \neq 0$ qualquer, também é autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ . De fato, sendo $T(v) = \lambda v$ temos

$$T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = \lambda(av).$$

Em resumo:

Teorema 6.1. *Se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ , então av , $a \neq 0$, é autovetor de T associado a λ .*

Dado um operador $T : V \rightarrow V$, o Teorema 6.1 motiva considerarmos o conjunto dos autovetores v associados a um autovalor λ , definido como

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

Atividade 6.2. Mostre que V_λ é subespaço vetorial de V .

O subespaço V_λ de V é chamado de *autoespaço associado ao autovalor λ* .

Uma visualização geométrica interessante dos autoespaços aparece em Geometria Analítica, da seguinte forma: dada uma cônica no plano rotacionada ao redor da origem (por exemplo, uma elipse rotacionada), os autoespaços associados à matriz dos termos de ordem 2 da cônica são as retas nas direções dos eixos da cônica. Veja a seção 6.5 para detalhes. Analogamente, autoespaços descrevem os eixos de quádricas rotacionadas no espaço.

6.1 Matrizes

Vimos anteriormente que podemos associar matrizes às transformações lineares. É natural, portanto, associar autovalores/autovetores às matrizes. Pela afirmação acima, somente **matrizes quadradas** são consideradas. Podemos pensar na matriz quadrada **\mathbf{A} $n \times n$ como a matriz de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas bases canônicas**. Logo, transitamos entre transformações e matrizes de forma natural:

$$[T]_{can}^{can} = \mathbf{A}$$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ matriz } n \times n$$

$$v \in \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ matriz coluna } n \times 1$$

$$T(v) = \lambda v \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Podemos então falar em autovalores/autovetores de matrizes quadradas:

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é *autovetor* da matriz quadrada \mathbf{A} associado ao *autovalor* λ se

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Com isso, calculamos autovalores/autovetores de um operador olhando para sua matriz nas bases canônicas.

Exemplo 6.4. As matrizes nas bases canônicas associadas aos operadores lineares dos Exemplos 6.1 e 6.2 são, respectivamente,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 6.5. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Seus autopares podem ser calculados resolvendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}.$$

- **Consideremos o caso em que $y \neq 0$.** Da segunda equação temos $\lambda = 1$, e logo a primeira equação torna-se $2x + 2y = x$, donde segue que $y = -\frac{1}{2}x$. Portanto

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor } \lambda_1 = 1.$$

Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

- **Consideremos o caso em que $y = 0$.** Neste caso o sistema se reduz à equação $2x = \lambda x$. Para $x \neq 0$, devemos ter $\lambda = 2$, ou seja,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor } \lambda_2 = 2.$$

Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$.

□

6.2 Cálculo de autovalores – o polinômio característico

Como dissemos anteriormente, matrizes serão a ferramenta para o cálculo de autovalores. Veremos nesta seção uma forma sistemática de cálculo de autopares de matrizes (e consequentemente de operadores lineares).

Note que no Exemplo 6.5, calculamos os autopares (λ, \mathbf{v}) de uma matriz \mathbf{A} resolvendo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

para λ e \mathbf{v} simultaneamente. Lembre que tivemos que separar em dois casos e fazer uma análise cuidadosa. Porém, se **soubéssemos antes quais eram os autovalores** o termo, recairíamos em um **sistema linear homogêneo** na variável \mathbf{v} , já que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

Resolver $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pode ser feito por escalonamento. Então traçamos a seguinte estratégia:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$;
2. Para cada autovalor λ_i , resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Nossa primeira tarefa, portanto, é calcular os autovalores.

O sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

tem matriz quadrada $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, e portanto podemos calcular seu determinante. Se $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0$ então o sistema homogêneo acima possui única solução, que só pode ser $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ sempre é solução). Porém, lembre-se que por definição, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ não pode ser autovetor. Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$ só pode ser autovalor de \mathbf{A} se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Deste modo, o sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ terá solução não trivial $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que será autovetor de \mathbf{A} por (6.3). Ou seja, os autovalores são raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

$p(\lambda)$ é chamado *polinômio característico*.

Note que $p(\lambda)$ não envolve \mathbf{v} . Ou seja, ao resolver $p(\lambda) = 0$ estaremos calculando somente os autovalores de \mathbf{A} . Os autovetores são calculados em seguida, resolvendo o sistema linear associado, como no roteiro descrito anteriormente.

Abrindo a expressão de $p(\lambda)$, temos

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Veja que de cada termo da diagonal de \mathbf{A} é subtraído λ . O resultado dessa determinante é um polinômio na variável λ , o que explica seu nome. O roteiro para o cálculo de autovalores/autovetores torna-se:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, calculando as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

2. Para cada autovalor λ_i , resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Exemplo 6.6. Vamos calcular os autovalores da matriz do Exemplo 6.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico associado é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

As raízes de p são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, os mesmos autovalores encontrados no Exemplo 6.5. \square

Exemplo 6.7. Vamos calcular os autovalores/autovetores da matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_3) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Usando desenvolvimento de Laplace sobre a primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^{1+1}(1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} 2 \det \begin{bmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[- \lambda(2 - \lambda) - 1] + 2(-1 + \lambda) \\ &= (1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3]. \end{aligned}$$

Temos $p(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Assim, os autovalores de \mathbf{B} são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (onde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$), ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & x \\ -x & +z & = & y \\ x & +y & +2z & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z & = & 0 \\ -x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$$

(o último sistema é $(\mathbf{B} - \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, você pode escrevê-lo diretamente). O último sistema tem soluções não triviais

$$\begin{bmatrix} x & -x & 0 \end{bmatrix}^t, \quad x \neq 0$$

(verifique!), que são os autovetores associados à $\lambda_1 = 1$.

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$. Devemos resolver $\mathbf{B}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, ou equivalentemente, $(\mathbf{B} + \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Isto é,

$$\begin{cases} 2x & +2z & = & 0 \\ -x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +3z & = & 0 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema associado à MLRFE (última matriz), concluímos que os autovetores de \mathbf{B} associados à $\lambda_2 = -1$ são

$$\begin{bmatrix} -z & -2z & z \end{bmatrix}^t, \quad z \neq 0.$$

Autovetores associados a $\lambda_3 = 3$. Devemos resolver $(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\begin{cases} -2x & +2z & = & 0 \\ -x & -3y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Você pode resolver este sistema e verificar que suas soluções não triviais são

$$\begin{bmatrix} z & 0 & z \end{bmatrix}^t, \quad z \neq 0,$$

que são os autovetores de \mathbf{B} associados a $\lambda_3 = 3$. □

No exemplo acima, obtemos todos os autovalores e autovetores da matriz \mathbf{B} . Note que, em particular,

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_1 = 1$;
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_2 = -1$;
- $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_3 = 3$.

Observe que **todos** os autovetores são descritos pelos autoespaços V_λ associados a cada autovalor, e que cada um desses autoespaços é gerado pelos autovetores particulares acima (visto como vetores do \mathbb{R}^3):

$$V_1 = [v_1], \quad V_{-1} = [v_2], \quad V_3 = [v_3].$$

Atividade 6.3. Verifique que os três vetores acima v_1 , v_2 e v_3 são LI. Assim, formam uma base do \mathbb{R}^3 .

Veremos no próximo capítulo que o fato de v_1 , v_2 e v_3 serem LI não é a toa: autovetores associados a autovalores distintos (é o caso do exemplo anterior) são sempre LI. Isso será importante na diagonalização de matrizes/operadores, quando buscaremos uma base do espaço vetorial do operador formada por autovetores seus.

É possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Há teoria para lidar com esse tipo de situação, mas não faremos neste texto. Ou seja, vamos considerar apenas **autovalores reais**.

6.2.1 Casos particulares

Nesta seção apresentamos alguns casos frequentes em que o cálculo dos autovalores (ou parte deles) é direto.

Autovalores de matrizes não inversíveis. Se uma matriz \mathbf{A} não possui inversa ($\det \mathbf{A} = 0$) então $\lambda = 0$ sempre será **um dos seus autovalores** (os outros devem ser calculados em cada caso!). De fato, quando \mathbf{A} não é inversível, o sistema quadrado homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

possui solução $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Logo, este \mathbf{v} é autovetor associado ao autovalor nulo pois $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

Autovalores de matrizes triangulares. Seja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

uma matriz triangular superior de ordem n . Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}_n) = \det \begin{bmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} - \lambda & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} - \lambda & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Temos então um determinante de uma matriz triangular, que sabemos ser o produto dos elementos da sua diagonal (veja o capítulo sobre determinantes). Assim

$$p(\lambda) = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda),$$

cujas raízes são, claramente, $t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}$.

O mesmo ocorre vale para matrizes triangulares inferiores: basta notar que no polinômio característico só aparecem os termos da diagonal multiplicados.

Exemplo 6.8. Os autovalores de $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 56 & 23 & 11 \\ 0 & -2 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são 1, -2, 3 e -1. □

Autovalores de matrizes diagonais. Uma matriz diagonal é, em particular, uma matriz triangular. Portanto seus autovalores são os elementos da diagonal. Em particular, a matriz identidade de ordem n tem único autovalor $\lambda = 1$.

6.3 Autovalores de operadores via matrizes

Definimos em primeiro lugar autovalores/autovetores para operadores $T : V \rightarrow V$ sobre um espaço vetorial V qualquer. Vimos que a mesma definição vale para matrizes quadradas, e como podemos calcular seus autopares. Vamos agora conectar o cálculo de autovalores de matrizes com os operadores sobre V qualquer.

Seja β uma base de V e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Temos

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T]_{\beta}^{\beta} [v]_{\beta} = \lambda [v]_{\beta} \Leftrightarrow ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) [v]_{\beta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Assim, calcular os autovalores de T é equivalente a encontrar as raízes da matriz de T na base β , $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Seja agora α outra base de V . Lembrando que $[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$, veja que

$$\begin{aligned} \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda \mathbf{I}) &= \det([I]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha} - \lambda [I]_{\alpha}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \det([I]_{\alpha}^{\beta} ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) [I]_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \det[I]_{\alpha}^{\beta} \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) \det[I]_{\beta}^{\alpha} \\ &= \underbrace{\det[I]_{\alpha}^{\beta} \det[I]_{\beta}^{\alpha}}_{=1} \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) = \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}). \end{aligned}$$

O que acabamos de provar é que

O polinômio característico de $[T]_{\beta}^{\beta}$ é o mesmo para qualquer base β de V . Assim, a fim de calcular os autovalores de T , podemos escolher qualquer base β e encontrar as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}).$$

Exemplo 6.9. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x, y - z, x + 2z).$$

Escolhamos a base canônica do \mathbb{R}^3 para o cálculo dos autovalores,

$$[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando o desenvolvimento de Laplace obtemos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Consideramos agora a matriz de T na base $\beta = \{(1, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 0, 1)\}$. Calculando obtemos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma matriz diagonal! Logo, o cálculo do polinômio característico é direto:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

□

6.4 Multiplicidades algébrica e geométrica

Dois conceitos interessantes acerca de **autovalores** são as multiplicidades *algébrica* e *geométrica*.

- A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico;
- A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do autoespaço associado V_λ .

O nome “algébrico” justifica-se pela relação/manipulação/operação com o polinômio característico, elementos próprios do que se entende por “álgebra”. Já o nome “geométrico” justifica-se por fazer referência à forma do subespaço vetorial V_λ (dimensão 0, ponto; dimensão 1 reta; dimensão 2, plano etc).

Exemplo 6.10. No Exemplo 6.9, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 1$ é 2, e a de λ_2 é 1, visto que

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Vamos calcular os autovetores do operador T daquele exemplo, cuja matriz na base

$$\beta = \{(1, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 0, 1)\}$$

é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver

$$([T]_\beta^\beta - \mathbf{I}_3)[v]_\beta = \mathbf{0}.$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, é fácil ver que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Expandindo v na base β , vemos que

$$v = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + 0(0, 0, 2) = (x, y, x) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 1. Veja que conseguimos no máximo dois vetores desse tipo que são LI entre si, por exemplo,

$$v_1 = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 1, 0).$$

Logo $\{v_1, v_2\}$ é uma base para o autoespaço V_1 , ou seja, λ_1 tem multiplicidade geométrica igual a 2 (V_1 é um plano).

Autovetores associados a $\lambda_2 = 2$. Resolvendo

$$([T]_{\beta}^{\beta} - 2\mathbf{I}_3)[v]_{\beta} = \mathbf{0}$$

obtemos

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

(verifique!). Expandindo v na base β , vemos que

$$v = 0(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0) + z(0, 0, 2) = (0, 0, 2z) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 2. Conseguimos apenas 1 vetor desse tipo que forma um conjunto LI, por exemplo, $\{(0, 0, 2)\}$. Esse conjunto é uma base do autoespaço V_2 , e portanto $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. \square

É possível mostrar que para qualquer autovalor,

$$\text{multiplicidade geométrica} \leq \text{multiplicidade algébrica}.$$

Há casos em que a multiplicidade geométrica é estritamente menor que a algébrica.

Atividade 6.4. Calcule as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor $\lambda = 1$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e verifique que a multiplicidade geométrica é menor que a algébrica.

A multiplicidade geométrica tem utilidade na diagonalização de operadores, que veremos no próximo capítulo. Diagonalizar um operador significa obter uma base para a qual a matriz do operador é diagonal, tal como ilustrado no Exemplo 6.9. O segredo é obter uma *base de autovetores*, que existirá se a soma das multiplicidades geométricas for igual à dimensão do espaço (neste caso, decompomos o espaço vetorial na soma direta dos autoespaços associados aos autovalores distintos: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$).

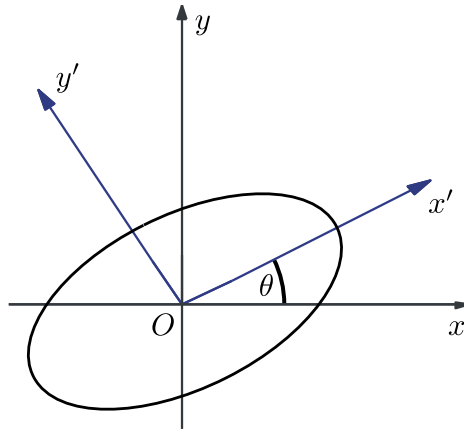
6.5 CONTEÚDO EXTRA E NÃO OBRIGATÓRIO – Autopares e cônicas rotacionadas

Nesta seção ilustramos o uso de autovalores/autovetores para identificação de cônicas rotacionadas no plano.

Seja dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0.$$

Essa equação representa uma cônica rotacionada se $b \neq 0$.



No caso em que $b \neq 0$, veremos como encontrar um ângulo θ tal que, rotacionando eixos x e y , eliminemos o termo xy na equação, escrevendo-a no novo sistema $x'Oy'$ como

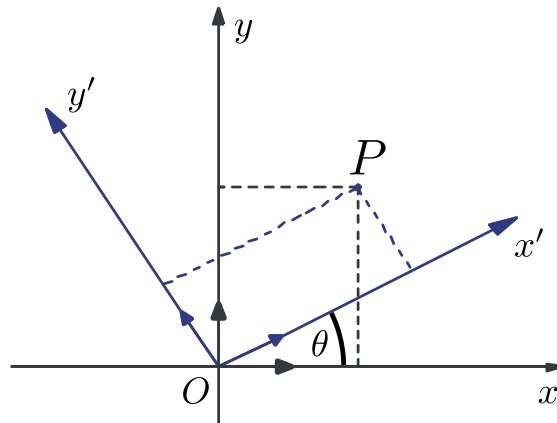
$$a'x'^2 + c'y'^2 + f' = 0 \quad (b' = 0).$$

A escrita acima é mais simples de interpretar, podemos facilmente capturar sua geometria (centro, focos, semi-eixos etc), como se faz em cursos de Geometria Analítica.

Vimos no início do capítulo sobre transformações lineares que rotacionar (x, y) no sentido anti-horário por um ângulo θ corresponde à multiplicação pela *matriz de rotação*

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

O que queremos é uma relação entre as coordenadas (x, y) de um ponto P do plano no sistema original xOy e suas coordenadas (x', y') no novo sistema rotacionado $x'Oy'$.



A figura acima ilustra que as coordenadas de P no sistema original xOy correspondem às coordenadas rotação de P no novo sistema $x'Oy'$ **após uma rotação** pelo ângulo θ (imagine a rotação de P e veja que as linhas pontilhadas azuis (novo sistema) terão os mesmos comprimentos das linhas pontilhadas pretas (sistema original)). Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Chamando $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ escrevemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{X}'.$$

Voltemos a analisar a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0. \quad (6.4)$$

Fazendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, podemos escrever (6.4) como

$$\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + f = 0.$$

Atividade 6.5. Verifique que a $\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + f = 0$ é a equação (6.4).

A fim de eliminar o termo xy , fazemos a rotação nos eixos $\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{X}'$. Lembrando que $(\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}')^t = \mathbf{X}'^t \mathbf{R}_\theta^t$, temos

$$(\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}')^t \mathbf{A} (\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}') + f = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'^t (\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta) \mathbf{X}' + f = 0.$$

Chamando $\mathbf{B} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta$ temos

$$\mathbf{X}'^t \mathbf{B} \mathbf{X}' + f = 0.$$

Por analogia, essa é exatamente a equação

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + f = 0,$$

$$\text{onde } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta.$$

Portanto, nosso objetivo é encontrar θ tal que $b' = 0$.

Antes disso, é necessário calcular a' e c' . Precisamos do resultado seguinte:

Atividade 6.6. Mostre por um cálculo direto que $\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\theta^t = \mathbf{I}_2$. Mostre também que $\det \mathbf{R}_\theta = 1$.

Usando a atividade acima, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) &= \det(\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta - \lambda \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta) \\ &= \det(\mathbf{R}_\theta^t (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) \mathbf{R}_\theta) \\ &= \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta^t}_1 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta}_1 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2). \end{aligned}$$

Logo, se $b' = 0$ então

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (a' - \lambda)(c' - \lambda).$$

Daí, a' e c' são raízes do polinômio característico de \mathbf{A} ,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a' e c' são os **autovalores da matriz** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

Em resumo, passamos da equação original

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$$

para a equação sem o termo misto xy ,

$$a'x'^2 + c'y'^2 + f = 0,$$

calculando a' e c' como os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Note que o termo livre f é o mesmo nas duas equações.

Finalmente, você pode verificar que os autovetores associados à a' e c' (os autovalores de \mathbf{A}) têm as direções dos eixos rotacionados x' e y' . Reflita sobre as figuras desta seção.

Atividade 6.7. Identifique cada cônica, eliminando o termo misto xy .

(i) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = -1$

(ii) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

(iii) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

(iv) $xy = 1$

Atividade 6.8. Mostre que $\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{R}_{\theta+\gamma}$, isto é, rotacionar eixos por um ângulo θ e daí rotacioná-los por um ângulo γ é o mesmo que rotacionar os eixos por um ângulo $\theta + \gamma$.

Atividade 6.9. Mostre que sempre é possível eliminar o termo misto xy , isto é, mostre que existe um ângulo θ tal que $b' = 0$.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \frac{b'}{2} = -a \sin \theta \cos \theta - \frac{b}{2} \sin^2 \theta + \frac{b}{2} \cos^2 \theta + c \sin \theta \cos \theta \\ &\Rightarrow b' = (c - a) \sin(2\theta) + b \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Assim, $b' = 0$ se, e somente se $(a - c) \sin(2\theta) = b \cos(2\theta)$. Logo, se $a - c = 0$, basta fazer $\theta = 45^\circ$ ($\theta = \pi/4$) (pois com isso $\cos(2\theta) = 0$). Por outro lado, se $a - c \neq 0$, $b' = 0$ se

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{b}{a - c}.$$

Basta tomar então $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$ tal que a relação anterior valha. Isto mostra que sempre conseguimos θ tal que $b' = 0$.

6.6 Exercícios

Veja a lista de exercícios 7.

Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Bookman, 2010.
- [2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.
- [3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.
- [4] David Lay. *Álgebra Linear*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.
- [5] David Poole. *Álgebra linear*. Thonsom Learning, São Paulo, 2006.