MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE DESIGUALDADE /

MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS

(CAPS 9 E 10 DO LIVRO DE ANA FRIEDLANDER).

$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } Ax \leq b.$$

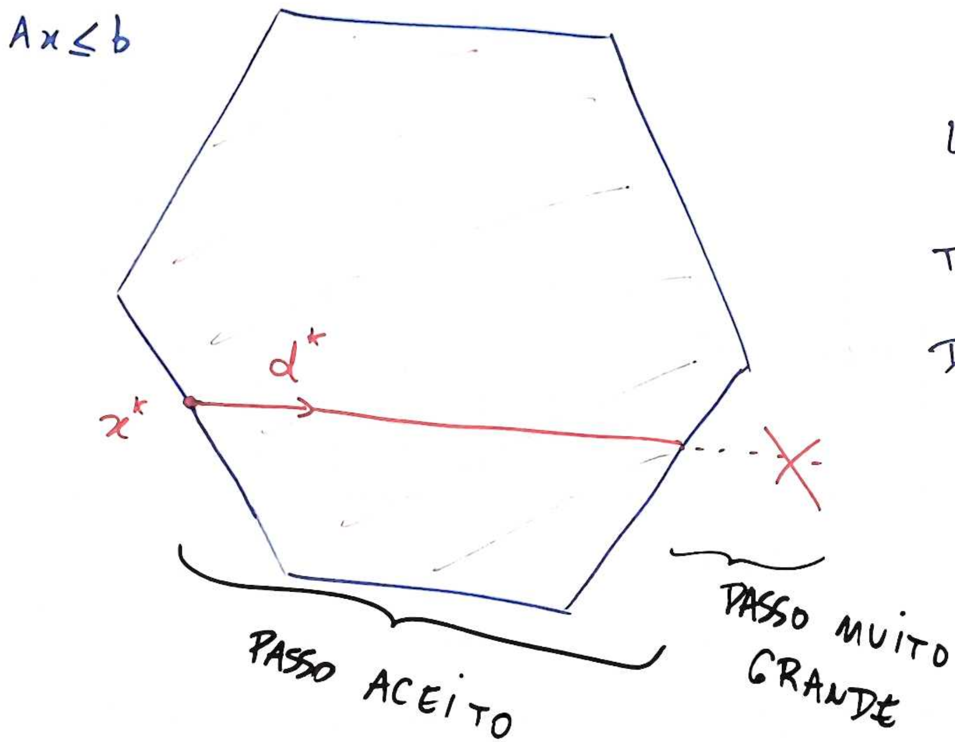
CONJUNTO VIÁVEL:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; Ax \leq b\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; a_i^T x \leq b_i \, , \; i=1,\dots,m\}.$$

ONDE a_i^T É A i-ÉSIMA LINHA DE A. $\left(A = \begin{bmatrix} - a_1^T - \\ \vdots \\ - a_m^T - \end{bmatrix} \right)$.

ADMITIMOS QUE O PROBLEMA TENHA SOLUÇÃO.

IDEIA: A PARTIR DE UM PONTO VIÁVEL $x^k \in \Omega$, CAMINHAR EM DIREÇÕES d^k QUE MANTENHAM A VIABILIDADE (LOCALMENTE) E QUE DECRESÇA f.



DIFERENTEMENTE DAS RESTRIÇÕES LINEARES DE IGUALDADE, AQUI TEMOS QUE CONTROLAR O TAMANHO DO PASSO PARA MANTER VIABILIDADE.

TEMOS

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k.$$

QUEREMOS QUE $Ax^{k+1} \leq b$, OU SEJA,

$$a_i^T (x^k + t_k d^k) \leq b_i \quad , \forall i$$

$$\iff a_i^T x^k + t_k a_i^T d^k \leq b_i \quad , \forall i$$

CASO 1: $a_i^T x^k = b_i$ (A i-ÉSIMA RESTRIÇÃO É ATIVA EM x^k) (

NESTE CASO,

$$b_i + t_k a_i^T d^k \leq b_i \iff t_k (a_i^T d^k) \leq 0 .$$

ISSO SERÁ VÁLIDO, $\forall t_k > 0$, SEMPRE QUE $a_i^T d^k \leq 0$.

CASO 2: $a_i^T x^k < b_i$.

TEMOS

$$t_k (a_i^T d^k) \leq b_i - a_i^T x^k .$$

SE $a_i^T d^k \leq 0$ ENTÃO A DESIG. ACIMA VALE $\forall t_k > 0$.

SE $a_i^T d^k > 0$ ENTÃO A DESIG. ACIMA VALE PARA

$$0 < t_k \leq \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} .$$

RESUMO: TEMOS QUE MAJORAR t_k SOMENTE NO CASO EM QUE $a_i^T d^k > 0$ (E $a_i^T x^k < b_i$). PARA TANTO BASTA TOMAR $t_k \in (0, \bar{t}]$, ONDE

$$\bar{t} = \min_{\substack{a_i^T d^k > 0 \\ a_i^T x^k - b_i < 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\} > 0 .$$

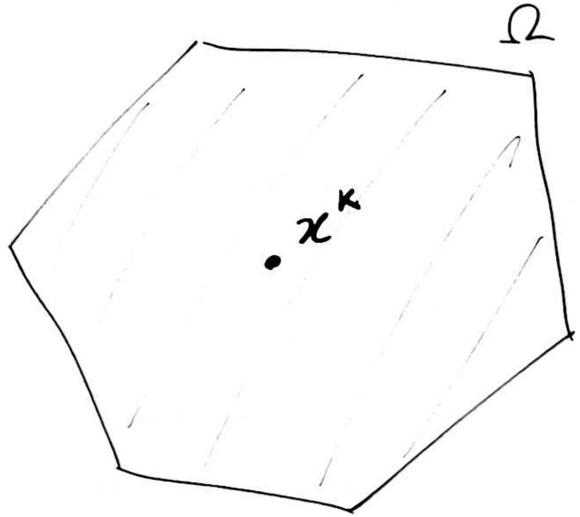
NOTAÇÃO:

$$I^k = I(x^k) = \{ i \ ; \ a_i^T x^k = b_i \}$$

(CONJUNTO DOS ÍNDICES DAS RESTRIÇÕES ATIVAS EM x^k).

QUANDO DECIDIMOS PARAR?

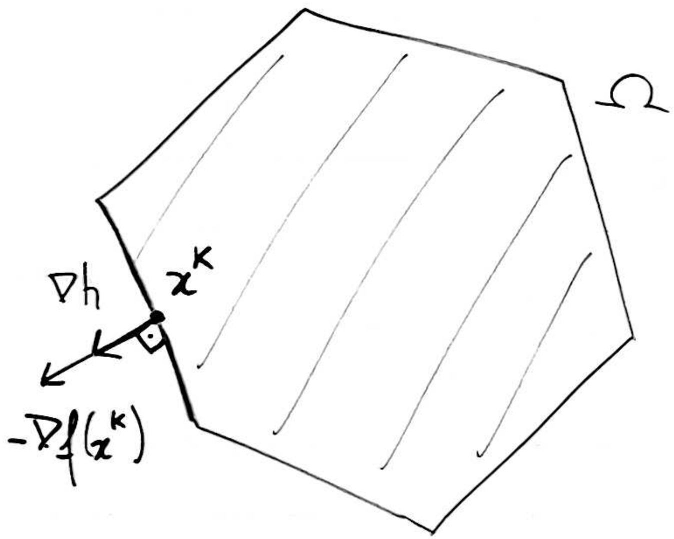
- x^k É A SOLUÇÃO, ONDE VAMOS PARAR.



CASO x^* PERTENÇA AO INTERIOR DE Ω, ENTÃO LOCALMENTE O PROBLEMA SE COMPORTA COMO UM PROBLEMA SEM RESTRIÇÕES.

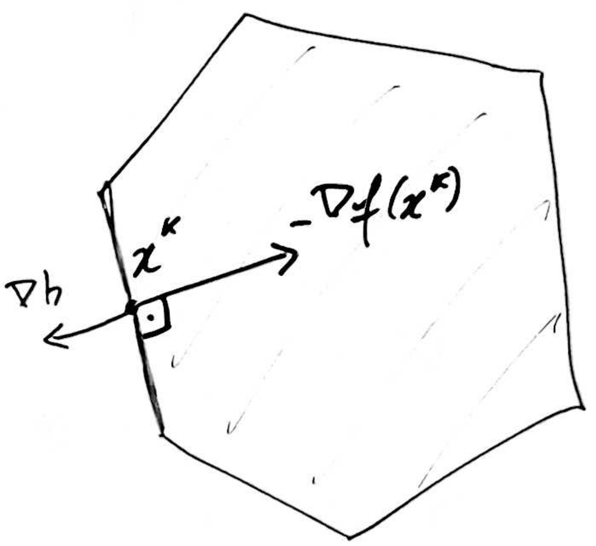
<u>PARADA:</u>

$$I^k = \emptyset \quad , \quad \nabla f(x^k) = 0 .$$



CASO ALGUMA RESTRIÇÃO SEJA ATIVA EM x^k $(I^k \neq \emptyset)$, x^k DEVE SER PONTO KKT PARA O PROBLEMA ORIGINAL.

OU SEJA, $\nabla f(x^k) + A^T \lambda^k = 0$, $\lambda^k \geq 0$.



IDEIA: QUANDO $I^k \neq \emptyset$ (x^k ESTÁ NA BORDA),

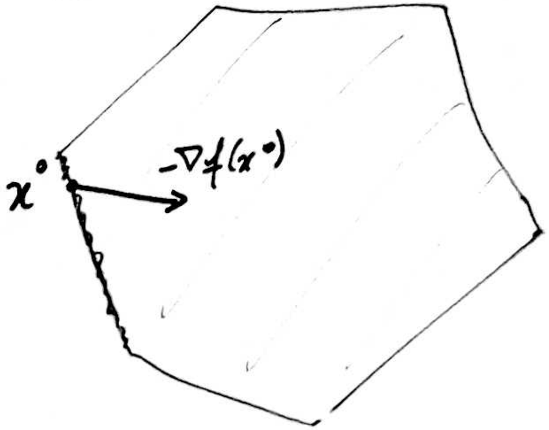
PODEMOS OLHAR SOMENTE PARA AS RESTRIÇÕES DE IGUALDADE. OU SEJA, RESOLVER O PROBLEMA

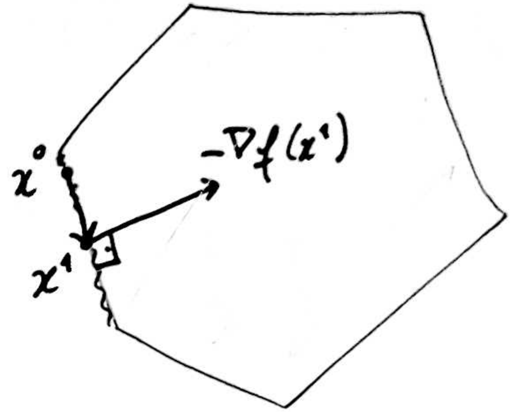
$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.a.} \ \ a_i^T x = b_i, \quad i \in I^k. \end{aligned}$$

OU

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.a.} \ \ A_{I^k} x = b_{I^k} \end{aligned}$$

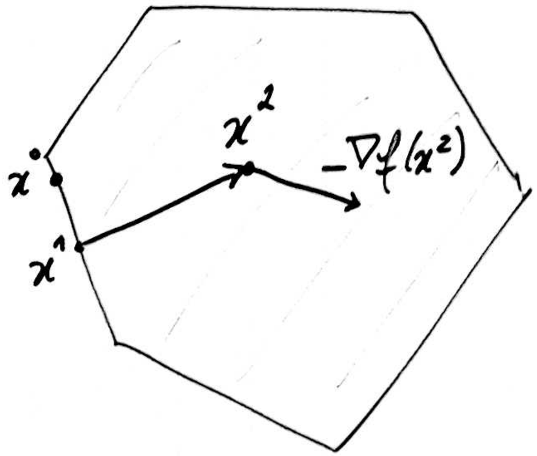
IDEIA PARA MINIMIZAR f SUJEITA A $Ax \leq b$:





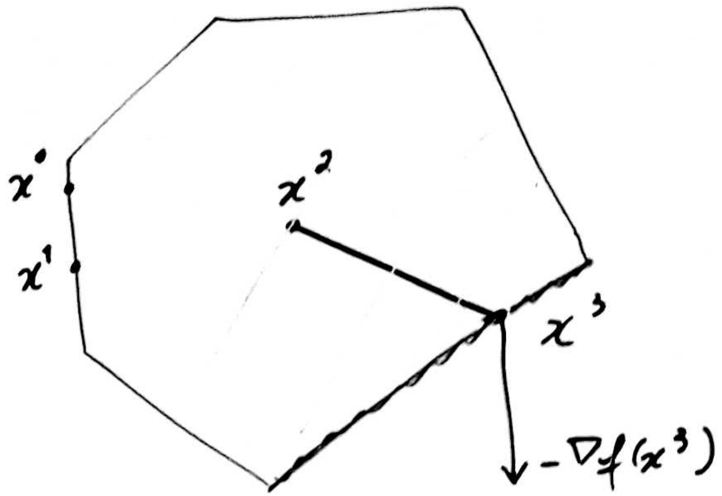
x^0 NÃO É KKT PARA O PROBLEMA RESTRITO ÀS IGUALDADES.

CAMINHO NA FACE DO POLIEDRO (RESOLVO O PROBLEMA COM IGUALDADES). x^1 É KKT PARA O PROBLEMA COM IGUALDADES, MAS NÃO PARA O PROB. ORIGINAL ($\lambda \ngeq 0$).

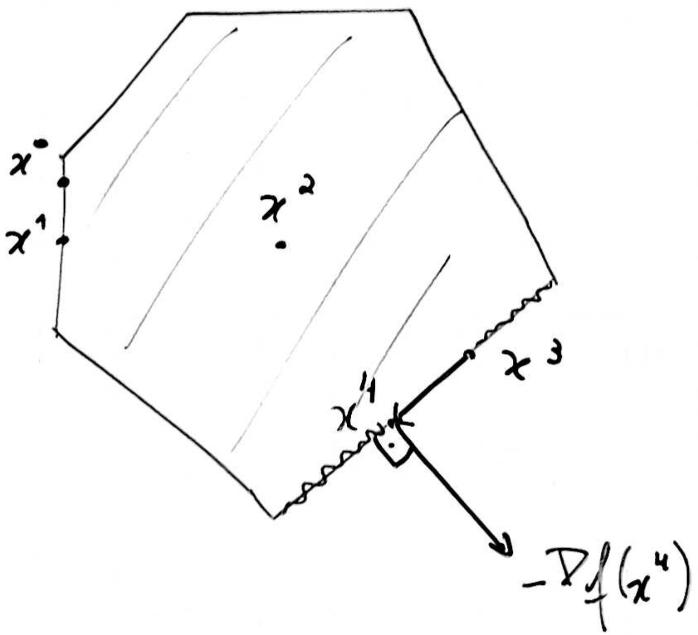


ABANDONAMOS A FACE.

$(I^2 = \emptyset)$



x^3 ENCONTRA-SE NUMA OUTRA BORDA $(I^3 \neq \emptyset)$.

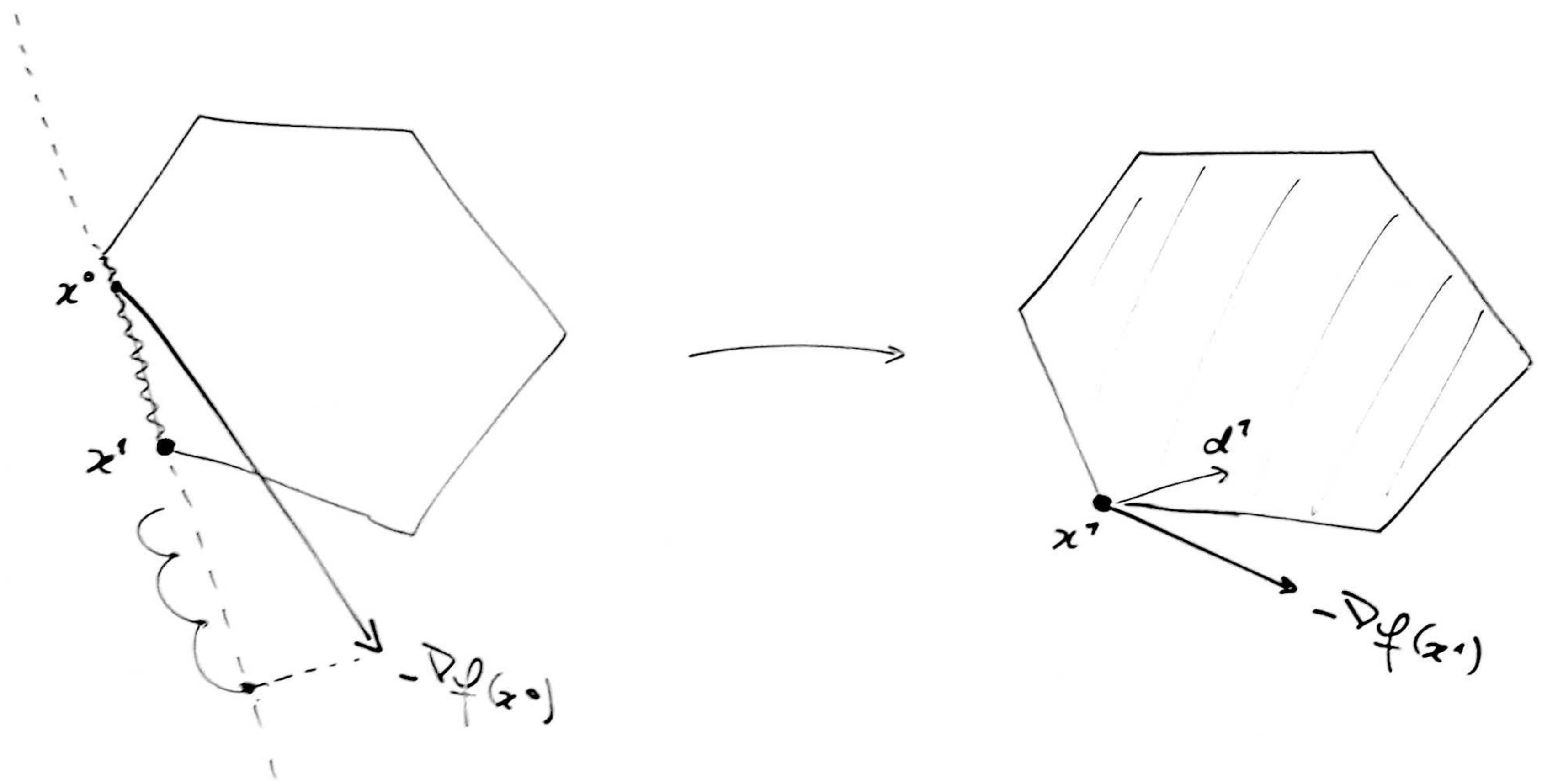


MINIMIZAMOS SOBRE A BORDA (RESOLVEMOS UM PROBLEMA COM IGUALDADES), OBTENDO x^4.

x^4 É KKT PARA O PROBLEMA ORIGINAL

$\Longrightarrow$ PARAMOS!

O MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS É UMA REALIZAÇÃO DA IDEIA ANTERIOR.



AO DEIXAR UMA FACE DO POLIEDRO, DEVEMOS GARANTIR

que a direção d^k forneça pontos viáveis E que decresça f localmente.
Ou seja, devemos ter

(1) A(x^k + t d^k) <= b, para todo t em (0, t^barra)
(direção factível)

(2) grad f(x^k)T d^k < 0 (direção de descida)

MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE DESIGUALDADE /

MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS (CONT.)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } Ax \leq b \quad , \quad A \text{ MATRIZ } m \times n.$$

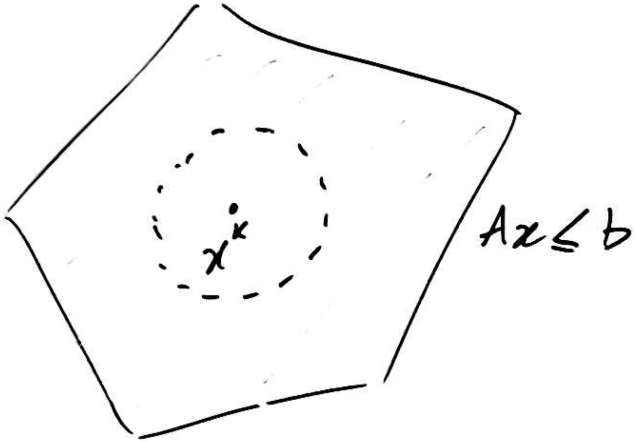
NOTAÇÃO:

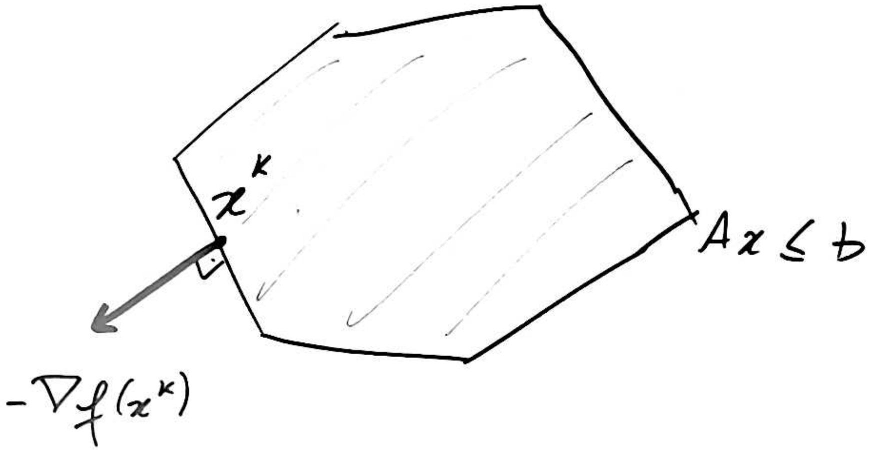
$$I^k = I(x^k) = \{ i \; ; \; a_i^T x^k = b_i \}$$

(CONJUNTO DOS ÍNDICES DAS RESTRIÇÕES ATIVAS)

CRITÉRIOS DE PARADA:

- $I^k = \emptyset \quad , \quad \nabla f(x^k) = 0.$
- $I^k \neq \emptyset \quad , \quad \nabla f(x^k) + A_{I^k}^T \lambda^k = 0 \quad , \quad \lambda^k \geq 0.$



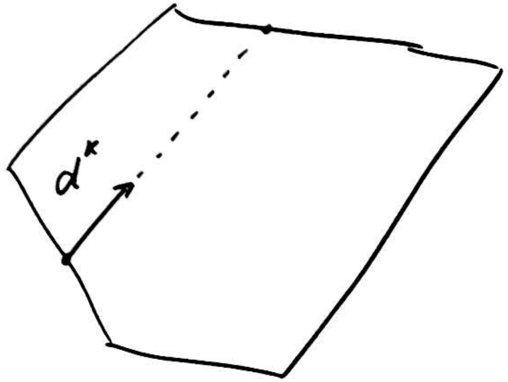


SE x^k <u>NÃO</u> FOR SOLUÇÃO, CALCULAMOS UMA DIREÇÃO d^k FACTÍVEL E DE DESCIDA.

- (DIREÇÃO FACTÍVEL)

$$A(x^k + t d^k) \leq b \quad , \quad \forall t \in (0, \bar{t}] \qquad (x^k \text{ É VIÁVEL})$$

ISTO É, $\quad Ax^k + tAd^k \leq b \iff a_i^T x^k + t a_i^T d^k \leq b_i \, , \forall i.$



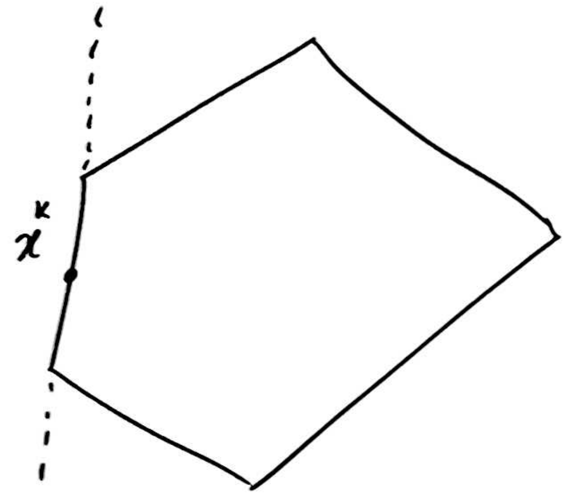
SE $i \in I^k$ ENTÃO DEVEMOS TER $t\, a_i^T d^k \leq 0$.

DAÍ, $\boxed{a_i^T d^k \leq 0.}$ $(*)$

SE $i \notin I^k$ ENTÃO DEVEMOS TER $t\, a_i^T d^k \leq b_i - a_i^T x^k$. ASSIM,

$t \leq \dfrac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k}$ $(a_i^T d^k > 0)$. O PASSO MÁXIMO É

$$\bar{t} = \min_{\substack{i \notin I^k \\ a_i^T d^k > 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\}.$$

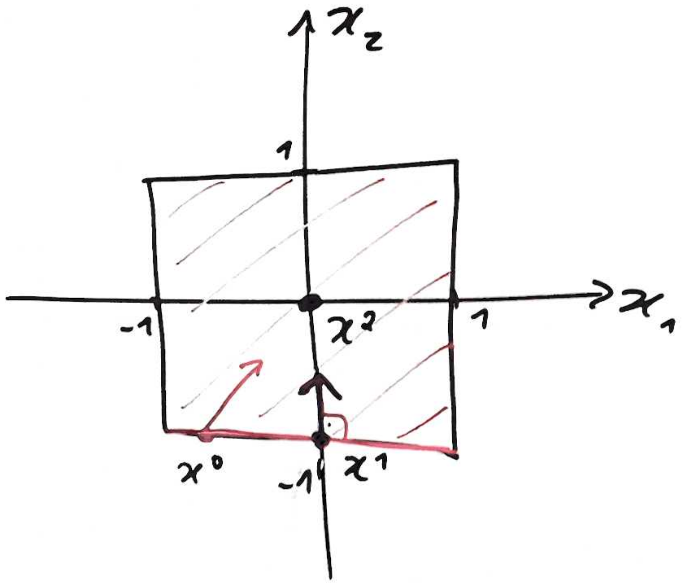


(*) É SATISFEITA SE $d^k \in Nu(A_{I^k})$. ISSO CORRESPONDE À ESTRATÉGIA DE MINIMIZAR f SOBRE UMA FACE DO POLIEDRO (PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE FORMADAS PELAS RESTRIÇÕES ATIVAS EM x^k).

EXEMPLOS:

1) $$\min \; x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.a.} \; -1 \le x_1 \le 1$$
$$-1 \le x_2 \le 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \le 1 \\ -x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ \boxed{-x_2 \le 1} \end{pmatrix}$$



- $x^0 = (-3/4, -1)$

- RESOLVER

$$\min \; x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.a.} \; -x_2 - 1 = 0$$

KKT: $$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NO PONTO $x^1 = (0, -1)$, $\lambda_1 = -2 < 0$.

• $I^2 = \emptyset$, $\nabla f(x^2) = \nabla f(0,0) = (0,0)$ ✓.

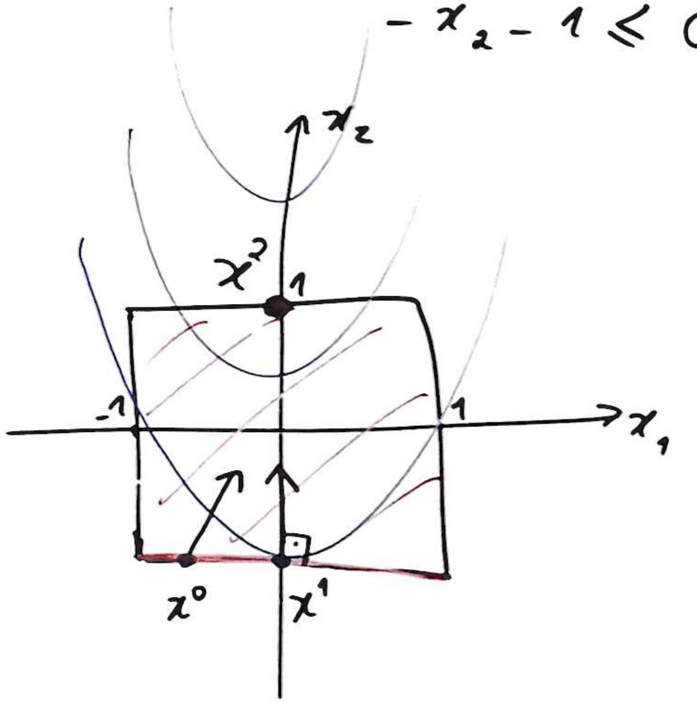
2) $\min \quad x_1^2 - x_2$

s.a. $x_1 - 1 \leq 0$

$-x_1 - 1 \leq 0$

$x_2 - 1 \leq 0$

$-x_2 - 1 \leq 0$



• $x^0 = (-3/4, -1)$.

• $\min \quad x_1^2 - x_2$

s.a. $-x_2 - 1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0$ e $\lambda_1 = -1 < 0$.

$x^1 = (0, -1)$

• $d^1 = (0,1)$ É DIRECÇÃO FACTÍVEL E DE DESCIDA.

- $f(x^1 + t d^1) = f(0, -1+t)$

$$= -(1+t) = 1-t \; .$$

- RESTRIÇÕES INATIVAS EM x^1:

$$\underbrace{x_1 - 1 \leq 0}_{[1 \;\; 0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0}, \quad \underbrace{-x_1 - 1 \leq 0}_{[-1 \;\; 0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0}, \quad \underbrace{x_2 - 1 \leq 0}_{[0 \;\; 1]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1 > 0} .$$

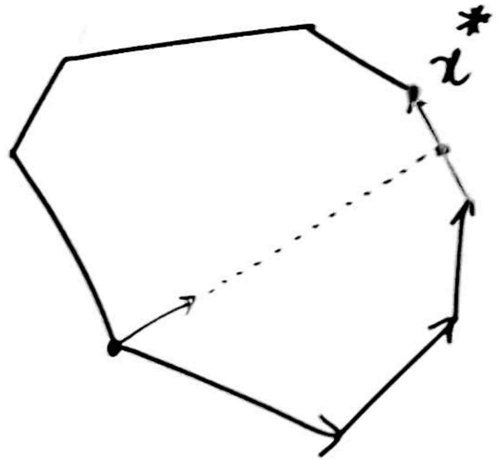
$$\times \qquad\qquad \times \qquad\qquad \checkmark$$

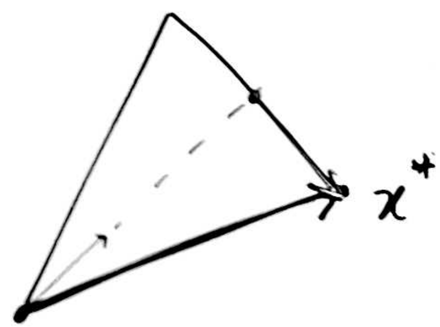
$$\bar{t} = \min\left\{ \frac{1 - [0 \;\; 1]\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}}{[0 \;\; 1]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \right\} = \frac{2}{1} = 2 \; .$$

- $f(x^1 + \bar{t} d^1) = 1 - \bar{t} = -1, \quad x^2 = x^1 + \bar{t} d^1 = (0,-1) + 2(0,1) = (0,1)$ //

OBS.: O MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS SE APLICA À RESTRIÇÕES "DE CAIXA" ($l \leq x \leq u$), COMO NOS EXEMPLOS ANTERIORES.

PACOTE "GENCAN" (FORTRAN) — PROJETO "TANGO".





MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS.

INICIALIZAÇÃO. x^0 VIÁVEL $(Ax^0 \leq b)$, $K = 0$.

PASSO 1. CALCULE $I^K = I^K(x^K)$.

- SE $I^K = \emptyset$ E $\nabla f(x^K) = 0$, PARE! (PARADA COM x^K NO INTERIOR — $Ax^K < b$).
- SE $I^K = \emptyset$ E $\nabla f(x^K) \neq 0$, VÁ PARA O PASSO 7.
- SE $I_K \neq \emptyset$, VÁ PARA O PASSO 2.

PASSO 2: RESOLVER $\nabla f(x^K) + A_{I^K}^T \lambda = 0$ (KKT DO PROB. COM IGUALDADES DA FACE). SE NÃO TEM SOLUÇÃO, VÁ P/ O PASSO 4 (NÃO É KKT DA FACE). SE TEM SOLUÇÃO, VÁ P/ O PASSO 3.

PASSO 3 (PARADA COM KKT NA BORDA)

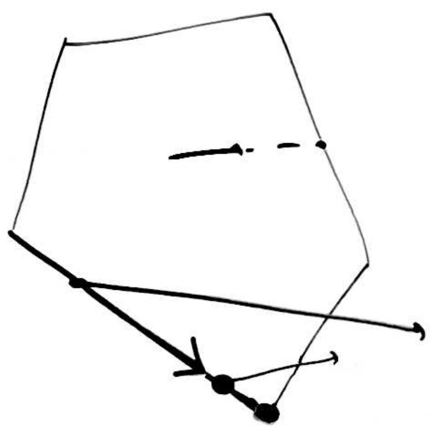
SE $\lambda \geqslant 0$, PARE (KKT DO PROBLEMA ORIGINAL).

CASO CONTRÁRIO, VÁ P/ O PASSO 7.

PASSO 4 (MINIMIZAÇÃO NA BORDA)

CALCULE $d^k \in Nu(A_{I^k})$ TAL QUE $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$.

(UMA POSSÍVEL ESCOLHA É $-\nabla f(x^k)$ PROJETADO NO CONJUNTO $A_{I^k} x = b_{I^k}$)



PASSO 5: CALCULAR

$$\bar{t} = \min_{\substack{i \notin I^k \\ a_i^T d^k > 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\}.$$

PASSO 6 (BUSCA LINEAR)

REALIZAR UMA BUSCA LINEAR NA DIREÇÃO d^k NO INTERVALO $[0, \bar{t}]$, UTILIZANDO ARMIJO.

SE $t_k < \bar{t}$, FAZER $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k \leftarrow k+1$ E IR AO PASSO 2 (AQUI CONTINUAMOS NA MESMA FACE, E $I^{k+1} = I^k$).

SE $t_k = \bar{t}$, FAZER $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k \leftarrow k+1$ E IR AO PASSO 1

PASSO 7 : CALCULE d^k DIREÇÃO FACTÍVEL E DE DESCIDA.

PASSO 8 : IGUAL AO PASSO 5.

PASSO 9 (BUSCA LINEAR) REALIZAR UMA BUSCA LINEAR EM $[0, \bar{t}]$ USANDO ARMIJO. FAZER $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k \leftarrow k+1$ E IR AO PASSO 1.

- EXERCÍCIO 10.3 — LIVRO ANA.