PENALIZAÇÃO INTERNA / MÉTODO DE BARREIRAS / PONTOS INTERIORES.

REFERÊNCIA: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO, UNICAMP. (VER LINK NA PÁGINA DA DISCIPLINA).

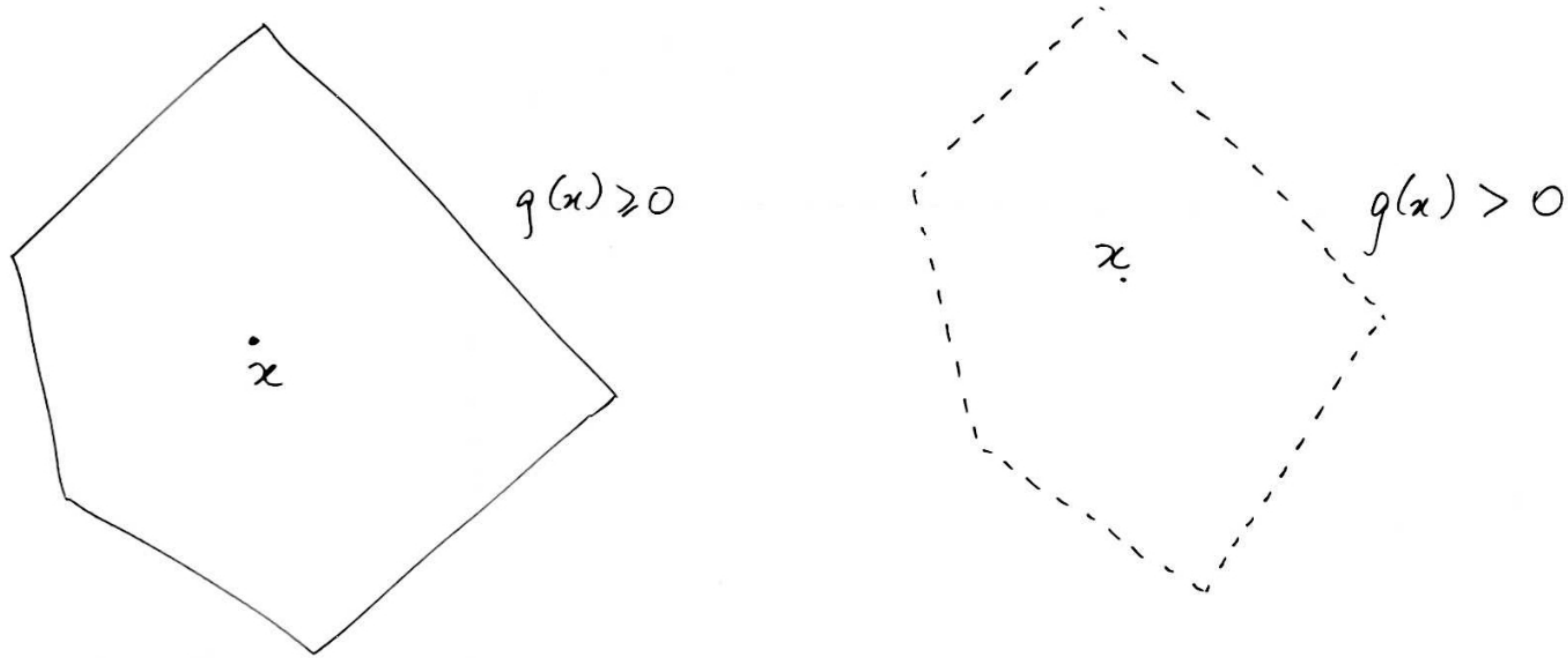
$$
\begin{aligned}
P: \quad & \min f(x) \\
& \text{s.a.} \quad g(x) \geq 0, \\
& \qquad x \in D, \qquad D \subset \mathbb{R}^n \text{ É COMPACTO.}
\end{aligned}
$$

OBS.: AS RESTRIÇÕES $g(x) \geq 0$ PODEM SER EXPRESSAS NA FORMA PADRÃO $-g(x) \leq 0$.

CONJUNTO VIÁVEL: $\Omega = \{x \in D \; ; \; g(x) \geq 0\}$.

INTERIOR (RELATIVO): $\Omega^{\circ} = \{x \in D \; ; \; g(x) > 0\}$.

→ DESCARTA A FRONTEIRA $g(x) = 0$.



<u>HIPÓTESE</u>: $\Omega^{\circ} \neq \emptyset$.

IDEIA: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS ONDE A "VIABILIDADE ESTRITA" É PENALIZADA.

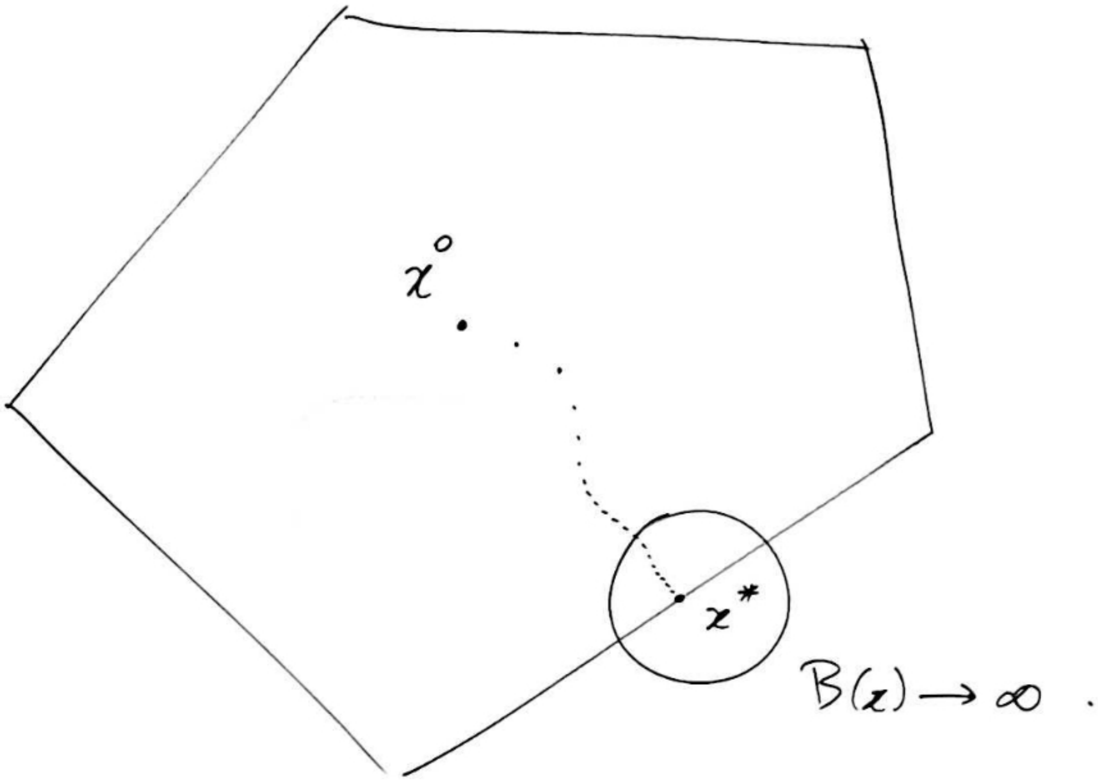
OU SEJA, OBRIGAMOS NO INÍCIO QUE x^0 ESTEJA "NO MEIO" DO CONJUNTO Ω^0 E AO LONGO DO PROCESSO AFROUXAMOS ESSA EXIGÊNCIA, PERMITINDO QUE x^k SE APROXIME DA FRONTEIRA DE Ω^0.

UMA FUNÇÃO $B(x)$ QUE FAZ ESSE TRABALHO É TAL QUE

(i) ESTÁ DEFINIDA EM Ω^0.

(ii) $B(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega^0$

(iii) SE $\lim_{x \to x^*} g_i(x) = 0$ PARA ALGUM i, ENTÃO $\lim_{x \to x^*} B(x) = \infty$.



B É CHAMADA FUNÇÃO DE <u>BARREIRA</u>.

DUAS FUNÇÕES DE BARREIRA COMUNS:

1) $$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$ (BARREIRA INVERSA)

2) $B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x))$. (BARREIRA LOGARÍTMICA)

ESSA É A MAIS USADA. É EMPREGADA EM PACOTES COMPUTACIONAIS COMO IPOPT (INTERIOR POINT OPTIMIZER).

VEJA QUE ESTA $B(x)$ PODE SER NEGATIVA. PORÉM, COMO $x \in D$ (COMPACTO), EXISTE $M > 0$ TAL QUE

$$B(x) + M \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega^{\circ}.$$

SUBPROBLEMA: $SP(t_k)$: $\min_{x} f(x) + t_k B(x)$, $t_k > 0$.
s.a. $x \in \Omega^{\circ}$.

ESTRATÉGIA DE PENALIZAÇÃO INTERNA:

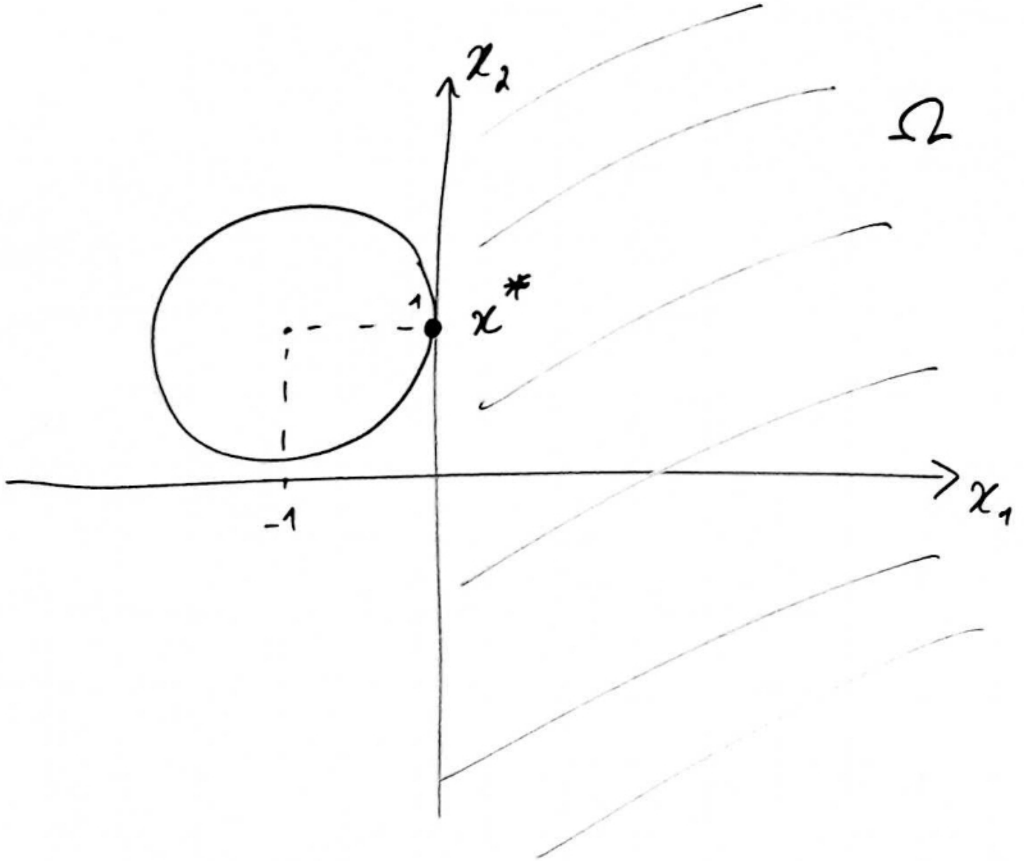
SEJA DADO $t_0 > 0$. FAÇA $K = 0$.

1) CALCULE x^K MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_K)$.

2) DIMINUA t_K (OU SEJA, TOME $0 < t_{K+1} < t_K$),
FAÇA $K \leftarrow K+1$ E VOLTE AO PASSO 1.

OBS.: NESSA ESTRATÉGIA, $\lim_{K \to \infty} t_K = 0$.

EXEMPLO: $P: \begin{array}{l} \min_{x} f(x_1, x_2) = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 \\ \text{s.a. } x_1 \geq 0. \end{array}$



$x^* = (0, 1)$.

SUBPROBLEMA:

$$SP(t_k): \min_x \ (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 - t_k \ln(x_1)$$
$$\text{s.a.} \ \ x_1 > 0 .$$

(t_k É FIXO)

RESOLVENDO:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1^k+1) - t_k \dfrac{1}{x_1^k} \\ 2(x_2^k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x_2^k = 1$$

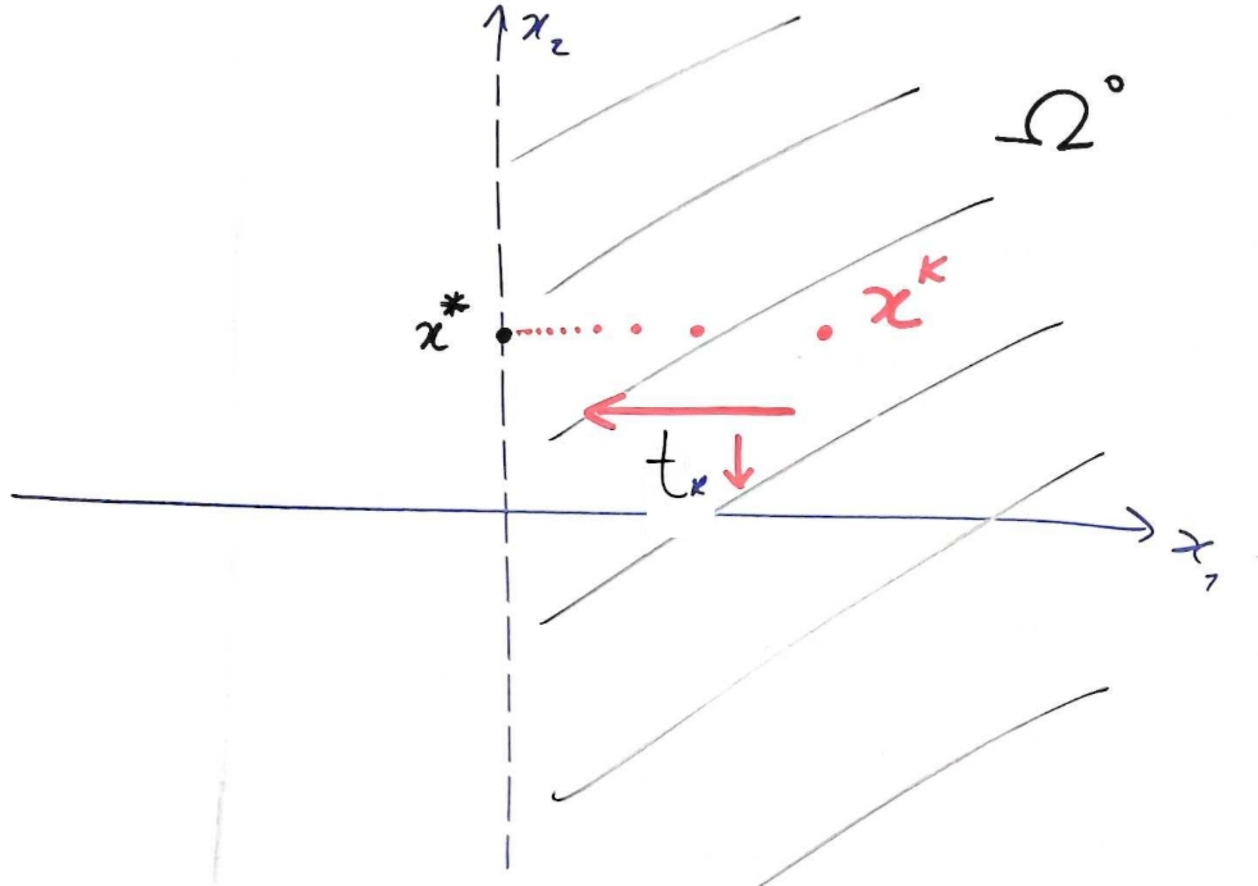
E $2(x_1^k+1) = \dfrac{t_k}{x_1^k}$. DAÍ, $2(x_1^k)^2 + 2x_1^k - t_k = 0$.

$$\Delta = 4 + 8t_k \quad \begin{cases} \boxed{x_1^k = \dfrac{-2+\sqrt{4+8t_k}}{4}} > 0 \\ x_1^k = \dfrac{-2-\sqrt{4+8t_k}}{4} < 0 \quad \text{(NÃO SERVE)} \end{cases}$$

ASSIM, O PONTO CRÍTICO DO SUBPROBLEMA É $x^k = \left(\dfrac{-2+\sqrt{4+8t_k}}{4}, 1 \right)$.

DADO QUE A F.O. DE $SP(t_k)$ É CONVEXA, x^k É MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_k)$. OBSERVE QUE

$$x_k = \left(\frac{-2+\sqrt{4+8t_k}}{4} , 1 \right) \longrightarrow (0,1) = x^* .$$



ASSIM COMO A PENALIZAÇÃO EXTERNA, A INTERNA SOFRE DE INSTABILIDADE NUMÉRICA QUANDO $t_k \to 0^+$ (VEJA NO EXEMPLO QUE $t_k \to 0^+ \Rightarrow x_1^k \to 0$, E LOGO $\frac{t_k}{x_1^k}$ "É INSTÁVEL"). VEJA QUE A HESSIANA DA F.O. DE $SP(t_k)$ É

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{t_k}{(x_1^k)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SEUS AUTOVALORES SÃO $\lambda_1^k = 2 + \frac{t_k}{(x_1^k)^2}$ E $\lambda_2^k = 2$.

COMO $\quad 2(x_1^k+1) - \dfrac{t_k}{x_1^k} \longrightarrow 0 \quad$ E $\quad x_1^k \to 0^+$

TEMOS $\quad \dfrac{t_k}{x_1^k} \longrightarrow 2 \quad$ E $\quad$ LOGO $\quad \dfrac{t_k}{(x_1^k)^2} = \dfrac{t_k}{x_1^k} \cdot \dfrac{1}{x_1^k} \longrightarrow \infty$.

ASSIM $\lambda_1^k \to \infty$, E A HESSINA FICA CADA VEZ MAIS MAL CONDICIONADA.

CURIOSAMENTE ESTE MAL CONDICIONAMENTO NÃO INTERFERE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES OU QUADRÁTICOS CONVEXOS (OU SEJA, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$, A SEMI-DEF. POSITIVA), SE O MÉTODO FOR BEM IMPLEMENTADO. ISSO É IMPLEMENTADO EM PACOTES DE PL (CPLEX, GUROBI, KNITRO ETC).

CONVERGÊNCIA

TEOREMA: SEJA $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO, ONDE $t_k \downarrow 0$. ENTÃO TODO PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$ É MINIMIZADOR GLOBAL DO PROBLEMA ORIGINAL

$$P: \min_x f(x) \quad \text{s.a.} \quad c(x) \geq 0, \; x \in D.$$

PROVA: COMO $0 < t_{k+1} < t_k$ E $B(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega^\circ$,

ENTÃO

$$f(x^{k+1}) + t_{k+1} B(x^{k+1}) \leq f(x^k) + t_{k+1} B(x^k) \qquad (x^{k+1} \text{ minimiza } SP(t_{k+1}))$$

$$\leq f(x^k) + t_k B(x^k), \quad \forall k.$$

DEFINIMOS

$$b^k = f(x^k) + t_k B(x^k)$$

O VALOR ÓTIMO DE $SP(t_k)$. PELO QUE ACABAMOS DE ARGUMENTAR, A SEQUÊNCIA $\{b^k\}$ É MONÓTONA NÃO-CRESCENTE. TAMBÉM,

$$b^k \geq f(x^k) \geq f^* \quad , \quad \forall k, \qquad (1)$$

ONDE f^* É O VALOR ÓTIMO DE P. OU SEJA, $\{b^k\}$ É LIMITADA INFERIORMENTE. ASSIM, EXISTE O LIMITE

$$\bar{b} = \lim_k b^k .$$

AFIRMAMOS QUE $\bar{b} = f^*$. OBSERVE QUE DE (1) JÁ TEMOS

$\bar{b} \geq f^*$. SUPONHAMOS QUE $\bar{b} > f^*$. SEJA x^* UM MINIMIZADOR GLOBAL DE $\mathcal{P}$ $(f(x^*) = f^*)$ E TOMEMOS $x' \in V \cap \Omega^\circ$, V VIZINHANÇA DE x^*, TAL QUE

$$f(x') < \frac{1}{2} f^* + \frac{1}{2} \bar{b} . \qquad (2)$$

COMO $t_k \downarrow 0$, PARA ESTE x' FIXO, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') \to 0 .$$

ASSIM, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') < \frac{1}{2} \bar{b} - \frac{1}{2} f^* , \quad \forall k \gg 1 . \quad (3)$$

(NOTE QUE $\frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{2} f^* = \frac{1}{2}(\bar{b} - f^*) > 0$)

SOMANDO (2) COM (3), OBTEMOS

$$b^k \leq f(x^1) + t_k B(x^1) < \bar{b} \quad , \quad \forall k \gg 1 .$$

ASSIM,

$$\cdots \leq b^{k+1} \leq b^k < \bar{b} \quad , \quad \forall k \gg 1 \, ,$$

E LOGO $\bar{b} > \lim_k b^k$, UM ABSURDO. CONCLUÍMOS ASSIM QUE $\bar{b} = f^*$.

CONSIDEREMOS AGORA x^* PONTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}_{k\in K}$. TEMOS

$$0 = \lim_{k\in K} (b^k - \bar{b}) = \lim_{k\in K} \left[f(x^k) + t_k B(x^k) - f^* \right]$$

$$= \lim_{k \in K} \Big[\underbrace{\left(f(x^k) - f^* \right)}_{\geq 0} + \underbrace{t_k B(x^k)}_{\geq 0} \Big]$$

$$\Longrightarrow \quad f(x^*) = \lim_{k \in K} f(x^k) = f^* .$$

OU SEJA, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE $\mathbb{P}$. ∎