PLANOS DE CORTE

$$P: \min \ c^t x$$
$$\text{s.a.} \ x \in S,$$

ONDE $S \subset \mathbb{R}^m$ É UM CONJUNTO CONVEXO E FECHADO.

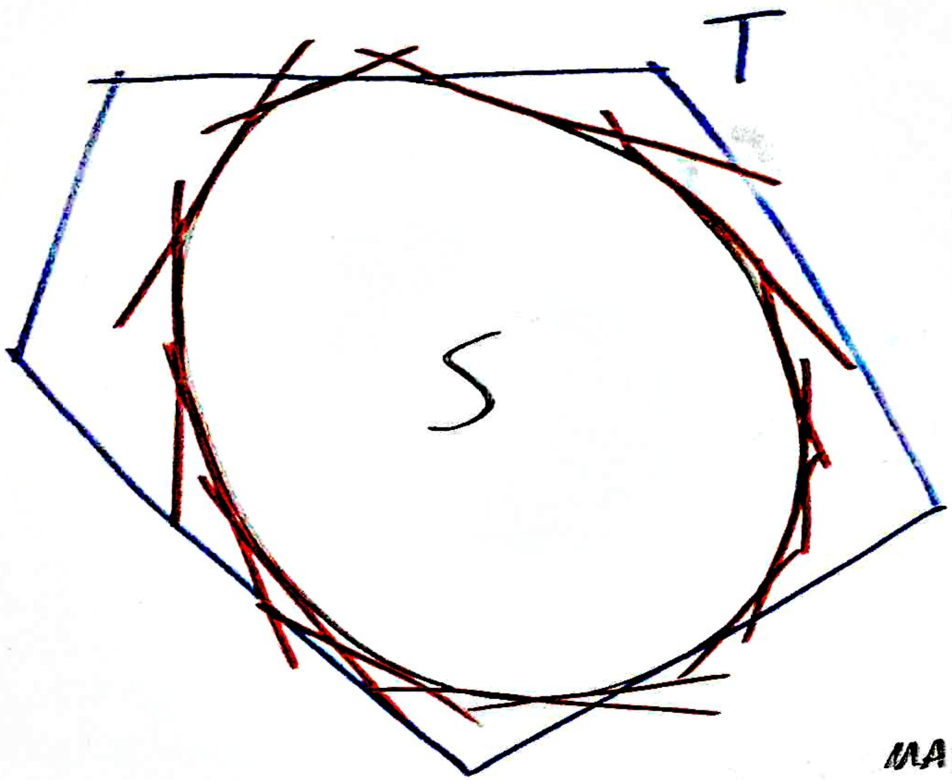
OBSERVE QUE UM PROBLEMA

$$\min \ f(y)$$
$$\text{s.a.} \ y \in R \quad , \quad R \text{ CONVEXO E FECHADO}, \ f \text{ CONVEXA}$$

PODE SER REESCRITO COMO

$$\min \ \mathbb{1}^t r$$
$$\text{s.a.} \ f(y) - r \leq 0, \ y \in R.$$

AQUI, $S = \{ x = (y, r) \ ; \ f(y) - r \leq 0, \ y \in R \}$.



S CONVEXO, FECHADO

$\Downarrow$

$\exists$ T POLIEDRAL TAL QUE

$S \subset T$.

MAIS AINDA,

$$S = \bigcap_{i \in I} \{ x \in \mathbb{R}^n ; a_i^t x \leq b_i \},$$

I CONJUNTO INFINITO DE ÍNDICES.

O MÉTODO DE PLANOS DE CORTE CONSISTE EM GERAR HIPERESPAÇOS $\{x \in \mathbb{R}^n, a_i^t x \leq b_i\}$ DE MODO A APROXIMAR S.

NOTE QUE O PROBLEMA QUE APROXIMA P É UM PL:

$$\begin{aligned} &\min \ c^t x \\ &\text{s.a.} \ a_i^t x \leq b_i, \quad i \in \overline{I}, \end{aligned}$$

ONDE $\overline{I}$ É FINITO.

OBSERVE QUE O NÚMERO DE RESTRIÇÕES AUMENTA, MAS O NÚMERO DE VARIÁVEIS PERMANECE CONSTANTE, O QUE NOS LEVA A UTILIZAR O DUAL DO P.L. (DUAL SIMPLEX).

ESQUEMA GERAL:

1) TOME UM POLIEDRO $T^0 \supset S$, E $x^0 \in \mathbb{R}^n$. FAÇA $k=0$

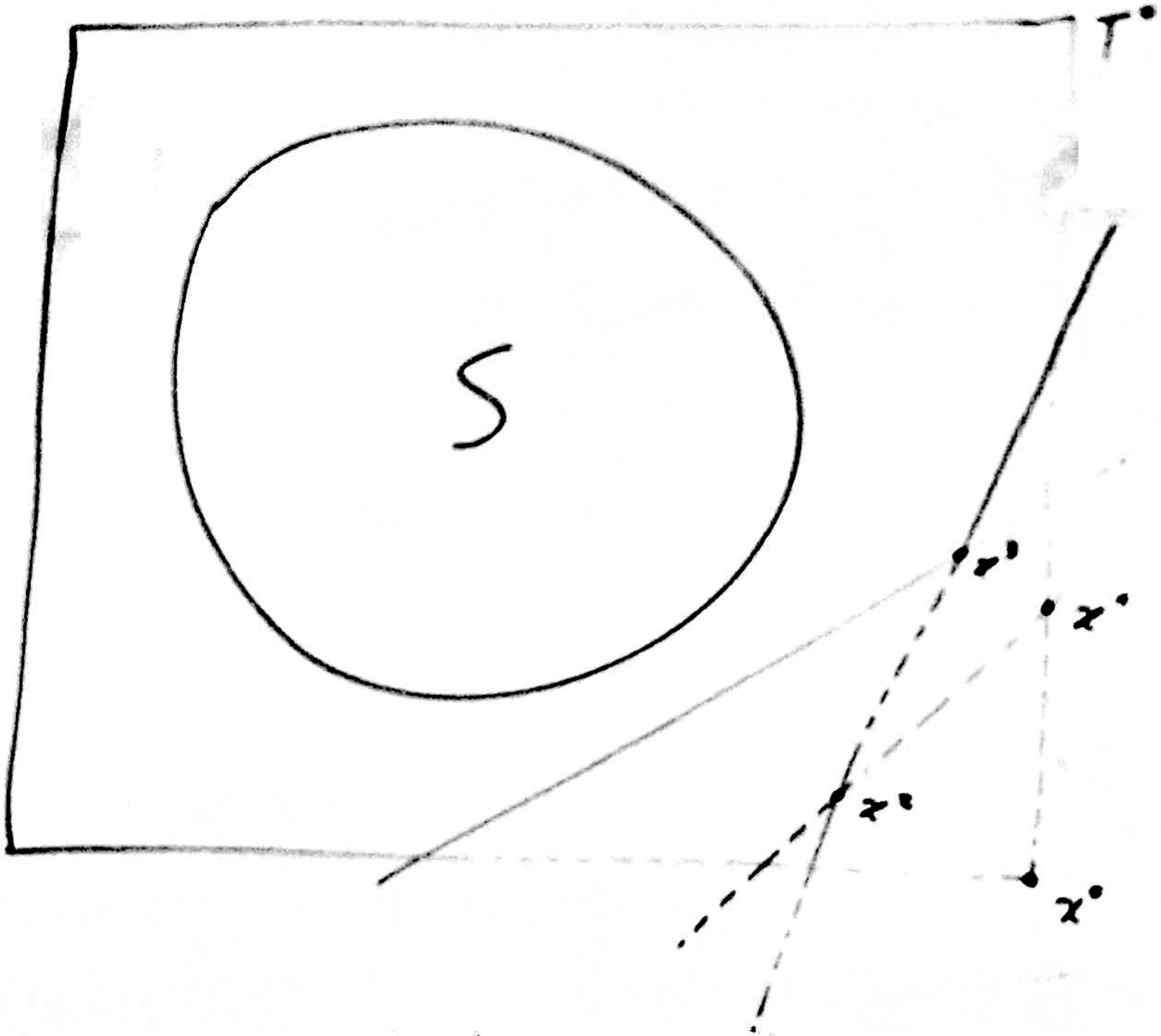
2) RESOLVA

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & x \in T^k \end{aligned},$$

OBTENDO x^k.

3) SE $x^k \in S$, PARE. CASO $x^k \notin S$, GERE UM HIPERPLANO $H^k = \{x \in \mathbb{R}^n ; a_k^t x \leq b_k\}$ TAL QUE $S \subset T^k \cap H^k$ E $x^k \notin H^k$.

TOME $T^{k+1} = T^k \cap H^k$, $k \leftarrow k+1$ E VOLTE AO PASSO 2.



OBS.: NA PRÁTICA É INTERESSANTE DESCARTAR HIPERPLANOS REDUNDANTES. UMA ESTRATÉGIA É DESCARTAR HIPERPLANOS INATIVOS NO PONTO CORRENTE x^k.

CONSIDERE O PROBLEMA

$$\min \ c^t x$$
$$\text{s.a.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

g_i's SÃO CONVEXAS E CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS.

AQUI, $S = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ g_i(x) \leq 0, \ \forall i \}$.

DADO $x^k \notin S$, TEMOS $g_j(x^k) > 0$ PARA ALGUNS j's.

DA CONVEXIDADE DE g_j, TEMOS

$$g_j(x^k) + \nabla g_j(x^k)^t (x - x^k) \leq g_j(x), \quad \forall x.$$

O DESEJO É QUE $g_j(x) \leq 0$. CONSIDERAMOS O HIPERESPAÇO

$$H^k = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \quad g_j(x^k) + \nabla g_j(x^k)^t (x - x^k) \leq 0 \}.$$

OBSERVE QUE

(i) $S \subset H^k$

(ii) $x^k \notin H^k$, DADO QUE

$$g_j(x^k) + \nabla g_j(x^k)^t (x^k - x^k) = g_j(x^k) > 0.$$

<u>OBS.:</u> ISSO SÓ FUNCIONA SUPONDO $\nabla g_j(x^k) \neq 0$.

CONVERGÊNCIA

TEOREMA: SEJAM g_i, $i=1,\dots,p$, FUNÇÕES CONVEXAS DE CLASSE C^1. SUPONHA QUE O MÉTODO DE PLANOS DE CORTE GERE UMA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$ COM SUCESSO. ENTÃO QUALQUER PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$ É MINIMIZADOR DE

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ \text{s.a. } & g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\dots,p. \end{aligned}$$

PROVA: EXERCÍCIO (VEJA LIVRO DE LUENBERGUER). //

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE INEQUAÇÕES CONVEXAS

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_p(x) \leq 0 \end{cases}, \quad g_i\text{'s são } C^1 \text{ convexas}$$

DADO x^k, CONSIDERE O CONJUNTO

$$M(x^k) = \{ i \; ; \; g_i(x^k) = \max_{j=1,\dots,p} g_j(x^k) \}.$$

OBSERVE QUE x^k NÃO É SOLUÇÃO DO SISTEMA, $g_i(x^k) > 0, \forall i \in M(x^k)$

TOMEMOS

$$w^k = \sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i \nabla g_i(x^k) \quad \text{onde} \quad \sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i = 1, \; \alpha_i \geq 0, \forall i \in M(x^k)$$

CONSIDERE O HIPERESPAÇO

$$H^k : \left(\max_{i=1,\dots,p} g_i(x^k) \right) + (x - x^k)^t w^k \leq 0 .$$

TEMOS :

(i) AS SOLUÇÕES DO SISTEMA SATISFAZEM H^k POIS, SE x É UMA SOLUÇÃO, ENTÃO

$$g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^t (x - x^k) \leq g_i(x) \leq 0 \quad , \forall i \qquad \text{(CONVEXIDADE)}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i g_i(x^k) + \alpha_i \nabla g_i(x^k)^t (x - x^k) \leq 0 , \quad \forall i \in M(x^k)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i g_i(x^k) + \left[\sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i \nabla g_i(x^k) \right]^t (x - x^k) \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{i\in M(x^k)} g_i(x^k) \cdot \sum_{i\in M(x^k)} \alpha_i + (w^k)^t (x - x^k) \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{i=1,\dots,p} g_i(x^k) + (x-x^k)^t w^k \leq 0 \Rightarrow x \in H^k \blacksquare$$

(ii) TRIVIALMENTE x^k NÃO É SOLUÇÃO $\Rightarrow x^k \notin H^k$.

ALGORITMO:

1) SEJA $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $T^0 = \{x \in \mathbb{R}^n ; l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i\}$ TAL QUE T^0 CONTÉM SOLUÇÕES DO SISTEMA (ISSO É POSSÍVEL SE TOMAMOS LIMITANTES LARGOS). FAÇA $k = 0$.

2) CALCULE $M(x^k)$ E $w^k = \sum_{i\in M(x^k)} \alpha_i^k \nabla g_i(x^k)$, $\sum_{i\in M(x^k)} \alpha_i = 1$,

$\alpha_i^k \geq 0$, $\forall i \in M(x^k)$

3) RESOLVA O PL

$$\min_{x,z} \; z$$

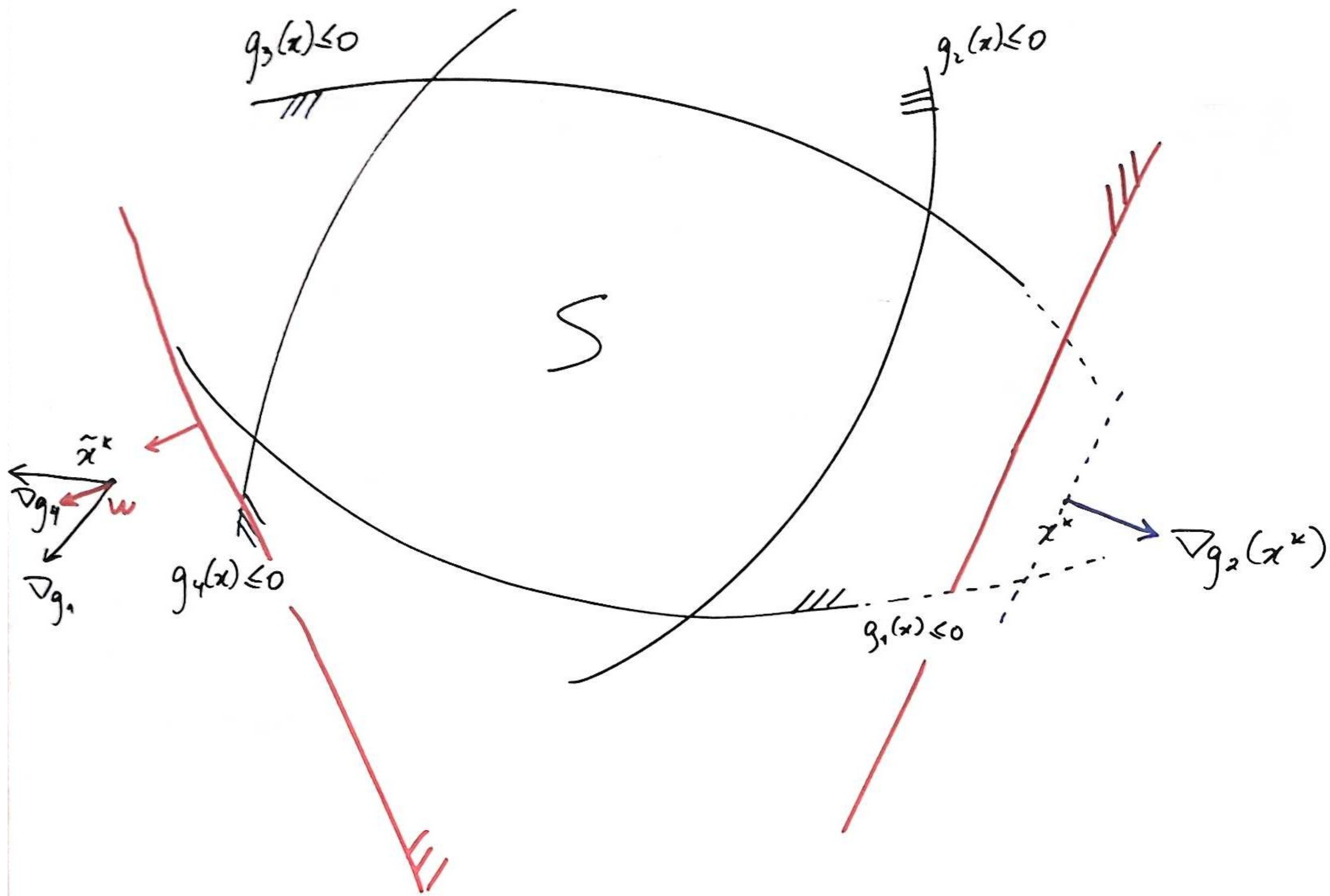
$$\text{s.a.} \quad z \geq \left(\max_{i=1,\dots,p} g_i(x^j) \right) + (x - x^j)^t w^j \,,$$

$$j = 0, \dots, K$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad , \forall i.$$

SEJA x^{K+1} A SOLUÇÃO ENCONTRADA.

4) SE x^{K+1} RESOLVE O SISTEMA DE INEQUAÇÕES, PARE.
CASO CONTRÁRIO, FAÇA $K \leftarrow K+1$ E VOLTE AO PASSO 2.



$g_3(x) \leq 0$
$g_2(x) \leq 0$
S
$\tilde{x}^*$
∇g_4
w
∇g_1
$g_4(x) \leq 0$
x^*
$\nabla g_2(x^*)$
$g_1(x) \leq 0$

OUTRO CRITÉRIO DE PARADA

CONSIDERE AS NOTAÇÕES

$$f(x) = \max_{i=1,\dots,p} g_i(x)$$

E

$$F_k(x) = \max \left\{ f(x^0) + (x - x^0)^t w^0, \dots, f(x^k) + (x - x^k)^t w^k \right\}.$$

QUEREMOS DECIDIR COMO PARAR EM x^{k+1}. É POSSÍVEL PROVAR QUE

$$F_k(x^{k+1}) \leq \min_{x \in [l,u]} f(x) \leq \min_{j=0,\dots,k+1} f(x^j).$$

VEJA QUE

$$\min_{j=0,\dots,k+1} f(x^j) - F_k(x^{k+1}) \geqslant 0$$

COMO VISTO NO TEOREMA DE CONVERGÊNCIA, À MEDIDA QUE GERAMOS CORTES, x^{k+1} SE APROXIMA DE UMA SOLUÇÃO. DESTA FORMA A DIFERENÇA ACIMA TENDE A ZERO, E LOGO UM CRITÉRIO DE PARADA PRÁTICO É

$$\min_{j=0,\dots,k+1} f(x^j) - F_k(x^{k+1}) \leqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 \text{ PRECISÃO}).$$

OBSERVE QUE O CÁLCULO É FEITO COM ELEMENTOS QUE JÁ TEMOS EM MÃOS NO ALGORITMO !!!.