

CNO's

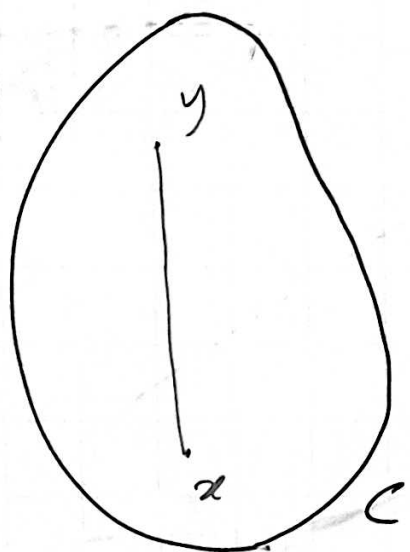
1ª ORDEM: $\boxed{\nabla f(x^*) = 0}$.

2ª ORDEM: $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

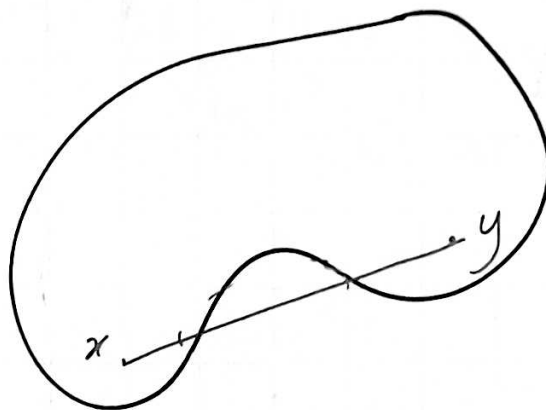
CONVEXIDADE

CONJUNTOS CONVEXOS.

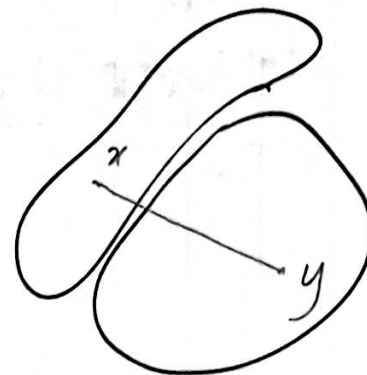
"UM CONJUNTO C É CONVEXO SE, DADOS $x, y \in C$, O SEGMENTO QUE LIGA x A y ESTÁ CONTIDO EM C ."



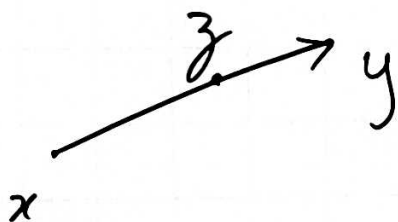
CONVEXO



NÃO CONVEXO



NÃO CONVEXO



$$z = x + t(y - x) = (1 - t)x + ty, \quad t \in [0, 1].$$

DEFINIÇÃO: um conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ é CONVEXO se, dados

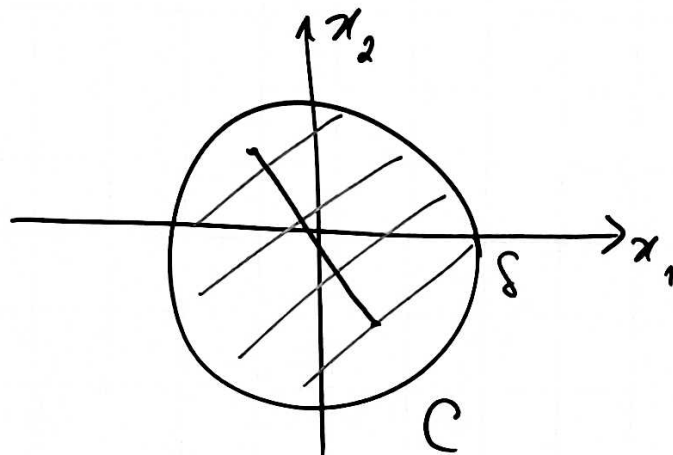
$x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$(1-t)x + ty \in C.$$

EXEMPLOS:

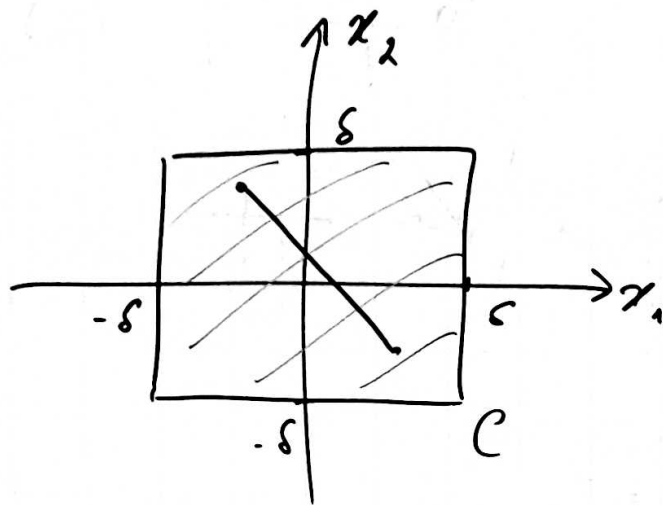
1) $C = \{ x \in \mathbb{R}^m; \|x\| \leq \delta \}$, $\delta > 0$ fixo.

1.1) $m=2$, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ (NORMA EUCLIDEANA)

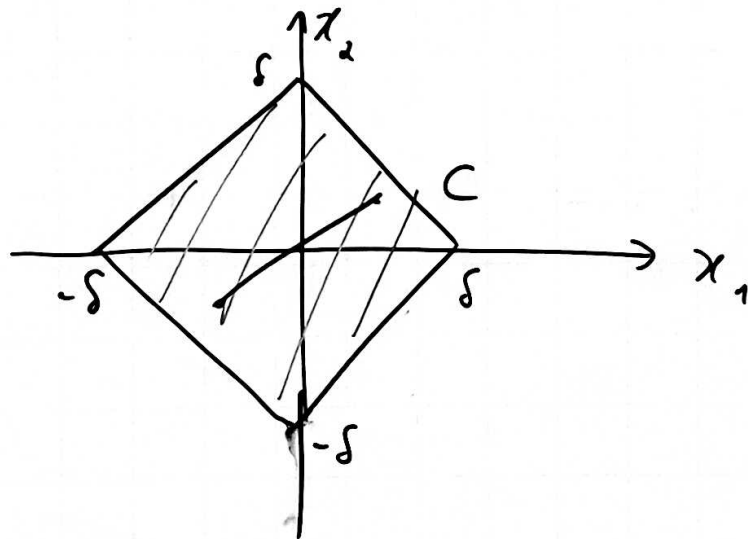


1.2) $m=2$, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\infty}$ on \mathbb{R}^2

$$\| (x_1, x_2) \|_{\infty} = \max \{ |x_1|, |x_2| \}.$$

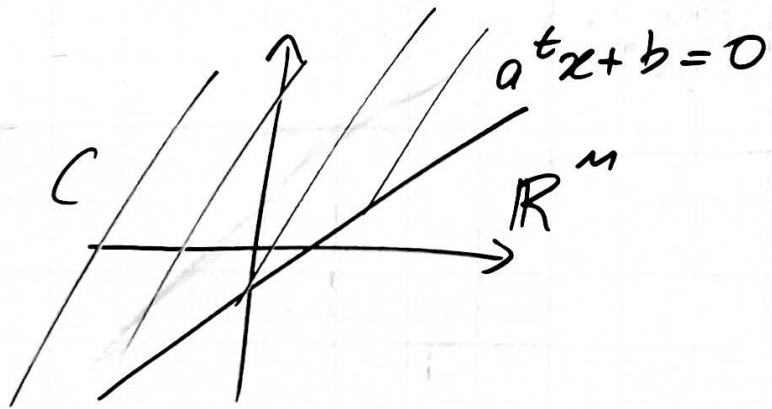


1.3) $m=2$, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_1$ on \mathbb{R}^2 $\| (x_1, x_2) \|_1 = |x_1| + |x_2|$.



$$3) C = \{x \in \mathbb{R}^n; a^t x + b \leq 0\}.$$

$$(\text{ou } C = \{x \in \mathbb{R}^n; a^t x + b = 0\}).$$



C é convexo: DADOS $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, TEMOS

$$\underline{a^t((1-t)x + ty) + b} = (1-t)a^t x + t a^t y + b$$

$$= (1-t)a^t x + t a^t y + (1-t)b + t b$$

$$= (1-t) \underbrace{[a^t x + b]}_{\leq 0} + t \underbrace{[a^t y + b]}_{\leq 0} \leq 0.$$

ou seja, $(1-t)x + ty \in C$.

O vetor $(1-t)x + ty$ é chamado combinação convexa de x e y ($t \in [0, 1]$).

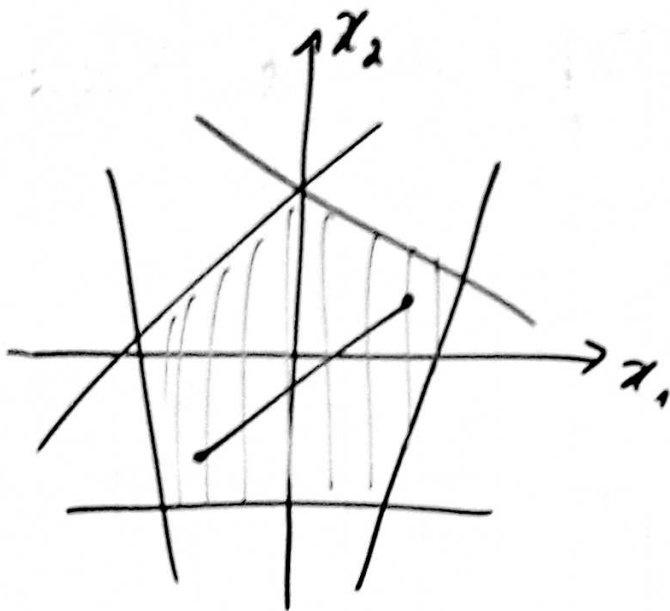
4) Se C_1, \dots, C_m são convexos, então a interseção $\bigcap_{i=1}^m C_i$ é convexa.

PROVA: EXERCÍCIO.

5) $C = \{x \in \mathbb{R}^m; Ax = b, Cx \leq d\}$ é convexo.

DE FATO, C é uma interseção de conj. do exemplo 3).

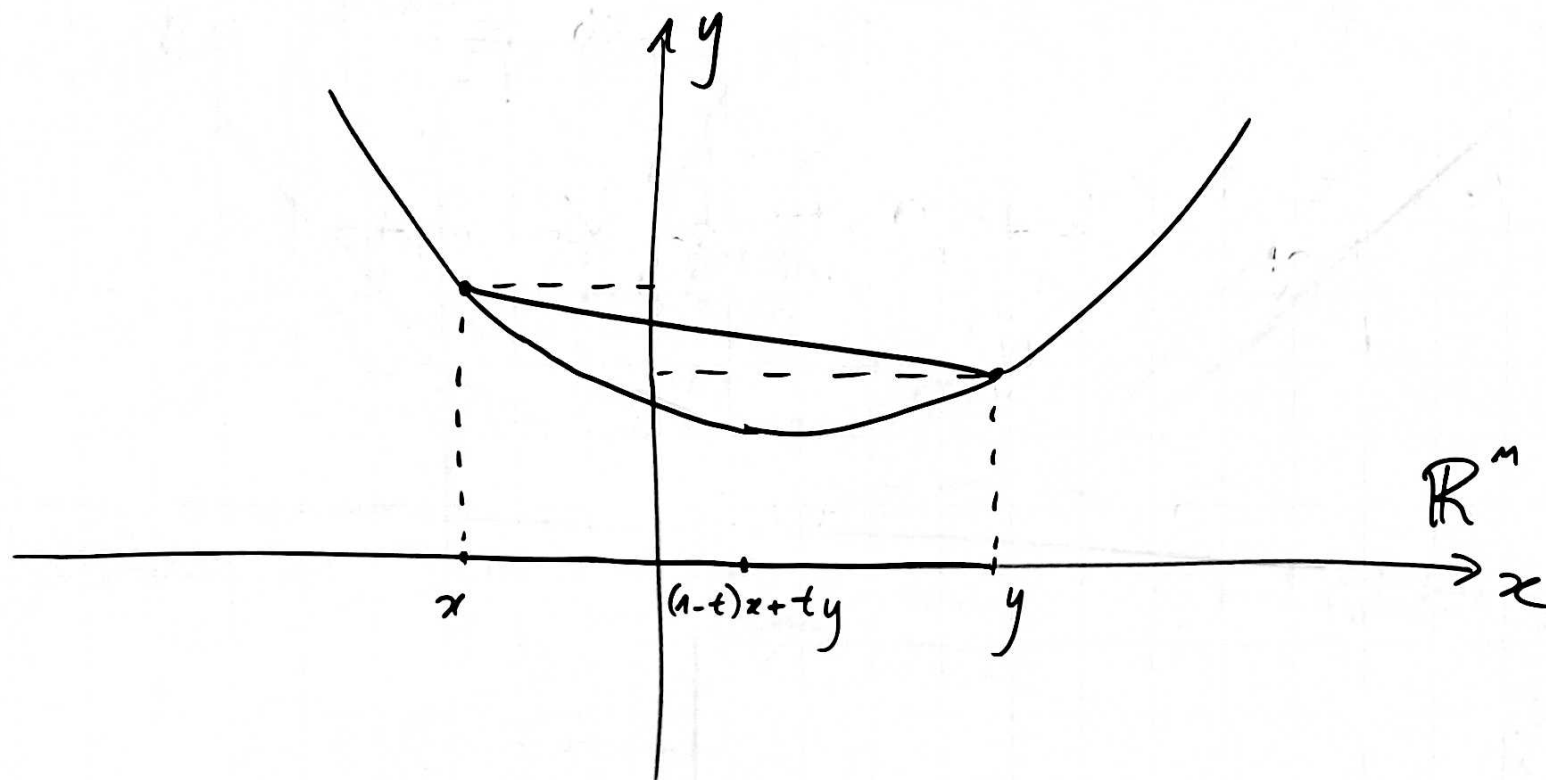
5.1) $C = \{x \in \mathbb{R}^2; Ax \leq b\}.$



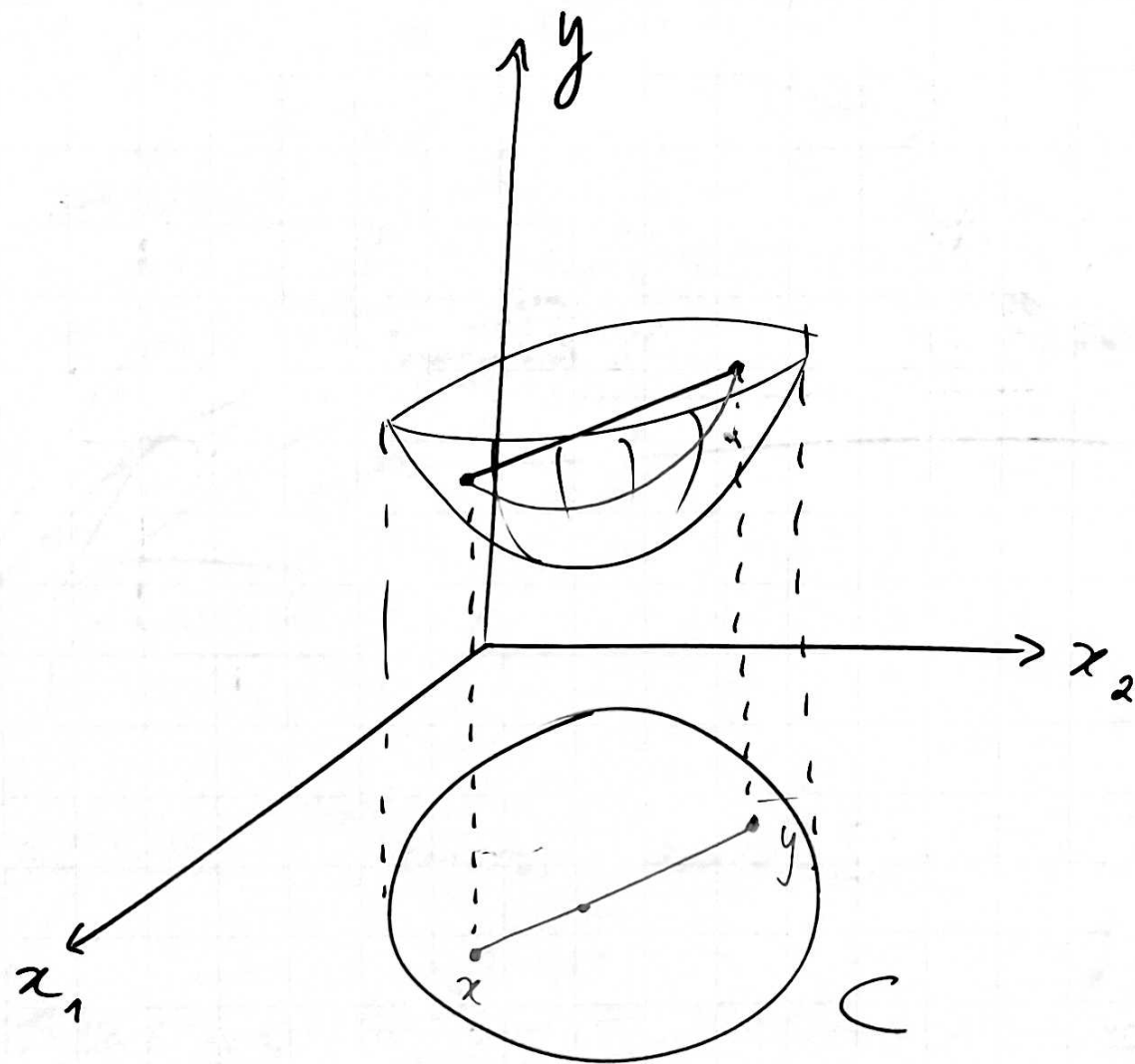
FUNÇÕES CONVEXAS

DEFINIÇÃO: UMA FUNÇÃO $f: C \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINIDA NO CONJUNTO CONVEXO C É DITA CONVEXA SE, DADOS $x, y \in C$ E $t \in [0, 1]$, TEMOS

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



$$(1-t)(x, f(x)) + t(y, f(y))$$



EXEMPLOS:

1) $f(x) = c^t x$ é CONVEXA.

é FATO, PARA $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$, TEMOS

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &= c^t [(1-t)x + ty] \\ &= (1-t)c^t x + t c^t y \\ &\leq (1-t)f(x) + t f(y) \end{aligned}$$

DAÍ, CONCLUE-SE QUE PROBLEMAS LINEARES SÃO CONVEXOS,
ISTO É, A F.O. É CONVEXA E A REGIÃO VIÁVEL É UM
CONJUNTO CONVEXO.

$$\min c^t x \text{ s.a. } Ax + b = 0, Cx + d \leq 0.$$

2) $f(x) = x^2$ é CONVEXA.

3) $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x + b^t x + c$, onde A é SIMÉTRICA
E SEMI-DEFINIDA POSITIVA, é CONVEXA.

4) SE f_1, \dots, f_m SÃO FUNÇÕES CONVEXAS SOBRE

C (CONVE XO), ENTÃO

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \quad \text{com } \lambda_i \geq 0, \forall i,$$

é CONVEXA SOBRE C .

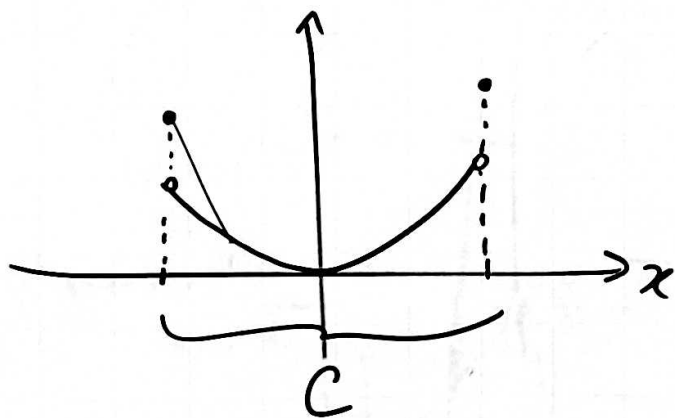
PROVA: EXERCÍCIO.

POR EXEMPLO,

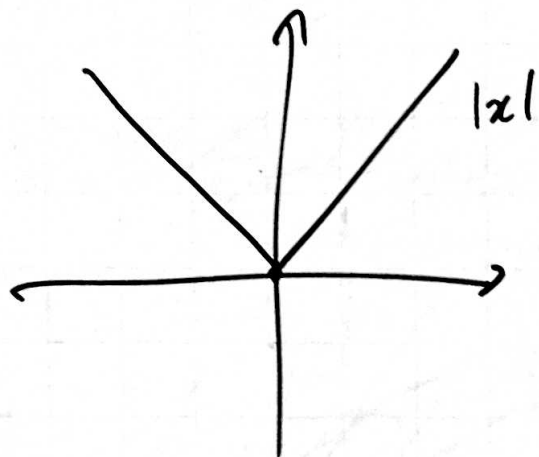
$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} x_2^4 + 2(x_1 + 2x_2)$$

é CONVEXA.

5) TODA FUNÇÃO CONVEXA f SOBRE C É
CONTÍNUA SOBRE $\text{int } C$.



6) NEM TODA FUNÇÃO CONVEXA É DIFERENCIÁVEL. EX. $f(x) = |x|$



EXERCÍCIO: MOSTRE ALGEBRICAMENTE QUE $f(x) = |x|$ É CONVEXA. MAIS GERALMENTE, A FUNÇÃO

$$f(x) = \|x\|.$$

MAS $f(x) = |x|$ NÃO TEM DERIVADA EM 0.

EXISTÊNCIA EM OTIMIZAÇÃO

PERGUNTA: POR QUE CONVEXIDADE É BOM EM OTIMIZAÇÃO?

TEOREMA: SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA SOBRE C (CONVEXO). SE $x^* \in C$ É MINIMIZADOR LOCAL DE f EM C ,

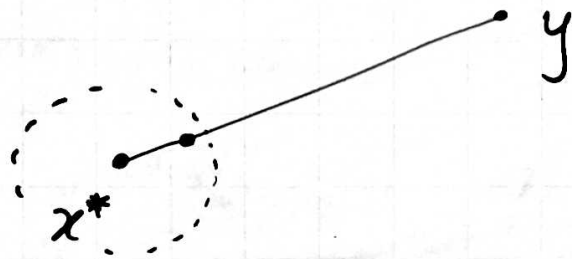
ENTÃO x^* É MINIMIZADOR GLOBAL.

PROVA: SEJA x^* MINIMIZADOR LOCAL DE f EM C ,

E SUPONHA QUE x^* NÃO SEJA MIN. GLOBAL. ASSIM,

EXISTE $y \in C$ TAL QUE $f(y) < f(x^*)$.

COMO C É CONVEXO, A COMBINAÇÃO



$$x_t = (1-t)x^* + ty \in C, \forall t \in [0,1].$$

AGORA, PARA $t \in (0,1]$, f CONVEXA

$$f(x_t) = f((1-t)x^* + ty) \leq (1-t)f(x^*) + tf(y)$$

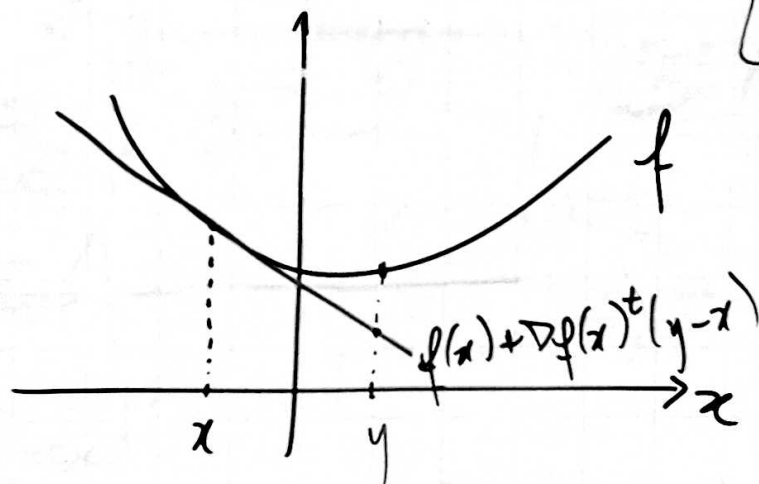
$$< (1-t)f(x^*) + tf(x^*) = f(x^*).$$

ORA, $f(x^t) < f(x^*)$, $\forall t \in (0, 1]$, CONTRARIA
A MINIMALIDADE DE x^* . ~~QED~~

TEOREMA: SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DIFERENCIÁVEL. (

ENTÃO f É CONVEXA SE, E SOMENTE SE,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t (y - x), \quad \forall x, y \in C.$$



→ APROXIMAÇÃO LINEAR
DE f EM TORNO DE
 x .

COROLÁRIO : SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ CONVEXA E DIFERENCIÁVEL.

SE $\nabla f(x^*)^t (y - x^*) \geq 0, \forall y \in C$, ENTÃO
 x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE f SOBRE C .

PROVA : SENDO f CONVEXA,

$$f(y) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^t (y - x^*) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x^*), \forall y \in C. \quad \blacksquare$$

TEOREMA : SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ CONVEXA E DIFERENCIÁVEL.

SE $\nabla f(x^*) = 0$ ENTÃO x^* É MINIMIZADOR
GLOBAL DE f SOBRE C .

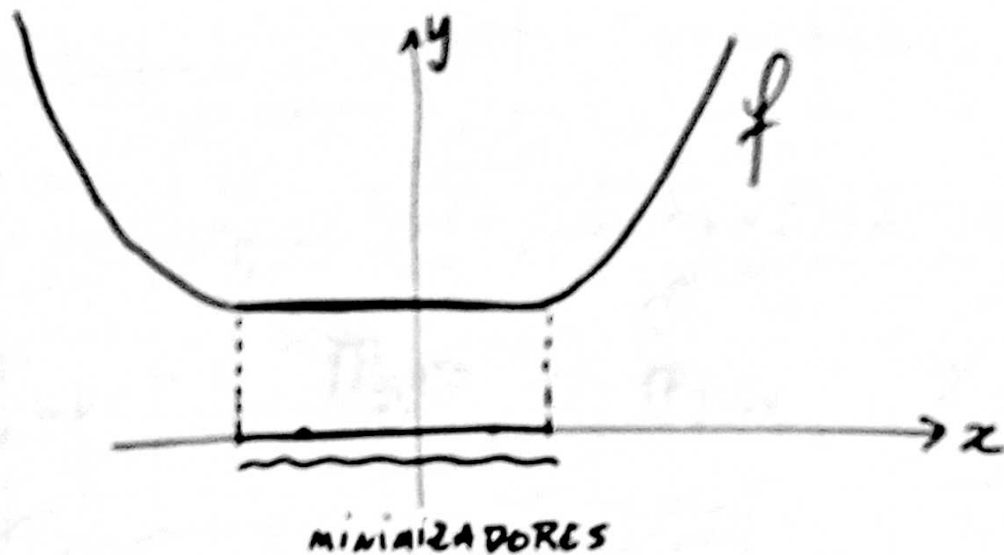
PROVA: TRIVIAL A PARTIR DO COROLÁRIO

"A CNO DE 1ª ORDEM ($\nabla f(x^*) = 0$) É SUFICIENTE
PARA OTIMALIDADE EM PROBLEMAS CONVEXOS".

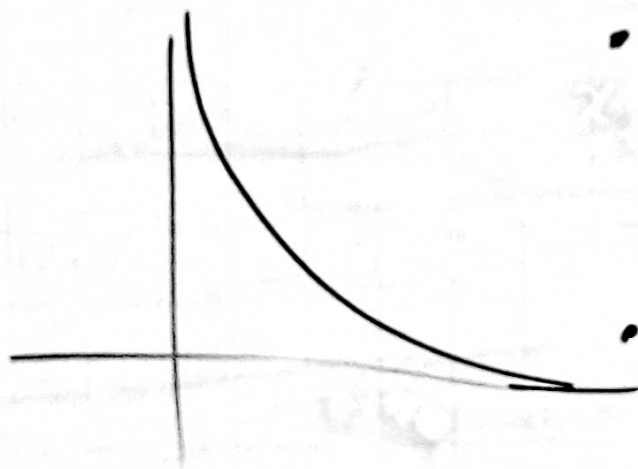
PROVA DO TEOREMA: DEPOIS !

EXERCÍCIOS:

- 1) PROVE QUE O CONJUNTO DOS MINIMIZADORES DE UM PROBLEMA CONVEXO $\min f(x)$ s.a. $x \in C$ É CONVEXO.



2) A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é convexa em $(0, \infty)$.



• Ela possui minimizador em $(0, \infty)$?

• E em $(0, a]$, $a > 0$?

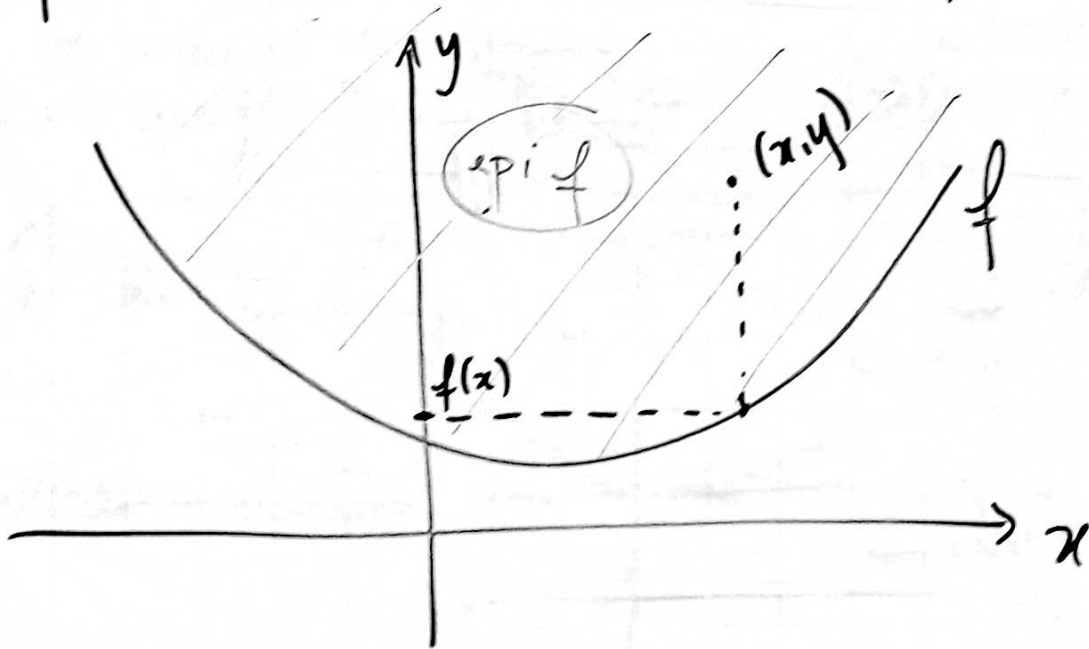
3) DEFINIMOS O EPÍGRAFO DE UMA FUNÇÃO CONVEXA

$f: C \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ COMO

$$\text{epi } f = \{ (x, y) \in C \times \mathbb{R} ; f(x) \leq y \}.$$

MOSTRE QUE

f É CONVEXA $\iff \text{epi } f$ É CONVEXO.



4) SEJA $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA DE CLASSE C^2 .

AFIRMAÇÃO: f É CONVEXA $\iff \nabla^2 f(x) \succeq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
($\nabla^2 f(x)$ SEMI-DEF. POSIT.)

MOSTRE A IMPLICAÇÃO \Rightarrow)

TEOREMA: $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DIFERENCIÁVEL, C CONVEXO.

ENTÃO

$$f \text{ é CONVEXA} \iff f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t(y-x), \forall x, y \in C.$$

PROVA: SUPONHA f CONVEXA. DAÍ, DADOS $x, y \in C$ E $t \in (0,1)$, TEMOS

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

$$\Rightarrow f(x + t(y-x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x))$$

$$\Rightarrow \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

FAZENDO $t \rightarrow 0^+$, OBTÉMOS

$$\nabla f(x)^t (y-x) \leq f(y) - f(x)$$

RECIPROCAMENTE, SUPONHA QUE $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t (y-x)$, $\forall x, y \in C$.
 PARA $t \in [0,1]$, DEFINA

$$x_t = (1-t)x + ty \in C.$$

TEMOS

$$f(y) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t (y - x_t) \quad (1)$$

$$\text{E} \quad f(x) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t (x - x_t) \quad (2)$$

MULTIPLICANDO (1) POR t E (2) POR $(1-t)$, E SOMANDO,
 OBTÉMOS

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t)f(x_t) + tf(x_t) + t \nabla f(x_t)^t (y - x_t) + (1-t) \nabla f(x_t)^t (x - x_t)$$


$$\Rightarrow (1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t [t(y-x_t) + (1-t)(x-x_t)]$$

AGORA,

$$t(y-x_t) + (1-t)(x-x_t) = [(1-t)x + ty] - x_t = 0,$$

é Assim,

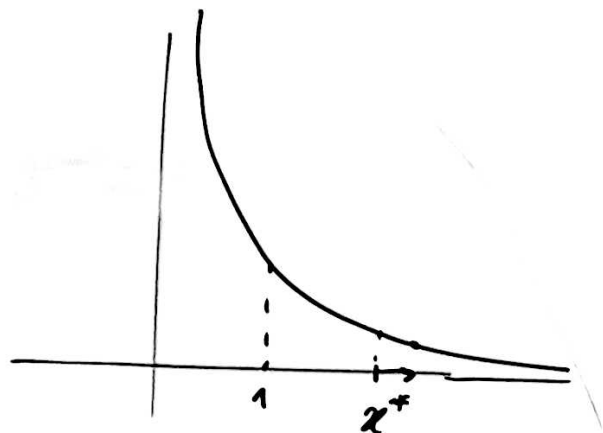
$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x_t) = f((1-t)x + ty),$$

isto é, f é convexa. 

SOBRE EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES

$\min \frac{1}{x}$ s.a. $x \geq 1$ NÃO POSSUI MINIMIZADOR.

DE FATO, DADO $x^* \geq 1$, $\frac{1}{x^*+t} < \frac{1}{x^*}$, $\forall t > 0$.



UMA FORMA DE GARANTIR EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES:

TEO. DE WEIERSTRASS: UMA FUNÇÃO CONTÍNUA $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
 DEFINIDA SOBRE $D \subset \mathbb{R}^m$ LIMITADO E FECHADO POSSUI
 UM MINIMIZADOR GLOBAL (TAMBÉM POSSUI MAXIMIZADOR).

PROVA: CURSO DE ANÁLISE (PARA O CASO $m=1$). ~~22~~