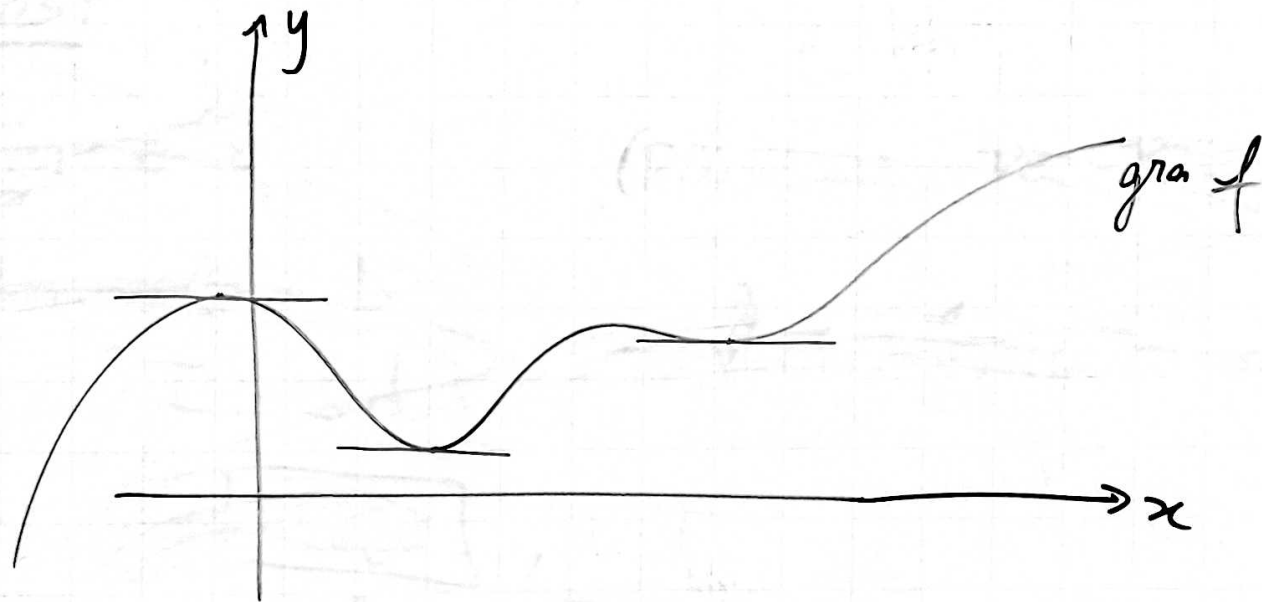


# OTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES

$$\min_x f(x) \\ (\text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n).$$



LEMA: SE  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  TEM DERIVADAS 2<sup>as</sup> CONTÍNUAS E  $t^*$  É UM MINIMIZADOR LOCAL, ENTÃO  $f'(t^*) = 0$  E  $f''(t^*) \geq 0$ .

PROVA: Como  $t^*$  é minimizador local então

$$\varphi(t^* + t) \geq \varphi(t^*), \quad \forall t \text{ suficientemente}$$

pequeno. Daí, para  $t > 0$ ,

$$0 \leq \frac{\varphi(t^* + t) - \varphi(t^*)}{t}$$

Passando ao limite  $t \rightarrow 0^+$ , obtemos  $\varphi'(t^*) \geq 0$ .

Fazendo o mesmo para  $t \rightarrow 0^-$ , obtemos  $\varphi'(t^*) \leq 0$ ,

e logo  $\varphi'(t^*) = 0$ .

Usando a expansão de Taylor de 2ª ordem de  $\varphi$  ao redor de  $t^*$ , escrevemos

$$\varphi(t^* + t) = \varphi(t^*) + \underbrace{t \varphi'(t^*)}_{=0} + \frac{t^2}{2} \varphi''(t^*) + r(t)$$

ONDE  $\frac{\eta(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . DAÍ, USANDO O FATO DE

$\varphi'(t^*) = 0$ , DIVIDIMOS A EXPRESSÃO ANTERIOR POR  $t^2$

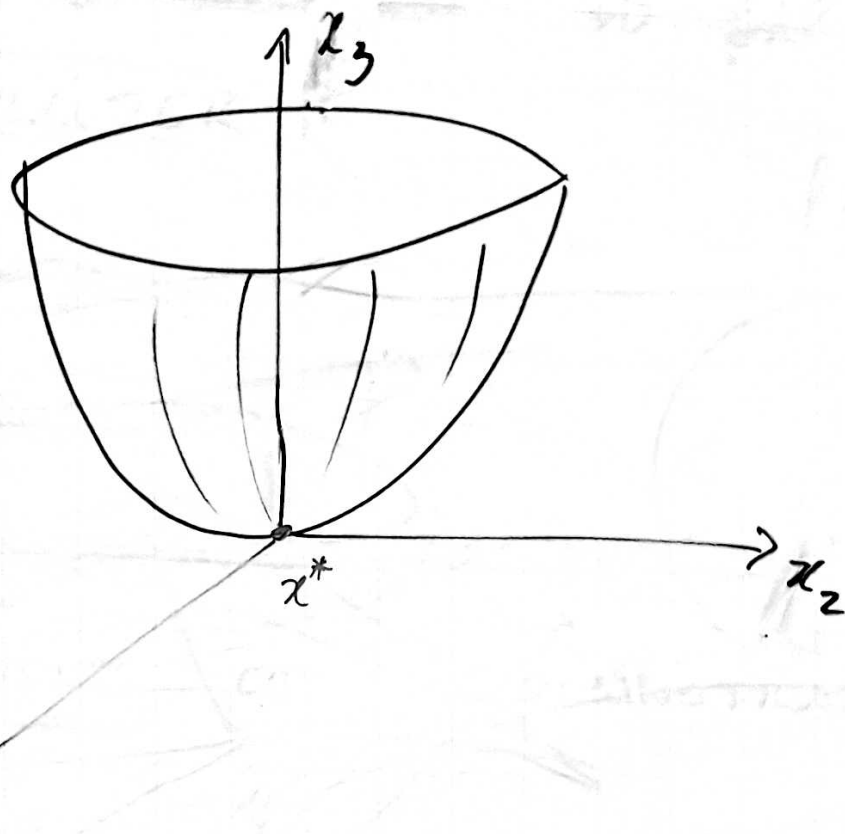
PARA OBTER

$$\frac{1}{2} \varphi''(t^*) + \frac{\eta(t)}{t^2} = \frac{\varphi(t^* + t) - \varphi(t^*)}{t^2} \geq 0$$

$\forall t$  SUFICIENTEMENTE PEQUENO. FAZENDO  $t \rightarrow 0$

OBTENEMOS  $\varphi''(t^*) \geq 0$ .





TEOREMA (CONDIÇÃO NECESSÁRIA (DE OTIMALIDADE) DE 1ª ORDEM)

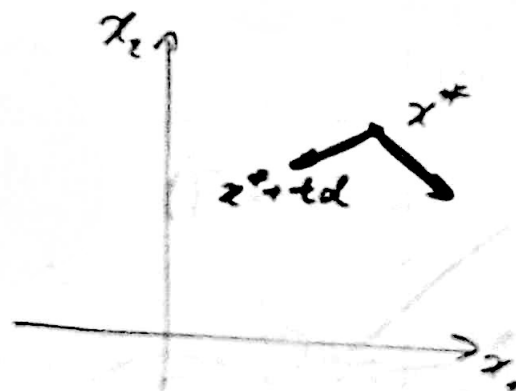
SEJA  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  UMA FUNÇÃO COM DERIVADAS CONTÍNUAS  
 $(f \in C^1)$ . SE  $x^*$  É UM MINIMIZADOR LOCAL DE  $f$  ENTÃO

$$\nabla f(x^*) = 0$$

PROVA: REFINAMOS A FUNÇÃO

$$\varphi(t) = f(x^* + td),$$

ONDE  $d \neq 0$  É FIXO.



COMO  $x^*$  É MIN. LOCAL DE  $f$ ,  $t^* = 0$  É MIN. LOCAL DE  $\varphi$   
DAÍ,  $\varphi'(0) = 0$ . AGORA,

$$\varphi(t) = \nabla f(x^* + td)^t d$$

DAÍ,  $0 = \varphi'(0) = \nabla f(x^*)^t d$ . COMO  $d$  É QUALQUER, SÓ PODE SER

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{em}.$$

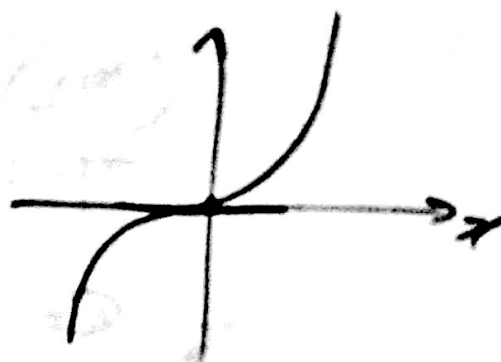
---

OBS:  $\nabla f(x^*) = 0 \not\Rightarrow x^*$  ser minimizador.

EXEMPLOS:

1)  $f(x) = x^3, x^* = 0$

$$f'(0) = 0.$$



$x^* = 0$  NÃO é min. Pois  $f(t) = t^3 < 0, \forall t < 0$ .

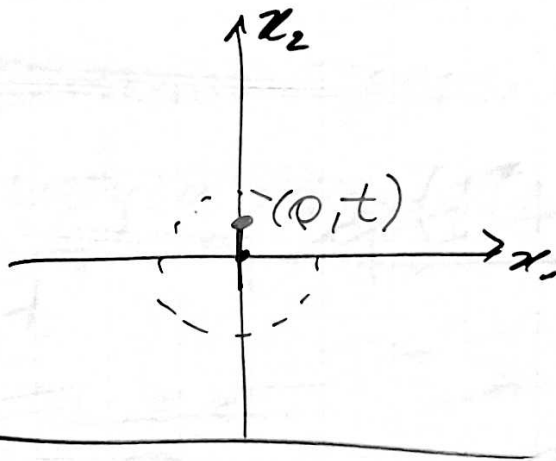
---

2)  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3, x^* = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}. \quad \nabla f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ Porém } (0, 0) \text{ NÃO}$$

É MINIMIZADOR DA DO QUE

$$f(0, t) = -t^2 < 0 = f(0, 0), \quad \forall t \neq 0.$$



$$3) \quad f(x) = -x_1^2 - x_2^2, \quad x^* = (0, 0).$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x^*) = (0, 0). \quad \text{MAS } x^* \text{ É}$$

10 MAXIMIZADOR GLOBAL :  $f(x, y) < 0 = f(0, 0), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$

$$4) \quad f(x) = (x_1 - x_1^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2), \quad x^* = (0,0).$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_1^3 \end{bmatrix}$$

$$) \quad \nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$x^* = (0,0)$  NAO É MINIMIZADOR LOCAL DE  $f$ :

DE FATO, TOME  $x = \left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right)$ . NOTE QUE SE

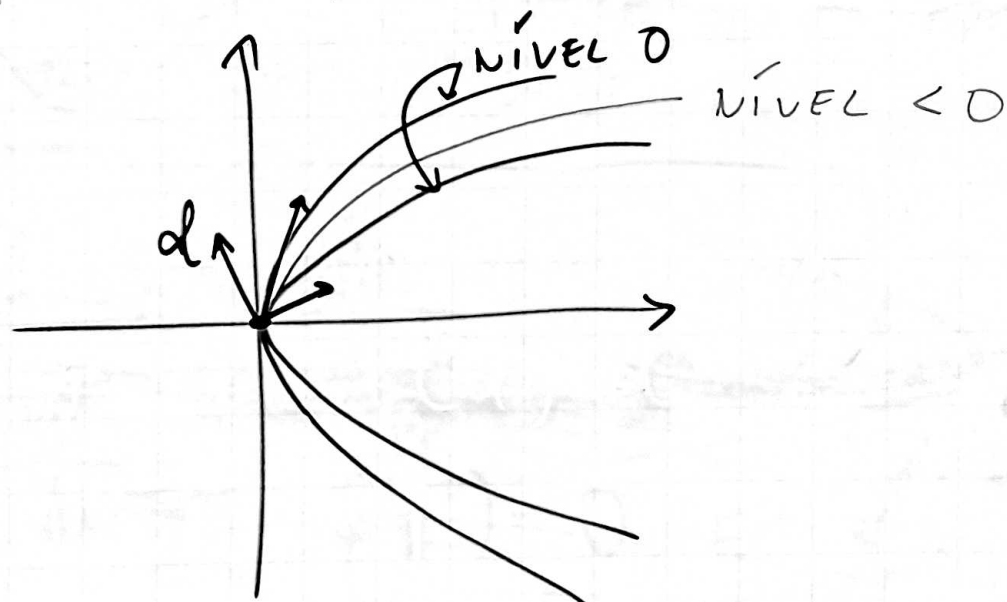
$x_2 \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow (0,0)$ . AGORA,

$$f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}x_2^2 - x_2^2\right)}_{<0} \underbrace{\left(\frac{2}{3}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^2\right)}_{>0} < 0 = f(0,0).$$



APESAR DE  $x^* = (0,0)$  NÃO SER MINIMIZADOR DE  $f$ ,  
SE FIXAMOS QUALQUER DIREÇÃO  $d \neq 0$ , O PONTO  
 $x^*$  É O MINIMIZADOR AO LONGO DA DIREÇÃO  $d$ . ISTO  
É,  $t^* = 0$  É MINIMIZADOR DE

$$\varphi(t) = f(x^* + td).$$



(...).

SE FATO,

$$f(x^* + td) = f(td) = (td_1 - t^2 d_2^2)(td_1 - \frac{1}{2}t^2 d_2^2)$$

$$\text{SE } d_1 = 0 \text{ ENTÃO } f(td) = \frac{1}{2}t^4 d_2^4 > 0, \quad \forall d_2 \neq 0, \\ \forall t \neq 0.$$

SUPONHA  $d_1 \neq 0$ . TEMOS

$$f(x^* + td) = t^2 (d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2).$$

$$\text{PARA } t=0, \text{ A PARCELA } (d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) = d_1^2 > 0.$$

---

POR CONTINUIDADE, ESSA PARCELA PERMANECE POSITIVA  
PARA TODO  $t$  SUFICIENTE PRÓX. DE 0. DAÍ,  
 $f(x^* + td) > 0$ ,  $\forall t \neq 0$  PEQUENO.

"MINIMIZAR EM TODAS AS DIREÇÕES NÃO É SEMPRE  
SUFICIENTE PARA MINIMIZAR UMA FUNÇÃO  $f$ ".

---

TEO (CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE OTIMALIDADE DE 2ª ORDEM).

SE  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  É  $C^2$  E  $x^*$  É MINIMIZADOR LOCAL ENTÃO  
GRADIENTE DE  $f$  EM  $x^*$  É NULO E  $\nabla^2 f(x^*)$  É SEMI-DEFINIDA POSITIVA ( $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$ )

LEMBRETE: A HESSIANA DE  $f$  NO PONTO  $x^*$  É

A MATRIZ  $M \times M$  TAL QUE

$$\nabla^2 f(x^*)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$$

EXEMPLO:

$$f(x) = x_1^2 x_2 - x_3^2 + 2x_1 + x_2^5$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_1^2 + 5x_2^4 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_1 & 20x_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

SE  $f \in C^2$  ENTÃO  $\nabla^2 f(x)$  É SIMÉTRICA.

## DEFINIÇÕES:

1) uma matriz  $A$   $m \times m$  é SEMI-DEFINIDA POSITIVA se  $d^t A d \geq 0$ ,  $\forall d \in \mathbb{R}^m$ .

## EXEMPLOS:

(i)  $I$  (IDENTIDADE)

(ii)  $A = \text{diag}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^m$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots$$

(iii)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  NÃO É SEMI-DEF. POSITIVA:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

(iii)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  NÃO É SEMI-DEF. POSITIVA, APESAR DE SIMÉTRICA.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 < 0.$$

NO CASO  $\underline{m=1}$ ,  $\nabla^2 f(x) = f''(x)$ . DAI,  $\nabla^2 f(x)$  É SEMI-DEF. POS.  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ .

NOTAÇÃO:  $\underline{\nabla^2 f(x) \geq 0}$  (ou  $\nabla^2 f(x) \geq 0$ ).

TEO: (CNO DE 2ª ORDEM)

Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^2$  e  $x^*$  é um minimizador local, então  $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$  (além de  $\nabla f(x^*) = 0$ ).

PROVA:  $\nabla f(x^*) = 0$  PELO TEO. ANTERIOR (CNO DE 1ª ORDEM). DEFININDO A FUNÇÃO

$$\varphi(t) = f(x^* + td).$$

Como  $x^*$  é minimizador local de  $f$ ,  $t^* = 0$  é min. local de  $\varphi$ . Assim  $\varphi''(t^*) \geq 0$ . TEMOS

$$\varphi'(t) = \nabla f(x^* + td)^t d, \quad \varphi''(t) = d^t \nabla^2 f(x^* + td) d.$$

DAÍ,  $\varphi''(t^*) = d^t \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$  . SENDO  $d$  QUALQUER,  
SEGU E O RESULTADO.  $\square$

EXEMPLO:  $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$ .

$x^* = (1, 0)$ . É POSSÍVEL VERIFICAR QUE

$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  E QUE  $x^*$  É MINIMIZADOR LOCAL.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1 - 6 - 12x_2 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{bmatrix}$$

$$\left| \nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} . \quad [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \right.$$



$$= \begin{bmatrix} 6d_1 - 6d_2 & -6d_1 + 12d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 6d_1^2 - 12d_1d_2 + 12d_2^2$$

$$= 6(d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2) + 6d_2^2$$

$$= 6(d_1 - d_2)^2 + 6d_2^2 \geq 0. \quad ($$

OU SEJA,  $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$ .

2)  $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$  (e  $\nabla f(x^*) = 0$ ) NÃO É SUFICIENTE  
PARA OTIMALIDADE ( $x^*$  SER MINIMIZADOR LOCAL).

POR EXEMPLO,  $f(x) = x^3$ ,  $x^* = 0$ :  $f'(0) = 0$ ,  
 $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$ .

3)  $f(x) = -x^2$ ,  $x^* = 0$  NÃO É MINIMIZADOR LOCAL.

1ª ORDEM:  $f'(0) = 0$ .  $\leftarrow$  1ª ORDEM COME BOLA.

2ª ORDEM:  $f''(0) = -2 < 0$ .  $\leftarrow$  2ª ORDEM "DESCARTA" O PONTO RUIM!

"A 2ª ORDEM CARACTERIZA MELHOR OS MINIMIZADORES"

ÀS VEZES, UM PONTO QUE NÃO É MINIMIZADOR PASSA NO TESTE DE 1ª ORDEM, MAS FURA O TESTE DE 2ª ORDEM...

## CONDIÇÃO SUFICIENTE (DE 2ª ORDEM) PARA OTIMALIDADE.

DEFINIÇÃO:  $A_{n \times n}$  É DEFINIDA POSITIVA SE

$$d^T A d > 0, \quad \forall d \neq 0.$$

EXEMPLOS:

1)  $I_d$ .

2)  $A = \text{diag}(a)$ ,  $a_i > 0, \forall i$ .

3)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  NÃO É DEF. POS. POIS  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

(ESSA MATRIZ É SEMI-DEF. POS.)

" $A$  É DEF. POSITIVA  $\Rightarrow A$  É SEMI-DEF. POS."

$\nLeftarrow$

DEFINIÇÃO:  $x^*$  É MINIMIZADOR LOCAL ESTRITO DE  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

SE  $f(x^*) < f(x)$ ,  $\forall x \neq x^*$  PRÓXIMO A  $x^*$ .

TEO. (COND. SUFICIENTE DE 2ª ORDEM)

SE  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  É  $C^2$  E  $x^*$  É TAL QUE

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{E} \quad \nabla^2 f(x^*) > 0$$

ENTÃO  $x^*$  É MINIMIZADOR LOCAL ESTRITO.

---

EXERCÍCIOS:

1) CAP 2 LIVRO ANA FRIEDLANDER.

2) MOSTRE QUE  $A \geq 0$  (A MATRIZ  $n \times n$ ) SE, E SÓ SE, TODOS OS AUTOVALORES SÃO  $\geq 0$ . (suponha A simétrica)