Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1 Motivação

Transformações lineares são funções entre espaços vetoriais que satisfazem certas propriedades. Essas propriedades, que constituem o que coloquialmente chamamos de *linearidade*, são um dos conceitos mais fundamentais da Álgebra Linear (não à toa dá o nome à disciplina!).

Lidar com funções lineares no computador é particularmente interessante, pois, como veremos, a avaliação de tais funções pode ser vista como um produto "matriz-vetor" $\mathbf{Ax}$. De fato, linguagens de programação para computação de alta eficiência são pensadas em termos matriciais, como por exemplo, o Fortran. Python, Matlab e Octave são outros exemplos de linguagens que dedicam especial atenção à operações com matrizes.

A facilidade computacional com funções lineares permite-nos resolver vários problemas reais. Por exemplo, ao querer encontrar o *valor mínimo* que uma função f qualquer atinge, pode-se conceber um algoritmo iterativo que a cada passo *aproxima* f por uma função linear; a sequência de problemas aproximados são mais fáceis de resolver justamente por envolverem funções lineares. Em particular, problemas de otimização onde os dados são descritos por funções lineares são amplamente estudados, com aplicações em diversos ocasiões (cálculo de melhores rotas, problemas de logística em geral, minimização de perdas em cortes de chapas metálicas etc – provavelmente você estudará problemas deste tipo na disciplina "Pesquisa Operacional").

Enfim, funções linearidades aparecem em inúmeras situações... Veja a seção "Curiosidades - aplicações da Álgebra Linear" no AVA.

Como ponto de partida, sugiro que você

- veja a introdução do Capítulo 5 do livro do Boldrini;
- assista aos vídeos indicados no AVA.

5.2 Transformações Lineares – definição

Iniciamos com o estudo geral de transformações lineares. Logo após estudaremos transformações do plano no plano, que lembrará conteúdos vistos em Geometria Analítica.

Definição 5.1. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma* transformação linear *é uma aplicação (função)*

$$T : V \to W$$

que, para quaisquer $u, w \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, satisfaz

(*i*) $T(u + w) = T(u) + T(w)$

(*ii*) $T(au) = aT(u)$

Nas condições (i) e (ii) aparecem as duas operações de espaços vetoriais.
(i) diz que a imagem da soma é a soma das imagens;
(ii) diz que a imagem da multiplicação por escalar é multiplicação da imagem pelo escalar.
Note que as operações à esquerda das igualdades (antes da aplicação de T) são as operações do espaço vetorial de partida V, enquanto que as operações entre as imagens são aquelas de W, o espaço de chegada.

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, a segunda condição da Definição 5.1 garante que

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

(basta tomar $a = 0$).

Neste texto podemos escrever $\mathbf{0}_V$ para indicar o vetor nulo do espaço vetorial V quando houver risco de confusão.

Também, veja que

$$T(-u) = -T(u)$$

(tome $a = -1$) e

$$T(u - w) = T(u) - T(w)$$

pois $T(u - w) = T(u + (-w)) = T(u) + T(-w) = T(u) - T(w)$.

5.3 Exemplos

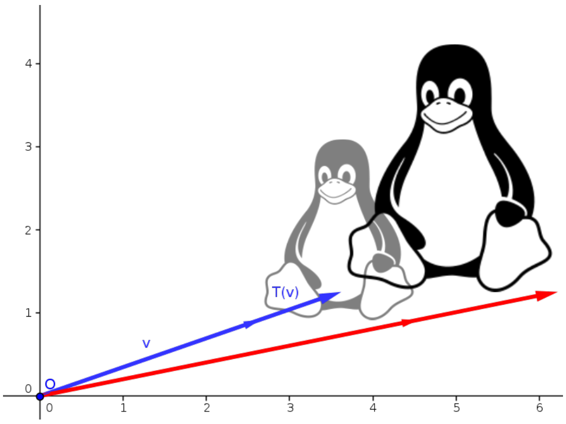
5.3.1 Transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ (do "plano no plano")

Vamos ver exemplos de transformações quando $V = W = \mathbb{R}^2$. Esses exemplos são instrutivos pois ajudam a intuição geométrica. Vamos visualizar também cada transformação na forma matricial, motivando para o estudo geral à frente.

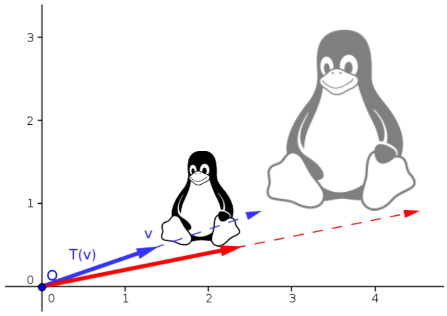
Exemplo 5.1. – Expansão (ou contração) uniforme.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\to av \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é fixado. Quando $0 < a < 1$, T é chamada *contração*, e quando $a > 1$, *expansão*.



$a > 1$



$0 < a < 1$

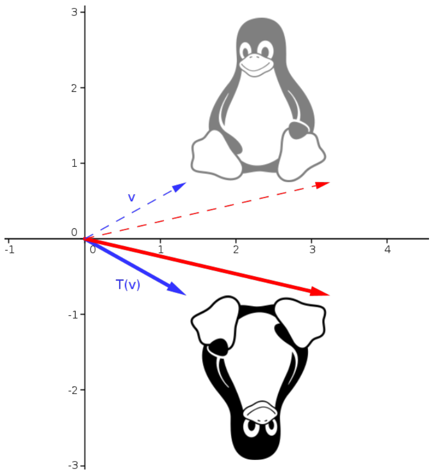
Em termos de matrizes, T pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.2. – Reflexão em torno do eixo x.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x, -y). \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

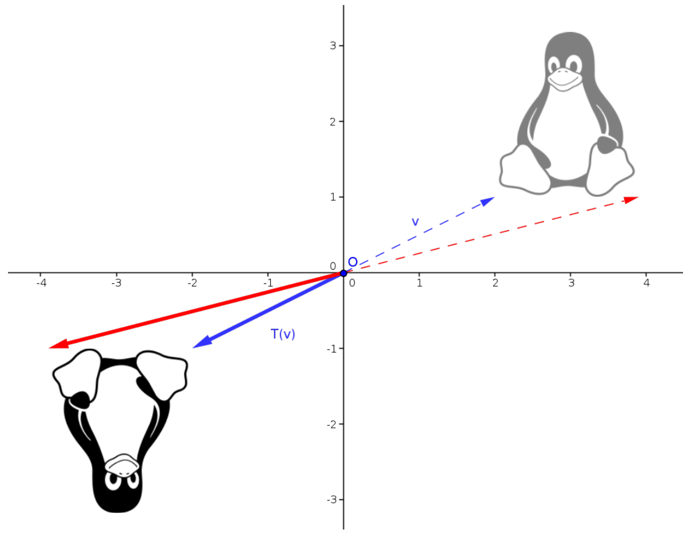
□

Atividade 5.1. Escreva a expressão da reflexão em torno do eixo y e sua forma matricial.

Exemplo 5.3. – Reflexão ao redor da origem.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (-x, -y). \end{aligned}$$

Essa transformação corresponde ao Exemplo 5.1 com $a = -1$.



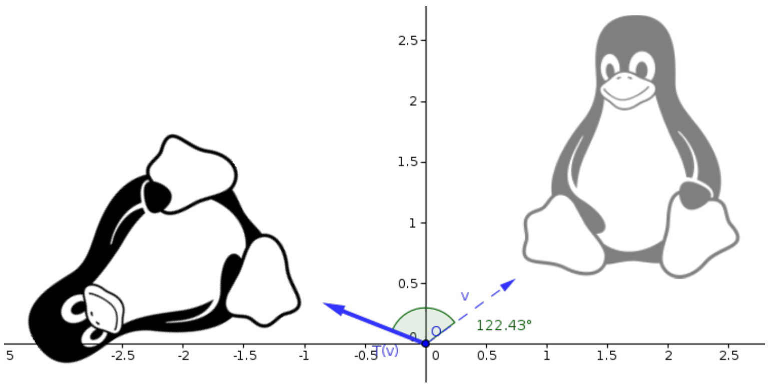
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.4. – Rotação ao redor da origem (no sentido anti-horário).

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \to (\ x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta\ ,\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta\ ) \end{aligned}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ é o ângulo de rotação em radianos.

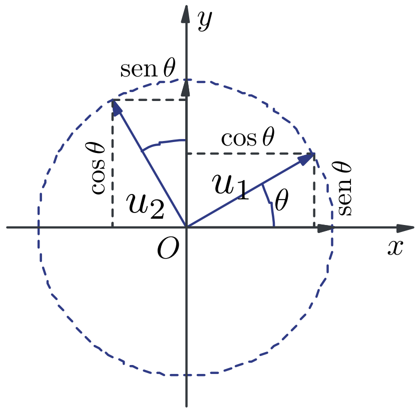


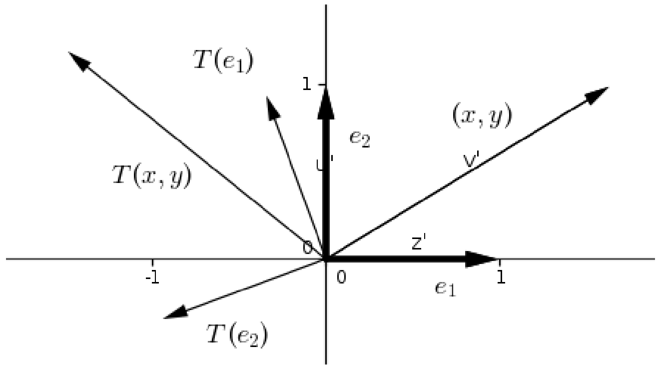
Uma justificativa para a expressão de $T(x, y)$ é a seguinte: uma trigonometria simples nos leva à concluir que

$$u_1 = T(e_1) = T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{e} \qquad u_2 = T(e_2) = T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

(veja figura à esquerda). Ademais, (x, y) escrito na base $can = \{(1, 0); (0, 1)\}$ mantém os mesmos coeficientes após a rotação (os três vetores são igualmente rotacionados – veja figura à direita). Portanto

$$T(x, y) = T\big(x(1, 0) + y(0, 1)\big) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = (\ x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\ ,\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta\ ).$$





Em termos de matrizes, T pode ser representada por

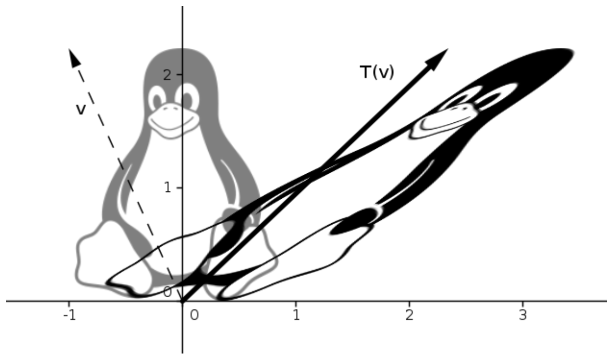
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.5. – Cisalhamento horizontal.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x + ay, y) \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é fixado.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Atividade 5.2. Escreva a expressão do cisalhamento vertical e interprete geometricamente fazendo uma figura. Escreva sua forma matricial.

Atividade 5.3. Mostre que as aplicações desta subseção são lineares (ou seja, verifique as duas condições da Definição 5.1).

5.3.2 Outros exemplos

Exemplo 5.6. – Aplicação nula.
Sejam V, W espaços vetoriais quaisquer. A aplicação

$$\begin{aligned} T : V &\to W \\ v &\to \mathbf{0}_W \end{aligned}$$

que leva cada vetor v de V ao vetor nulo de W é linear. A matriz associada à essa transformação é a matriz nula (olhe para sua forma matricial). □

Exemplo 5.7. – Aplicação identidade em V.
Sejam V um espaço vetorial qualquer. A aplicação

$$\begin{aligned} Id_V : V &\to V \\ v &\to v \end{aligned}$$

que leva cada vetor v de V à ele mesmo é linear. A matriz associada à essa transformação é a matriz identidade $\mathbf{I}_n$, onde $n = \dim V$. □

Exemplo 5.8. São transformações lineares:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x, y + z)$.
2. $D : P_n \to P_{n-1}$ definida por $D(p) = p'$, onde p' é a derivada do polinômio p.
3. $S : P_n \to P_{n+1}$ definida por $S(p) = \int_0^1 p(x)dx$.
4. $T : M(n, n) \to M(n, n)$ dada por $T(A) = A^t$.
5. $T : M(2, 2) \to \mathbb{R}^4$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$.
6. $T : T_S(2) \to \mathbb{R}^5$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (\ a + b\ ,\ c\ ,\ 0\ ,\ b + c\ ,\ 2a\ )$.

□

Note que as transformações do exemplos acima (exceto o item 4), são de um espaço vetorial em outro diferente.
Observe inclusive que as dimensões dos espaços do domínio e contra-domínio podem ser diferentes – veja por exemplo o item 1.

Atividade 5.4. Mostre que as funções dos exemplos acima são transformações lineares.

Exemplo 5.9. As seguintes aplicações **NÃO** são lineares:

1. $T : M(n, n) \to \mathbb{R}$, com $n > 1$, dada por $T(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$.

   De fato,
   $$T(2\mathbf{I}_n) = \det(2\mathbf{I}_n) = 2^n \neq 2 = 2 \det \mathbf{I}_n = 2T(\mathbf{I}_n),$$
   o que contradiz o item (ii) da Definição 5.1. Também **não** temos em geral o item (i).

   Atividade 5.5. Dê um exemplo de matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de ordem 2×2 tais que $T(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B})$.

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x + 1$

   De fato, $T(0) = 1 \neq 0$, o que contradiz o item (ii) da Definição 5.1 para $a = 0$.

$\square$

O item 2 do exemplo anterior indica que retas que **não** passam pela origem **não** são gráficos de funções lineares. De fato, o item (ii) da Definição 5.1 exige que $T(0) = 0$.

5.4 Conceitos e teoremas

Teorema 5.1. *Sejam V e W espaços vetoriais e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Dados $w_1, \ldots, w_n \in W$ quaisquer, existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Esse teorema diz que uma transformação linear fica bem definida
dizendo apenas seu valor nos elementos de uma base.

Esta é uma das facilidades das transformações lineares: é possível calcular $T(v)$ sabendo **somente** a imagem por T em cada vetor de uma base!!! Isso não é possível em funções não lineares: pense por exemplo na função não linear $f(x) = x^2$.

Os exemplos a seguir ilustram como podemos calcular a transformação linear somente a partir dos seus valores sobre uma base do espaço vetorial do domínio.

Exemplo 5.10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1,0) = (2,-1,0) \qquad \text{e} \qquad T(0,1) = (0,0,1)$$

(imagens por T sobre a base canônica de $\mathbb{R}^2$). Dado um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, queremos determinar $T(x, y)$. Ora, como $can = \{(1,0); (0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, o Teorema 5.1 diz que T está bem definida. Escrevemos (x, y) na base can:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Aplicando T e usando a lineridade obtemos

$$T(x, y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(2,-1,0) + y(0,0,1)$$

donde conclue-se que

$$T(x, y) = (2x, -x, y).$$

$\square$

Exemplo 5.11. Dada $T : \mathbb{R}^2 \to P_2$ onde

$$T(1,1)(x) = 2 - 3x + x^2 \qquad \text{e} \qquad T(2,3)(x) = 1 - x^2,$$

vamos encontrar $T(a, b)$. Sendo $\beta = \{(1,1); (2,3)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, T está bem definida. Fixado $v = (a, b)$ qualquer, queremos encontrar $[v]_\beta$. Temos

$$[I]^{\beta}_{can\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e, calculando a inversa dessa matriz, obtemos

$$[I]_{\beta}^{can\mathbb{R}^2} = \left([I]_{can\mathbb{R}^2}^{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{can\mathbb{R}^2}[v]_{can\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$v = (3a-2b)(1,1) + (-a+b)(2,3).$$

Aplicando T e usando a linearidade obtemos

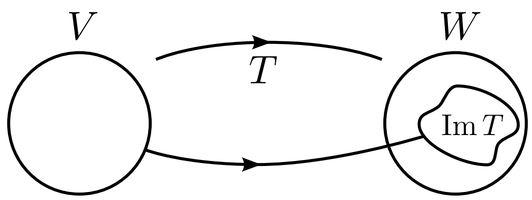
$$\begin{aligned} T(a,b)(x) &= (3a-2b)T(1,1)(x) + (-a+b)T(2,3)(x) \\ &= (3a-2b)(2-3x+x^2) + (-a+b)(1-x^2) \\ &= (5a-3b) + (-9a+6b)x + (4a-3b)x^2. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $T(-1,2)(x) = -11 + 21x - 10x^2$. □

5.4.1 Imagem e Núcleo

Definição 5.2. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é conjunto*

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid T(v) = w \text{ para algum } v \in V\} = \{T(v) \mid v \in V\}.$$



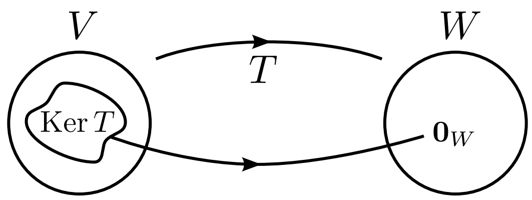
A imagem de T é o conjunto de todos os vetores do espaço de chegada, o contra-domínio W, que são imagem de algum vetor por T. Pode-se ainda escrever "$T(V)$"para denotar a imagem de T.

A imagem de $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de W.

De fato, se $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} T$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Assim, $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$, donde segue que $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} T$. Também, se $w = T(v) \in \operatorname{Im} T$ e $a \in \mathbb{R}$ então $aw = aT(v) = T(av)$ e logo $aw \in \operatorname{Im} T$.

Definição 5.3. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T é conjunto*

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}\}.$$



O núcleo de T é o conjunto dos vetores do domínio V cuja imagem por T é o vetor nulo de W. O termo "Ker" vem do inglês *kernel*. Alguns livros escrevem "Nuc(T)" ou ainda "$\mathcal{N}(T)$".

O núcleo de $T : V \to W$ é um subespaço de V.

De fato,
$v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v_1) = T(v_2) = \mathbf{0} \Rightarrow T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} T$ e
$v \in \operatorname{Ker} T, a \in \mathbb{R} \Rightarrow T(av) = aT(v) = a\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow av \in \operatorname{Ker} T$.

5.4.2 Injetividade e sobrejetividade

Recapitulando a definição de funções injetoras e sobrejetoras, que vale para qualquer função, e geralmente é vista no ensino médio:

Definição 5.4. *A aplicação $T : V \to W$ é* **injetora** *se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$.*

Equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

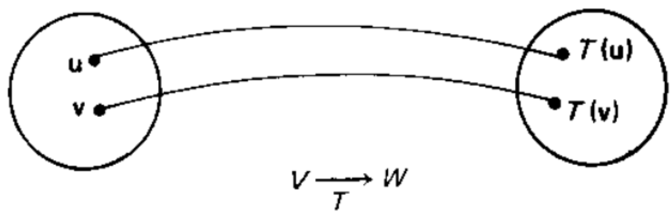


Imagem retirada de [2].

Definição 5.5. *A aplicação $T : V \to W$ é* **sobrejetora** *se sua imagem é todo o contradomínio, ou seja, se $\operatorname{Im} T = W$.*

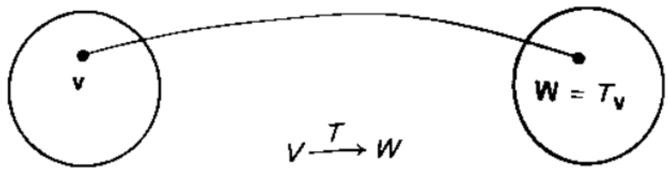


Imagem retirada de [2].

No caso de transformações lineares, podemos caracterizar injetividade através do núcleo:

Teorema 5.2. *Seja $T : V \to W$ uma transformação 'linear. Então $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$ se, e somente se T é injetora.*

Exemplo 5.12. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (\ x + y\ ,\ y\ ,\ 2x\ ,\ z\ ).$$

Vamos encontrar $\operatorname{Im} T$ e $\operatorname{Ker} T$. Temos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} T &= \{T(u) \in \mathbb{R}^4 \mid v \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x + y, y, 2x, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 2, 0) + y(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 0, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= [\ (1, 0, 2, 0)\ ;\ (1, 1, 0, 0)\ ;\ (0, 0, 0, 1)\ ].\end{aligned}$$

Como $\beta_I = \{(1,0,2,0);(1,1,0,0);(0,0,0,1)\}$ é LI (verifique!), β_I é uma base de $\operatorname{Im} T$, e logo $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Segue ainda que T não é sobrejetora.

Da mesma forma,

$$\operatorname{Ker} T = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = \mathbf{0}\} = \{(x,y,z) \mid (x+y, y, 2x, z) = (0,0,0,0)\} = \{(0,0,0)\},$$

$\dim \operatorname{Ker} T = 0$ e T é injetora, pelo Teorema 5.2. □

Toda transformação $T : V \to W$ injetora leva vetores LI $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V em vetores LI $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ de W.

De fato,

$$\begin{aligned} a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = \mathbf{0} &\Rightarrow T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T. \end{aligned}$$

Como T é injetora, do Teorema 5.2 segue que $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$. Logo $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}$. Mas $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI, e logo $a_1 = \cdots = a_n = 0$, donde conclue-se que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é LI, como queríamos.

Um importante resultado é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Ele relaciona as dimensões dos subespaços $\operatorname{Im} T$ e $\operatorname{Ker} T$ com a dimensão do domínio.

Teorema 5.3 (do núcleo e da imagem)**.** *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T.$$

Uma consequência do Teorema do Núcleo e da Imagem é a seguinte correspondência entre injetividade e sobrejetividade:

Corolário 5.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear onde $\dim V = \dim W$. Então T é injetora se, e somente se T é sobrejetora.*

Uma transformação $T : V \to W$ bijetora (injetora e sobrejetora simultaneamente) é chamada **isomorfismo**.

Quando existe um isomorfismo entre dois espaços vetoriais V e W, dizemos que V e W são espaços vetoriais *isomorfos*. É comum também dizer que uma transformação linear $T : V \to V$ de V no próprio V é um *operador* (sobre V).

Exemplo 5.13. O seguinte fato é verdadeiro:

Isomorfismos levam bases de V em bases de W.

Vamos mostrar esse fato. Seja $T : V \to W$ um isomorfismo e $\beta_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Devemos mostrar que $\beta_W = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base de W. Primeiramente, como T é injetora, β_W é LI (observação anterior). Agora, afirmamos que β_W é base de $\operatorname{Im} T$. De fato, é LI e dado qualquer $w = T(v) \in \operatorname{Im} T$, segue que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \Rightarrow \quad w = T(v) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n),$$

ou seja, β_W gera $\operatorname{Im} T$. Mas T é sobrejetora, e assim $W = \operatorname{Im} T = [\beta_W]$, isto é, β_W é base de W, como queríamos demonstrar. □

Todo isomorfismo $T : V \to W$ admite uma única inversa $T^{-1} : W \to V$ tal que $T^{-1} \circ T = Id_V$ e $T \circ T^{-1} = Id_W$. Neste caso, T^{-1} é também um isomorfismo.

Atividade 5.6. Mostre que um isomorfismo admite uma única inversa e que esta é também um isomorfismo.

Exemplo 5.14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (\ x - 2y\ ,\ z\ ,\ x + y\ ).$$

Vamos mostrar que T é isomorfismo. Note que, tendo em vista o Corolário 5.1, basta mostrar que T é injetora pois domínio e contradomínio têm mesma dimensão. Ora,

$$\operatorname{Ker} T = \{(x, y, z) \mid (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)\},$$

e logo $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} T$ se, e somente se

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & & z & = 0 \\ x & +y & & = 0 \end{array} \right.$$

Esse sistema possui somente a solução trivial, e portanto $\operatorname{Ker} T = \{(0, 0, 0)\}$ ($\Rightarrow T$ é injetora). Concluímos então que T é isomorfismo.

Agora, calculemos T^{-1}. Sabemos que, sendo T isomorfismo, leva base em base. Em particular, o conjunto

$$\beta = \{T(1, 0, 0); T(0, 1, 0); T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1); (-2, 0, 1); (0, 1, 0)\}$$

proveniente da aplicação de T na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é base de $\mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{array}{lcl} T^{-1} \circ T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) & \Rightarrow & T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0), \\ T^{-1} \circ T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) & \Rightarrow & T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0) \text{ e} \\ T^{-1} \circ T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) & \Rightarrow & T^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, 1). \end{array}$$

Ora, T^{-1} está definida sobre a base β de $\mathbb{R}^3$, e T^{-1} está bem definida em todo $\mathbb{R}^3$. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, você pode verificar que

$$(x, y, z) = \frac{x + 2y}{3}(1, 0, 1) + \frac{z - x}{3}(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0),$$

donde segue que

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + 2y}{3}\ ,\ \frac{z - x}{3}\ ,\ y \right).$$

□

5.5 A matriz de uma transformação linear

Recorde da Seção 5.3 que cada transformação tem uma escrita na forma matricial. Para exemplificar, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 2x)$, e a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \end{bmatrix}.$$

Assim, a imagem de (x, y) por T coincide, interpretada como uma matriz coluna, com o produto $\mathbf{AX}$. Isso nos motiva a associar transformações lineares a matrizes.

Dada uma transformação linear $T : V \to W$ e bases $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ de V e W, respectivamente, nosso objetivo é associar uma matriz à transformação T relativa às bases α e β. Como $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$, escrevemos

$$\begin{cases} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{k1}w_k \\ T(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{k2}w_k \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{kn}w_k \end{cases}.$$

Agora, seja $v \in V$ e as escritas de v e $T(v)$ nas bases α e β, respectivamente, digamos $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ e $T(v) = x_1w_1 + \cdots + x_kw_k$. Ou seja,

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = y_1T(v_1) + \cdots + y_nT(v_n) \\ &= y_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{k1}w_k) + \cdots + y_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{kn}w_k) \\ &= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + \cdots + y_na_{1n})w_1 + \cdots + (y_1a_{k1} + y_2a_{k2} + \cdots + y_na_{kn})w_k. \end{aligned}$$

Mas a escrita de $T(v)$ na base β é única, e portanto

$$\begin{cases} x_1 & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots a_{1n}y_n \\ x_2 & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots a_{nn}y_n \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

chegamos à expressão para compacta para $[T(v)]_\beta$:

Teorema 5.4. *Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha.$$

A matriz $[T]_\beta^\alpha$ é chamada *matriz de T em relação às bases α e β.*

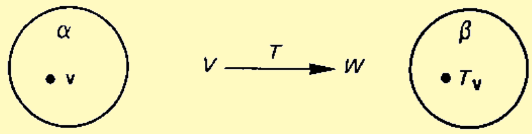


Imagem retirada de [2].

Note que α é a base de partida (do domínio V) e β a base de chegada (do contradomínio W). Ou seja, a ordem dos índices coincide com àquela da escrita de matrizes de mudança de base.

Como fizemos com matrizes de mudança de base, podemos ver $[T]_\beta^\alpha$ em colunas. Observe que as colunas de $[T]_\beta^\alpha$ são os coeficientes das escritas das imagens $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ na base β de W, isto é,

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Com isso, uma transformação de V em W estará bem definida se dissermos sua matriz sobre bases de V e W. Observe também que se $n = \dim V$ e $k = \dim W$ então uma matriz da transformação $T : V \to W$ tem ordem $k \times n$.

Volte à seção de mudança de base e compare com as contas feitas aqui. Veja que a matriz de mudança de base é a matriz do operador linear identidade. Nesse sentido, a notação usada mostra sua conveniência: se $T = Id_V = I$ é o operador identidade sobre V, então a expressão $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$ fica $[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha$, a mesma expressão obtida no estudo de matrizes de mudança de base.

Exemplo 5.15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (\ 2x - y + z\ ,\ 3x + y - 2z\ ).$$

a) A matriz de T, $[T]_\beta^\alpha$, nas bases $\alpha = \{(1,1,1); (0,1,1); (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(2,1); (5,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(1,1,1)]_\beta & [T(0,1,1)]_\beta & [T(0,0,1)]_\beta \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(2,2)]_\beta & [(0,-1)]_\beta & [(1,-2)]_\beta \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Para encontrar essa matriz, temos que encontrar as escritas dos vetores $(2,2), (0,-1)$ e $(1,-2)$ na base β. Fazendo as contas, chegamos à escrita do vetor (x, y) na base β:

$$[(x,y)]_\beta = \begin{bmatrix} 3x - 5y \\ -x + 2y \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Usando a matriz $[T]^\alpha_\beta$ vamos encontrar $[T(3,-4,2)]_\beta$. Ora, temos

$$[T(3,-4,2)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [(3,-4,2)]_\alpha.$$

Sabemos que

$$[(3,-4,2)]_\alpha = [I]^{can\mathbb{R}^3}_\alpha [(3,-4,2)]_{can\mathbb{R}^3} = ([I]^\alpha_{can\mathbb{R}^3})^{-1}[(3,-4,2)]_{can\mathbb{R}^3}.$$

Você pode fazer as contas e descobrir que

$$[(3,-4,2)]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[T(3,-4,2)]_\beta = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$$

(você pode verificar que de fato $T(3,-4,2) = (12,1) = 31(2,1) - 10(5,3)$).

c) A matriz $[T]^\alpha_{can\mathbb{R}^2}$ é

$$\begin{aligned} [T]^\alpha_{can\mathbb{R}^2} &= \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(1,1,1)]_{can} & [T(0,1,1)]_{can} & [T(0,0,1)]_{can} \\ | & | & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(2,2)]_{can} & [(0,-1)]_{can} & [(1,-2)]_{can} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d) Você pode verificar que $[T]^\alpha_\beta = [I]^{can}_\beta [T]^\alpha_{can}$. Isso mostra mais uma vez a força da notação usada. Observe que a matriz $[T]^\alpha_{can}$ "vai" da base α (do domínio) para a base *can* (do contradomínio). Assim, para obter a matriz de T que vai de α para a base β, basta mudar a base do contradomínio da *can* para β, através da multiplicação da matriz de mudança de base $[I]^{can}_\beta$.

□

Teorema 5.5. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, α uma base de V e β uma base de W. Então*

$$\dim \operatorname{Im} T = \textit{posto de } [T]^\alpha_\beta \quad \textit{e} \quad \dim \operatorname{Ker} T = \textit{nulidade de } [T]^\alpha_\beta.$$

Teorema 5.6. *Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to U$ transformações lineares, α, β e γ bases de V, W e U respectivamente. Então a composta*

$$\begin{aligned} S \circ T : V &\to U \\ v &\to (S \circ T)(v) = S(T(v)) \end{aligned}$$

é transformação linear, e

$$[S \circ T]^\alpha_\gamma = [S]^\beta_\gamma \, [T]^\alpha_\beta$$

(o produto matricial deve ser feito na mesma ordem da composição).

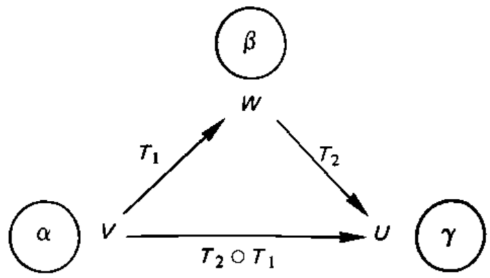


Imagem retirada de [2].

Exemplo 5.16. Considere os operadores lineares $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por $T(x, y) = (2x, 2y)$ e $S(x, y) = (x + 2y, y)$. Temos

$$[S \circ T]_{can}^{can} = [S]_{can}^{can} \; [T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.17. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{(1, 0); (0, 2)\}$ e $\gamma = \{(2, 0); (1, 1)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e β é uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos encontrar $S \circ T(x, y)$. Ora,

$$[S \circ T]_\gamma^\alpha = [S]_\gamma^\beta \; [T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que

$$[(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y/2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[S \circ T(x, y)]_\gamma = [S \circ T]_\gamma^\alpha \; [(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} x - y \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$S \circ T(x, y) = (x - y)(2, 0) + 0(1, 1) = (2x - 2y, 0).$$

□

Corolário 5.2. *Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, α uma base de V e β uma base de W, então $[T^{-1}]_\alpha^\beta = \left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1}$.*

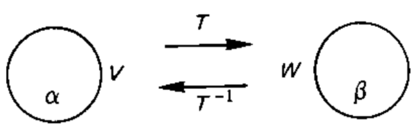


Imagem retirada de [2].

Sabemos que matrizes quadradas possuem inversa se, e somente se, seu determinante é não nulo. Portanto, a mesma relação vale entre isomorfismos (isto é, a existência de T^{-1}) e determinantes.

Corolário 5.3. *Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão, $T : V \to W$ uma transformação linear e α, β bases de V e W respectivamente. Então T é isomorfismo se, e somente se* $\det[T]^{\alpha}_{\beta} \neq 0$.

Exemplo 5.18. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y).$$

a) T é isomorfismo pois o determinante da matriz $[T]^{can}_{can} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é não nulo.

b) Vamos encontrar $T^{-1}(x, y)$. Ora,

$$[T^{-1}]^{can}_{can} = ([T]^{can}_{can})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [T^{-1}(x, y)]_{can} = [T^{-1}]^{can}_{can}[(x, y)]_{can} = \begin{bmatrix} 3x - 4y \\ -2x + 3y \end{bmatrix},$$

e assim $T^{-1}(x, y) = (3x - 4y)(1, 0) + (-2x + 3y)(0, 1) = (3x - 4y, -2x + 3y)$.

$\square$

Corolário 5.4. *Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear, α, α' bases de V e β, β' bases de W. Então*

$$[T]^{\alpha'}_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'} \ [T]^{\alpha}_{\beta} \ [I]^{\alpha'}_{\alpha}$$

(o encadeamento da primeira para a última base se lê da direita para a esquerda – veja a figura).

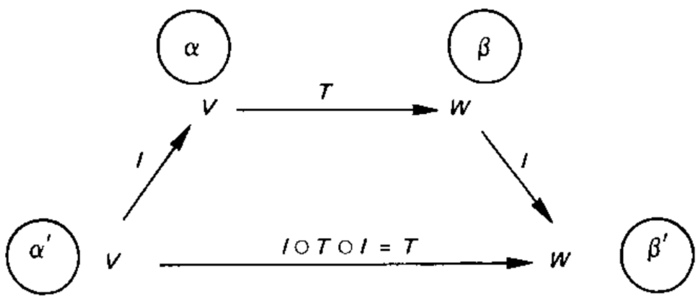


Imagem retirada de [2].

É importante ler e escrever a ordem dos índices nas matrizes de forma correta. Note que as bases no produto $[I]^{\beta}_{\beta'} \ [T]^{\alpha}_{\beta} \ [I]^{\alpha'}_{\alpha}$ "se cancelam", restando a base de partida α' e a de chegada β'.

Exemplo 5.19. Considere a transformação do exemplo anterior, ou seja, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y).$$

Dadas as bases $\alpha' = \{(1, 2); (-1, 3)\}$ e $\beta' = \{(1, 1); (2, 0)\}$, vamos calcular a matriz de T da base α' para a base β' utilizando o Corolário 5.4. Este resultado garante que

$$[T]^{\beta'}_{\alpha'} = [I]^{can}_{\alpha'} \ [T]^{can}_{can} \ [I]^{\beta'}_{can}.$$

Veja que as matrizes envolvendo a base canônica são fáceis de calcular. Temos

- $[I]^{can}_{\alpha'} = \left([I]^{\alpha'}_{can}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} | & | \\ [(1, 2)]_{can} & [(-1, 3)]_{can} \\ | & | \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

- $[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} | & | \\ [T(1,0)]_{can} & [T(0,1)]_{can} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

- $[I]_{can}^{\beta'} = \begin{bmatrix} | & | \\ [(1,1)]_{can} & [(2,0)]_{can} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Assim,

$$[T]_{\alpha'}^{\beta'} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 26 & 22 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

□

5.6 Demonstrações

Demonstração do Teorema 5.1. Sejam T e S duas transformações de V em W com $T(v_i) = S(v_i) = w_i$ para todo i. Devemos mostrar que $T = S$, ou seja, que $T(v) = S(v)$ para qualquer $v \in V$. Fixado então $v \in V$ arbitrário, escrevemos

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Assim, pela linearidade de T segue que

$$T(v) = T\left(\sum_1^n a_iv_i\right) = \sum_1^n a_iT(v_i).$$

Da mesma forma, $S(v) = \sum_1^n a_iS(v_i)$. Conclue-se então que $S(v) = T(v)$, como queríamos. □

Demonstração do Teorema 5.2. Suponha que $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$. Então dados $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$, temos

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = \mathbf{0},$$

ou seja $u - v \in \operatorname{Ker} T$. Assim, $u = v$, e T é injetora.

Reciprocamente, suponha que T é injetora, e seja $u \in \operatorname{Ker} T$. Então, como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = T(u)$, segue que $u = \mathbf{0}$, ou seja, $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$. □

Demonstração do Teorema 5.3. Tome uma base de $\operatorname{Ker} T$, digamos $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset V$ (neste caso, $\dim \operatorname{Ker} T = p$). Completando esse conjunto a uma base de V, obtemos uma base $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de V formada, evidentemente, por $n = \dim V$ vetores. Vamos mostrar que os $n - p$ vetores $T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)$ formam uma base de $\operatorname{Im} T$. De fato, esses vetores são LI pois, pela linearidade de T, temos

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \cdots + a_nT(v_n) = T(a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n) = \mathbf{0} \Rightarrow a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n \in \operatorname{Ker} T.$$

Daí, esta soma dos v's pode ser escrita na base de $\operatorname{Ker} T$, isto é,

$$a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_pv_p,$$

o que fornece

$$-b_1v_1 - \cdots - b_pv_p + a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n = \mathbf{0}.$$

Ora, mas os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, e logo devemos ter $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$. Portanto

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \cdots + a_nT(v_n) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; a_{p+1} = \cdots = a_n = 0,$$

ou seja, $T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)$ são LI.

Agora, dado $T(u) \in \operatorname{Im} T$, escrevemos $u \in V$ na base de V:

$$u = c_1v_1 + \cdots + c_pv_p + c_{p+1}v_{p+1} + \cdots + c_nv_n.$$

Aplicando T e usando linearidade obtemos

$$T(u) = \underbrace{c_1T(v_1) + \cdots + c_pT(v_p)}_{=\mathbf{0} \text{ pois } v_1,\ldots,v_p \in \operatorname{Ker} T} + T(c_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n) = c_{p+1}T(v_{p+1}) + \cdots + c_nT(v_n).$$

Ou seja, $\{T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)\}$ gera $\operatorname{Im} T$, e logo é uma base de $\operatorname{Im} T$. Finalmente basta contar os elementos das bases de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ para concluir que

$$\dim V = n = (n-p) + p = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T.$$

□

Demonstração do Corolário 5.1. Seja $T : V \to W$ transformação linear. Temos

$$\begin{aligned} T \text{ injetora } &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\} && \text{(Teorema 5.2)} \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0 \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V = \dim W && \text{(Teorema 5.3 [do Núcleo e da Imagem])} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W && \text{(Atividade 4.8 de Espaços Vetoriais)} \\ &\Leftrightarrow T \text{ sobrejetora} && \text{(Definição 5.5).} \end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 5.4. A demonstração está no próprio texto, antes do Teorema. □

Demonstração do Teorema 5.5. Seja $\mathbf{R}$ a MLRFE de $[T]^\alpha_\beta$. Essa matriz não é necessariamente quadrada: tem ordem $m \times n$, onde $m = \dim W$ e $n = \dim V$. Consideremos o sistema homogêneo $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{R}$ está na forma escada reduzida, suas linhas nulas aparecem todas abaixo das não nulas; portanto podemos desconsiderá-las no sistema $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Reordenando as colunas se necessário, podemos então escrever o sistema $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ de forma equivalente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{I}_p$ é matriz identidade de ordem $p =$ posto de $[T]^\alpha_\beta$ e $\mathbf{N}$ a matriz restante de ordem $p \times (p-n)$. Assim, $\mathbf{v}_I$ e $\mathbf{v}_N$ têm dimensões $p \times 1$ e $(n-p) \times 1$, respectivamente. O sistema anterior pode ser escrito simplesmente como

$$\mathbf{v}_I = -\mathbf{N}\mathbf{v}_n.$$

Note que a escolha de $\mathbf{v}_N$ é livre, mas a de $\mathbf{v}_I$ não. Ademais, $\operatorname{Ker} T$ é caracterizado pelo sistema homogêneo, e logo este subespaço é caracterizado pelas possíveis escolhas para $\mathbf{v}_N$. Ora, há exatamente $n-p$ escolhas para $\mathbf{v}_N$ de modo a obter vetores LI, por exemplo, escolhendo para $\mathbf{v}_N$ os vetores canônicos de $\mathbb{R}^{n-p}$. Assim, uma base de $\operatorname{Ker} T$ tem $n-p$ vetores, e logo

$$\dim \operatorname{Ker} T = n - p = \text{nulidade de } [T]_\beta^\alpha$$

(no caso extremo onde $n-p=0$, a matriz $\mathbf{N}$ não aparece, o sistema homogêneo é equivalente à $\mathbf{v}_I = \mathbf{0}$ e então, coerentemente, $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$).

A relação envolvendo a imagem de T segue do Teorema do Núcleo e da Imagem:

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \operatorname{Ker} T = n - (n-p) = p = \text{posto de } [T]_\beta^\alpha.$$

Isso finaliza a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 5.6. Primeiro mostramos que a composta $S \circ T : V \to U$ é linear. Dados vetores $v_1, v_2 \in V$ e $a \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}(S \circ T)(v_1 + v_2) &= S(T(v_1 + v_2)) \\ &= S(T(v_1) + T(v_2)) = S(T(v_1)) + S(T(v_2)) \\ &= (S \circ T)(v_1) + (S \circ T)(v_2).\end{aligned}$$

Da mesma forma prova-se que $(S \circ T)(av_1) = a(S \circ T)(v_1)$.

Vamos agora mostrar que a matriz de $S \circ T$ é o produto das matrizes de S e T. Usando o Teorema 5.4 temos, por um lado,

$$[S \circ T(v)]_\gamma = [S \circ T]_\gamma^\alpha \; [v]_\alpha,$$

e, por outro lado,

$$[S \circ T(v)]_\gamma = [S(T(v))]_\gamma = [S]_\gamma^\beta \; [T(v)]_\beta = \Big([S]_\gamma^\beta \; [T]_\beta^\alpha\Big)[v]_\alpha.$$

Como as duas expressões acima valem para $v \in V$ arbitrário, só pode ser $[S \circ T]_\gamma^\alpha = [S]_\gamma^\beta \; [T]_\beta^\alpha$, como queríamos demonstrar. $\square$

Demonstração do Corolário 5.2. Temos $T^{-1} \circ T = Id_V$. Se $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V então

$$[Id_V]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_\alpha & \cdots & [v_n]_\alpha \\ | & & | \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n.$$

Assim,

$$\mathbf{I}_n = [Id_V]_\alpha^\alpha = [T^{-1} \circ T]_\alpha^\alpha = [T^{-1}]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha,$$

e daí $[T^{-1}]_\alpha^\beta = \big([T]_\beta^\alpha\big)^{-1}$. $\square$

Demonstração do Corolário 5.3. Se T é isomorfismo, então o Corolário 5.2 diz que $[T]_\beta^\alpha$ é inversível, e assim $\det[T]_\beta^\alpha \neq 0$. Reciprocamente, se $\det[T]_\beta^\alpha \neq 0$ então $[T]_\beta^\alpha$ é inversível, isto é, existe uma matriz quadrada $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B}[T]_\beta^\alpha = \mathbf{I}$. Defina então a transformação $S : W \to V$ pondo $[S]_\alpha^\beta = \mathbf{B}$. Temos

$$[Id_V]_\alpha^\alpha = \mathbf{I} = \mathbf{B}[T]_\beta^\alpha = [S]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha = [S \circ T]_\alpha^\alpha,$$

ou seja, $S \circ T = Id_V$. Assim, T é isomorfismo, com $T^{-1} = S$. $\square$

Demonstração do Corolário 5.4. Basta observar que $T = Id_W \circ T \circ Id_V$ implica

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [Id_W \circ T \circ Id_V]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}.$$

□

5.7 Exercícios

Veja as listas de exercícios 5 e 6.

Referências Bibliográficas

[1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Bookman, 2010.

[2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.

[3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.

[4] David Lay. *Álgebra Linear*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.

[5] David Poole. *Álgebra linear*. Thonsom Learning, São Paulo, 2006.