$$\min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x) = 0 \quad , \quad g(x) \leq 0 .$$

EXERCÍCIOS:

1) SEJA x^k O ITERANDO DO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA.

SUPONHA QUE $\rho_{k+1} > \rho_k$, $\forall k$. PROVE QUE, $\forall k$,

(i) $$f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1}) \geq f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k)$$

ONDE $$\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2$$

(A F.O. DO SUBPROBLEMA AUMENTA)

(ii) $\phi(x^{k+1}) \leq \phi(x^k)$ (INVIABILIDADE NÃO PIORA)

(iii) $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$ (F.O. DO PROB. ORIGINAL NÃO DIMINUI)

3) MOSTRE QUE, NO MÉTODO DO GRADIENTE, SE USARMOS BUSCA LINEAR EXATA ENTÃO $\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0$.

DISCUTIR O POSSÍVEL EFEITO DE "ZIG-ZAG" E COMO A BUSCA LINEAR COM ARMIJO PODE EVITAR.

SOLUÇÃO: NO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO, x^k É MINIMIZADOR GLOBAL DO SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k): \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x).$$

TEMOS

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^{k+1})$$ (x^k É MIN. GL. DE $SP(\rho_k)$)

$$\leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^{k+1})$$ ($\rho_k < \rho_{k+1}$ E $\phi(x^{k+1}) \geq 0$)

ISSO MOSTRA (i).

AGORA,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^{k+1}) \qquad (1)$$

E

$$f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \frac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^k) \qquad (2).$$

FAZENDO $(1)-(2)$, OBTEMOS

$$\cancel{f(x^k)} + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^k) - \left[\cancel{f(x^k)} + \frac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^k)\right]$$

$$\leq \cancel{f(x^{k+1})} + \frac{\rho_k}{2}\phi(x^{k+1}) - \left[\cancel{f(x^{k+1})} + \frac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^{k+1})\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{2}}_{<0}\phi(x^k) \leq \frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{2}\phi(x^{k+1})$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x^k) \geq \phi(x^{k+1}).$$ ASSIM, MOSTRAMOS (ii)

VAMOS AGORA PROVAR (iii). DE (1) VEM

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \geq \frac{\rho_k}{2}\left[\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})\right] \geq 0,$$

CONCLUINDO A PROVA //

③ A BUSCA LINEAR EXATA CONSISTE EM CALCULAR t_k RESOLVENDO

$$\min_{t>0} \varphi(t) = f(x^k - t\nabla f(x^k)).$$

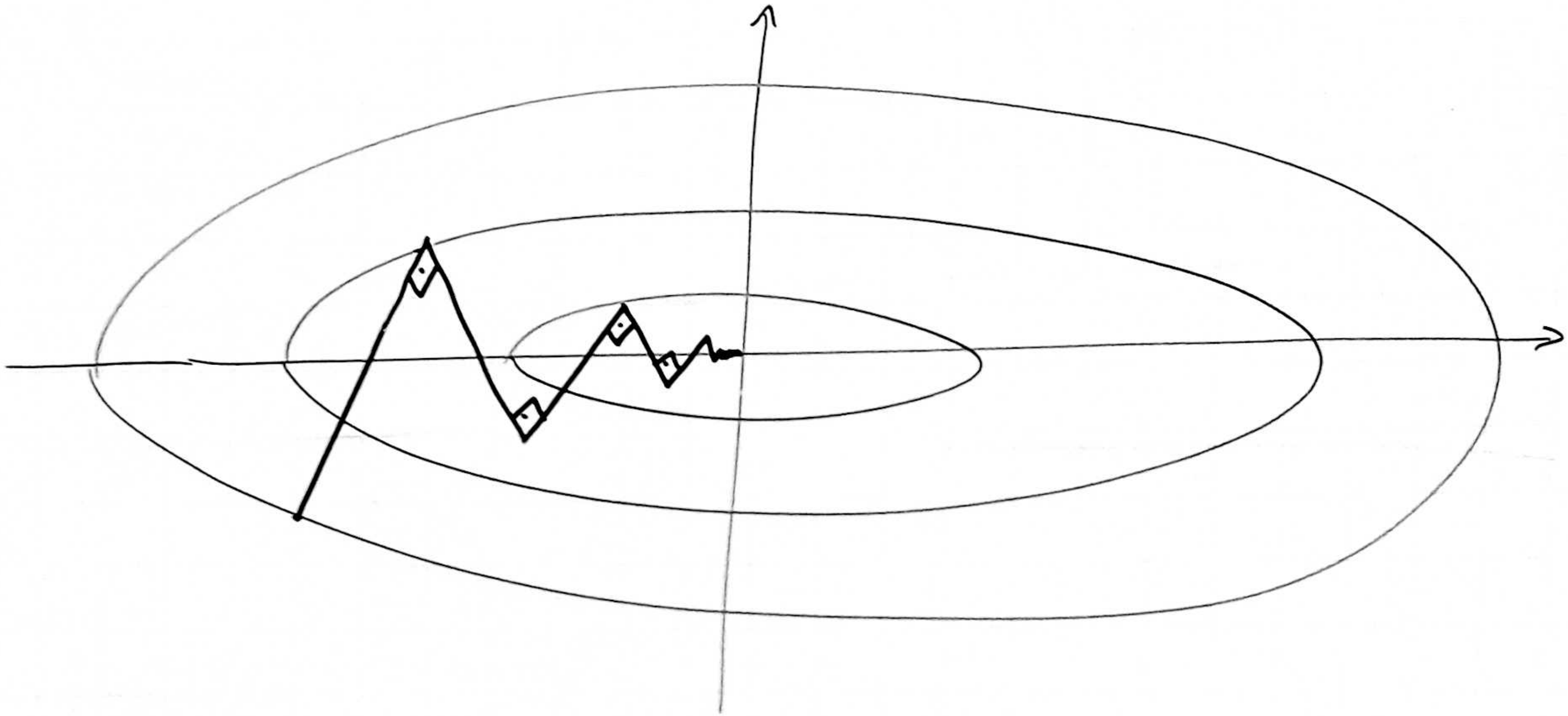
SENDO t_k MINIMIZADOR DESTE PROBLEMA,

$$0 = \varphi'(t_k) = \nabla f(\underbrace{x^k - t_k \nabla f(x^k)}_{x^{k+1}})^T (-\nabla f(x^k))$$

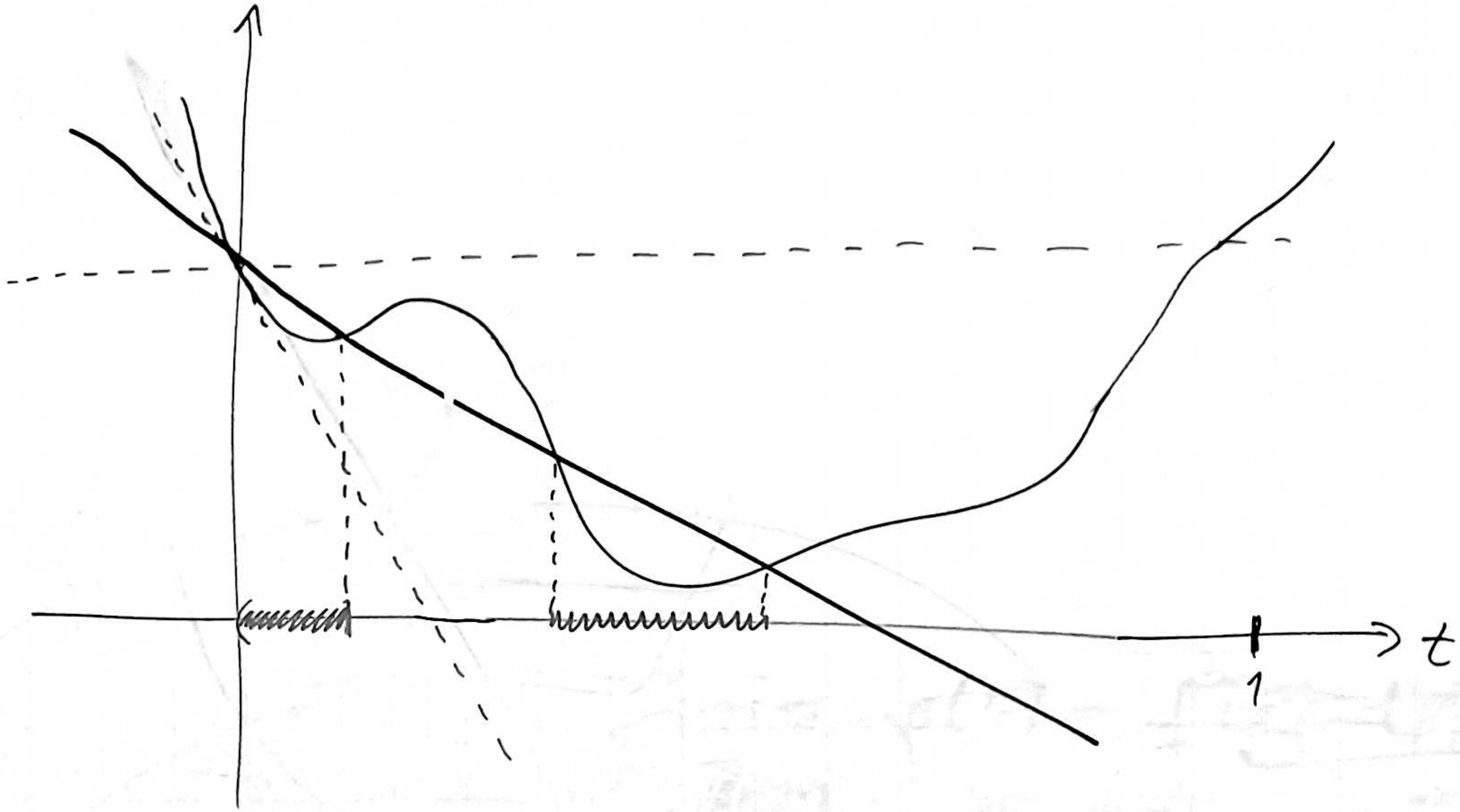
$$\Longrightarrow \quad \nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0.$$

O MÉTODO DO GRADIENTE COM BUSCA LINEAR EXATA TEM UMA TENDÊNCIA EM FAZER "ZIG-ZAG" QUANDO AS CURVAS DE NÍVEL DE f SÃO "ALONGADAS". POR SIMPLICIDADE, CONSIDERAR $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x$,

ONDE A É SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA.



PODEMOS DIMINUIR ESSE EFEITO ALTERANDO O ÂNGULO ENTRE OS SEGMENTOS DE x^k À x^{k+1}. CONSIDERANDO QUE AS DIREÇÕES SEMPRE SÃO $-\nabla f(x^k)$, ALTERAMOS O TAMANHO DO PASSO. UMA DESSAS ESTRATÉGIAS É ARMIJO.



ARMIJO É UMA CONDIÇÃO QUE GARANTE DECRÉSCIMO "SUFICIENTE" PARA f. PERTO DA SOLUÇÃO, AO CONTRÁRIO DA BUSCA EXATA, ARMIJO TENDE A FAZER O MÉTODO CONVERGIR MAIS RÁPIDO.

6.6 (ANA)

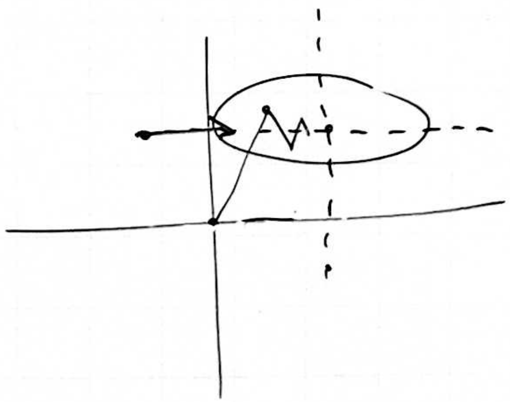
$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \quad , \qquad x^0 = (0,0).$$

TEMOS

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 8(x_2 - 1) \end{bmatrix}.$$

O ÚNICO PONTO ESTACIONÁRIO É $x^* = (2,1)$, QUE É O MINIMIZADOR DADO QUE f É CONVEXA.

AFIRMAMOS QUE SE $x_1^k \neq 2$ E $x_2^k \neq 1$ ENTÃO $x_1^{k+1} \neq 2$ E $x_2^{k+1} \neq 1$.



NOTE QUE

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x \quad , \quad \text{ONDE}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$ O PASSO t_k DA BUSCA LINEAR EXATA RESOLVE $\min_{t>0} f(x^k - t\nabla f(x^k))$.

ASSIM

$$0 = \frac{d}{dt} f(x^k - t_k \nabla f(x^k)) = -\nabla f(x^k - t_k \nabla f(x^k))^T \nabla f(x^k)$$

SUBSTITUINDO A EXPRESSÃO DE f NA EQ. ACIMA E MANIPULANDO, ENCONTRAMOS

$$t_k = \frac{\nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)}{\nabla f(x^k)^T A \nabla f(x^k)}.$$

TEMOS

$$t_k = \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{2.4\alpha^2 + 8.64\beta^2}, \quad \text{ONDE} \quad \alpha = x_1^k - 2 \neq 0 \quad \text{E} \quad \beta = x_2^k - 1 \neq 0.$$

OBSERVE QUE

$$t_k < \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{2(4\alpha^2 + 64\beta^2)} = \frac{1}{2}$$

E

$$t_k > \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{8(4\alpha^2 + 64\beta^2)} = \frac{1}{8}.$$

SE FOSSE $x_1^{k+1} = 2$, ENTÃO TERÍAMOS

$$x_1^{k+1} = x_1^k - t_k\left(2(x_1^k - 2)\right) \Rightarrow 2 = x_1^k - 2t_k\left(x_1^k - 2\right)$$

$$\Rightarrow 2t_k(x_1^k - 2) = x_1^k - 2 \Rightarrow t_k = 1/2,$$

UM ABSURDO. POR OUTRO LADO, SE FOSSE $x_2^{k+1} = 1$, TERÍAMOS

$$x_2^{k+1} = x_2^k - t_k\left(8(x_2^k - 1)\right) \Rightarrow 8t_k(x_2^k - 1) = x_2^k - 1 \Rightarrow t_k = 1/8,$$ UM ABSURDO

DAÍ, $x_1^{k+1} \neq 2$ E $x_2^{k+1} \neq 1$.

ISSO MOSTRA QUE, INICIANDO EM $x^0 = (0,0)$, NÃO CHEGAMOS À $x^* = (2,1)$ EM FINITOS PASSOS.

SE x^0 ESTIVER SOBRE ALGUM EIXO DA ELIPSE $(f(x) = c > 0)$, ISTO É, $x_1^0 = 2$ OU $x_2^0 = 1$, ENTÃO O MÉTODO DO GRADIENTE COM BUSCA LINEAR EXATA TERMINA EM 1 PASSO.

2.14 (ANA) $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$, Q SIMÉTRICA DEF. POSITIVA.

SEJAM $x^0, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$, $\delta^j = x^j - x^0$, $\gamma^j = \nabla f(x^j) - \nabla f(x^0)$, $j = 1, \dots, n$.

PROVE QUE SE $\{\delta^1, \dots, \delta^n\}$ É L.I. ENTÃO

$$\tilde{x} = x^n - [\delta^1 \dots \delta^n] \cdot [\gamma^1 \dots \gamma^n]^{-1} \nabla f(x^n)$$ É MINIMIZADOR GLOBAL DE f.

RESOLUÇÃO: COMO Q É DEFINIDA POSITIVA, POSSUI INVERSA.

VEJA QUE

$$p^j = \nabla f(x^j) - \nabla f(x^0) = (Qx^j - b) - (Qx^0 - b) = Q\delta^j .$$

COMO $\{\delta^1, \dots, \delta^n\}$ É LI, A MATRIZ

$$[p^1 \cdots p^n] = [Q\delta^1 \cdots Q\delta^n] = Q[\delta^1 \cdots \delta^n]$$

TEM INVERSA, E LOGO $\tilde{x}$ ESTÁ BEM DEFINIDO. TEMOS

$$\nabla f(\tilde{x}) = Q\tilde{x} - b = Q\left[x^n - [\delta^1 \cdots \delta^n]\left(Q[\delta^1 \cdots \delta^n]\right)^{-1}(Qx^n - b)\right] - b$$

$$= \cancel{Qx^n} - \underbrace{\left(Q[\delta^1 \cdots \delta^n]\right)\left(Q[\delta^1 \cdots \delta^n]\right)^{-1}}_{I}\cancel{(Qx^n - b)} - \cancel{b} = 0 .$$

OU SEJA, $\tilde{x}$ É PONTO ESTACIONÁRIO DE f. MAS COMO f É CONVEXA ($\nabla^2 f(x) = A$ É DEF. POSIT.), $\tilde{x}$ É SEU MINIMIZADOR GLOBAL.