LEONARDO SECCHIN.

OTIMIZAÇÃO I.

OBJETIVO: ENCONTRAR VALORES DE MÁXIMO OU MÍNIMO DE FUNÇÕES (POSSIVELMENTE NÃO LINEARES)

DADOS DA DISCIPLINA: AVA-UFES, https://leonardosecchin.github.io

BIBLIOGRAFIA:

FRIEDLANDER. ELEMENTOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR (UNICAMP).

RIBEIRO; KARAS. OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA. CENGAGE, 2013.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$D \subset \mathbb{R}^n$.

QUERO RESOLVER

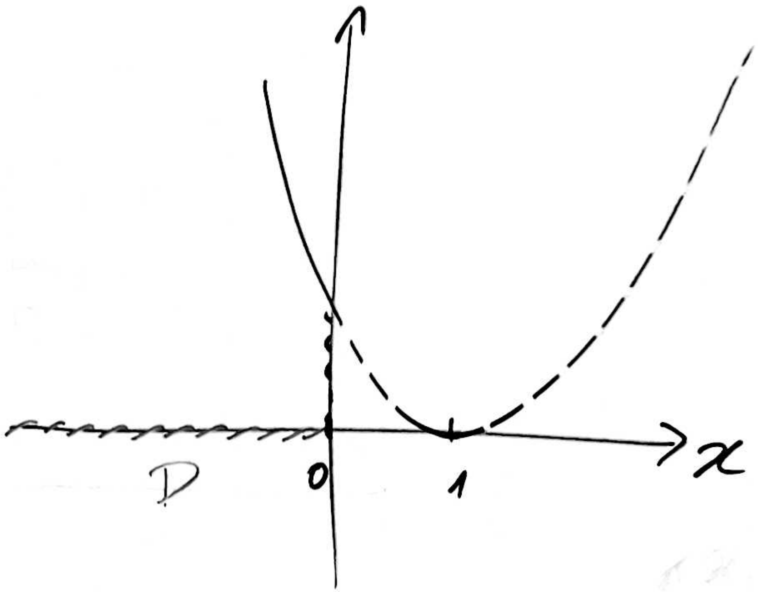
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x). \\ \text{SUJEITA A } x \in D. \end{array}}$$

EXEMPLO:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } (x-1)^2 \\ \boxed{\text{SUJEITA A } x \leq 0} \end{array}$$

SOLUÇÃO

$x^* = 0$.



OTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES (IRRESTRITA) : $D = \mathbb{R}^n$

" COM " (RESTRITA) : $D \subsetneq \mathbb{R}^n$.

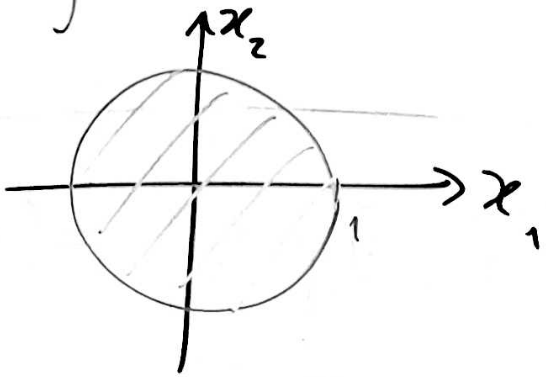
O QUE É RAZOÁVEL SUPOR TENDO EM VISTA A RESOLUÇÃO PRÁTICA DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO?

D DEVE TER UMA ESTRUTURA "TRATÁVEL":

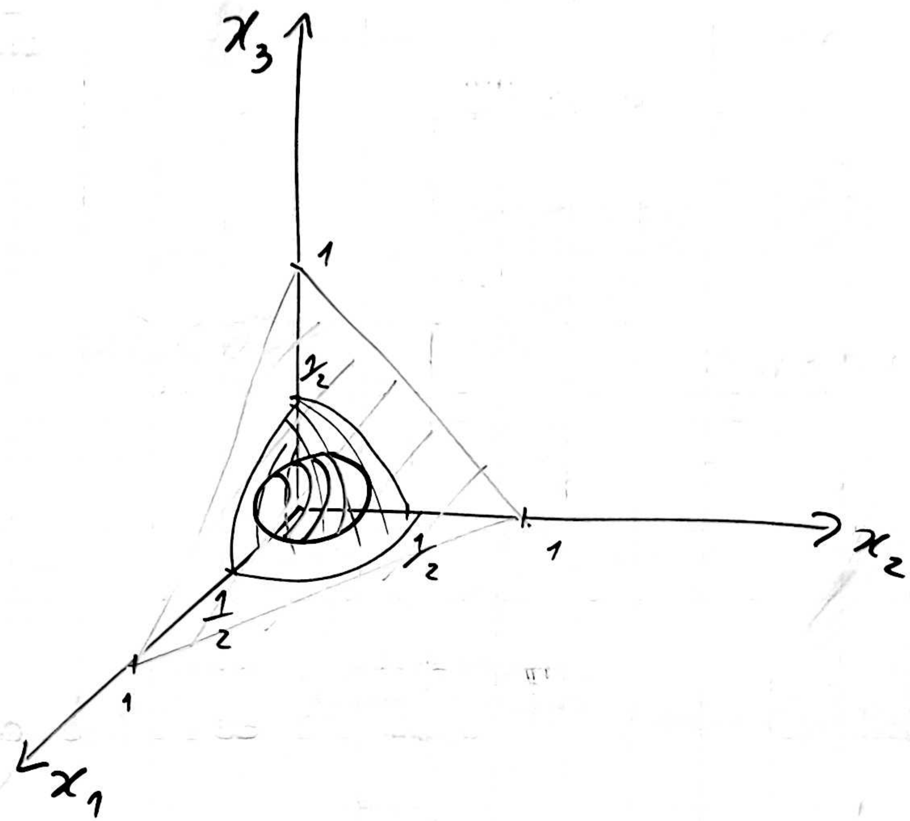
$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; h(x) = 0 \; , \; g(x) \leq 0 \}.$$

<u>EXEMPLOS:</u>

- $D = \{ x \in \mathbb{R}^1 \; ; \; g(x) = x \leq 0 \}.$
- $D = \{ x \in \mathbb{R}^2 \; ; \; g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \}.$



• $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \underline{x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0} \, , \; \underline{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{2} \leq 0} \, ,$
$x \geq 0 \}$



<u>HIPÓTESE COMUM</u>: h e g SÃO <u>FUNÇÕES CONTINUAMENTE</u>
<u>DIFERENCIÁVEIS</u> (DERIVADAS CONTÍNUAS).

"MINIMIZAR"

$$\boxed{\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.a.}\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}}$$

"FUNÇÃO OBJETIVO".

} RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

} " DE DESIGUALDADE

"SUJEITO A"

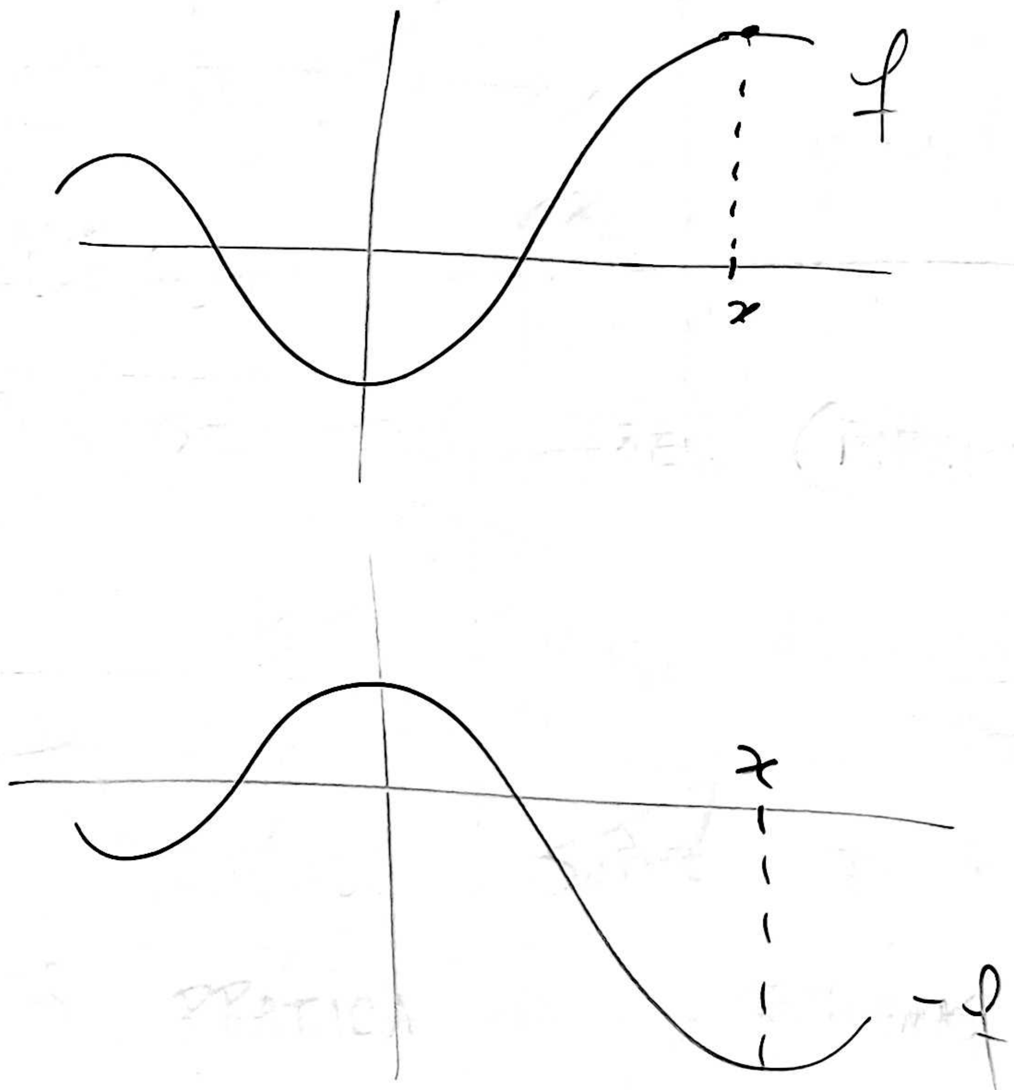
OBS.: • $D = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ h(x) = 0 \ ,\ g(x) \leq 0 \}$

"CONJUNTO VIÁVEL"

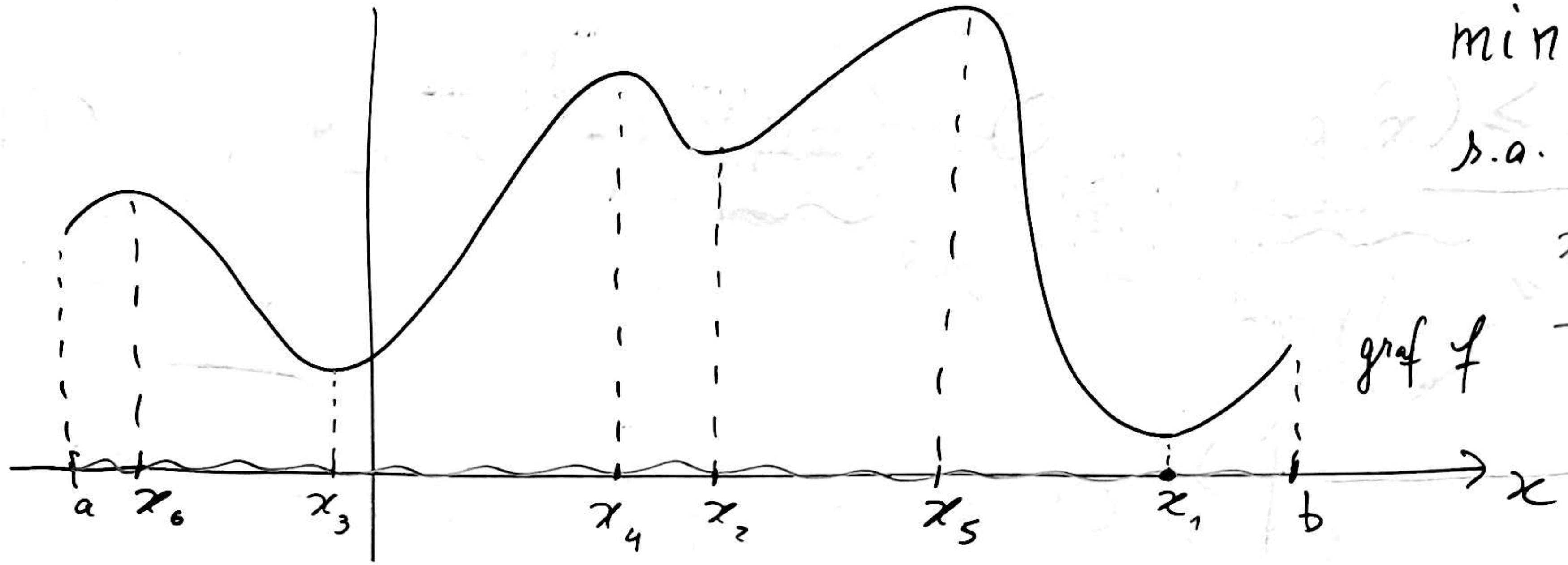
• $x \in D$: PONTO VIÁVEL / SOLUÇÃO
(FACTÍVEL)

• MAXIMIZAR f É O MESMO QUE MINIMIZAR $-f$.

$\Rightarrow$ PODEMOS CONSIDERAR APENAS MINIMIZAÇÃO.



$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } x \in [a,b]$$
$$x - b \leq 0$$
$$-x + a \leq 0$$



- x_1: MINIMIZADOR GLOBAL.
- x_2 E x_3: MINIMIZADORES LOCAIS.
- x_5: MAXIMIZADOR GLOBAL ; x_4 E x_6: MAXIMIZADORES LOCAIS.

<u>DEFINIÇÃO:</u> $x^* \in D$ É DITO <u>MINIMIZADOR GLOBAL</u> DE f SUJEITA A $x \in D$ SE

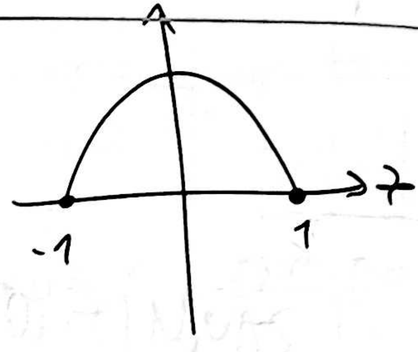
$$f(x^*) \leq f(x), \quad \underline{\forall x \in D}.$$

(<u>OBS.:</u> x^* PODE NÃO SER ÚNICO...).

$x^* \in D$ É DITO <u>MINIMIZADOR LOCAL</u> SE EXISTE UMA BOLA $B_\delta(x^*)$ DE RAIO $\delta > 0$ E CENTRO x^*

<u>EXEMPLO:</u>

$$\min \; f(x) = -x^2 + 1$$
$$\text{s.a.} \quad \underline{x \in [-1, 1]}$$



TAL QUE $f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in D \cap B_\delta(x^*)$.

OBS: TODO MINIMIZADOR GLOBAL TAMBÉM É LOCAL.

OBS.: NÃO É ESPERADO QUE UMA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL UTILIZE ESSA DEFINIÇÃO, POIS ENVOLVERIA A AVALIAÇÃO DE UMA QUANTIDADE ENORME DE PONTOS PRÓXIMOS À UM DADO x^*.

FUTURAMENTE DEVEREMOS DESCREVER MINIMIZADORES SEM A NECESSIDADE DA AVALIAÇÃO DE "TODOS" OS PONTOS NUMA VIZINHANÇA. EXEMPLO: $f'(x^*) = 0$ (CÁLCULO I).

$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } h(x) = 0$$
$$g(x) \leq 0$$

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR GERAL (PNL).

- x^* é <u>minimizador global</u> se $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x$ viável.

- x^* é <u>minimizador local</u> se $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in B_\delta(x^*)$ viável, para alguma viz.

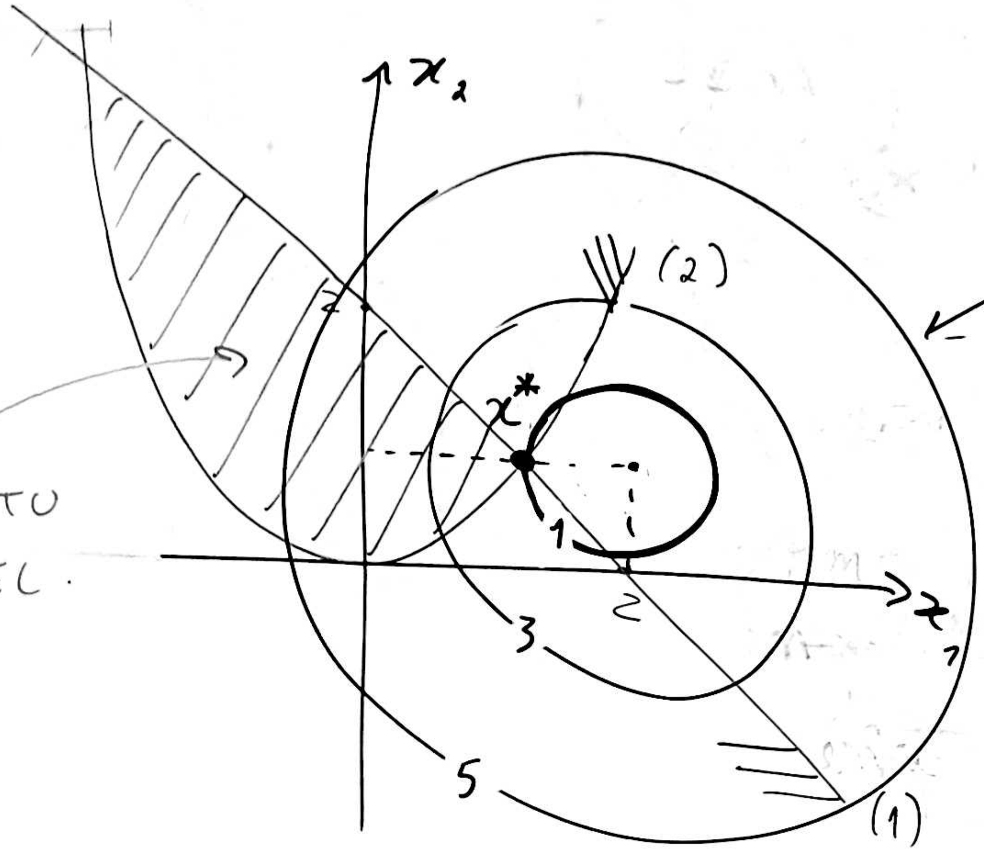
$$B_\delta(x^*) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x^*\| \leq \delta \}.$$

EXEMPLOS:

1) $\min\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2$ (PNL COM RESTRIÇÕES).

s.a. $x_1+x_2-2 \leq 0$ (1)

$x_1^2-x_2 \leq 0$ (2)



NÍVEIS DA FUNÇÃO OBJETIVO (F.O.)

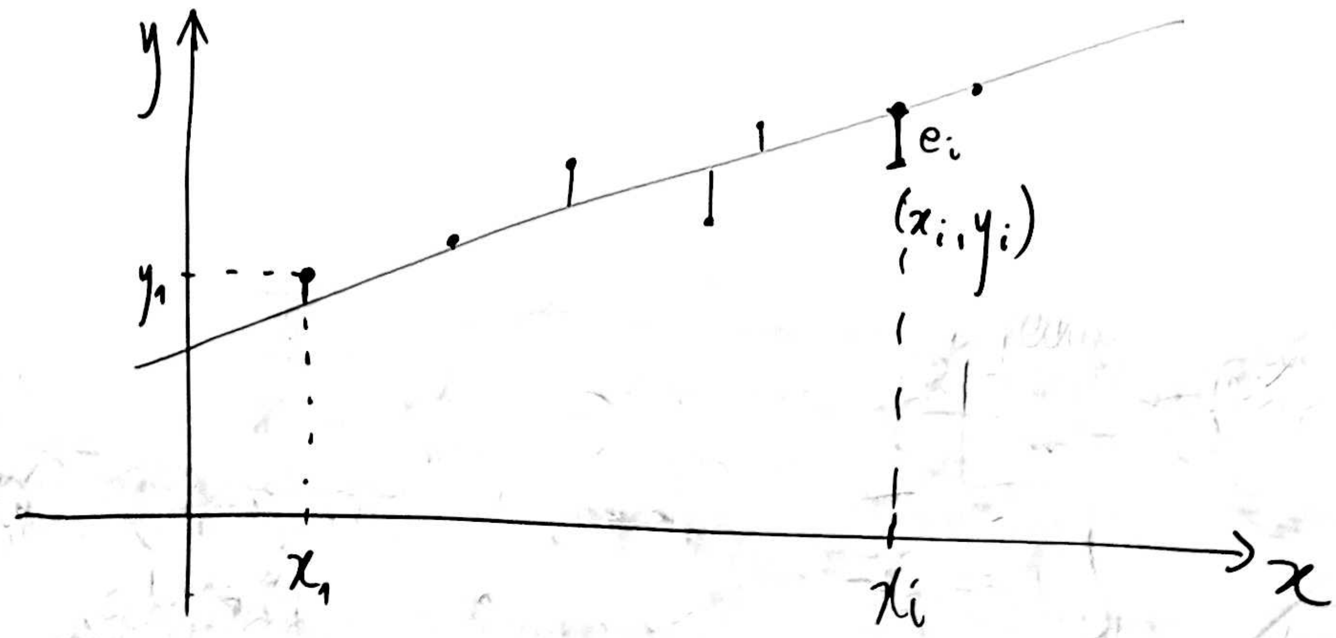
$x^*=(1,1)$ É O MINIMIZADOR (GLOBAL) DO PROBLEMA. GEOMETRICAMENTE, x^*

ESTÁ NA INTERSEÇÃO DA REGIÃO VIÁVEL E A CURVA DE NÍVEL "ÓTIMA" DA F.O.

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2=1.$$

---

2) SUPONHA QUE TENHAMOS m PONTOS (x_i, y_i) NO PLANO PROVENIENTES DE ESTATÍSTICAS.



PERGUNTA: SE OS DADOS EVOLUEM SEGUNDO UMA FUNÇÃO AFIM, QUEREMOS SABER QUAL DESSAS FUNÇÕES MELHOR APROXIMA OS DADOS.

IDEIA: MINIMIZAR A SOMA DOS ERROS ENTRE A MEDIÇÃO E A FUNÇÃO

$$p(x) = ax + b \quad .$$

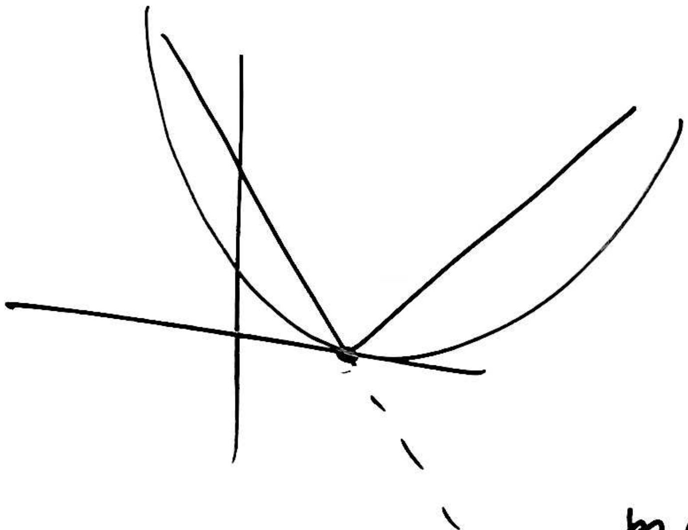
ERRO ENTRE p E O PONTO (x_i, y_i):

$$e_i = |ax_i + b - y_i| \quad .$$

RESOLVER

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{m} e_i = \sum_{i=1}^{m} |ax_i + b - y_i| .$$

(OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA).



ESTA F.O. NÃO TEM DERIVADAS EM TODOS OS PONTOS $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

SOLUÇÃO: TROCAR O PROBLEMA!

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

3) SISTEMA LINEAR $Ax = b$.

$Ax = b$ TEM SOLUÇÃO $\Longleftrightarrow$ $\|Ax - b\|^2 = 0$.

$\min\limits_{x} \|Ax - b\|^2$: FORNECE SOLUÇÃO DO SISTEMA QUANDO EXISTE, E UM PONTO x^* "BOM" QUANDO NÃO HÁ SOLUÇÃO.

<u>OBS.:</u> HÁ ALGORITMOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS QUE SE BASEIAM NESSA IDEIA ("MÉTODOS NUMÉRICOS I").

4) $m = 100$ OPÇÕES DE INVESTIMENTO.

$K\ (=3)$: NÚMERO MÁXIMO DE OPÇÕES A SEREM CONTRATADAS.

s_{ij} : A CORRELAÇÃO ENTRE AS OPÇÕES i E j.

RETORNO AO ESCOLHER i E j SEJA MEDIDO POR

$$x_i \, s_{ij} \, x_j \, ,$$

ONDE x_i : \$ NA OPÇÃO i.

$S = [s_{ij}]$: MATRIZ DE CORRELAÇÃO.

<u>RETORNO TOTAL</u>: $x^t S x$.

$x \in \mathbb{R}_+^n$: \$ EN CADA OPÇÃO x_i

$$\boxed{M \gg 1 \quad \text{cte}}$$

$$\min_x \; -x^t S x$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{n} z_i \leq K$$

$$x_i \leq M z_i \quad , \forall i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M \qquad (M = \text{CAPITAL TOTAL})$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad , \forall i.$$

$$x_i \geq 0 \quad , \forall i.$$

$$P: \min_x f(x)$$
$$\text{s.a. } h(x) = 0$$
$$g(x) \leq 0$$

EXEMPLOS:

1) $$\min_x c^t x$$ (PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR)

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$Cx \leq d$$ → DISCIP. "PESQUISA OPERACIONAL I / II"

$$\boxed{x_i \in \mathbb{Z}}, \ i \in I.$$

---

2) PROB. DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA.

$$\min_x \frac{1}{2} x^t Q x + b^t x \qquad Q \text{ É SIMÉTRICA}$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$Cx \leq d.$$

"FÁCIL" DE RESOLVER QUANDO

- Q É DEFINIDA POSITIVA, ISTO É,

  $$d^t Q d > 0, \quad \forall d \neq 0.$$

  (OU EQUIVALENTEMENTE, SE TODOS OS AUTOVALORES DE Q SÃO POSITIVOS).

- Q É SEMI-DEFINIDA POSITIVA, ISTO É, $d^t Q d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$

• <u>NÃO</u> HÁ $Cx \leq d$.

<u>EXERCÍCIOS:</u>

1) FORMULE O SEGUINTE PROBLEMA: DADO $l > 0$ FIXO, QUAL O RETÂNGULO DE MAIOR ÁREA E PERÍMETRO l?

→ TENTE RESOLVER...

2) FAÇA O MESMO COM ELIPSES.

→ QUAL ELIPSE VOCÊ <u>ACHA</u> QUE POSSUI A MAIOR ÁREA?

3) TENTE FORMULAR ESTE PROB. DE MAXIMIZAÇÃO DE ÁREAS PARA UMA CURVA FECHADA (E SIMPLES?) QUALQUER. É SIMPLES RESOLVÊ-LO?