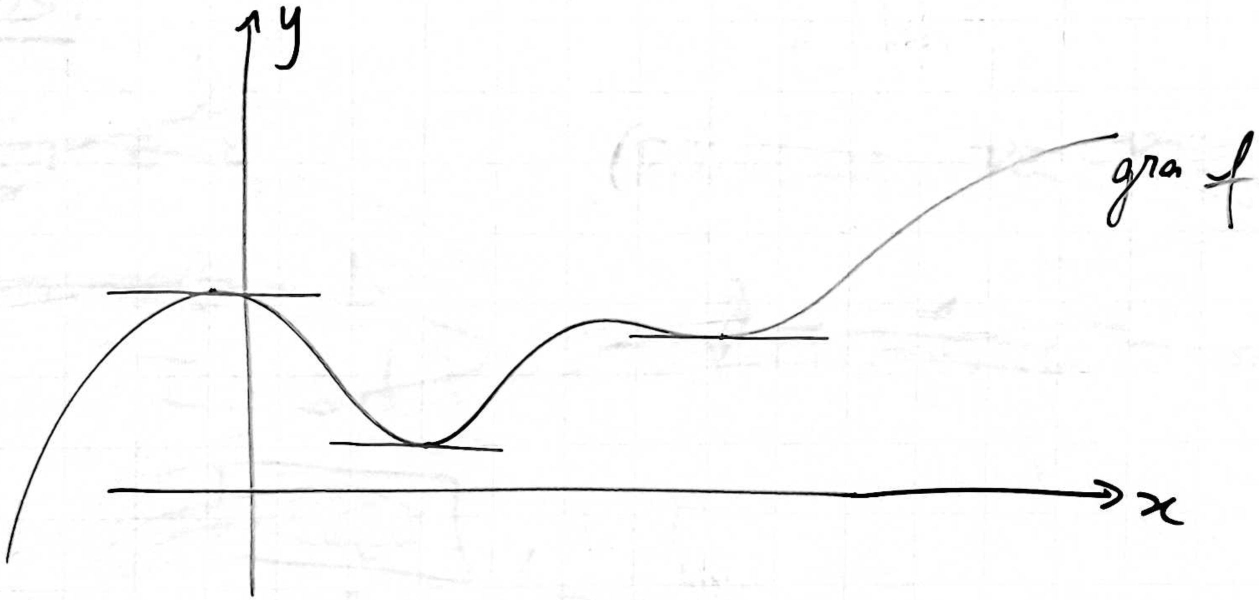
OTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES

$$\min_x f(x)$$
$$(\text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n).$$



<u>LEMA:</u> SE $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TÊM DERIVADAS 2^{as} CONTÍNUAS E t^* É UM MINIMIZADOR LOCAL, ENTÃO $\varphi'(t^*) = 0$ E $\varphi''(t^*) \geq 0$.

<u>PROVA</u>: COMO t^* É MINIMIZADOR LOCAL ENTÃO

$$\varphi(t^*+t) \geq \varphi(t^*), \quad \forall t \text{ SUFICIENTEMENTE}$$

PEQUENO. DAÍ, PARA $t > 0$,

$$0 \leq \frac{\varphi(t^*+t) - \varphi(t^*)}{t}.$$

PASSANDO AO LIMITE $t \to 0^+$, OBTEMOS $\varphi'(t^*) \geq 0$.

FAZENDO O MESMO PARA $t \to 0^-$, OBTEMOS $\varphi'(t^*) \leq 0$,

E LOGO $\varphi'(t^*) = 0$.

USANDO A EXPANSÃO DE TAYLOR DE 2ª ORDEM DE φ AO REDOR DE t^*, ESCREVEMOS

$$\varphi(t^*+t) = \varphi(t^*) + \underbrace{t\,\varphi'(t^*)}_{} + \frac{t^2}{2}\varphi''(t^*) + r(t)$$

ONDE $\dfrac{r(t)}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. DAÍ, USANDO O FATO DE

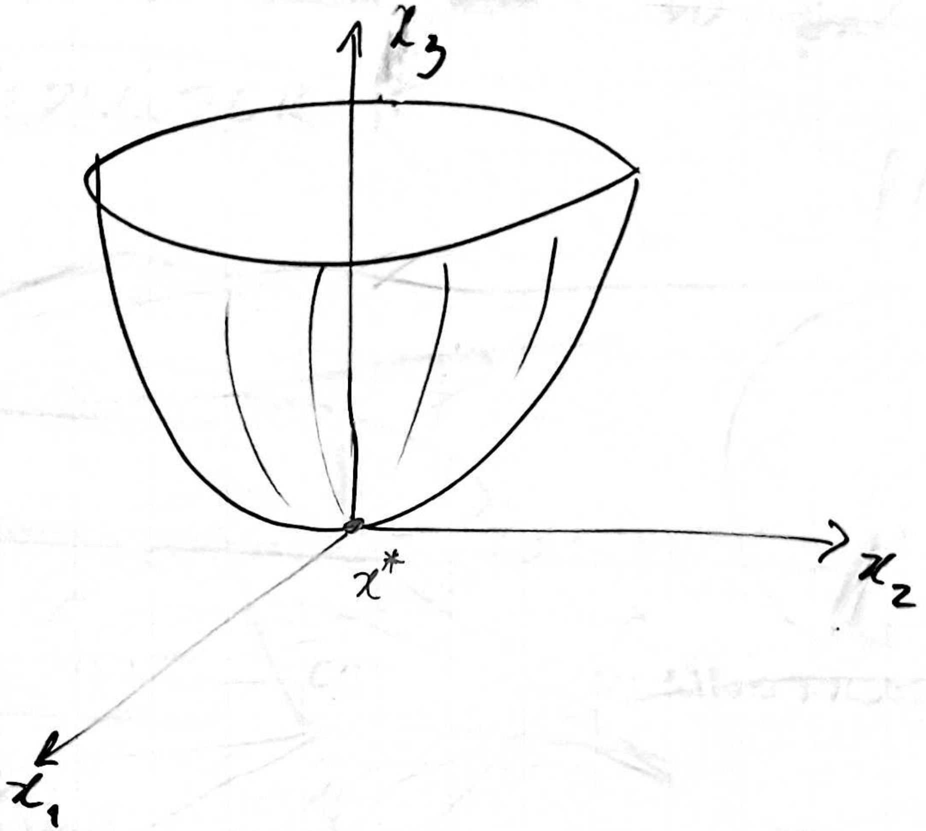
$\varphi'(t^*) = 0$, DIVIDIMOS A EXPRESSÃO ANTERIOR POR t^2

PARA OBTER

$$\frac{1}{2}\varphi''(t^*) + \frac{r(t)}{t^2} = \frac{\varphi(t^*+t) - \varphi(t^*)}{t^2} \geq 0$$

$\forall t$ SUFICIENTEMENTE PEQUENO. FAZENDO $t \to 0$

OBTEMOS $\varphi''(t^*) \geq 0$. ∎



TEOREMA (CONDIÇÃO NECESSÁRIA (DE OTIMALIDADE) DE $1^{\underline{a}}$ ORDEM)

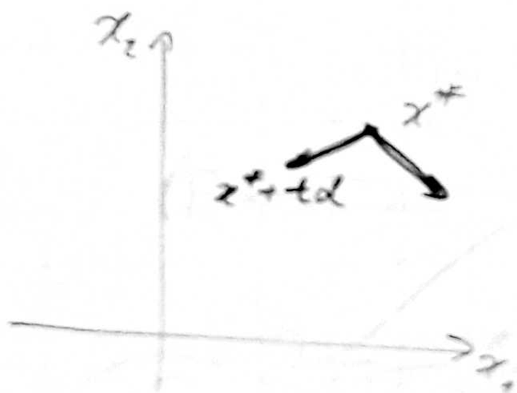
SEJA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO COM DERIVADAS CONTÍNUAS (f É C^1). SE x^* É UM MINIMIZADOR LOCAL DE f ENTÃO

$$\nabla f(x^*) = 0$$

PROVA: DEFINIMOS A FUNÇÃO

$$\varphi(t) = f(x^* + td),$$

ONDE $d \neq 0$ É FIXO.



COMO x^* É MIN. LOCAL DE f, $t^* = 0$ É MIN. LOCAL DE φ.
DAÍ, $\varphi'(0) = 0$. AGORA,

$$\varphi'(t) = \nabla f(x^* + td)^t d$$

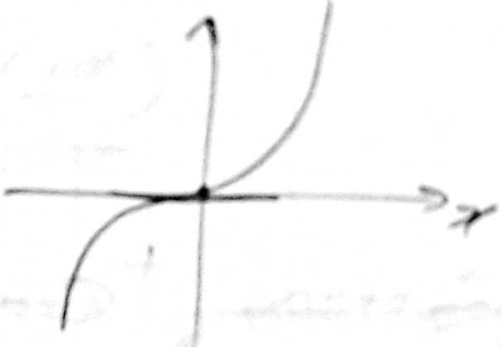
DAÍ, $0 = \varphi'(0) = \nabla f(x^*)^t d$. COMO d É QUALQUER, SÓ PODE SER

$\nabla f(x^*) = 0$ ■.

OBS: $\nabla f(x^*) = 0 \not\Rightarrow x^*$ SER MINIMIZADOR.

EXEMPLOS:

1) $f(x) = x^3$, $x^* = 0$



$f'(0) = 0$.

$x^* = 0$ **NÃO** É MIN. POIS $f(t) = t^3 < 0, \ \forall t < 0$.

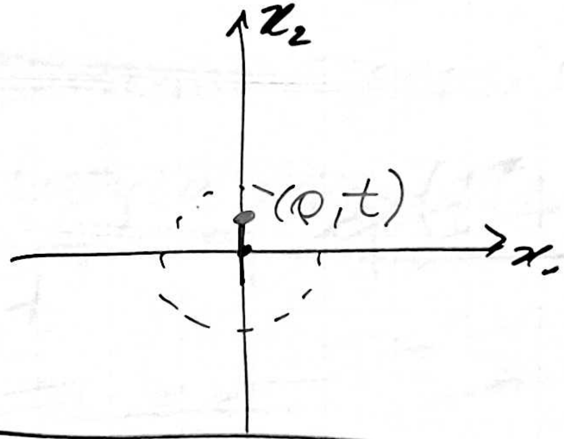
---

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $x^* = (0,0)$.

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$. $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, PORÉM $(0,0)$ **NÃO**

É MINIMIZADOR DADO QUE

$$f(0,t) = -t^2 < 0 = f(0,0), \quad \forall t \neq 0.$$



3) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, $x^* = (0,0)$.

$Df(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$, $Df(x^*) = (0,0)$. MAS x^* É

MAXIMIZADOR GLOBAL: $f(x,y) < 0 = f(0,0)$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

4) $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$, $x^* = (0,0)$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x^3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

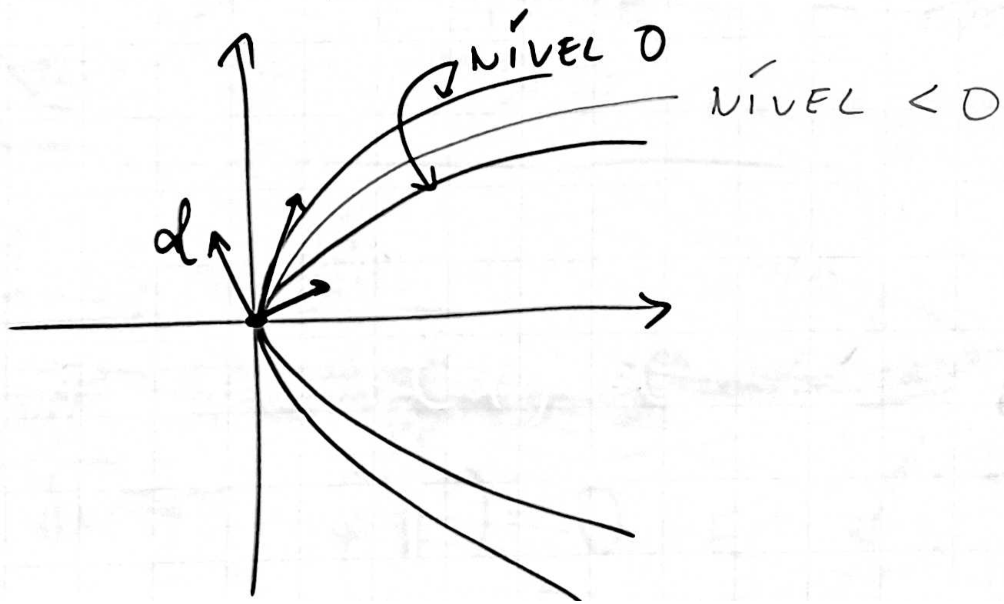
$x^* = (0,0)$ NÃO É MINIMIZADOR LOCAL DE f:

DE FATO, TOME $x = \left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right)$. NOTE QUE SE $x_2 \to 0$, $x \to (0,0)$. AGORA,

$$f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}x_2^2 - x_2^2\right)}_{<0}\underbrace{\left(\frac{2}{3}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^2\right)}_{>0} < 0 = f(0,0).$$

APESAR DE $x^* = (0,0)$ NÃO SER MINIMIZADOR DE f, SE FIXAMOS QUALQUER DIREÇÃO $d \neq 0$, O PONTO x^* É O MINIMIZADOR AO LONGO DA DIREÇÃO d. ISTO É, $t^* = 0$ É MINIMIZADOR DE

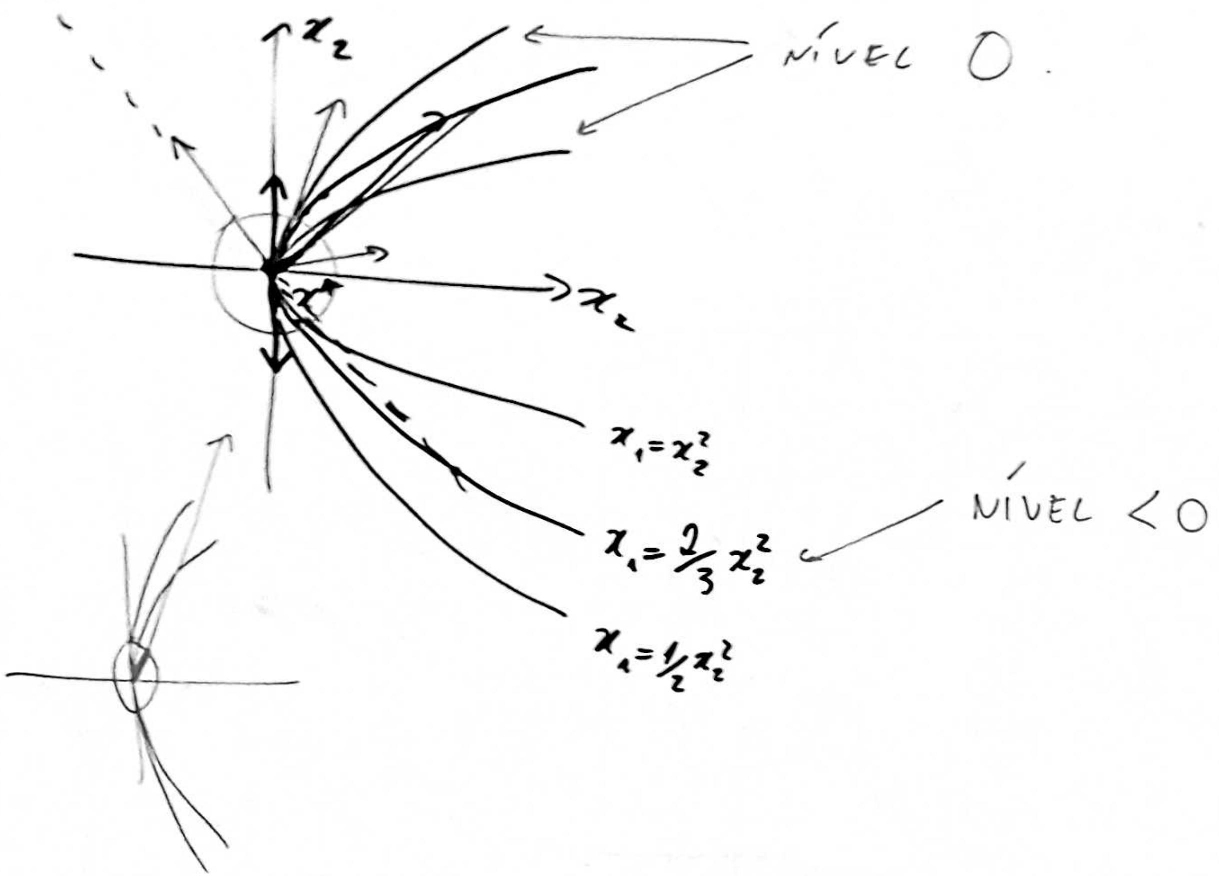
$$\varphi(t) = f(x^* + td).$$



(...).

EXEMPLO: $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$, $x^* = (0,0)$.

- $\nabla f(x^*) = (0,0)$.
- x^* NÃO É MINIMIZADOR.



$$f\left(\tfrac{2}{3}x_2^2, x_2\right)$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}x_2^2 - x_2^2\right)\left(\tfrac{2}{3}x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2\right)$$
$$= \left(-\tfrac{1}{3}x_2^2\right)\left(\tfrac{1}{6}x_2^2\right)$$
$$< 0, \quad \forall x_2 \neq 0.$$

(MELHOR QUE $f(0,0) = 0$)

APESAR DISSO, FIXADA UMA DIREÇÃO $d \neq 0$, A ORIGEM x^* É MINIMIZADOR DE f AO LONGO DE d. ISTO É, $t^* = 0$ É MINIMIZADOR LOCAL DE

$$\min \varphi(t) = f(x^* + td).$$

DE FATO,

$$f(x^* + td) = f(td) = (td_1 - t^2 d_2^2)(td_1 - \tfrac{1}{2} t^2 d_2^2)$$

SE $d_1 = 0$ ENTÃO $f(x^* + td) = \frac{1}{2} t^4 d_2^4 > 0, \ \forall d_2 \neq 0, \ \forall t \neq 0.$

SUPONHA $d_1 \neq 0$. TEMOS

$$f(x^* + td) = t^2 (d_1 - td_2^2)(d_1 - \tfrac{1}{2} t d_2^2).$$

PARA $t = 0$, A PARCELA $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2} t d_2^2) = d_1^2 > 0.$

POR CONTINUIDADE, ESSA PARCELA PERMANECE POSITIVA PARA TODO t SUFIENT. PRÓX. DE 0. DAÍ,

$f(x^* + td) > 0$, $\forall t \neq 0$ PEQUENO.

"MINIMIZAR EM TODAS AS DIREÇÕES NÃO É SEMPRE SUFICIENTE PARA MINIMIZAR UMA FUNÇÃO f".

TEO (CNO DE 1ª ORDEM): SE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É C^1 E x^* É MIN. LOCAL DE f ENTÃO $\nabla f(x^*) = 0$.

TEO (CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE OTIMALIDADE DE 2ª ORDEM). SE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É C^2 E x^* É MINIMIZADOR LOCAL ENTÃO $\nabla^2 f(x^*)$ É SEMI-DEFINIDA POSITIVA ($\nabla^2 f(x^*) \geq 0$)

LEMBRETE: A HESSIANA DE f NO PONTO x^* É

A MATRIZ MXM TAL QUE

$$\nabla^2 f(x^*)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

EXEMPLO:

$$f(x) = x_1^2 x_2 - x_3^2 + 2x_1 + x_2^5 \qquad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_1^2 + 5x_2^4 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_1 & 20x_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

SE $f \in C^2$ ENTÃO $\nabla^2 f(x)$ É SIMÉTRICA.

DEFINIÇÕES:

1) UMA MATRIZ A $n \times n$ É SEMI-DEFINIDA POSITIVA SE $d^t A d \geq 0$, $\forall d \in \mathbb{R}^n$.

EXEMPLOS:

(i) I (IDENTIDADE)

(ii) $A = \text{diag}(a)$, $a \in \mathbb{R}^n_+$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ <u>NÃO</u> É SEMI-DEF. POSITIVA:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ <u>NÃO</u> É SEMI-DEF. POSITIVA, APESAR DE SIMÉTRICA.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 < 0.$$

NO CASO <u>$n=1$</u>, $\nabla^2 f(x) = f''(x)$. DAÍ, $\nabla^2 f(x)$ É SEMI-DEF. POS. $\iff f''(x) \geq 0$.

<u>NOTAÇÃO</u>: $\underline{\nabla^2 f(x) \geq 0}$ (OU $\nabla^2 f(x) \succcurlyeq 0$).

TEO: (CNO DE 2ª ORDEM)

SE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É C^2 E x^* É UM MINIMIZADOR LOCAL, ENTÃO $D^2 f(x^*) \geq 0$ (ALÉM DE $Df(x^*) = 0$).

PROVA: $Df(x^*) = 0$ PELO TEO. ANTERIOR (CNO DE 1ª ORDEM). DEFINIMOS A FUNÇÃO

$$\varphi(t) = f(x^* + td).$$

COMO x^* É MINIMIZADOR LOCAL DE f, $t^* = 0$ É MIN. LOCAL DE φ. ASSIM $\varphi''(t^*) \geq 0$. TEMOS

$$\varphi'(t) = Df(x^* + td)^t d \quad , \quad \varphi''(t) = d^t D^2 f(x^* + td) d.$$

DAÍ, $\varphi''(t^*) = d^t \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$. SENDO d QUALQUER, SEGUE O RESULTADO. ∎

EXEMPLO: $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$.

$x^* = (1,0)$. É POSSÍVEL VERIFICAR QUE $\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ E QUE x^* É MINIMIZADOR LOCAL.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1 - 6 - 12x_2 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}. \quad \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6d_1 - 6d_2 & -6d_1 + 12d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 6d_1^2 - 12d_1d_2 + 12d_2^2$$

$$= 6\left(d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2\right) + 6d_2^2$$

$$= 6(d_1 - d_2)^2 + 6d_2^2 \geqslant 0.$$

OU SEJA, $\nabla^2 f(x^*) \geqslant 0$.

2) $\nabla^2 f(x^*) \geqslant 0$ $\left(\text{E } \nabla f(x^*) = 0 \right)$ NÃO É SUFICIENTE PARA OTIMALIDADE (x^* SER MINIMIZADOR LOCAL).

POR EXEMPLO, $f(x) = x^3$, $x^* = 0$: $f'(0) = 0$,

$f''(0) = 6.0 = 0$.

3) $f(x) = -x^2$, $x^* = 0$ NÃO É MINIMIZADOR LOCAL.

1ª ORDEM: $f'(0) = 0$. ← 1ª ORDEM COME BOLA.

2ª ORDEM: $f''(0) = -2 < 0$. ← 2ª ORDEM "DESCARTA" O PONTO RUIM!

"A 2ª ORDEM CARACTERIZA MELHOR OS MINIMIZADORES"

ÀS VEZES, UM PONTO QUE NÃO É MINIMIZADOR PASSA NO TESTE DE 1ª ORDEM, MAS FURA O TESTE DE 2ª ORDEM...

CONDIÇÃO SUFICIENTE (DE 2ª ORDEM) PARA OTIMALIDADE.

DEFINIÇÃO: A $m \times m$ É DEFINIDA POSITIVA SE

$$d^t A d > 0 \quad , \quad \forall d \neq 0 .$$

NOTAÇÃO: $A > 0$.

EXEMPLOS:

1) Id.

2) $A = diag(a)$, $a_i > 0$, $\forall i$.

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ NÃO É DEF. POS. POIS $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

(ESSA MATRIZ É SEMI-DEF. POS.)

"A É DEF. POSITIVA $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ A É SEMI-DEF. POS".

DEFINIÇÃO: x^* É MINIMIZADOR LOCAL <u>ESTRITO</u> DE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SE $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \neq x^*$ PRÓXIMO A x^*.

TEO. (COND. SUFICIENTE DE 2ª ORDEM)

SE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É C^2 E x^* É TAL QUE

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{E} \quad \nabla^2 f(x^*) > 0$$

ENTÃO x^* É MINIMIZADOR LOCAL ESTRITO.

EXERCÍCIOS:

1) CAP 2 LIVRO ANA FRIEDLANDER.

2) MOSTRE QUE $A \geq 0$ (A MATRIZ $n \times n$) SE, E SÓ SE, TODOS OS AUTOVALORES SÃO ≥ 0. (suponha A simétrica)