Elementos de PL (revisão)

Considere o poliedro $X = \{x \in \mathbb{R}^n ; \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ relativo à um PL na forma padrão (A $m \times n$).

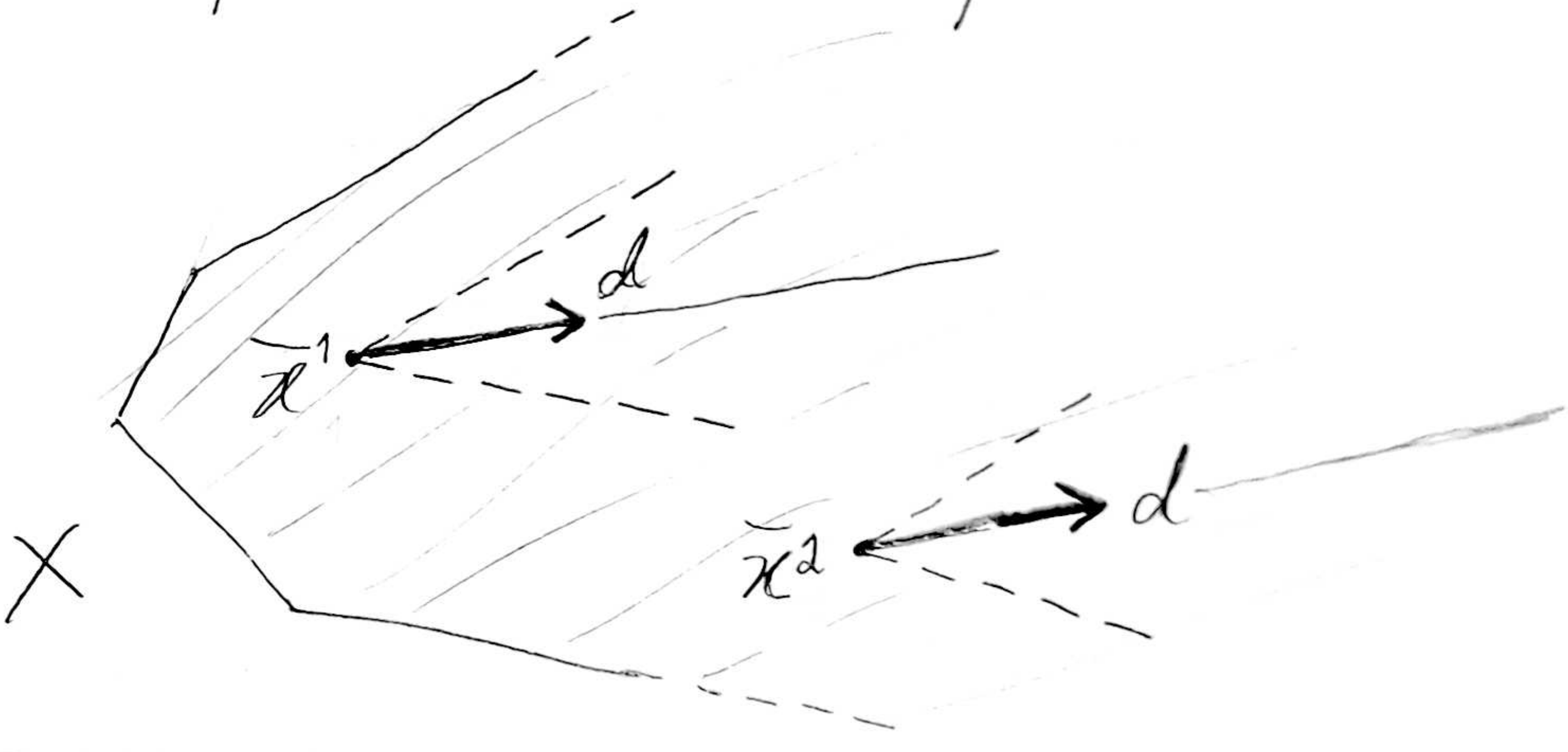
Geometricamente, é mais fácil visualizar o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n ; \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$, mas a forma com "=" é algebricamente melhor.

$Ax \leq b$:

Dois elementos fundamentais: vértice e direção

- Uma direção de X é um vetor $d \neq 0$ tal que

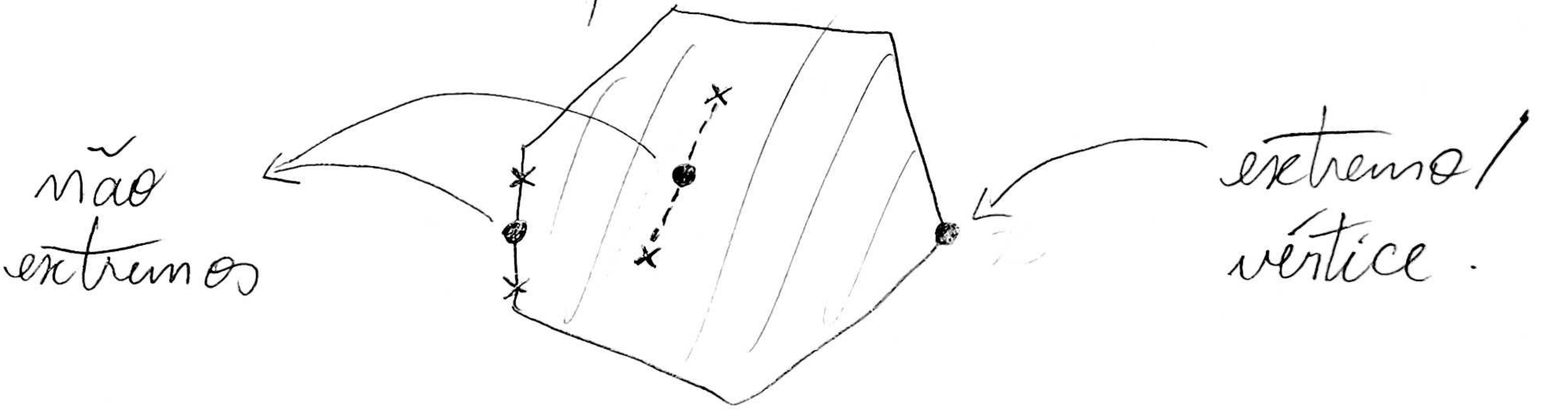
$$\{\bar{x} + \mu d\} \subset X, \quad \forall \mu \geq 0, \quad \forall \bar{x} \in X.$$



• Um <u>vértice</u> (ou <u>ponto extremo</u>) de X é um ponto $x \in X$ que <u>não</u> pode ser escrito como a combinação convexa

$$x = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\tilde{x}$$

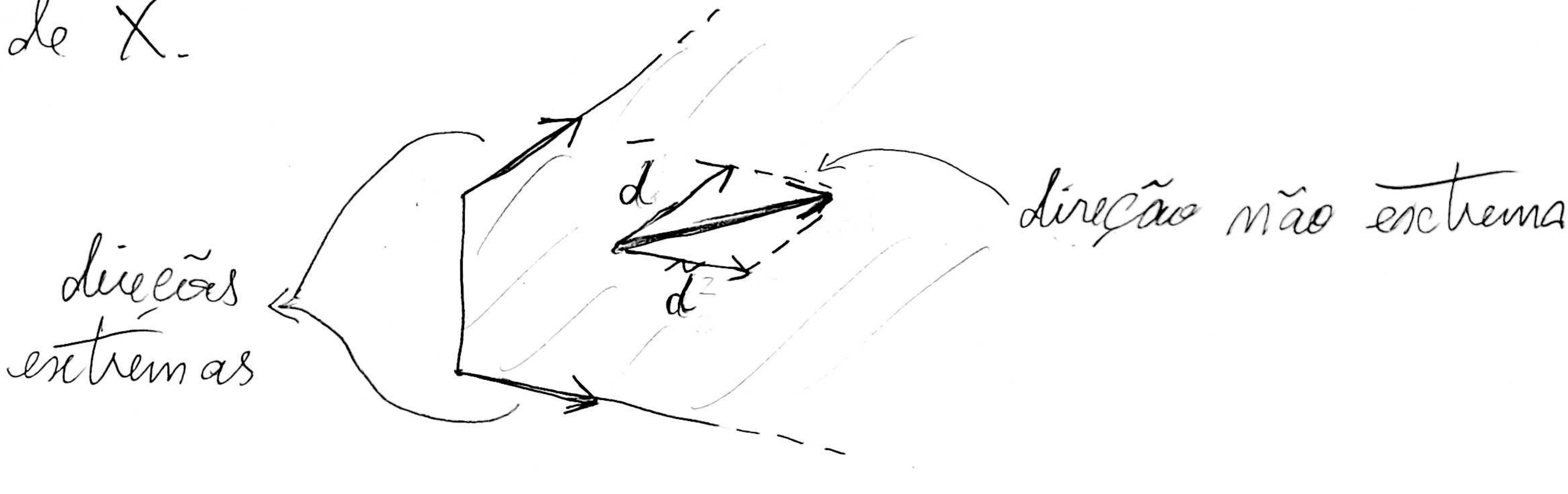
de outros dois pontos $\bar{x} \neq x$ e $\tilde{x} \neq x$ de X.



- Uma direção d de X é <u>direção extrema</u> de X se <u>não</u> pode ser escrita com uma combinação positiva

$$d = \mu_1 \bar{d} + \mu_2 \tilde{d} \quad , \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

de outras duas direções $\bar{d}$ e $\tilde{d}$ <u>não colineares</u> de X.



Geometricamente, as direções extremas são as direções das "arestas ilimitadas" de X.

Veja que se d é direção de X então μd também é direção de X, $\forall \mu > 0$.

Assim, podemos considerar apenas as direções normalizadas (pela norma $\|\cdot\|_1$):

$$\|d\|_1 = |d_1| + \cdots + |d_n| = 1.$$

Algebricamente:

(i) um vértice x de $X = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b, x \geq 0\}$ está associado à uma solução básica viável:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde}$$

$A = [B \ N]$, B matriz $m \times m$ inversível (base) tal que $B^{-1}b \geq 0$ e N matriz $m \times (n-m)$.

$\boxed{\text{Obs: estamos supondo } n > m \text{ e posto } A = m}$

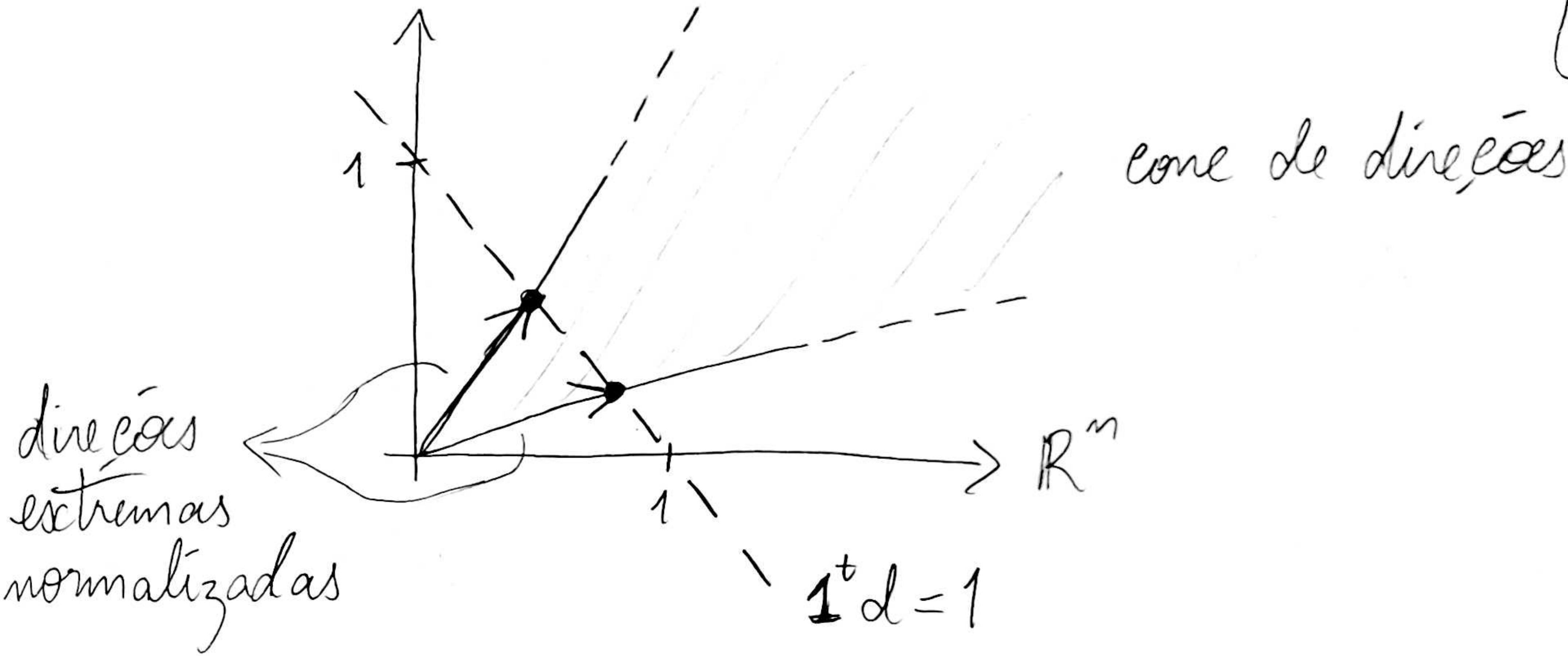
(ii) uma direção d de X é caracterizada por

$$d \neq 0 \,, \quad d \geq 0 \,, \quad Ad = 0 .$$

(verifique!)

(iii) as direções extremas (normalizadas) de X são os pontos extremos do poliedro

$$\{ d \in \mathbb{R}^n \,;\, Ad = 0 \,,\ \mathbf{1}^t d = 1 \,,\ d \geq 0 \} .$$



Os itens (i) e (iii) mostram que temos apenas um número finito de vértices e de direções extremas normalizadas!

<u>Teorema</u>: Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b, x \geq 0\}$ não vazio.

(i) X admite pontos extremos, e estes são em quantidade finita.

(ii) X admite direção $\Longleftrightarrow$ X é ilimitado.

(iii) Se X é ilimitado, o número de direções extremas normalizadas é ≥ 1 e finito.

(iv) (representação de poliedros)

Qualquer $x \in X$ pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos $x_1, \dots, x_k$ de X mais uma combinação não negativa das direções extremas normalizadas $d_1, \dots, d_\ell$ de X, isto é, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^k$ e $\exists \mu \in \mathbb{R}^\ell$ tais que

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i d_i \,, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \,, \quad \lambda \geq 0, \ \mu \geq 0.$$

Método Simplex

PL na forma padrão: (PL) $\min\ c^t x$

$$\text{s.a. } Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

A $m \times n$, posto $A = m > n$.

- $X = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ conjunto viável.
- $x_1, \dots, x_k$ pontos extremos de X
- $d_1, \dots, d_\ell$ direções extremas normalizadas de X.

Pelo teorema anterior, item (iv), PL pode ser escrito como

$$(PL) \quad \min \sum_{j=1}^{k} (c^t x_j)\lambda_j + \sum_{i=1}^{\ell} (c^t d_i)\mu_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \quad j = 1, \dots, k$$

$$\mu_i \geq 0 \ , \quad i = 1, \dots, \ell \ .$$

Supor $X \neq \emptyset$.

Observe que

- PL admite solução ótima $\Leftrightarrow$ $c^t d_i \geq 0, \forall i$

↳ De fato, se $c^t d_i < 0$ para algum i, então a F.O. $\to -\infty$ fazendo $\mu_i \to \infty$.

- Se PL admite solução ótima, uma é um dos vértices $x_1, \dots, x_K$.

↳ De fato, neste caso $\mu_i^* = 0, \forall i$, $\lambda_j^* = 1$ para $j \in \underset{1 \leq i \leq K}{\operatorname{argmin}}\, c^t x_i$ e $\lambda_i^* = 0$ para $i \neq j$.

O método Simplex declara problema ilimitado ou encontra um vértice ótimo através da descrição de vértices como soluções básicas viáveis:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$A = [B \ N]$, B $m \times m$ inversível.

- x_B: variáveis básicas (VB's)
- x_N: variáveis não básicas (VNB's)
- B: base ; • R: conj. índices VNB's.

Álgebra do Simplex:

$$(PL)\quad \min\ z = c_B^t x_B + c_N^t x_N$$
$$\text{s.a.}\quad Bx_B + Nx_N = b$$
$$x_B \geq 0,\ x_N \geq 0.$$

- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - \sum_{j\in R} B^{-1}a_j x_j$,

onde a_j é a coluna j de A. Chamando $\bar{b} = B^{-1}b$ e $y_j = B^{-1}a_j$, temos

$$x_B = \bar{b} - \sum_{j\in R} y_j x_j .$$

- A F.O. em $x = (x_B, x_N)$ é

$$z = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t\left(\bar{b} - \sum_{j\in R} y_j x_j\right) + \sum_{j\in R} c_j x_j$$

$$= z_0 - \sum_{j\in R} (z_j - c_j) x_j ,$$

onde $z_0 = c_B^t \bar{b} = c_B^t B^{-1} b$ e $z_j = c_B^t y_j = c_B^t B^{-1} a_j .$

Assim,

$$(PL) \quad \min \; z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = \bar{b}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in R$$

$$x_B \geq 0.$$

Olhando x_B como folga, podemos descartá-lo obtendo o modelo só nas VNB's:

(PL) $\min\ z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$

s.a. $\sum_{j \in R} y_j x_j \leq \bar{b}$

$x_j \geq 0, \quad \forall j \in R.$

Como $\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$, temos:

- $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R \Rightarrow x$ ótimo para PL.
- se $z_j - c_j > 0$ para algum $j \in R$, podemos tentar diminuir a F.O. aumentando o valor

da VNB x_j de 0 para > 0 (pivoteamento).

Aumentar quanto?

Suponha que $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$ seja solução básica viável e $z_j - c_j > 0$ para um certo $j \in R$. Mantendo todas as VNB's x_i, $i \in N$, $i \neq j$, iguais a zero e aumentando apenas x_j, o novo x_B será

$$x_B = \bar{b} - y_j x_j$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} x_j$$

A fim de manter $x_B \geq 0$, devemos tomar

$$x_j = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} \, ; \, y_{ij} > 0 \right\}.$$

Note que se $y_{ij} \leq 0, \forall i$, então podemos tomar $x_j \geq 0$ qualquer $\Rightarrow$ PL ilimitado $(x_j \to \infty)$

Note também que $x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rj} x_j = \bar{b}_r - y_{rj} \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rj}}$

$\Rightarrow x_{B_r} = 0$. Assim, x_{B_r} vira VNB valendo zero. Neste processo:

1) x_j entra na base

2) x_{B_r} sai da base

3) nova base: $B \leftarrow [a_{B_1} \cdots a_{B_{r-1}}\ a_j\ a_{B_{r+1}} \cdots a_{B_m}]$

Obs.: pode-se escolher qualquer VNB com $z_j - c_j > 0$ para entrar na base. Geralmente escolhe-se aquele com "maior ganho" na FO:

$$k \in N \text{ tal que } z_k - c_k = \max_{j \in R} \{ z_j - c_j \}.$$

Resumindo (método Simplex)

(i) se $z_j - c_j \leq 0$, $\forall j \in R$, então PL está resolvido, com ótimo $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) caso contrário, escolha uma VNB x_j com $z_j - c_j > 0$ para entrar na base.

(iii) Se $y_{ij} \leq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, pare: PL é ilimitado. Caso contrário, tome a VB x_{B_r} com

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} \; ; \; y_{ij} > 0 \right\}$$

para sair da base.

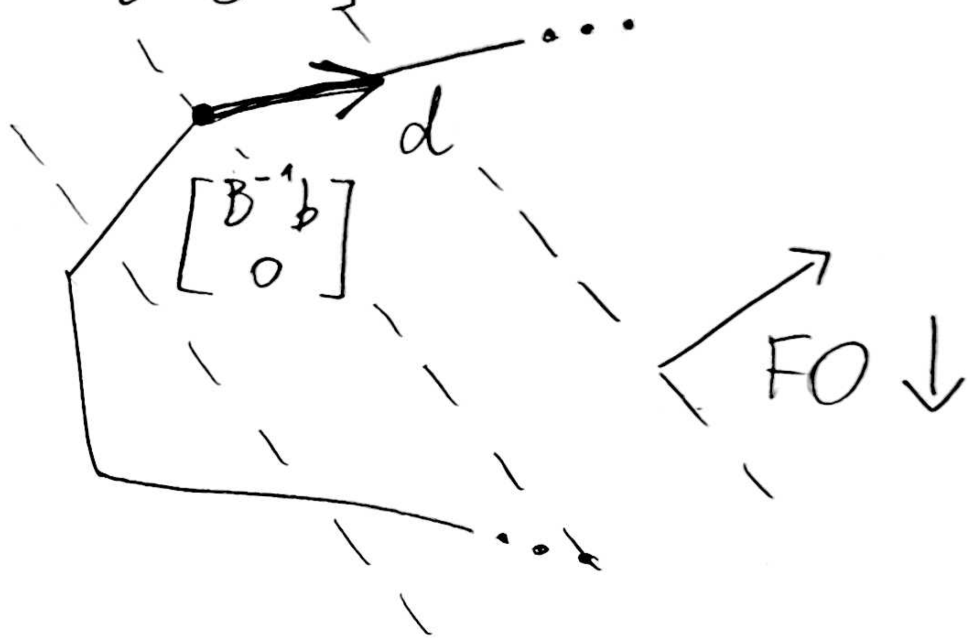
(iv) Faça a mudança de base tomando a nova VB como $x_j = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} \geq 0$ e a nova VNB $x_{B_r} = 0$.

Observações:

- no caso de PL ilimitado ($z_j - c_j > 0$ e $y_j \leq 0$), o vetor

$$d_j = \begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{(normalizado)}$$

é direção extrema emanando da solução básica viável $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ onde a FO $\to -\infty$.



De fato, $Ad_j = [B \;\; N]\begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} = -By_j + Ne_j$

$= -BB^{-1}a_j + a_j = 0$ e

$$c^t d_j = [c_B^t \ c_N^t] \begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} = -c_B^t y_j + c_N^t e_j$$

$$= -(z_j - c_j) < 0$$ (d_j é direção de descida)

- o processo de mudança de base pode ser feito no "quadro Simplex" (pivoteamento)

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$c_B^t B^{-1} N - c_N^t$	$c_B^t \bar{b}$
x_B	0	I_m	$B^{-1} N$	$\bar{b}$

- Para iniciar o método com uma solução básica viável (caso exista), utilizamos o método de duas fases, que insere variáveis artificiais x_a $(Ax + x_a = b)$, e inicia com $B = I_m$ relativa às VB's x_a.

- O método de duas fases identifica se o PL é inviável ($x_a^* \neq 0$ na FASE 1).