PENALIZAÇÃO EXTERNA

REF.: MARTÍNEZ. OTIMIZAÇÃO PRÁTICA USANDO O LAGRANGIANO AUMENTADO (CAP 2).

$$P: \min f(x)$$

$$\text{s.a.} \quad \left.\begin{array}{l} h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{array}\right\} \text{RESTRIÇÕES "DIFÍCEIS"}$$

$$x \in \Omega \quad \} \text{ RESTRIÇÕES "FÁCEIS".}$$

EXEMPLOS DE RESTRIÇÕES FÁCEIS:

1) $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ l_i \leq x_i \leq u_i ,\ \forall i\}$ (RESTRIÇÕES DE CAIXA)

3) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ Ax = b ,\ Cx \leq d\}$.

HIPÓTESE: f, g, h SÃO DE CLASSE C^1.

IDEIA DA PENALIZAÇÃO EXTERNA: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS SOMENTE COM AS RESTRIÇÕES FÁCEIS $x \in \Omega$, CASTIGANDO A INVIABILIDADE EM RELAÇÃO ÀS RESTRIÇÕES DIFÍCEIS.

MEDIDA DE INVIABILIDADE:

$$\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 ,$$

ONDE

$$g(x)_+ = \max\{0, g(x)\}.$$

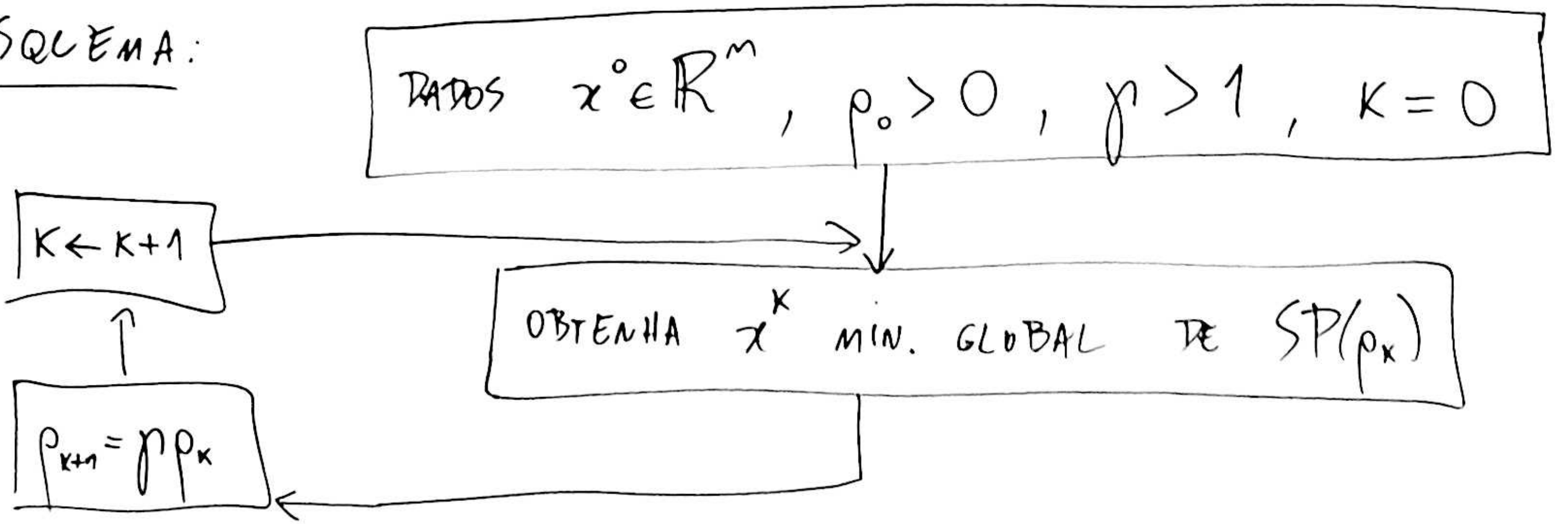
SUBPROBLEMA:

$$SP(\rho): \quad \min \ f(x) + \rho\,\phi(x)$$
$$\text{s.a.} \quad x \in \Omega.$$

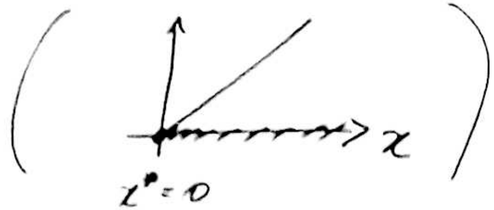
- NOTE QUE $\phi(x) = 0 \iff h(x) = 0$ E $g(x) \leq 0$.

- $\rho > 0$. FAZER $\rho \to \infty$ IMPLICA QUE $\phi(x) \to 0$.
(RECUPERA VIABILIDADE "NO LIMITE").

ESQUEMA:



EXERCÍCIO: APLIQUE O ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO EXTERNA AO PROBLEMA $\min x$ s.a. $-x \leq 0$.



AQUI, $\Omega = \mathbb{R}$. TOME $\rho = 10$.

PROBLEMA COM ESSE ESQUEMA:

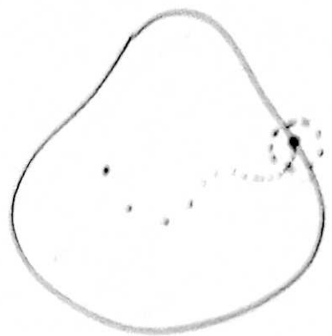
É NUMERICAMENTE INSTÁVEL (ρ PODE CRESCER MUITO)

VANTAGENS:

- BOA TEORIA DE CONVERGÊNCIA (MESMO QUE x^* SEJA APENAS PONTO ESTACIONÁRIO DE $SP(\rho_k)$ — ANULA O GRADIENTE DE $f(x) + \rho\phi(x)$)
- A IDEIA DE PENALIZAR INSPIRA VÁRIOS MÉTODOS.

RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA

SUPONHA QUE Ω SEJA FECHADO.



FECHADO

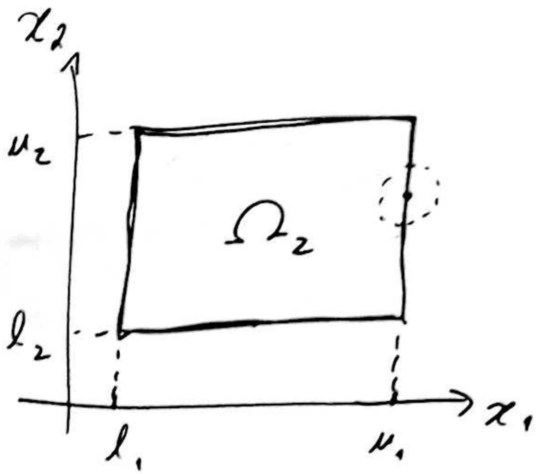
(CONTÉM SUA FRONTEIRA).

NÃO FECHADO.

EXEMPLOS:

$\Omega_1 = \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; l_i \leq x_i \leq u_i \}$

$\Omega_3 = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; Ax = b \, , \, Cx \leq d \}$ SÃO FECHADOS.

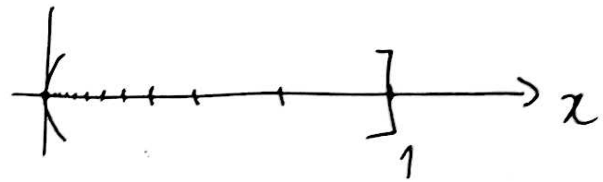


<u>OBS.:</u> SEJA $\{x^k\} \subset \Omega$ UMA SEQUÊNCIA TAL QUE $\lim x^k = x^*$. SE Ω É FECHADO ENTÃO $x^* \in \Omega$.

<u>EXEMPLOS:</u>

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ É FECHADO;

$(0,1] \subset \mathbb{R}$ <u>NÃO</u> É FECHADO, POIS $\{x^k = 1/k\} \subset (0,1]$ MAS $\lim x^k = \lim 1/k = 0 \notin (0,1]$.



DADA UMA SEQUÊNCIA $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, DIZEMOS QUE x^* É PONTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}$ SE EXISTE UMA SUBSEQUÊNCIA $\{x^k\}_{k \in K}$ CONVERGINDO À x^*.

NOTAÇÃO: $\lim\limits_{k \in K} x^k = x^*$.

EXEMPLOS:

1) $x^k = (-1)^k$.

$x^* = 1$ E $\tilde{x}^* = -1$ SÃO PONTOS DE ACUMULAÇÃO DESTA SEQUÊNCIA, POIS

$$\lim_{k \text{ PAR}} x^k = 1 \quad \text{E} \quad \lim_{k \text{ ÍMPAR}} x^k = -1.$$

Um algoritmo pode gerar uma sequência $\{x^k\}$ que alterna entre pontos azuis e vermelhos. Se a subsequência azul converge à uma solução x^*, o algoritmo teve sucesso: ele pára em algum ponto azul declarando sucesso.

x^* é ponto de acumulação, não necessariamente limite de toda a sequência $\{x^k\}$.

SEJA $\{x^k\}$ A SEQUÊNCIA GERADA PELO ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO.

TEO. SE x^* É PTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}$ E O PROBLEMA ORIGINAL P É VIÁVEL, ENTÃO x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P.

PENALIZAÇÃO EXTERNA COM CONTROLE DE VIABILIDADE / ADMISSIBILIDADE

OBJETIVO: EVITAR QUE ρ CRESÇA DESNECESSARIAMENTE!

IDEIA: SE EM UMA ITERAÇÃO DO ESQUEMA A VIABILIDADE MELHOROU, NÃO AUMENTAMOS ρ...

COMO DECIDIR SE x^k É "MAIS VIÁVEL" QUE x^{k-1}?

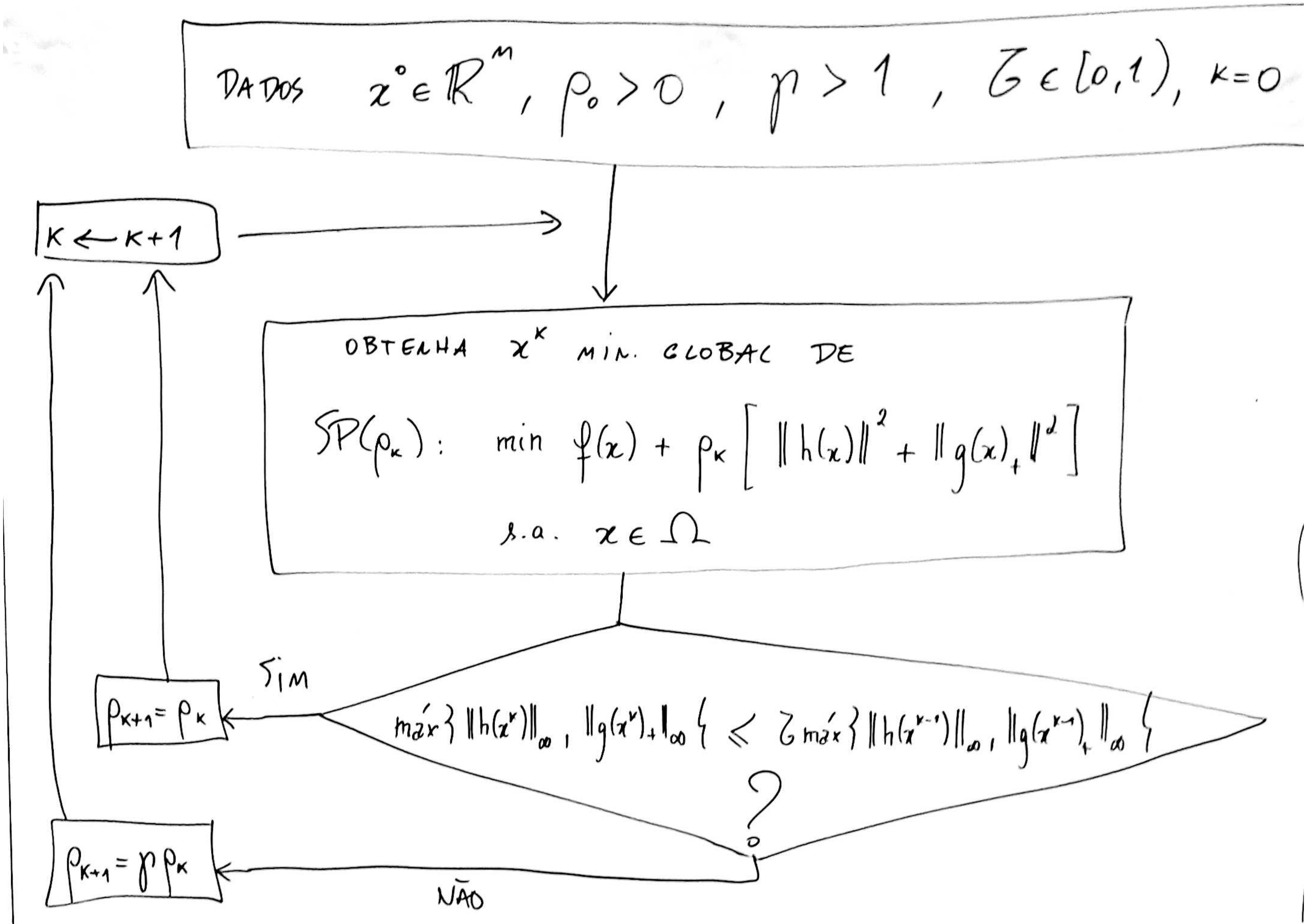
PARÂMETRO $\tau \in [0,1)$.

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|g(x^k)_+\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|g(x^{k-1})_+\|_\infty\}$$

OBS.: $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_m|\}$.

SE ISTO OCORRE, x^k É "MAIS VIÁVEL" QUE x^{k-1}, E LOGO FAZEMOS $\rho_{k+1} = \rho_k$.

ESQUEMA (COM CONTROLE DE VIABILIDADE)



CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA COM CONTROLE DE VIABILIDADE.

- SE $\rho_k \to \infty$, CAÍMOS NO ESQUEMA PADRÃO (TEO. ANTERIOR).
- CASO RESTANTE:

$$\rho_k = \rho_{K_0} \quad , \forall k \geq K_0 .$$

TEO: SUPONHA QUE O ESQUEMA GERE $\{x^k\}$ E x^* SEJA UM PONTO DE ACUMULAÇÃO SEU. SUPONHA AINDA QUE $\rho_k = \rho_{K_0}$, $\forall k \geq K_0$. ENTÃO x^* É MIN. GLOBAL DE P (CASO P SEJA VIÁVEL).

PROVA: EXERCÍCIO (VEJA O TEO. 2.6 DA REFERÊNCIA).