Capítulo 6

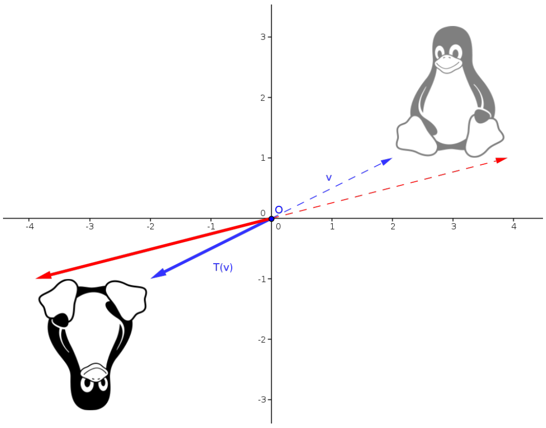
Autovalores e Autovetores

Considere a operador linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Podemos nos perguntar o seguinte: para quais vetores $v \in \mathbb{R}^2$, a imagem $S(v) \in \mathbb{R}^2$ tem a mesma direção de v? Isto é, queremos saber se para um dado $v \in \mathbb{R}^2$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$S(v) = \lambda v. \tag{6.1}$$

Exemplo 6.1. Considere a reflexão no plano ao redor da origem,

$$F(x, y) = (-x, -y).$$



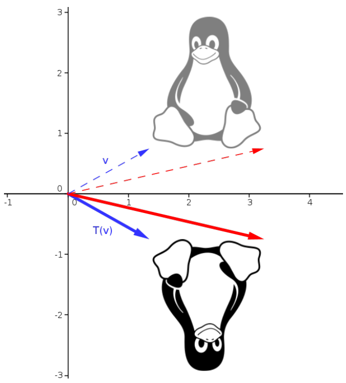
Como

$$F(x, y) = -1\,(x, y),$$

e logo (6.1) é satisfeita para todo (x, y) e $\lambda = -1$. □

Exemplo 6.2. Considere a reflexão em torno do eixo x, dada por

$$Q(x, y) = (x, -y).$$



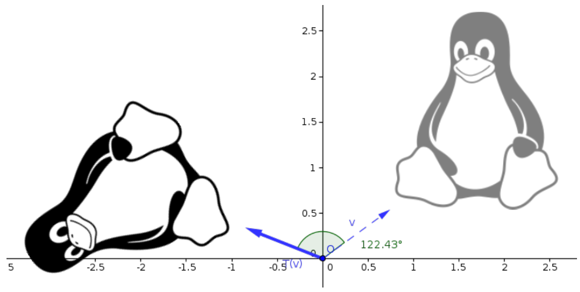
Os únicos vetores (x, y) que satisfazem (6.1) são da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$. Veja que

$$Q(x, 0) = 1\,(x, 0) \qquad \text{e} \qquad Q(0, y) = -1\,(0, y)$$

para $x, y \neq 0$, mas $Q(x, y) \neq \lambda(x, y)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ quando $y \neq 0$ e $x \neq 0$. Geometricamente, os únicos vetores que permanecem inalterados por reflexão ao redor do eixo x são aqueles na direção do eixo x, enquanto que os vetores na direção do eixo y mudam de sentido. $\square$

Exemplo 6.3. Considere a rotação ao redor da origem por um ângulo θ no sentido anti-horário,

$$R(x, y) = (\ x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta\ ,\ y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta\ ).$$



- Se $\theta = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo nulo + voltas completas), então para todo (x, y) temos
$$R(x, y) = (x, y).$$
- Se $\theta = \pi + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo 180º + voltas completas), então para todo (x, y) temos
$$R(x, y) = -(x, y).$$
- Se $\theta \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ ($0 < \theta < \pi$ + meias voltas) então R não mantém a direção de vetor algum, isto é, após rotação por um ângulos desses, os vetores mudam de direção.

$\square$

Atividade 6.1. Interprete geometricamente os três itens do exemplo anterior fazendo figuras.

Podemos levar esta ideia para um espaço vetorial qualquer: dada um operador linear $T : V \to V$, estamos interessados em determinar os pares (λ, v) para os quais

$$T(v) = \lambda v. \tag{6.2}$$

Neste caso, o escalar λ é chamado *autovalor* de T e v é chamado *autovetor* de T associado a λ. Podemos ainda dizer que (λ, v) é *autopar* de T.

Evidentemente, em qualquer caso, $v = \mathbf{0}$ satisfaz a equação (6.2) para qualquer λ, e logo o caso interessante é quando $v \neq \mathbf{0}$. Com isso, determinamos a noção de autovalor/autovetor de um operador qualquer.

Definição 6.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre V. Se existirem $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, então dizemos que λ é **autovalor** de T e v é **autovetor** de T associado a λ.*

Note que a definição exige que
$$T(v) = \lambda v \in V.$$
Logo, a imagem $T(v)$ deve ser elemento de V. Por isso **só definimos autovalores/autovetores para transformações entre um mesmo espaço vetorial** V (operador sobre V).

Um fato é que se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ, então av, $a \neq 0$ qualquer, também é autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ. De fato, sendo $T(v) = \lambda v$ temos

$$T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = \lambda(av).$$

Em resumo:

Teorema 6.1. *Se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ, então av, $a \neq 0$, é autovetor de T associado a λ.*

Dado um operador $T : V \to V$, o Teorema 6.1 motiva considerarmos o conjunto dos autovetores v associados a um autovalor λ, definido como

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

Atividade 6.2. Mostre que V_λ é subespaço vetorial de V.

O subespaço V_λ de V é chamado de *autoespaço associado ao autovalor* λ.

Uma visualização geométrica interessante dos autoespaços aparece um Geometria Analítica, da seguinte forma: dada uma cônica no plano rotacionada ao redor da origem (por exemplo, uma elipse rotacionada), os autoespaços associados à matriz dos termos de ordem 2 da cônica são as retas nas direções dos eixos da cônica. Veja a seção 6.5 para detalhes. Analogamente, autoespaços descrevem os eixos de quádricas rotacionadas no espaço.

6.1 Matrizes

Vimos anteriormente que podemos associar matrizes à transformações lineares. É natural, portanto, associar autovalores/autovetores à matrizes. Pela afirmação acima, somente **matrizes quadradas** são consideradas. Podemos pensar na matriz quadrada $\mathbf{A}$ $n \times n$ **como a matriz de** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **nas bases canônicas**. Logo, transitamos entre transformações e matrizes de forma natural:

$$[T]^{can}_{can} = \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ matriz } n \times n \\
v \in \mathbb{R}^n \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ matriz coluna } n \times 1 \\
T(v) = \lambda v \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Podemos então falar em autovalores/autovetores de matrizes quadradas:

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é *autovetor* da matriz quadrada $\mathbf{A}$ associado ao *autovalor* λ se

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Com isso, calculamos autovalores/autovetores de um operador olhando para sua matriz nas bases canônicas.

Exemplo 6.4. As matrizes nas bases canônicas associadas aos operadores lineares dos Exemplos 6.1 e 6.2 são, respectivamente,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 6.5. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Seus autopares podem ser calculados resolvendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 2x & +2y & = & \lambda x \\ & y & = & \lambda y \end{array} \right. .$$

- **Consideremos o caso em que $y \neq 0$.** Da segunda equação temos $\lambda = 1$, e logo a primeira equação torna-se $2x + 2y = x$, donde segue que $y = -\frac{1}{2}x$. Portanto

  $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix}, \ x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor} \quad \lambda_1 = 1.$$

  Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

- **Consideremos o caso em que $y = 0$.** Neste caso o sistema se reduz à equação $2x = \lambda x$. Para $x \neq 0$, devemos ter $\lambda = 2$, ou seja,

  $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \ x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor} \quad \lambda_2 = 2.$$

  Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$.

□

6.2 Cálculo de autovalores – o polinômio característico

Como dissemos anteriormente, matrizes serão a ferramenta para o cálculo de autovalores. Veremos nesta seção uma forma sistemática de cálculo de autopares de matrizes (e consequentemente de operadores lineares).

Note que no Exemplo 6.5, calculamos os autopares $(\lambda, \mathbf{v})$ de uma matriz $\mathbf{A}$ resolvendo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

para λ e $\mathbf{v}$ simultaneamente. Lembre que tivemos que separar em dois casos e fazer uma análise cuidadosa. Porém, se **soubéssemos antes quais eram os autovalores** o termo, recairíamos em um **sistema linear homogêneo** na variável $\mathbf{v}$, já que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6.3}$$

Resolver $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pode ser feito por escalonamento. Então traçamos a seguinte estratégia:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$;
2. Para cada autovalor λ_i, resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Nossa primeira tarefa, portanto, é calcular os autovalores.

O sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

tem matriz quadrada $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, e portanto podemos calcular seu determinante. Se $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0$ então o sistema homogêneo acima possui única solução, que só pode ser $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ sempre é solução). Porém, lembre-se que por definição, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ não pode ser autovetor. Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$ só pode ser autovalor de $\mathbf{A}$ se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Deste modo, o sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ terá solução não trivial $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que será autovetor de $\mathbf{A}$ por (6.3). Ou seja, os autovalores são raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

$p(\lambda)$ é chamado *polinômio característico.*

Note que $p(\lambda)$ não envolve $\mathbf{v}$. Ou seja, ao resolver $p(\lambda) = 0$ estaremos calculando somente os autovalores de $\mathbf{A}$. Os autovetores são calculados em seguida, resolvendo o sistema linear associado, como no roteiro descrito anteriormente.

Abrindo a expressão de $p(\lambda)$, temos

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Veja que de cada termo da diagonal de $\mathbf{A}$ é subtraído λ. O resultado dessa determinante é um polinômio na variável λ, o que explica seu nome. O roteiro para o cálculo de autovalores/autovetores torna-se:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, calculando as raízes do polinômio característico
$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$
2. Para cada autovalor λ_i, resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Exemplo 6.6. Vamos calcular os autovalores da matriz do Exemplo 6.5
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
O polinômio característico associado és
$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$
As raízes de p são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, os mesmos autovalores encontrados no Exemplo 6.5. $\square$

Exemplo 6.7. Vamos calcular os autovalores/autovetores da matriz
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
O polinômio característico é
$$p(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$
Usando desenvolvimento de Laplace sobre a primeira linha, obtemos
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}\,2\det \begin{bmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big[-\lambda(2-\lambda) - 1\big] + 2(-1+\lambda) \\ &= (1-\lambda)\big[\lambda^2 - 2\lambda - 3\big]. \end{aligned}$$
Temos $p(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Assim, os autovalores de $\mathbf{B}$ são
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (onde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$), ou seja, resolver o sistema
$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & +2z & = & x \\ -x & & +z & = & y \\ x & +y & +2z & = & z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} & & 2z & = & 0 \\ -x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array} \right.$$
(o último sistema é $(\mathbf{B} - \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, você pode escrevê-lo diretamente). O último sistema tem soluções não triviais
$$\begin{bmatrix} x & -x & 0 \end{bmatrix}^t, \quad x \neq 0$$
(verifique!), que são os autovetores associados à $\lambda_1 = 1$.

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$. Devemos resolver $\mathbf{Bv} = -\mathbf{v}$, ou equivalentemente, $(\mathbf{B} + \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Isto é,

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & & +2z & = & 0 \\ -x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +3z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Escalonando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo o sistema associado à MLRFE (última matriz), concluímos que os autovetores de $\mathbf{B}$ associados à $\lambda_2 = -1$ são

$$\left[\begin{array}{ccc} -z & -2z & z \end{array}\right]^t, \quad z \neq 0.$$

Autovetores associados a $\lambda_3 = 3$. Devemos resolver $(\mathbf{B} - 3\,\mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -2x & & +2z & = & 0 \\ -x & -3y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Você pode resolver este sistema e verificar que suas soluções não triviais são

$$\left[\begin{array}{ccc} z & 0 & z \end{array}\right]^t, \quad z \neq 0,$$

que são os autovetores de $\mathbf{B}$ associados a $\lambda_3 = 3$. □

No exemplo acima, obtemos todos os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{B}$. Note que, em particular,

- $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \end{array}\right]^t$ é autovetor associado à $\lambda_1 = 1$;
- $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \end{array}\right]^t$ é autovetor associado à $\lambda_2 = -1$;
- $\mathbf{v}_3 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array}\right]^t$ é autovetor associado à $\lambda_3 = 3$.

Observe que **todos** os autovetores são descritos pelos autoespaços V_λ associados a cada autovalor, e que cada um desses autoespaços é gerado pelos autovetores particulares acima (visto como vetores do $\mathbb{R}^3$):

$$V_1 = [v_1], \qquad V_{-1} = [v_2], \qquad V_3 = [v_3].$$

Atividade 6.3. Verifique que os três vetores acima v_1, v_2 e v_3 são LI. Assim, formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

Veremos no próximo capítulo que o fato de v_1, v_2 e v_3 serem LI não é a toa: autovetores associados à autovalores distintos (é o caso do exemplo anterior) são sempre LI. Isso será importante na diagonalização de matrizes/operadores, quando buscaremos uma base do espaço vetorial do operador formada por autovetores seus.

É possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Há teoria para lidar com esse tipo de situação, mas não faremos neste texto. Ou seja, vamos considerar apenas **autovalores reais**.

6.2.1 Casos particulares

Nesta seção apresentamos alguns casos frequentes em que o cálculo dos autovalores (ou parte deles) é direto.

Autovalores de matrizes não inversíveis. Se uma matriz $\mathbf{A}$ não possui inversa ($\det \mathbf{A} = 0$) então $\lambda = 0$ sempre será **um dos seus autovalores** (os outros devem ser calculados em cada caso!). De fato, quando $\mathbf{A}$ não é inversível, o sistema quadrado homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

possui solução $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Logo, este $\mathbf{v}$ é autovetor associado ao autovalor nulo pois $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

Autovalores de matrizes triangulares. Seja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

uma matriz triangular superior de ordem n. Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}_n) = \det \begin{bmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} - \lambda & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} - \lambda & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Temos então um determinante de uma matriz triangular, que sabemos ser o produto dos elementos da sua diagonal (veja o capítulo sobre determinantes). Assim

$$p(\lambda) = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda),$$

cujas raízes são, claramente, t_{11}, $t_{22}, \dots, t_{nn}$.

O mesmo ocorre vale para matrizes triangulares inferiores: basta notar que no polinômio característico só aparecem os termos da diagonal multiplicados.

Exemplo 6.8. Os autovalores de $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 56 & 23 & 11 \\ 0 & -2 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são 1, -2, 3 e -1. □

Autovalores de matrizes diagonais. Uma matriz diagonal é, em particular, uma matriz triangular. Portanto seus autovalores são os elementos da diagonal. Em particular, a matriz identidade de ordem n tem único autovalor $\lambda = 1$.

6.3 Autovalores de operadores via matrizes

Definimos em primeiro lugar autovalores/autovetores para operadores $T : V \to V$ sobre um espaço vetorial V qualquer. Vimos que a mesma definição vale para matrizes quadradas, e como podemos calcular seus autopares. Vamos agora conectar o cálculo de autovalores de matrizes com os operadores sobre V qualquer.

Seja β uma base de V e $T : V \to V$ um operador linear. Temos

$$T(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad [T]_\beta^\beta [v]_\beta = \lambda [v]_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \Big([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}\Big)[v]_\beta = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Assim, calcular os autovalores de T é equivalente a encontrar as raízes da matriz de T na base β, $[T]_\beta^\beta$.

Seja agora α outra base de V. Lembrando que $[I]_\alpha^\beta = \big([I]_\beta^\alpha\big)^{-1}$, veja que

$$\begin{aligned}
\det([T]_\alpha^\alpha - \lambda \mathbf{I}) &= \det([I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha - \lambda [I]_\alpha^\beta [I]_\beta^\alpha) \\
&= \det\Big([I]_\alpha^\beta \left([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}\right) [I]_\beta^\alpha\Big) \\
&= \det[I]_\alpha^\beta \, \det([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}) \, \det[I]_\beta^\alpha \\
&= \underbrace{\det[I]_\alpha^\beta \, \det[I]_\beta^\alpha}_{=1} \det([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}).
\end{aligned}$$

O que acabamos de provar é que

O polinômio característico de $[T]_\beta^\beta$ é o mesmo para qualquer para qualquer base β de V. Assim, a fim de calcular os autovalores de T, podemos escolher qualquer base β e encontrar as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda \mathbf{I}).$$

Exemplo 6.9. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (\ x\ ,\ y - z\ ,\ x + 2z\ ).$$

Escolhamos a base canônica do $\mathbb{R}^3$ para o cálculo dos autovalores,

$$[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando o desenvolvimento de Laplace obtemos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Consideramos agora a matriz de T na base $\beta = \{(1,0,1); (0,2,0); (0,0,1)\}$. Calculando obtemos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma matriz diagonal! Logo, o cálculo do polinômio característico é direto:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

□

6.4 Multiplicidades algébrica e geométrica

Dois conceitos interessantes acerca de **autovalores** são as multiplicidades *algébrica* e *geométrica*.

- A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico;
- A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do autoespaço associado V_λ.

O nome "algébrico" justifica-se pela relação/manipulação/operação com o polinômio característico, elementos próprios do que se entende por "álgebra". Já o nome "geométrico" justifica-se por fazer referência à forma do subespaço vetorial V_λ (dimensão 0, ponto; dimensão 1 reta; dimensão 2, plano etc).

Exemplo 6.10. No Exemplo 6.9, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 1$ é 2, e a de λ_2 é 1, visto que

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Vamos calcular os autovetores do operador T daquele exemplo, cuja matriz na base

$$\beta = \{(1,0,1); (0,2,0); (0,0,1)\}$$

é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver

$$\left([T]_\beta^\beta - \mathbf{I}_3\right)[v]_\beta = \mathbf{0}.$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, é fácil ver que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Expandindo v na base β, vemos que

$$v = x(1,0,1) + y(0,1,0) + 0(0,0,2) = (x,y,x) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 1. Veja que conseguimos no máximo dois vetores desse tipo que são LI entre si, por exemplo,

$$v_1 = (1,0,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (0,1,0).$$

Logo $\{v_1, v_2\}$ é uma base para o autoespaço V_1, ou seja, λ_1 tem multiplicidade geométrica igual a 2 (V_1 é um plano).

Autovetores associados a $\lambda_2 = 2$. Resolvendo

$$\big([T]_\beta^\beta - 2\,\mathbf{I}_3\big)[v]_\beta = \mathbf{0}$$

obtemos

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

(verifique!). Expandindo v na base β, vemos que

$$v = 0(1,0,1) + 0(0,1,0) + z(0,0,2) = (0,0,2z) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 2. Conseguimos apenas 1 vetor desse tipo que forma um conjunto LI, por exemplo, $\{(0,0,2)\}$. Esse conjunto é uma base do autoespaço V_2, e portanto $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. $\square$

É possível mostrar que para qualquer autovalor,

$$\text{multiplicidade geométrica} \quad \leq \quad \text{multiplicidade algébrica.}$$

Há casos em que a multiplicidade geométrica é estritamente menor que a algébrica.

Atividade 6.4. Calcule as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor $\lambda = 1$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e verifique que a multiplicidade geométrica é menor que a algébrica.

A multiplicidade geométrica tem utilidade na diagonalização de operadores, que veremos no próximo capítulo. Diagonalizar um operador significa obter uma base para a qual a matriz do operador é diagonal, tal como ilustrado no Exemplo 6.9. O segredo é obter uma *base de autovetores*, que existirá se a soma das multiplicidades geométricas for igual à dimensão do espaço (neste caso, decompomos o espaço vetorial na soma direta dos autoespaços associados aos autovalores distintos: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$).

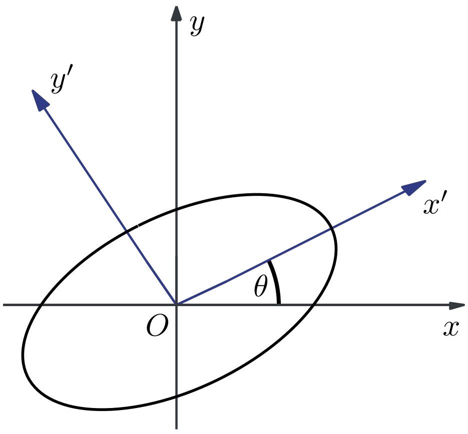
6.5 CONTEÚDO EXTRA E NÃO OBRIGATÓRIO – Autopares e cônicas rotacionadas

Nesta seção ilustramos o uso de autovalores/autovetores para identificação de cônicas rotacionadas no plano.

Seja dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0.$$

Essa equação representa uma cônica rotacionada se $b \neq 0$.



No caso em que $b \neq 0$, veremos como encontrar um ângulo θ tal que, rotacionando eixos x e y, eliminemos o termo xy na equação, escrevendo-a no novo sistema $x'Oy'$ como

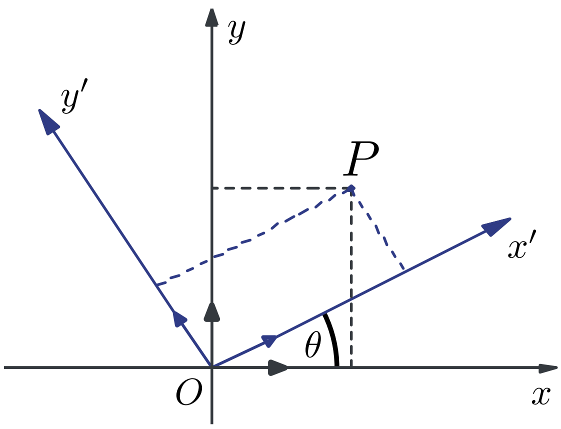
$$a'x'^2 + c'y'^2 + f' = 0 \quad (b' = 0).$$

A escrita acima é mais simples de interpretar, podemos facilmente capturar sua geometria (centro, focos, semi-eixos etc), como se faz em cursos de Geometria Analítica.

Vimos no início do capítulo sobre transformações lineares que rotacionar (x, y) no sentido anti-horário por um ângulo θ corresponde à multiplicação pela *matriz de rotação*

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

O que queremos é uma relação entre as coordenadas (x, y) de um ponto P do plano no sistema original xOy e suas coordenadas (x', y') no novo sistema rotacionado $x'Oy'$.



A figura acima ilustra que as coordenadas de P no sistema original xOy correspondem às coordenadas rotação de P no novo sistema $x'Oy'$ **após uma rotação** pelo ângulo θ (imagine a rotação de P e veja que as linhas pontilhadas azuis (novo sistema) terão os mesmos comprimentos das linhas pontilhadas pretas (sistema original)). Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Chamando $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ escrevemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{X}'.$$

Voltemos a analisar a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0. \tag{6.4}$$

Fazendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, podemos escrever (6.4) como

$$\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} + f = 0.$$

Atividade 6.5. Verifique que a $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} + f = 0$ é a equação (6.4).

A fim de eliminar o termo xy, fazemos a rotação nos eixos $\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta\mathbf{X}'$. Lembrando que $(\mathbf{R}_\theta\mathbf{X}')^t = \mathbf{X}'^t\mathbf{R}_\theta^t$, temos

$$(\mathbf{R}_\theta\mathbf{X}')^t\mathbf{A}(\mathbf{R}_\theta\mathbf{X}') + f = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'^t(\mathbf{R}_\theta^t\mathbf{A}\mathbf{R}_\theta)\mathbf{X}' + f = 0.$$

Chamando $\mathbf{B} = \mathbf{R}_\theta^t\mathbf{A}\mathbf{R}_\theta$ temos

$$\mathbf{X}'^t\mathbf{B}\mathbf{X}' + f = 0.$$

Por analogia, essa é exatamente a equação

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + f = 0,$$

onde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^t\mathbf{A}\mathbf{R}_\theta$.

Portanto, nosso objetivo é encontrar θ tal que $b' = 0$.

Antes disso, é necessário calcular a' e c'. Precisamos do resultado seguinte:

Atividade 6.6. Mostre por um cálculo direto que $\mathbf{R}_\theta^t\mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_\theta\mathbf{R}_\theta^t = \mathbf{I}_2$. Mostre também que $\det \mathbf{R}_\theta = 1$.

Usando a atividade acima, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2) &= \det(\mathbf{R}_\theta^t\mathbf{A}\mathbf{R}_\theta - \lambda\mathbf{R}_\theta^t\mathbf{R}_\theta) \\
&= \det(\mathbf{R}_\theta^t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2)\mathbf{R}_\theta) \\
&= \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta^t}_{1} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta}_{1} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2).
\end{aligned}$$

Logo, se $b' = 0$ então

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (a' - \lambda)(c' - \lambda).$$

Daí, a' e c' são raízes do polinômio característico de $\mathbf{A}$,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a' e c' são os **autovalores da matriz** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

Em resumo, passamos da equação original

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$$

para a equação sem o termo misto xy,

$$a'x'^2 + c'y'^2 + f = 0,$$

calculando a' e c' como os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Note que o termo livre f é o mesmo nas duas equações.

Finalmente, você pode verificar que os autovetores associados à a' e c' (os autovalores de $\mathbf{A}$) têm as direções dos eixos rotacionados x' e y'. Reflita sobre as figuras desta seção.

Atividade 6.7. Identifique cada cônica, eliminando o termo misto xy.

(*i*) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = -1$

(*ii*) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

(*iii*) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

(*iv*) $xy = 1$

Atividade 6.8. Mostre que $\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{R}_{\theta+\gamma}$, isto é, rotacionar eixos por um ângulo θ e daí rotacioná-los por um ângulo γ é o mesmo que rotacionar os eixos por um ângulo $\theta + \gamma$.

Atividade 6.9. Mostre que sempre é possível eliminar o termo misto xy, isto é, mostre que existe um ângulo θ tal que $b' = 0$.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \frac{b'}{2} = -a \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{b}{2}\cos^2\theta + c\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &\Rightarrow b' = (c-a)\operatorname{sen}(2\theta) + b\cos(2\theta). \end{aligned}$$

Assim, $b' = 0$ se, e somente se $(a-c)\operatorname{sen}(2\theta) = b\cos(2\theta)$. Logo, se $a - c = 0$, basta fazer $\theta = 45^o$ ($\theta = \pi/4$) (pois com isso $\cos(2\theta) = 0$). Por outro lado, se $a - c \neq 0$, $b' = 0$ se

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{b}{a-c}.$$

Basta tomar então $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$ tal que a relação anterior valha. Isto mostra que sempre conseguimos θ tal que $b' = 0$.

6.6 Exercícios

Veja a lista de exercícios 7.

Referências Bibliográficas

[1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Bookman, 2010.

[2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.

[3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.

[4] David Lay. *Álgebra Linear*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.

[5] David Poole. *Álgebra linear*. Thonsom Learning, São Paulo, 2006.