

PENALIZAÇÃO EXTERNA

$$\begin{aligned} P: \min & f(x) \\ \text{s.a.} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in D \end{aligned}$$

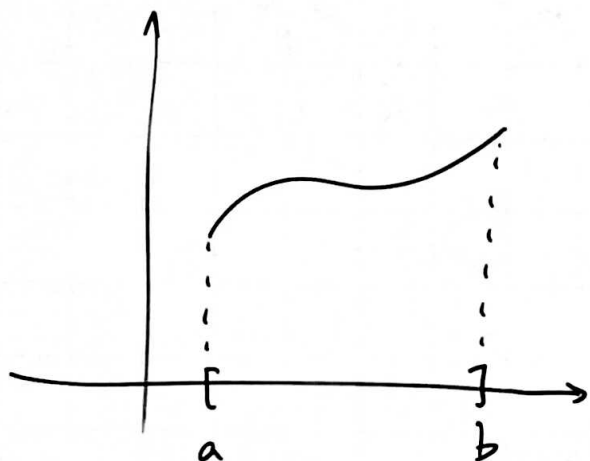
ONDE $D \subset \mathbb{R}^n$ É UM CONJUNTO
LIMITADO E FECHADO (COMPACTO).

HIPÓTESE: P TEM SOLUÇÃO (P É VIÁVEL)

D COMPACTO $\Rightarrow P$ TEM MINIMIZADOR GLOBAL.

(TEOREMA DE WEIERSTRASS).

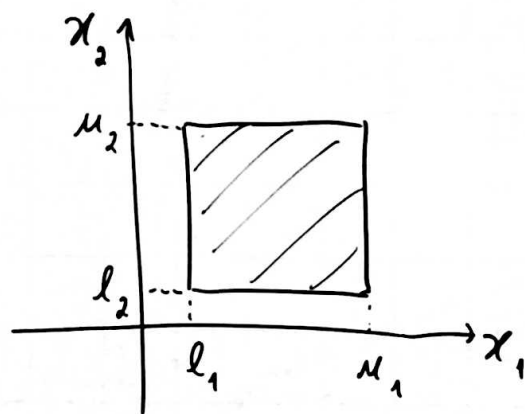
REFERÊNCIA: CAP 2 DE
MARTINEZ. OTIMIZAÇÃO PRÁTICA
USANDO O LAGRANGEANO
AUMENTADO. CAMPINAS, 2009 (?)
(REF. COMPLEMENTAR - SÍTIO
DA DISCIPLINA)



• $h(x)=0$, $g(x) \leq 0$: RESTRIÇÕES "DIFÍCEIS".

• $x \in D$: RESTRIÇÕES "FÁCEIS".

P. ex. $D = \{x \in \mathbb{R}^n ; l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i\}$.



IDEIA DA PENALIZAÇÃO EXTERNA: TRATAR AS RESTRIÇÕES
DIFÍCEIS COLOCANDO-AS NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\min f(x) + \frac{\rho}{2} \underbrace{\left[\|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2 \right]}_{\phi(x)} \\ \text{s.a. } x \in D.$$

$$\phi(x) = 0 \iff h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0. \\ \text{" } x \text{ é viável "}$$

ϕ : MEDIDA DE INVIABILIDADE.

EXEMPLO: $h(x) = x_1 + x_2^2 = 0$, $g(x) = 2x_1 + x_2 \leq 0$.

$$\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = |x_1 + x_2^2|^2 + |\max\{2x_1 + x_2, 0\}|^2.$$

$$\tilde{x} = (-1, 1): \quad \phi(\tilde{x}) = |-1 + 1^2|^2 + |\max\{-2 + 1, 0\}|^2$$

$$\Rightarrow \phi(\tilde{x}) = 0 \quad \checkmark$$

\tilde{x} é viável!

$$\hat{x} = (1, 0): \quad \phi(\hat{x}) = |1 + 0^2|^2 + |\max\{2 + 0, 0\}|^2 = 5 > 0$$

\hat{x} NÃO é viável!

$$\bar{x} = (-0,99, 1): \quad \phi(\bar{x}) = |-0,99 + 1^2|^2 + |\max\{2(-0,99) + 1, 0\}|^2 = 10^{-4}.$$

\hat{x} É "MAIS INVIAVEL" DO QUE \bar{x} . //

IDEIA DA ESTRATÉGIA: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS

$$SP(\rho_k): \min f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2 \right]$$

s.a. $x \in D$

com $\rho_k \rightarrow \infty$.

À MEDIDA QUE ρ_k PRESCE, OS MINIMIZADORES DE $SP(\rho_k)$ FICAM "MAIS VIÁVEIS", POIS A PARCELA $\phi(x)$ SE TORNA MAIS RELEVANTE NA MINIMIZAÇÃO.

ρ_k : PARÂMETRO DE PENALIZAÇÃO.

EXEMPLO: $\min x$
s.a. $-x \leq 0$.

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k): \min x + \frac{\rho_k}{2} |\max\{-x, 0\}|^2$$

s.a. $x \in \mathbb{R}$.

RESOLVENDO $SP(\rho_k)$:

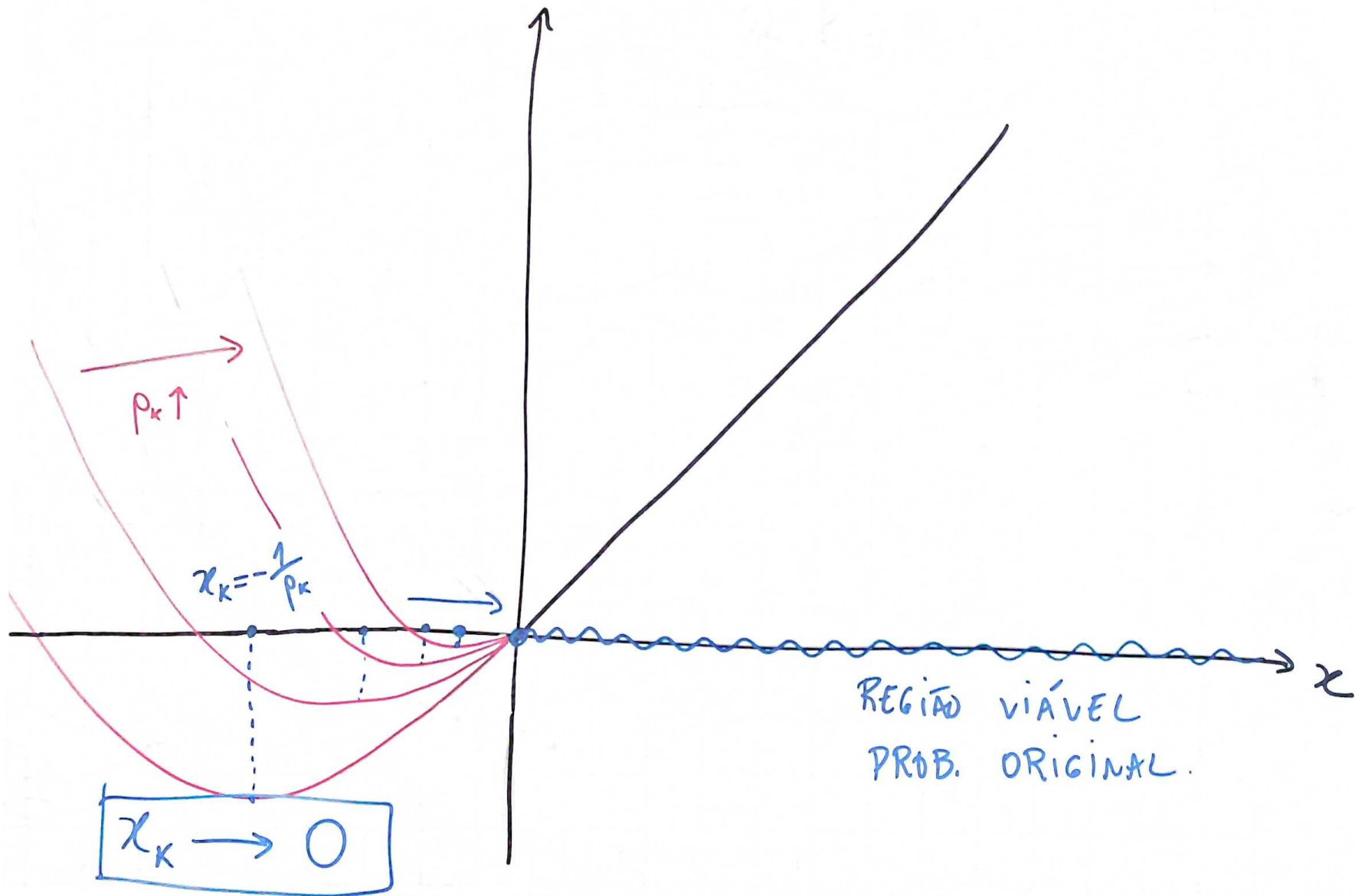
SE $x < 0$ ENTÃO $\max\{-x, 0\} = -x$. O SUBPROB.

FICA

$$\min x + \frac{\rho_k}{2} x^2.$$

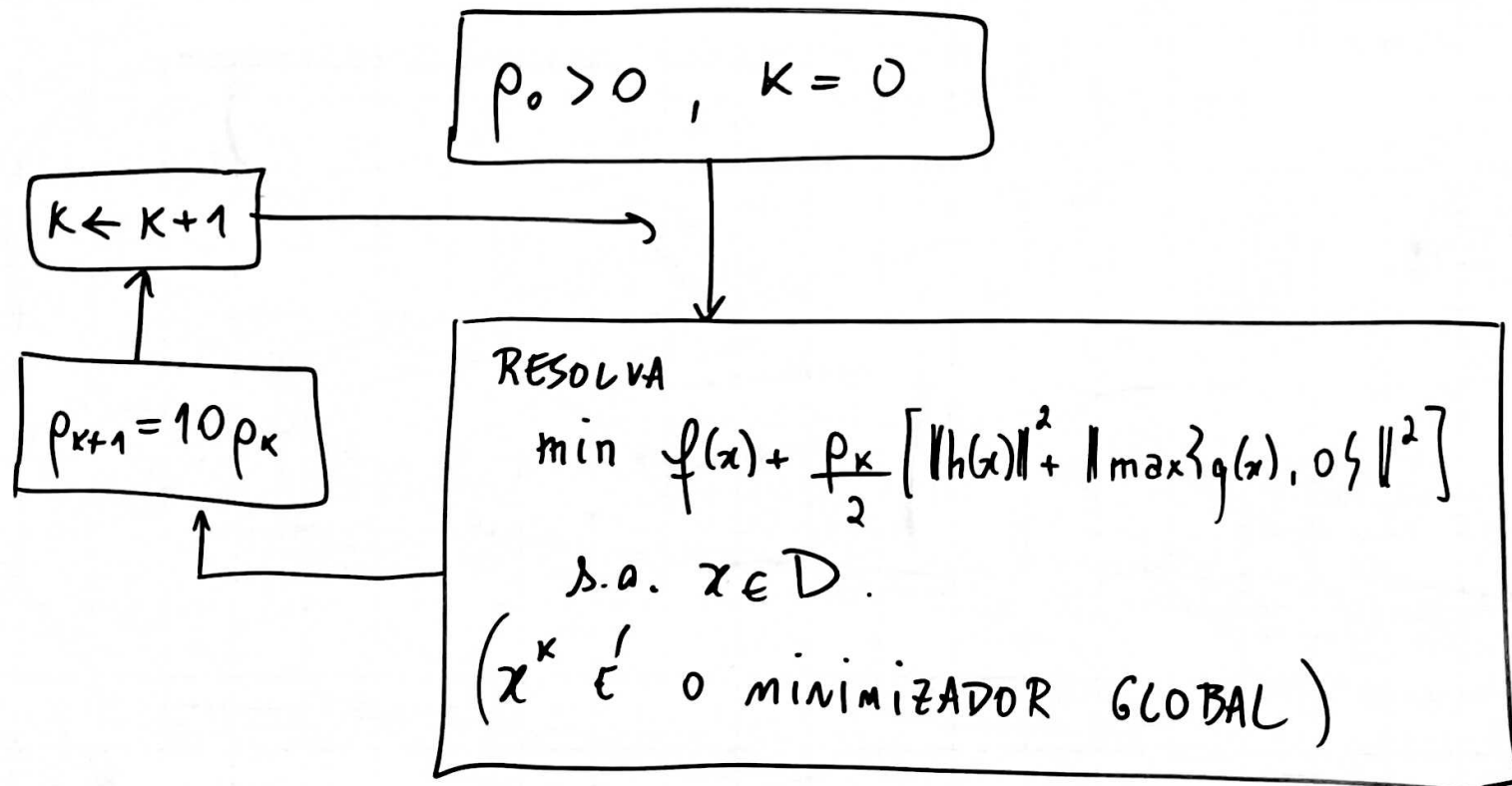
RESOLVENDO, $1 + \rho_k x_k = 0 \Rightarrow x_k = -\frac{1}{\rho_k} < 0$.

(DE FATO, x_k É NEGATIVO)



"EXTERNA" LEM DO FATO DOS ITERANDOS x^k
ESTAREM FORA DO CONJUNTO VIÁVEL. NO EXEMPLO,
 $x_k = -\frac{1}{p_k}$ ESTÁ FORA DE $\Omega = \{x \geq 0\}$.

FORMALIZAÇÃO DO MÉTODO:



ESSE MÉTODO NÃO É PRÁTICO POIS

(i) QUANDO ρ_k CRESCE MUITO, HÁ INSTABILIDADES NUMÉRICAS

(ii) PEDIR QUE x^k SEJA MINIMIZADOR GLOBAL NÃO É RAZOÁVEL.

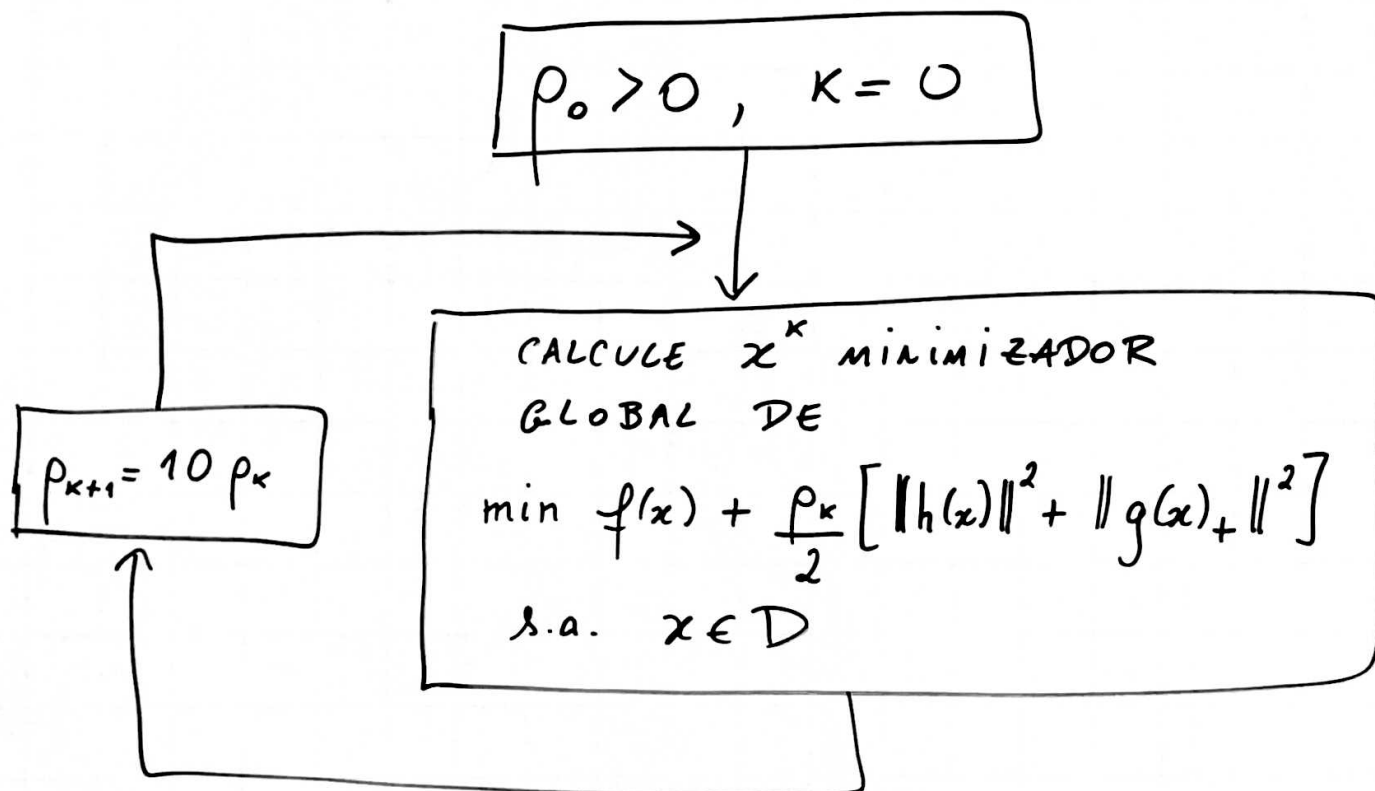
PORÉM...

(i) TEM ÓTIMAS PROPRIEDADES TEÓRICAS!

(ii) A IDEIA DE PENALIZAÇÃO É MUITO USADA EM ALGORITMOS PRÁTICOS

UM DELES É O MÉTODO DE LAGRANGEANO AUMENTADO.

CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA DE PENALIZAÇÃO EXTERNA



NOTAÇÃO: $g(x)_+ = \max\{g(x), 0\}$.

- O ESQUEMA GERA UMA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$.
- D É COMPACTO E O PROB. ORIGINAL TEM SOLUÇÃO. ASSIM x^k ESTÁ BEM

EXEMPLO: $x^k = (-1)^k$.

$$x^0 = 1, \quad x^1 = -1, \quad x^2 = 1, \quad \dots$$

$$x^{2k} = 1, \quad x^{2k+1} = -1$$

• $\lim_{k \in \mathbb{N}} x^k$ NÃO EXISTE

• $\lim_{k \text{ PAR}} x^k = 1$

• $\lim_{k \text{ ÍMPAR}} x^k = -1$

1 e -1 SÃO PONTOS
DE ACUMULAÇÃO. OU SEJA,

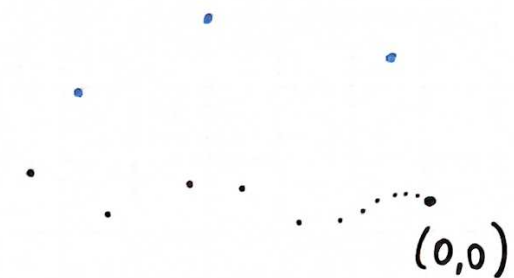
EXISTEM SUBSEQUÊNCIAS DE
 $\{x^k\}$ CONVERGINDO A 1 E -1 .

EXEMPLO: $x^k = \left(\frac{1}{k}, p(k) \right)$, ONDE

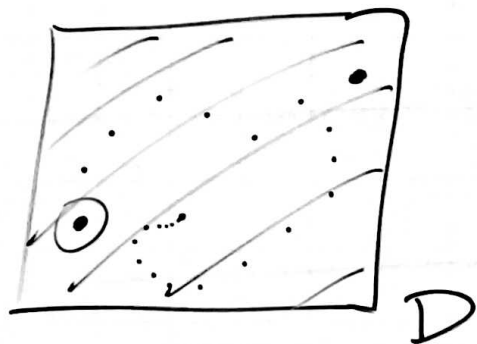
$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{SE } k \text{ É ÍMPAR} \\ k & \text{SE } k \text{ É PAR.} \end{cases}$$

) $x^{2k+1} = \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$.

) $x^{2k} = \left(\frac{1}{2k}, 2k \right)$ DIVERGE QUANDO $k \rightarrow \infty$.



• O ESQUEMA CERA $\{x^k\} \subset D$.



TEOREMA: SE $\{x^k\} \subset D$, D COMPACTO, ENTÃO
 $\{x^k\}$ ADMITE UM PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* .

(TEOREMA DA ANÁLISE)

NOTAÇÃO: x^* PONTO DE ACUMULAÇÃO DE $\{x^k\}$: $\lim_{k \in K} x^k = x^*$,
 $K \subset \mathbb{N}$ SUBCONJ. INFINITO DE ÍNDICES.

$$\begin{aligned}
 P: \quad & \min f(x) \\
 \text{s.o.} \quad & h(x) = 0 \\
 & g(x) \leq 0 \\
 & x \in D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SP(\rho_k): \quad & \min f(x) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\
 \text{s.o.} \quad & x \in D.
 \end{aligned}$$

PERGUNTAS:

- 1) Se x^* é um ponto de acumulação de $\{x^k\}$ então x^* é viável para P ? Sim!
- 2) x^* é um minimizador de P ? Sim!

1) TEOREMA: Se x^* é um ponto de acumulação da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo esquema de penalização e P é viável, então x^* é viável para P .

PROVA: Como x^* é ponto de acumulação, (
tome um conj. infinito de índices K
tal que

$$\lim_{k \in K} x^k = x^*.$$

Suponha que x^* não é viável para P .

Assim, existe $z \in D$ tal que

$$\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 > 0 = \|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2.$$

EXISTE $C > 0$ TAL QUE

$$\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)\|^2 > \|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 + C$$

PARA TODO $K \in \mathbb{K}$ SUFICIENTEMENTE GRANDE. LOGO,

PARA ESTES K 'S GRANDES,

$$f(x^*) + \frac{\rho_K}{2} [\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2]$$

$$> f(x^*) + \frac{\rho_K}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2] + \frac{\rho_K}{2} C$$

$$= f(z) + \frac{\rho_K}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2] + \left(f(x^*) - f(z) + \frac{\rho_K}{2} C \right)$$

como $\rho_k \rightarrow \infty$, $\lim_{k \in K} \left(f(x^k) - f(z) + \frac{\rho_k}{2} c \right) = \infty$. Assim,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2]$$

$$> f(z) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2]$$

PARA TODO $k \in K$ GRANDE. ISSO CONTRARIA O FATO
DE x^k SER MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$.

CONCLUÍMOS PORTANTO QUE x^* É VIÁVEL PARA P 

2) TEOREMA: Se x^* é um ponto de acumulação da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo esquema de penalização e P é viável, então x^* é minimizador global de P .

PROVA: Pelo teorema anterior, x^* é viável (para P). Pela construção do método, x^k é minimizador global de $SP(\rho_k)$, ou seja,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2]$$

$$\leq f(z) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2], \quad \forall z \in D.$$

PARA $z \in \mathcal{D}$ VIÁVEIS PARA P ($h(z)=0$ E $g(z) \leq 0$),

OBTEMOS

$$f(x^*) + \frac{\rho^*}{2} [\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2] \leq f(z),$$

) $\forall k$. DAÍ,

$$f(x^*) \leq f(z),$$

$\forall k$ E $\forall z \in \mathcal{D}$ VIÁVEL PARA P . PASSANDO AO
LIMITE COM $k \in K$, OBTEMOS

$$f(x^*) \leq f(z), \quad \forall z \in \mathcal{D} \text{ VIÁVEL P/ } P.$$

OU SEJA, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P 