

# Relaxação Lagrangiana

1

$$P: \min_x c^T x \text{ s.a. } Ax=b, \forall x \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Situação de interesse: problemas em que, retirando  $Ax=b$ , são fáceis de resolver (apesar de mantermos  $x \in \mathbb{Z}_+^n$ ).

O que fazer?

↳ penalizar  $Ax=b$  na F.O.

$$P(u): \min_x c^t x + u^t (Ax - b)$$

$$\text{s.a. } Dx \leq e, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n.$$

(2)

- $L(x, u) = c^t x + u^t (Ax - b)$  é chamada função lagrangiana.
- $u$  é o vetor de multiplicadores de Lagrange (relativos à  $Ax - b = 0$ ).

Vamos supor que (\*) seja fácil de resolver, para cada  $u$  fixado, em relação à  $P$ .

Objetivo: "resolver"  $P$  através de  $P(u)$  (3)

Sejam

$$f^* = \min_x \{ c^t x ; Ax = b, Dx \leq e, x \in \mathbb{R}_+^n \}$$

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b) ; Dx \leq e, x \in \mathbb{R}_+^n \}$$

os valores ótimos de  $P$  e  $P(u)$ , respect.

Teorema:  $L^*(u) \leq f^*$ ,  $\forall u$ .

Prova:  $L^*(u) \leq c^t x^* + \underbrace{u^t (Ax^* - b)}_0 = f^*$ , onde  $x^*$  é ótimo de  $P$ . ◻

Seja,  $P(u)$  fornece limitantes (4)  
inferiores para  $f^*$ . Chamamos  $P(u)$  de  
relaxação lagrangiana de  $P$  (de fato é uma).

↳ o ideal é encontrar  $u$  tal que  
 $L^*(u) = f^*$ . Mesmo não sendo possível,  
queremos  $\max_u L^*(u)$ .

↳ o limitante  $L^*(u) \leq f^*$  pode ser  
usado em um branch-and-bound.

Em determinados problemas, um problema (5) do tipo  $P(u)$  fornece limitantes melhores que a relaxação linear usual (a obtida trocando  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  por  $x \geq 0$ ).

Vale notar que um branch-and-bound com  $P(u)$  nos nós só será eficiente se  $P(u)$  for fácil.

Podemos usar  $P(u)$  em alguns nós e a relaxação linear em outros.

# Exemplo 1: GAP - Generalized Assignment Prob.

$$P: \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

Penalizando (ou "dualizando")  $\sum_i x_{ij} - 1 = 0 : \text{L7}$

$$P_1(u): \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} - 1 \right)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

A F.O. pode ser escrita como  $\sum_i \sum_j (c_{ij} + u_j) x_{ij} - \sum_j u_j$ .

Este problema tem uma estrutura separável, e é equivalente a resolver  $m$  problemas

$$\min_x \sum_j (c_{ij} + u_j) x_{ij}$$

$$\text{s.a. } \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall j,$$

um para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Os problemas acima são o problema da mochila 0-1, que pode ser resolvido com prog. dinâmica em tempo pseudo-polinomial.



Agora, podemos penalizar  $\sum a_{ij} x_{ij} \leq b_i$  19  
ao invés das restrições de igualdade. Neste  
caso, o parâmetro de penalização  $\lambda_i$  é  
 $\geq 0$ :

$$P_2(\lambda) : \min_{\mathbf{x}} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i \lambda_i \left( \sum_j a_{ij} x_{ij} - b_i \right)$$

$$\text{s.a. } \sum_i x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j.$$

Este problema tem solução trivial: basta fazer  
 $x_{ij} = 1$  quando  $c_{ij} + \lambda_i a_{ij} = \min_i \{c_{ij} + \lambda_i a_{ij}\}$  e

$x_{ij} = 0$  caso contrário.

// (10)

Uma observação: porque  $x \geq 0$  para restrições de desigualdade?

Lembre-se da otimalidade (dualidade / KKT):

$$L(x, u, v) = c^t x + u^t (Ax - b) + v^t (Dx - e)$$

$$\nabla_x L(x, u, v) = c + A^t u + D^t v = 0, \quad \boxed{v \geq 0} \quad (\dots)$$

Com isso, mantemos

$$L^*(u, v) \leq f^* \quad (\text{verifique!})$$

Pergunta: como  $L^*(u) \leq f^*$  para qualquer  $u$ , como escolher um bom  $u$ ? 11

↳ o ideal é aquele que maximiza  $L^*$ , isto é, devemos resolver o problema

$$D: \max_u L^*(u).$$

Lembre-se que

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b); Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n \}.$$

Assim,

[12]

$$D: \max_u \min_x \{c^t x + u^t (Ax - b); Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

Este é exatamente o problema dual de P  
ao dualizarmos as restrições  $Ax - b = 0$ .  
(veja dualidade em PNL — "Otimização II")

Da mesma forma,

$$\max_{u \geq 0} \min_x \{c^t x + u^t (Dx - e); Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

De fato, tudo o que vimos pode ser 13  
obtido por dualidade. Note que  $L^*(u) \leq f^*$   
é o teorema de dualidade fraca...

Neste sentido, poderia-se perguntar: vale  
dualidade forte ( $\max_u L^*(u) = f^*$ ) ?

↳ Nem sempre, pois as restrições de  
integralidade  $x \in \mathbb{Z}^n$  tornam  $P$  não  
convexo. As vezes  $\max_u L^*(u)$  só alcança  
o valor ótimo da relaxação linear de  $P$ .