Resolução do problema lagrangiano via método do subgradiente.

$P:\ \min_x c^t x \quad s.a.\ Ax=b\ ,\ Dx \le e\ ,\ x \in \mathbb{Z}^n_+$

$P(u):\ \min_x c^t x + u^t(Ax-b) \quad s.a.\ Dx \le e\ ,\ x \in \mathbb{Z}^n_+$

$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t(Ax-b)\ ;\ Dx \le e\ ,\ x \in \mathbb{Z}^n_+ \}.$

$\boxed{D:\ \max_u L^*(u)} \longleftrightarrow \boxed{-\min_u -L^*(u)}$

(problema convexo como visto na teoria)

<u>Teorema</u>: Seja u^k e $x^k \in \arg\min_x L^*(u^k)$ (isto é o mínimo em $L^*(u^k)$ é atingido em x^k). Então

$$g^k = -(Ax^k - b)$$

é um subgradiente de $-L^*$ em u^k.

<u>Prova</u>: De fato, dado u qualquer temos

$$-L^*(u^k) - (g^k)^t(u - u^k) = \underbrace{-L^*(u^k) + c^t x^k + (u^k)^t(Ax^k - b)}_{=0}$$

$$- c^t x^k - u^t (Ax^k - b)$$

$$\leq -L^*(u),$$ dado que

$$-L^*(u) = \max_x \{-c^t x - u^t(Ax-b) ; Dx \le e,\ x \in \mathbb{Z}_+^n\}$$ e $Dx^k \le e$, $x^k \in \mathbb{Z}_+^n$. ∎

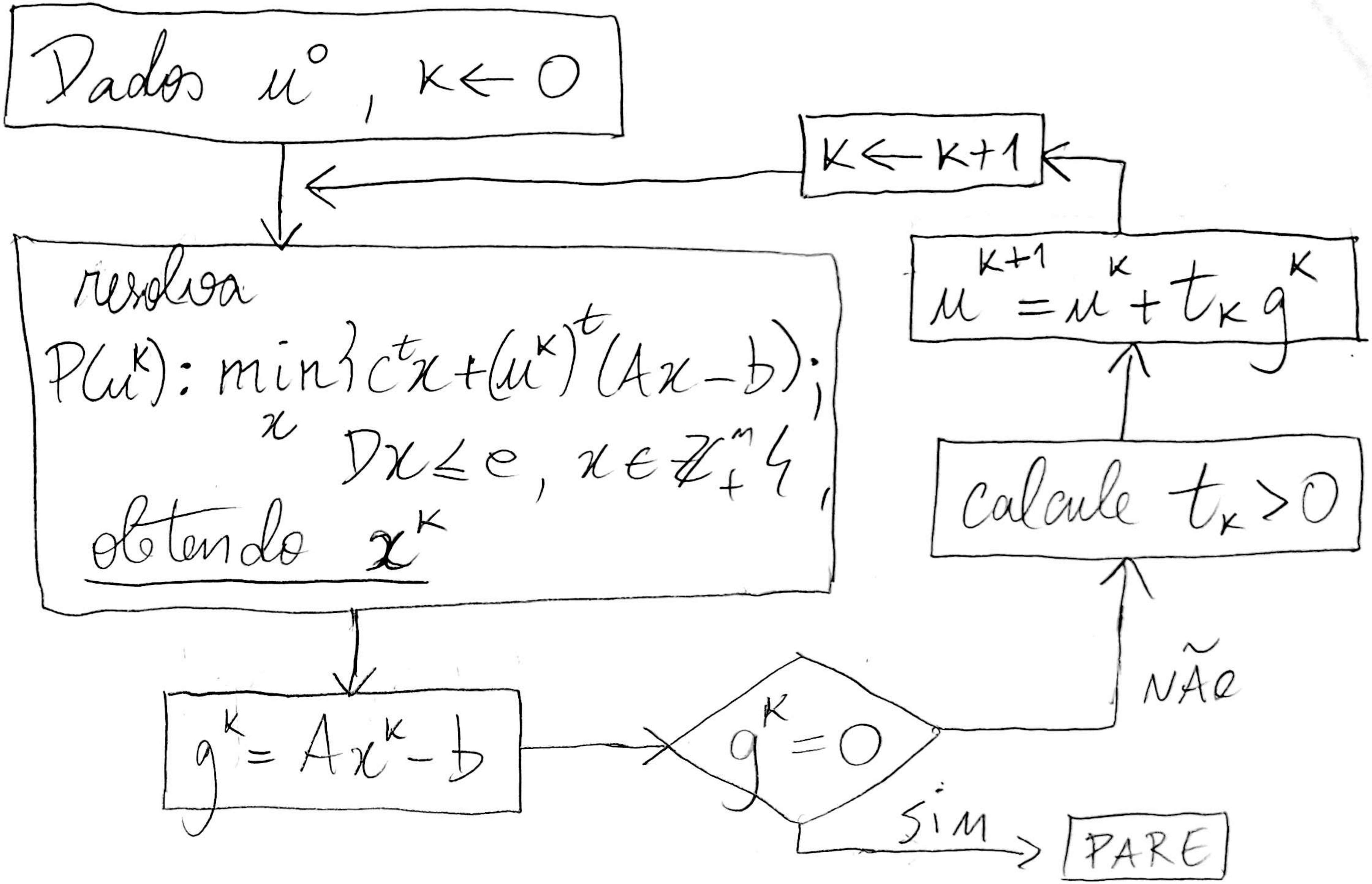
Este teorema sugere tomar

$$u^{k+1} = u^k - t_k g^k = u^k + t_k(Ax^k - b),$$

onde $t_k > 0$ é calculado por alguma das regras mencionadas anteriormente. Daqui para frente vamos usar $g^k = Ax^k - b$ e escrever

$$u^{k+1} = u^k + t_k g^k.$$

Método do subgradiente para $\max_u L^*(u)$.



Observações:

1) O critério de parada $g^k = Ax^k - b = 0$ implica a viabilidade de x^k para P, já que vale sempre $Dx^k \leq e$, $x^k \in \mathbb{Z}^n_+$. Isso implica que x^k é ótimo para P (veja exercício 1 da lista). Neste caso, o limitante obtido é o próprio valor ótimo f^* de P.

2) Do contrário, se há brecha entre f^* e $\max_u L^*(u)$, então $g^k \neq 0, \forall k$. Neste caso, o método para por número máximo de iterações (a menos que outro critério seja definido).

3) Se dualizarmos $Dx \leq e$, o penalizador v deve ser ≥ 0. No método escolhemos

$$v^{k+1} = \max\{0, v^k + t_k(Dx^k - e)\},$$

onde o máximo é coordenada a coordenada.