DUALIDADE EM PNL (CONTINUAÇÃO)

AULA PASSADA:

$$P: \min_{x} f(x) \quad \text{s.a} \quad x \in S$$

$$S = \{ x \in \Omega \; ; \; h(x) = 0, \; g(x) \leq 0 \}$$

(PRIMAL)

$$D: \max_{\lambda,\mu} \varphi(\lambda,\mu) \quad \text{s.a.} \quad (\lambda,\mu) \in \Delta$$

$$\Delta = \{ (\lambda,\mu) \; ; \; \varphi(\lambda,\mu) > -\infty, \; \mu \geq 0 \}$$

$$\varphi(\lambda,\mu) = \inf_{x \in \Omega} L(x,\lambda,\mu).$$

DUALIDADE FRACA: SE $x \in S$ E $(\lambda,\mu) \in \Delta$ ENTÃO $\varphi(\lambda,\mu) \leq f(x)$.

EM PARTICULAR $\varphi^* \leq f^*$.

HÁ <u>BRECHA DE DUALIDADE</u> QUANDO $\varphi^* < f^*$.

<u>COROLÁRIO</u>: SEJAM P, D UM PAR DE PROBLEMAS PRIMAL - DUAL. ENTÃO

(i) P É ILIMITADO $\Longrightarrow$ D É INVIÁVEL.

(ii) D É ILIMITADO $\Longrightarrow$ P É INVIÁVEL.

(iii) SE NÃO HÁ BRECHA DE DUALIDADE ($\varphi^* = f^*$) ENTÃO, DADOS $x^* \in S$ E $(\lambda^*, \mu^*) \in \Delta$ COM $\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$, OS PONTOS x^* E (λ^*, μ^*) SÃO ÓTIMOS PRIMAL E DUAL, RESPECTIVAMENTE.

EXEMPLOS:

1) $P: \min \frac{1}{x}$ s.a. $-x \leq 0$, $x \in \Omega = (0, \infty]$.

TEMOS $f^* = 0$, MAS P NÃO TEM MINIMIZADOR.

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in (0,\infty]} L(x,\mu) = \inf_{x > 0} \left\{ \frac{1}{x} + \mu(-x) \right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{SE } \mu = 0 \\ -\infty, & \text{SE } \mu > 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \Delta = \{ \mu \, ; \, \varphi(\mu) > -\infty \} = \{0\}$.

ASSIM, $D: \max \varphi(\mu)$ s.a. $\mu = 0$ TEM SOLUÇÃO $\mu^* = 0$. VEJA QUE $\varphi^* = f^* = 0$, MAS P NÃO TEM SOLUÇÃO.

2) P : $\min x$ s.a. $x^2 \leq 0$, $\Omega = \mathbb{R}$.

$x^* = 0$ É O ÚNICO MINIMIZADOR DE P, E $f^* = 0$.

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}} L(x,\mu) = \inf_x \{x + \mu x^2\}$$

TEMOS $\varphi(\mu) > -\infty \iff \mu > 0$. OU SEJA, $\Delta = (0, \infty]$.

PARA $\mu > 0$, $\varphi(\mu) = -\frac{1}{2\mu}$. LOGO

$$D: \max -\frac{1}{2\mu}$$
$$\text{s.a. } \mu > 0$$

VEJA QUE, APESAR DE $\varphi^* = f^* = 0$, D NÃO POSSUI MAXIMIZADOR. //

CONVEXIDADE + DUALIDADE $\longrightarrow$ NÃO HÁ BRECHA DE DUALIDADE.

<u>TEOREMA</u>: SEJA $\Omega = \mathbb{R}^m$, E SUPONHA QUE P SEJA CONVEXO (I.É., f, g CONVEXAS E h LINEAR).

SE x^* É PONTO KKT DE P COM MULITIPLICADORES (λ^*, μ^*) ENTÃO (λ^*, μ^*) É MAXIMIZADOR DO PROBLEMA DUAL D. NESTE CASO

$$\varphi^* = \varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*) = f^*.$$

(OU SEJA, OS MAXIMIZADORES DUAIS FORNECEM CANDIDATOS À MINIMIZADORES PRIMAIS).

PROVA: COMO P É UM PROBLEMA CONVEXO, A LAGRANGEANA

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x)$$

É CONVEXA EM x. ASSIM, SE x^* É KKT DE P ENTÃO

$$\nabla_x L(x^*,\lambda^*,\mu^*) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda^*,\mu^*) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda^*,\mu^*) = L(x^*,\lambda^*,\mu^*).$$

(KKT É SUFICIENTE PARA MINIMIZAÇÃO DE L). ASSIM,

$$\varphi(\lambda^*,\mu^*) = L(x^*,\lambda^*,\mu^*) \underset{x^* \text{ KKT}}{=\!=} f(x^*) \Rightarrow (\lambda^*,\mu^*) \text{ É MAXIM. DUAL } \blacksquare$$

EXEMPLOS:

1) P : $\min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

s.a. $x_1 + 1 \leq 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.

(P É CONVEXO).

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_1 + 1) \right\} > -\infty , \quad \forall \mu \geq 0 .$$

RESOLVENDO "inf":

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\mu \\ x_2 = 0 \end{cases} .$$

DAÍ, $\varphi(\mu) = \frac{1}{2}\mu^2 + \mu(-\mu + 1) = -\frac{1}{2}\mu^2 + \mu$. LOGO,

D : $\max -\frac{1}{2}\mu^2 + \mu$ s.a. $\mu \geq 0$, CUJA SOLUÇÃO É $\mu^* = 1$.

O PONTO PRIMAL CUJO MULTIPLICADOR ASSOCIADO É μ^*, É $x^* = (-1, 0)$, QUE É A SOLUÇÃO PRIMAL.

NOTE QUE

$$\varphi^* = \varphi(1) = \frac{1}{2} = f(-1,0) = f^*.$$

---

2) P: $\min \; x_1 - x_2$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - 1 \leq 0,$$

$$x \in \Omega = \mathbb{R}^2_+ .$$

<u>DUAL</u>:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \geq 0} \left\{ x_1 - x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 1) \right\}$$

$$= \inf_{x \geq 0} \left\{ (\mu+1)x_1 + (\mu - 1)x_2 - \mu \right\}$$

$$\varphi(\mu) > -\infty \iff \begin{cases} \mu+1 \geq 0 \\ \mu-1 \geq 0 \end{cases} \iff \mu \geq 1 .$$

MAIS AINDA, PARA $\mu \geq 1$, $\varphi(\mu) = -\mu$.

ENTÃO

$$D: \quad \max \ -\mu \quad \text{s.a.} \ \mu \geq 1,$$

CUJA SOLUÇÃO É $\mu^* = 1$.

VEJA QUE

$$\varphi^*(1) = -1 = L((0,0), 1) = f^* .$$

O CANDIDATO $\bar{x} = (0,0)$ NÃO É SOLUÇÃO DE P, POIS NÃO É KKT.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ISSO É SATISFEITO PARA $\mu_2 = 2$ E $\mu_3 = 0$.

PORÉM, A COMPLEMENTARIDE PARA A RESTRIÇÃO $x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ FALHA $\left(\mu^* (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1) = -1 \neq 0 \right)$.

AGORA, TAMBÉM TEMOS

$$\varphi^*(1) = -1 = L\big((0,1), 1\big) = f^*.$$

(LEMBRE QUE $\varphi(1) = \inf_{x \geq 0} \{ (1+1)x_1 + (1-1)x_2 - 1 \}$)

OU SEJA, $x^* = (0,1)$ É OUTRO CANDIDATO À SOLUÇÃO PRIMAL. (ESTA É A SOLUÇÃO PRIMAL !!!). O QUE OCORRE AQUI É QUE EXISTEM

VÁRIOS CANDIDATOS À SOLUÇÃO PRIMAL ASSOCIADOS À SOLUÇÃO DUAL μ^*. //

OBS.: QUANDO SÓ HÁ UM CANDIDATO x^* ASSOCIADO À (λ^*, μ^*) ENTÃO x^* É SOLUÇÃO PRIMAL.

3) (PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA).

$$P: \min \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x \quad \text{s.a. } Ax \leq b$$

, Q SIMÉTRICA E DEF. POSITIVA.

VIMOS QUE O DUAL (AULA PASSADA) É

$$D: \quad \max -\frac{1}{2}\mu^t (AQ^{-1}A^t)\mu - (AQ^{-1}+b^t)\mu - \frac{1}{2}c^t Q^{-1} c$$

$$\text{s.a.} \quad \mu \geq 0 .$$

(DEMOS RAZÕES PARA JUSTIFICAR O USO DE D AO INVÉS DE P).

DADA A ÚNICA SOLUÇÃO μ^* DE D (A F.O. DE D É ESTRITAMENTE CÔNCAVA), EXISTIRÁ APENAS UM CANDIDATO x^* À SOLUÇÃO PRIMAL, QUE SERÁ <u>A</u> SOLUÇÃO PRIMAL.

É POSSÍVEL MOSTRAR QUE

$$x^* = -Q^{-1}(c + A^t \mu^*) .$$

<u>EXERCÍCIO</u>: FAÇA ISTO VERIFICANDO QUE x^* É KKT DE P.