

LAGRANGEANO AUMENTADO

$$P: \min f(x)$$

$$\text{s.a. } h(x)=0, g(x) \leq 0$$

OBJETIVO: EVITAR O CRESCIMENTO DE ρ

1) PENALIZAÇÃO COM DESLOCAMENTO.

2) CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE.

AGORA TEMOS ESTIMATIVAS λ E μ PARA OS MULTIPLICADORES.
DADAS PELO MÉTODO, QUEREMOS CONTROLAR OS PRODUTOS

$$\mu_j^k g_j(x^k)$$

ALÉM DA VIABILIDADE.

DEFINIMOS

$$V_j^k = \min \{ -g_j(x^k), \bar{\mu}_j^k \} \quad , \quad \forall j.$$

OBSERVE QUE

$$V_j^k = 0 \iff g_j(x^k) \leq 0 \quad \text{e} \quad \bar{\mu}_j^k g_j(x^k) = 0.$$

(CONSIDERANDO QUE NO MÉTODO JÁ TEMOS $\bar{\mu}_j^k \geq 0$).

CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE + COMPLEMENTARIDADE:

SE

$$\max \{ \|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty \} \leq \zeta \max \{ \|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty \}$$

ENTÃO $\rho_{k+1} = \rho_k$. CASO CONTRÁRIO, $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$. ($\zeta \in [0, 1)$ e $\gamma > 1$).

CRITÉRIO DE PARADA

QUEREMOS KKT DE P ... VAMOS PARAR QUANDO x^*

É KKT APROXIMADO:

$$\left\| \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) \right\| \leq \epsilon_{\text{opt}}$$

$$\left\| h(x^*) \right\| \leq \epsilon_{\text{feas}}, \quad \left\| g(x^*)_+ \right\| \leq \epsilon_{\text{feas}}$$

$$\left| \min \{ -g_j(x^*), \mu_j^* \} \right| \leq \epsilon_{\text{comp}}$$

AQUI, $\mu_j^* \geq 0$ E OS ϵ 'S SÃO PEQUENOS.

(ϵ_{opt} , ϵ_{feas} , ϵ_{comp} ESTÃO EM ALGENCAN).

SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k, \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k) : \min_x L_p(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right]$$

CRITÉRIO DE PARADA DE SP :

$$\| \nabla L_p(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \| \leq \varepsilon_k$$

LAGRANGEANO AUMENTADO (COMPLETO) - ALGORTIMO

PARÂMETROS : $\zeta \in [0,1)$, $\gamma > 1$, $\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$, $\mu_{\max} > 0$,

$\rho_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i^0 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\forall i$, $\bar{\mu}_j^0 \in [0, \mu_{\max}]$, $\forall j$

FAZER $K=0$

PARA com x^K

Sim

CRITÉRIO DE
PARADA SATISFEITO?

NÃO

RESOLVA APROXIMADAMENTE

O SUBPROBLEMA $SP(\rho_K, \bar{\lambda}^K, \bar{\mu}^K)$:

x^K É TAL QUE $\|\nabla L_\rho(x^K, \bar{\lambda}^K, \bar{\mu}^K)\| \leq \varepsilon_K$

ESTIME NOVOS MULTIPLICADORES

$$\lambda^{K+1} = \bar{\lambda}^K + \rho_K h(x^K) \quad \text{e} \quad \mu^{K+1} = (\bar{\mu}^K + \rho_K g(x^K))_+$$

$K \leftarrow K+1$

SE $K=0$ OU

$$\max \{ \|h(x^K)\|_\infty, \|v^K\|_\infty \} \leq \zeta \max \{ \|h(x^{K-1})\|_\infty, \|v^{K-1}\|_\infty \},$$

FAÇA $\rho_{K+1} = \rho_K$.

CASO CONTRÁRIO, FAÇA $\rho_{K+1} = \gamma \rho_K$

PROJETE λ^{K+1} E μ^{K+1}

OBTENDO $\bar{\lambda}^{K+1}$ E $\bar{\mu}^{K+1}$

OBS.: A PRECISÃO ϵ_k PARA O SUBPROBLEMA DEVE TER
À ZERO.

CONVERGÊNCIA A PONTOS KKT

) OBJETIVO: MOSTRAR QUE O MÉTODO DE L.A. É
CAPAZ DE ENCONTRAR PONTOS KKT DE P .

VAMOS "ESQUECER" O CRITÉRIO DE PARADA, E CONSIDERAR QUE
O MÉTODO "GERA" UMA SEQUÊNCIA INFINITA $\{x^k\}$.

QUEREMOS SABER SE UM PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$
É KKT.

1) O MÉTODO CUMPRE A COMPLEMENTARIDADE $\mu_j g_j(x) = 0$:

TEOREMA: SEJA $\{x^k\}$ A SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO

E x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO SEU. SE

$g_j(x^*) < 0$ ENTÃO

$$\mu_j^{k+1} = (\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^*))_+ = 0,$$

PARA TODO k SUFICIENTEMENTE GRANDE ($\forall k \gg 1$).

PROVA:

CASO 1: $\rho_k \rightarrow \infty$.

COMO $\{\bar{\mu}^k\}$ É LIMITADA ($\bar{\mu}^k \in [0, \mu_{\max}]$) E COMO

$$g_j(x^k) \leq \frac{g_j(x^*)}{2} < 0, \quad \forall k \gg 1, \text{ TEMOS}$$

$$\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k) \leq \bar{\mu}_j^k + \frac{\rho_k}{2} g_j(x^*) \rightarrow -\infty.$$

$$\text{Assim, } \mu^{k+1} = (\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k))_+ = 0, \quad \forall k \gg 1.$$

CASO 2: $\{\rho_k\}$ é LIMITADA.

NESTE CASO, O CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE DEU CERTO

$\forall k \gg 1$. EM PARTICULAR, $\|V^{k+1}\|_\infty \leq \zeta \|V^k\|_\infty, \forall k \gg 1$, E LOGO

$V^k \rightarrow 0$ DADO QUE $\zeta < 1$. LEMBRANDO QUE

$$V_j^k = \min \{-g_j(x^k), \bar{\mu}_j^k\}, \text{ TEMOS } \bar{\mu}_j^k \rightarrow 0. \text{ DAÍ,}$$

$$\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k) < 0, \quad \forall k \gg 1 \Rightarrow \mu_j^{k+1} = 0, \quad \forall k \gg 1$$