

# Capítulo 2

## Sistemas Lineares

Uma *equação linear* nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$  é uma equação do tipo  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$  onde os  $a_i$ 's e  $b$  são escalares. Um *sistema de equações lineares* (ou simplesmente um *sistema linear*) com  $m$  equações e  $n$  incógnitas é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma *solução* do sistema linear (2.1) é uma lista de  $n$  números  $(x_1, \dots, x_n)$  que satisfaz cada uma de suas  $m$  equações.

Tomando  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ , podemos escrever o sistema (2.1) na forma matricial

$$AX = B.$$

Neste caso,  $A$  é dita *matriz dos coeficientes* de (2.1);  $X$  é dita *matriz das incógnitas* de (2.1) e  $B$  é dita *matriz dos termos independentes* de (2.1). Em particular, se  $B = \mathbf{0}$  então o sistema  $AX = \mathbf{0}$  é dito *sistema homogêneo*. Considerando a forma matricial de um sistema linear, diremos também que a matriz  $X_0$  é *solução* do sistema  $AX = B$  se  $AX_0 = B$ .

A matriz

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

é a *matriz ampliada* do sistema (2.1).

## 2.1 Operações e matrizes elementares

Numa matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ , consideramos três operações sobre suas **linhas**:

- (i) troca da linha  $i$  com a linha  $j$  ( $i \neq j$ ). Indicaremos essa operação por  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- (ii) multiplicação da linha  $i$  por um número real  $k \neq 0$  ( $L_i \rightarrow kL_i$ ).
- (iii) substituição da linha  $i$  pela linha  $i$  somada ao múltiplo  $k$  da linha  $j$  ( $i \neq j$ ). Neste caso pode-se ter  $k = 0$ . Indicaremos essa operação por  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ .

As três operações acima são chamadas *operações elementares*.

**Exemplo 2.1.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ .

- realizemos a operação elementar  $L_1 \leftrightarrow L_2$  sobre  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar  $L_3 \rightarrow 2L_3$  sobre  $A_1$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar  $L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1$  sobre  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

**Definição 2.1.** Sejam  $A$  e  $C$  matrizes de mesma ordem. Dizemos que  $C$  é linha equivalente à  $A$  se  $C$  pode ser obtida de  $A$  pela aplicação de finitas operações elementares.

Assim, no exemplo anterior  $C$  é linha equivalente à matriz  $A$ .

O estudo de matrizes equivalentes é útil na resolução de sistemas lineares. Diremos que dois sistemas lineares  $AX = B$  e  $CX = D$  que possuem as mesmas soluções são *equivalentes*. Nesse contexto, temos o

**Teorema 2.1.** Dois sistemas lineares cujas matrizes ampliadas são linha equivalentes são equivalentes.

Em outras palavras, o Teorema anterior afirma que ao aplicarmos operações elementares sobre a matriz ampliada de um sistema, mantemos soluções do sistema. Logo, podemos resolver um sistema linear transformando-o em um sistema mais fácil, como no exemplo a seguir. **Essa é a justificativa para o processo de escalonamento.**

**Exemplo 2.2.** Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Apliquemos operações elementares em sua matriz ampliada:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 \rightarrow 1/2 L_1]{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3]{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \rightarrow 1/2 L_2} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right] = [C|D]. \end{aligned}$$

O sistema  $CX = D$  dado por

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1/2 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema original  $S$ , e claramente tem única solução  $(3/2, 1, -1/2)$ . Portanto o sistema inicial  $S$  tem esse terno como única solução.  $\square$

A última matriz  $[C|D]$  do exemplo anterior tem uma forma interessante pois o sistema associado é de fácil resolução. A fim de resolver sistemas lineares de uma forma geral, procuraremos formalizar a estrutura dessa matriz.

**Definição 2.2.** Uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  é matriz linha reduzida à forma escada (MLRFE) satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) O primeiro elemento não nulo (da esquerda para a direita) de uma linha não nula é 1 (esse é o elemento líder da linha);
- (ii) Cada coluna que contém o líder de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos;
- (iii) Toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;
- (iv) Se as linhas  $1, 2, \dots, r$  são as linhas não nulas de  $A$ , e se o líder da linha  $i$  ocorre na coluna  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$  (forma escada).

**Exemplo 2.3.** São matrizes linha reduzidas à forma escada:

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bullet I_n$$

$$\bullet \mathbf{0}_{m \times n}$$

$\square$

**Teorema 2.2.** Toda matriz  $A$  é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

O Teorema acima diz que o processo de escalonamento feito no exemplo anterior é universal: ele **sempre** é possível, para **qualquer** sistema linear.

Relacionaremos agora operações elementares com produtos de matrizes.

**Definição 2.3.** Uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n$  é dita *elementar* se pode ser obtida da identidade  $I_n$  por uma única operação elementar.

**Exemplo 2.4.** São exemplos de matrizes elementares:

- $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ( $L_1 \leftrightarrow L_2$  em  $I_3$ )
- $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ( $L_1 \rightarrow 2L_1$  em  $I_2$ )
- $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ( $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2$  em  $I_3$ )

□

Quando conveniente, denotaremos por  $e(A)$  a matriz resultante da aplicação da operação elementar  $e$  sobre a matriz  $A$ .

**Teorema 2.3.** Seja  $e$  uma operação elementar e  $E = e(I_m)$  a matriz elementar correspondente. Então para toda matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  temos

$$e(A) = EA.$$

Em outras palavras, o Teorema 2.3 diz que aplicar uma operação elementar em  $A$  é o mesmo que multiplicar  $A$  a esquerda pela matriz elementar correspondente.

Cada matriz elementar é inversível, e sua inversa é a **matriz elementar correspondente à operação que desfaz** a original:

- a operação  $L_i \rightarrow \frac{1}{k}L_i$  desfaz a operação  $L_i \rightarrow kL_i$ . Assim por exemplo, se  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  então  $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$  (verifique este fato constatando que  $EE^{-1} = I_2$ ).
- a operação  $L_i \rightarrow L_j$  desfaz a própria operação  $L_i \rightarrow L_j$ . Assim por exemplo, se  $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  então  $E^{-1} = E$  (verifique!).
- a operação  $L_i \rightarrow L_i - kL_j$  desfaz a operação  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ . Assim por exemplo, se  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  então  $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  (verifique!).

**Atividade 2.1.** Faça exemplos de inversas de matrizes elementares de ordem 3. Mostre que em geral matrizes elementares tem inversas descritas anteriormente.

Uma consequência imediata do Teorema 2.3 é o seguinte:

**Corolário 2.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de mesma ordem. Então  $B$  é linha equivalente a  $A$  se, e somente se  $B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$  para certas matrizes elementares  $E_1, \dots, E_k$ .*

**Exemplo 2.5.** Mostre que são linha equivalentes as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ .

Vamos calcular a MLRFE de  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 1/3 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, sendo  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$  e  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  as matrizes elementares correspondentes às operações realizadas, temos

$$C = E_2 E_1 A.$$

Agora, calculemos a MLRFE de  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow 1/9 L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 1/6 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Sendo  $E_3 = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$  temos

$$C = E_2 E_4 E_3 B,$$

e assim  $E_2 E_4 E_3 B = E_2 E_1 A \Rightarrow E_4 E_3 B = E_2^{-1} E_2 E_1 A \Rightarrow \cdots \Rightarrow B = E_3^{-1} E_4^{-1} E_1 A$ . Pelo Corolário anterior,  $B$  é linha equivalente a  $A$ .  $\square$

Em particular, se  $B$  é matriz quadrada de ordem  $n$ , linha equivalente à  $I_n$ , então  $B = E_k \cdots E_1 I_n$ . O produto  $E_k \cdots E_1 = A$  é inversível com inversa  $A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$  (verifique!). Assim,  $B = A I_n \Rightarrow A^{-1} B = I_n$ , e  $B$  é inversível com inversa  $B^{-1} = A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ .

**Concluimos então que se  $B$  é linha equivalente à  $I_n$  (ou equivalentemente, se  $B$  é produto de matrizes elementares) então  $B$  é inversível.**

A recíproca deste fato também é verdadeira, isto é, se  $B$  é inversível então é linha equivalente a  $I_n$  (Exercício 9, lista 2). Resumindo esse fato e considerando o Corolário 2.1, temos o

**Teorema 2.4.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . São equivalentes as afirmações:*

- (i)  $A$  é inversível.
- (ii)  $A$  é linha equivalente à  $I_n$ .
- (iii)  $A = E_k \cdots E_1$ , para certas matrizes elementares  $E_1, \dots, E_k$ .

Com as operações e matrizes elementares, estabeleceremos uma maneira de

1. Resolver um sistema linear;
2. Inverter uma matriz, ou constatar que não há inversa.

Veremos isso nas seções seguintes.

## 2.2 Resolução de sistemas lineares

A possibilidade de simplificação da matriz ampliada de um sistema linear para a forma reduzida, garantida pelo Teorema 2.2, resulta em um processo sistemático para resolução de qualquer sistema linear.

Este processo (de escalonamento) nos fornecerá:

- as soluções do sistema, caso existam;
- se o sistema possui única ou várias soluções;
- se o sistema não possui solução.

O estudo da quantidade/existência de soluções está relacionado com a noção de *posto* e *nulidade* das matrizes associadas ao sistema linear.

**Definição 2.4.** Dada uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ , seja  $B$  sua MLRFE. Então o posto de  $A$  é o número de linhas não nulas de  $B$ . A nulidade de  $A$  é o número  $n - p$ , onde  $p$  é o posto de  $A$ .

**Exemplo 2.6.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ . A MLRFE de  $A$  é a matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , e portanto o posto de  $A$  é 2, e a nulidade de  $A$  é  $3 - 2 = 1$ .  $\square$

**Exemplo 2.7.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ . A MLRFE de  $A$  é a matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , e portanto o posto de  $A$  é 2, e a nulidade de  $A$  é  $3 - 2 = 1$ .  $\square$

**Teorema 2.5.** Seja  $AX = B$  um sistema linear, com  $m$  equações e  $n$  incógnitas ( $A$  tem ordem  $m \times n$ ). Então

- (i)  $AX = B$  admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada  $[A|B]$  é igual ao posto da matriz dos coeficientes  $A$ .
- (ii) Se  $A$  e  $[A|B]$  têm mesmo posto  $p = n$  então  $AX = B$  tem única solução.
- (iii) Se  $A$  e  $[A|B]$  têm mesmo posto  $p < n$  então  $AX = B$  tem infinitas soluções. Dizemos neste caso que a nulidade de  $A$  é o grau de liberdade de  $AX = B$ .

**Exemplo 2.8.** Para cada sistema linear abaixo, diga se há ou não solução e, caso possua, se é única, infinitas; neste caso, calcule-as (faremos durante a aula):

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = 2 \\ x_2 & = 3 \\ x_2 + x_3 & = 4 \\ \dots & \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 & = 1 \\ +x_2 + x_3 & = 2 \\ \dots & \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

□

## 2.3 Um processo para inversão de matrizes

Sabemos que uma matriz quadrada  $A$  é inversível se, e somente se  $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ , onde  $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$  são matrizes elementares. Neste caso,

$$E_k \cdots E_1 A = I \quad \text{e} \quad A^{-1} = E_k \cdots E_1 I.$$

Assim, aplicando as operações elementares relativas às matrizes elementares  $E_1, \dots, E_k$  sobre  $[A|I]$ , obtemos a sequência

$$[A|I] \xrightarrow{E_1} [E_1 A | E_1 I] \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_k} [E_k \cdots E_1 A | E_k \cdots E_1 I] = [I | A^{-1}].$$

Em outras palavras,  $A$  é inversível se, e somente se  $[A|I]$  é linha equivalente a uma matriz  $[I|S]$ , e neste caso  $A^{-1} = S$ .

**Exemplo 2.9.** Calcular a inversa de cada matriz abaixo, se existir.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 + L_2]{L_2 \rightarrow L_2 - L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \rightarrow -L_2, L_1 \leftrightarrow L_2, L_2 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 + L_3]{L_2 \rightarrow 1/2 L_2, L_3 \rightarrow 1/2 L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$[B|I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right].$$

Observe que a MLRFE de  $B$  é a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$ , e daí  $B$  não é inversível.

□

## 2.4 Exercícios

Veja a lista de exercícios 2.

## 2.5 Demonstrações

*Demonstração do Teorema 2.1.* Seja  $AX = B$  um sistema linear. É suficiente mostrar que cada uma das três operações elementares sobre  $[A|B]$  resulta num sistema linear  $CX = D$  com as mesmas soluções de  $AX = B$ . Fazemos a prova para a operação  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$  ( $i \neq j$ ) e deixamos as outras duas como exercício. Supomos que ao realizar a operação  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$  sobre  $[A|B]$ , obtemos a matriz linha equivalente  $[C|D]$ . Comparando os sistemas  $AX = B$  e  $CX = D$ , vemos que a única diferença está na linha  $i$ :

- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$  é a linha  $i$  de  $AX = B$ ;
- $(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + ka_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = (b_i + kb_j)$  é a linha  $i$  de  $CX = D$ ;

Então,

$$\begin{aligned}
 & (x_1, \dots, x_n) \text{ é solução de } CX = D \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + ka_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = (b_i + kb_j), \\
 & \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i - k \underbrace{(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - b_j)}_0, \\
 & \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & (x_1, \dots, x_n) \text{ é solução de } AX = B,
 \end{aligned}$$

isto é,  $CX = D$  e  $AX = B$  têm as mesmas soluções. □

**Atividade 2.2.** Complete a prova do teorema anterior fazendo a demonstração para as operações  $L_i \leftrightarrow L_j$  e  $L_i \rightarrow kL_i$ .

---

*Demonstração do Teorema 2.3.* Deixamos a prova do resultado para as operações  $L_i \leftrightarrow L_j$  e  $L_i \rightarrow kL_i$  para o leitor. Seja  $e$  a operação  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$  ( $i \neq j$ ). Sem perda de generalidade,



vamos supor que  $i = 1$  e  $j = 2$ . Assim

$$\begin{aligned}
 EA &= \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} & \cdots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = e(A).
 \end{aligned}$$

□

**Atividade 2.3.** Complete a prova do teorema anterior.

# Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Bookman, 2010.
- [2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.
- [3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.
- [4] David Lay. *Álgebra Linear*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.
- [5] David Poole. *Álgebra linear*. Thonsom Learning, São Paulo, 2006.