UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES:

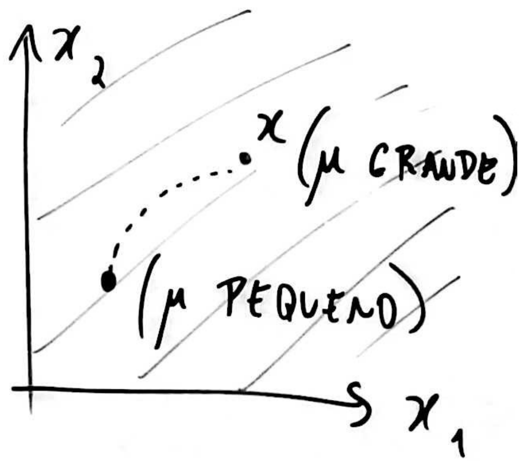
RESTRIÇÕES LINEARES

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

f É CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEL.

APLICAMOS O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES:

$$\begin{aligned} SP(\mu): \min \quad & f(x) - \mu \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$



KKT DO SUBPROBLEMA $SP(\mu)$:

$$\nabla f(x) - \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} + A^t y = 0 \,, \quad Ax = b \,.$$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \mu \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{bmatrix} + A^t y \\ \\ Ax - b \end{bmatrix} = 0 \,.$$

APLICAMOS O MÉTODO DE NEWTON EM $F(x,y) = 0$:

$$F'(x,y)\,d = -F(x,y).$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & 0 \\ & \frac{1}{x_2^2} & \\ 0 & & \ddots \ \frac{1}{x_m^2} \end{bmatrix} & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla f(x) - \mu \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_m \end{bmatrix} + A^t y \\ Ax - b \end{bmatrix}$$

CHAMANDO $X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & x_m \end{bmatrix}$,

ESCREVEMOS $X^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_m}\right)$. DAÍ, A MATRIZ DO SISTEMA NEWTONIANO ANTERIOR É

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \mu X^{-2} & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

À MEDIDA EM QUE $x_i \longrightarrow 0^+$, A DIAGONAL DA MATRIZ X^{-2} "TENDE" A INFINITO. ASSIM A MATRIZ DO SISTEMA

NEWTONIANO FICA MAL CONDICIONADA.

DEFINIMOS $z_i = \frac{\mu}{x_i}$. DESTA REESCREVEMOS

O SISTEMA KKT DO SUBPROBLEMA COMO

$$\nabla f(x) - z + A^t y = 0$$

$$Ax = b$$

$$x_i z_i = \mu.$$

$$\tilde{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - z + A^t y \\ Ax - b \\ x_1 z_1 - \mu \\ \vdots \\ x_m z_m - \mu \end{bmatrix} = 0 .$$

<u>NEWTON</u>:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^t & -I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) - z + A^t y \\ Ax - b \\ x_1 z_1 - \mu \\ \vdots \\ x_m z_m - \mu \end{bmatrix} .$$

A MATRIZ DO SISTEMA ANTERIOR SERÁ BEM CONDICIONADA NA MEDIDA EM QUE CONSIGAMOS "CONTROLAR" O BLOCO $Z = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_m)$.

$z_i = \mu / x_i$. SE $x_i \to 0^+$, HÁ UMA EXPECTIVA DE QUE z_i NÃO EXPLODA SE $\mu \to 0^+$ EM UMA VELOCIDADE "CONTROLADA" EM RELAÇÃO À x_i.

EM PROGRAMAÇÃO LINEAR $(f(x) = c^t x + b)$ E EM PROG. QUADRÁTICA CONVEXA $(f(x) = \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x + b,\ Q$ DEF. POS$)$

HÁ VÁRIAS ELABORAÇÕES DESTA IDEIA.

NO CPLEX, HÁ UMA IMPLEMENTAÇÃO DE PONTOS INTERIORES ("BARRIER ALGORITHM").