Método do subgradiente (para convexas)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função convexa, não necessariamente diferenciável.

caso diferenciável	caso <u>não</u> diferenciável
x^* min f (global) $\iff \nabla f(x^*) = 0$	x^* min. f (global) $\iff 0 \in \partial f(x^*)$
método gradiente: $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$, $t_k > 0$	método subgradiente: $x^{k+1} = x^k - t_k g^k$, $g^k \in \partial f(x^k)$, $t_k > 0$

Teorema (Condição de otimalidade)

Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Então x^* é minimizador de f se, e somente se, $0 \in \partial f(x^*)$.

Prova: $\Leftarrow$) $0 \in \partial f(x^*) \Rightarrow f(x^*) = f(x^*) + 0^t(y - x^*) \leq f(y)$, $\forall y \Rightarrow x^*$ é minimizador global de f

$\Rightarrow$) Se x^* é minimizador de f então a fim de satisfazer

$$f(y) \geq f(x^*) + g^t(y - x^*) \quad , \forall y ,$$

é suficiente escolher $g = 0$, dado que $f(y) \geq f(x^*)$, $\forall y$. Isto é, $0 \in \partial f(x^*)$

<u>Observações:</u>

1) Quando f é diferenciável em x^*, o resultado diz que "x^* min $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$", o que recai no que já conhecíamos.

2) $0 \in \partial f(x^*)$ não significa que $\partial f(x^*)$ só possua 0 como subgradiente. Por exemplo, $x^* = 0$ é minimizador de $f(x) = |x|$ e $\partial f(0) = [-1, 1] \ni 0$.

---

3) O fato de $\partial f(x^*)$ poder conter subgradientes não nulos atrapalha estabelecermos um critério de parada para algoritmos: um algoritmo poderia obter x^* sem que

pudéssemos decidir parar declarando "minimizador encontrado", simplesmente pelo fato que em geral não calculamos todo o conjunto $\partial f(x^*)$. Em geral apenas 1 subgradiente é computado.

Por exemplo, considere $f(x) = |x|$ e a sequência $x_k = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^* = 0$. Apesar de convergir ao minimizador, $\partial f(x_k) = \{1\}$.

Veja que mesmo se $x^* = 0$ for alcançado, um algoritmo poderia computar

$$1 \in \partial f(x^*) = [-1, 1].$$

(geralmente é isso que acontece!).

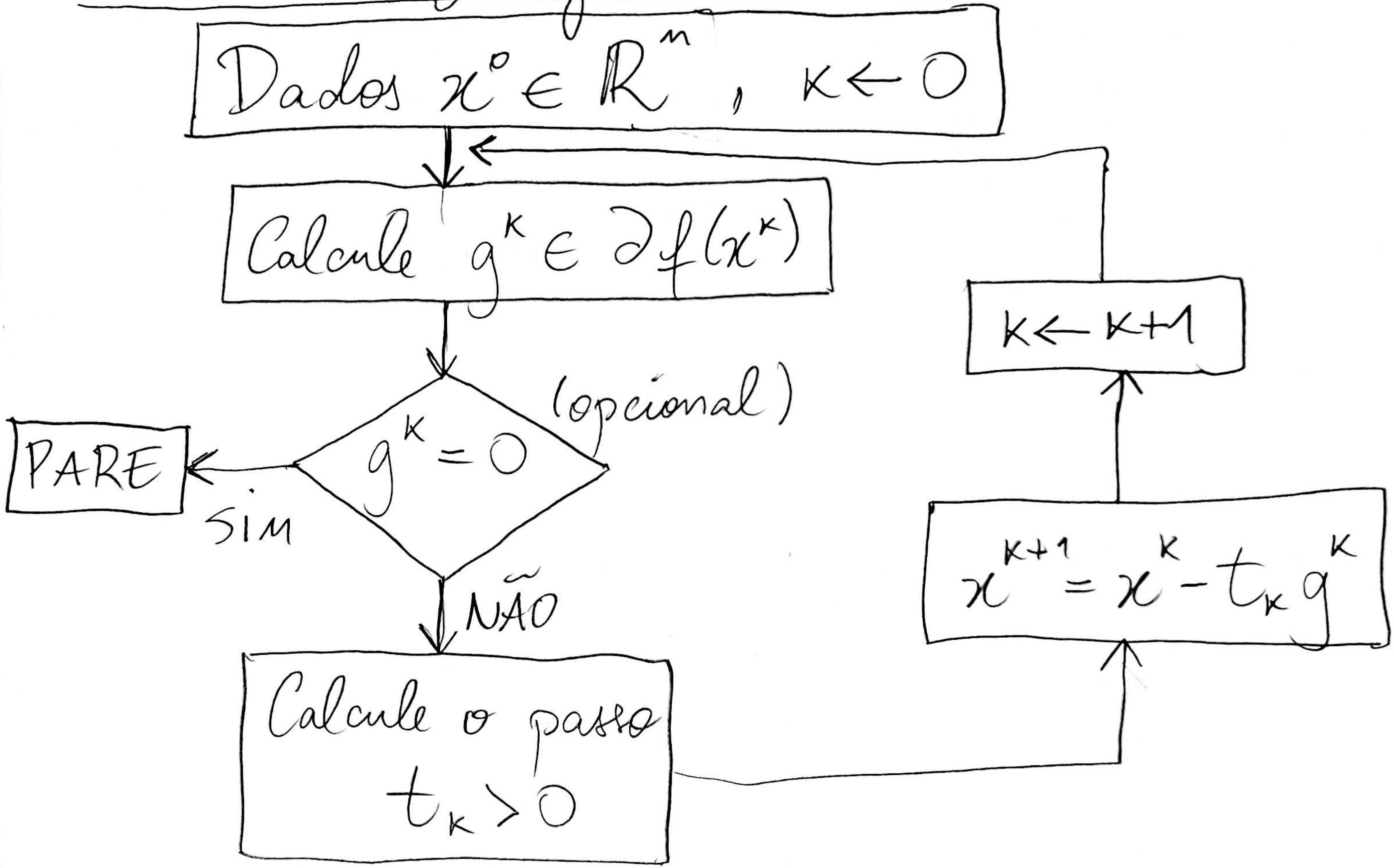
↳ há formas de tentar contornar isso, p. ex., calculando gradientes randomicamente ao redor de x^* e tomando uma média, ou utilizando subdiferenciais aproximados... (não precisaremos disso!)

4) Portanto o critério por "máximo de iterações atingido" poderá ser acionado mesmo que já estejamos indo à solução.

---

5) Agora, se dermos "sorte" de calcular um subgradiente $g \approx 0$, podemos parar! O teorema anterior garante um minimizador. Vamos fazer o teste de parada $\|g\| \leq \varepsilon$ pois é barato.

Método do subgradiente



Convergência do método do subgradiente para funções convexas

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa ($\Rightarrow$ método bem definido)
- $\{x^k\}$ sequência gerada pelo método.

Um resultado fundamental:

Lema: Para todo $y \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|x^{k+1} - y\|^2 \leq \|x^k - y\|^2 - 2t_k\left(f(x^k) - f(y)\right) + t_k^2 \|g_k\|^2.$$

<u>Prova:</u> $\|x^{k+1}-y\|^2 = \|x^k - t_k g^k - y\|^2$

$$= \|x^k-y\|^2 - 2t_k (g^k)^t (x^k - y) + t_k^2 \|g^k\|^2$$

$$\leq \|x^k-y\|^2 - 2t_k (f(x^k) - f(y)) + t_k^2 \|g^k\|^2,$$

onde a última desigualdade segue do fato $g^k \in \partial f(x^k)$ ∎

Para f convexa, é comum estudar a convergência nos seguintes casos:

1) passo constante: $t_k = t > 0$, $\forall k$

2) passo decrescente: $\{t_k\}$ tal que $t_k > 0$, $\forall k$, $t_k \to 0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$.

A ideia é refinar a busca próximo à solução $(t_k \to 0)$ sem dar passos muito pequenos $(\sum_0^{\infty} t_k = \infty)$. Por exemplo, $t_k = 1/k$.

3) t_k escolhido "dinamicamente", tendo em vista limitantes para o valor ótimo f^* (costuma funcionar melhor na prática).

Hipótese comum:

H1) Existe uma constante $c \geq \sup_{k=0,1,\dots} \|g^k\|$.

Obs: a compacidade de $\partial f(x^k)$ não implica H1, pois c independe de k.

1) Convergência com passo constante $t_k = t$.

Teorema: Suponha válida H1 e $t_k = t > 0, \forall k$.

(i) Se $f^* = \inf f(x) = -\infty$ então

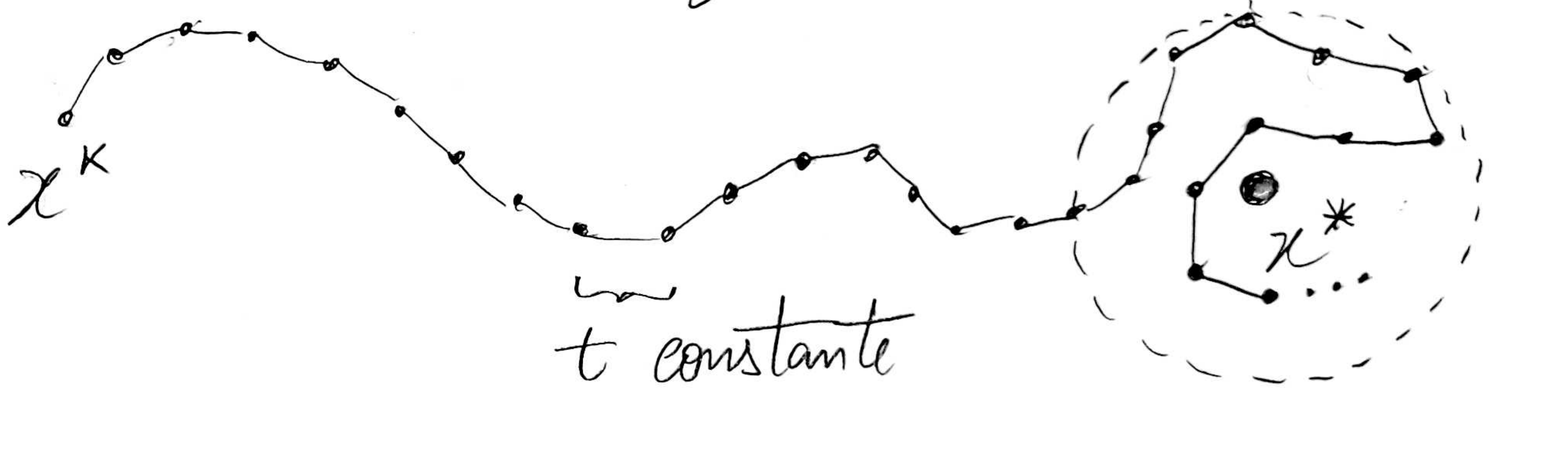
$$f_\infty = \liminf_{k \to \infty} f(x^k) = f^*$$

(ii) Se $f^* > -\infty$ então

$$f_\infty \leq f^* + \frac{t c^2}{2}.$$

Antes de demonstrar o teorema, note que (ii) <u>não</u> garante que o método atinja o valor ótimo f^*:

Isso é coerente, pois com passo constante, o máximo de garantia é convergir à uma vizinhança do minimizador!



<u>Prova:</u> Vamos mostrar (i) e (ii) simultaneamente. Suponha que o resultado não valha. Então existe $\varepsilon > 0$ constante tal que

$$f_\infty > f^* + \frac{tc^2}{2} + 2\varepsilon$$

(vale para $f^* = -\infty$ e $f^* > -\infty$). Existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f_\infty \geq f(y) + \frac{tc^2}{2} + 2\varepsilon. \qquad (1)$$

Também, para todo $k \gg 1$, temos $f(x^k) \geq f_\infty - \varepsilon$
(2)

pois $f_\infty = \liminf_{k\to\infty} f(x^k)$ (de fato, se $f_\infty = -\infty$ então $f(x^k) \geq f_\infty$ e se $f_\infty > -\infty$ então $\{f(x^k)\}$ é limitada inferiormente, e logo $\{\inf_{k \geq \bar{k}} f(x^k)\} \xrightarrow[\bar{k}\to\infty]{} f_\infty$). Somando (1) e (2) obtemos

$$f(x^k) - f(y) \geq \frac{tc^2}{2} + \varepsilon .$$

Do lema e da hipótese H1, segue que

$$\|x^{k+1}-y\|^2 \leq \|x^k-y\|^2 - 2t\left(f(x^k)-f(y)\right) + t^2\|g^k\|^2$$

$$\leq \|x^k-y\|^2 - 2t\left(\frac{tc^2}{2}+\varepsilon\right) + t^2c^2$$

$$= \|x^k-y\|^2 - 2t\varepsilon.$$

Aplicando essa desigualdade sucessivamente,

$$\|x^{k+1}-y\|^2 \leq \|x^k-y\|^2 - 2t\varepsilon$$

$$\leq \|x^{k-1}-y\|^2 - 4t\varepsilon$$

$$\cdots \leq \|x^0-y\|^2 - 2(k+1)t\varepsilon$$

Tomando $k \gg 1$ obtemos uma contradição pois $\|x^0 - y\|^2 - 2(k+1)t\varepsilon \xrightarrow[k \to \infty]{} -\infty$.

Isso completa a demonstração. ■

2) Convergência com passo decrescente

$$t_k \to 0^+, \quad \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty \qquad x^k \to x^*.$$