$$\min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x)=0, \quad g(x)\leq 0.$$

EXERCÍCIOS.

1) SEJA $\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2$, ONDE $g(x)_+ = \text{máx}\{g(x), 0\}$.

SUPONHA QUE O PARÂMETRO DE PENALIZAÇÃO ρ NO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA SEMPRE CRESÇA $(\rho_{k+1} > \rho_k, \forall k)$.

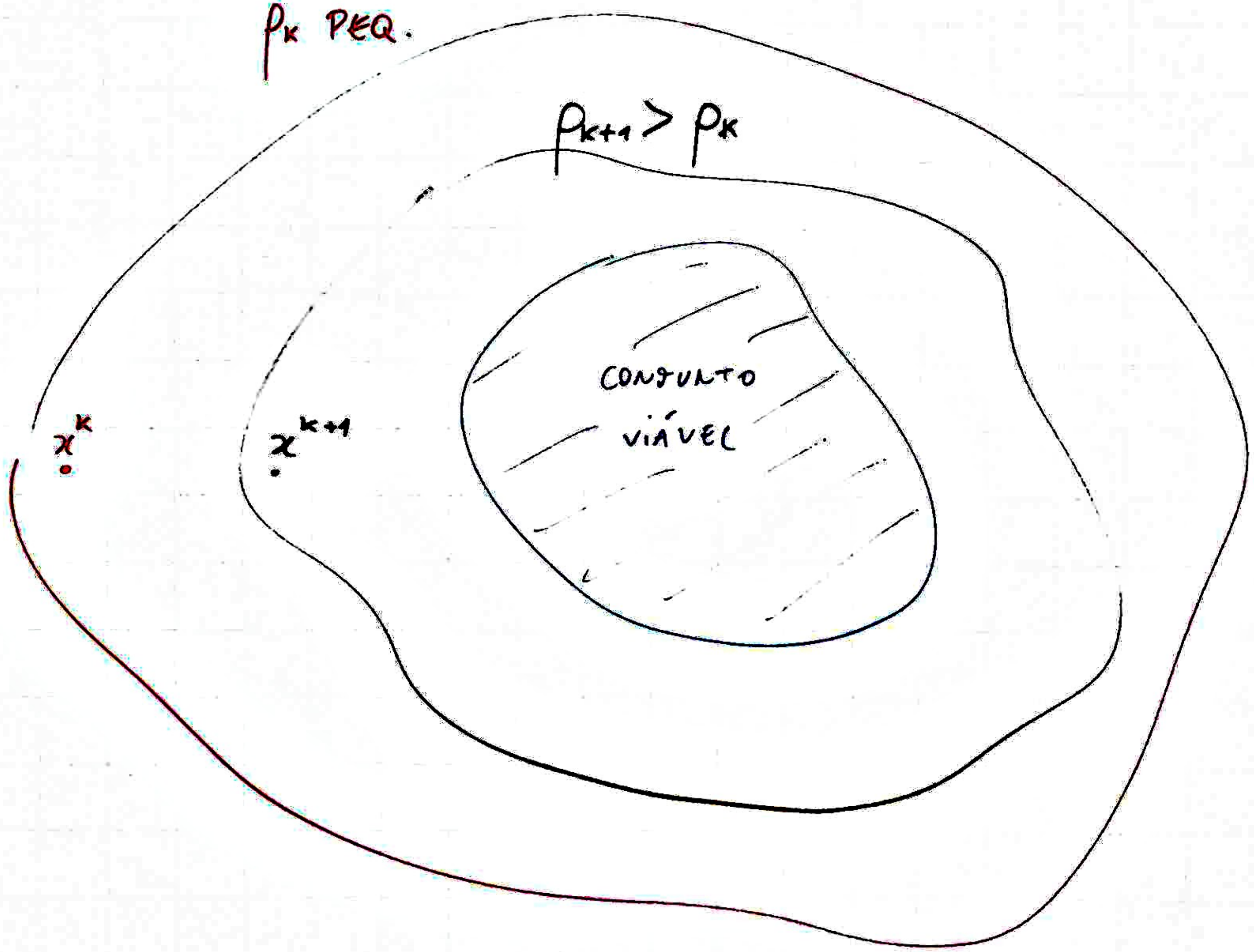
SEJA $\{x^k\}$ A SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO.

MOSTRE QUE, $\forall k$,

(a) $f(x^{k+1}) + \dfrac{\rho_{k+1}}{2}\phi(x^{k+1}) \geq f(x^k) + \dfrac{\rho_k}{2}\phi(x^k)$.

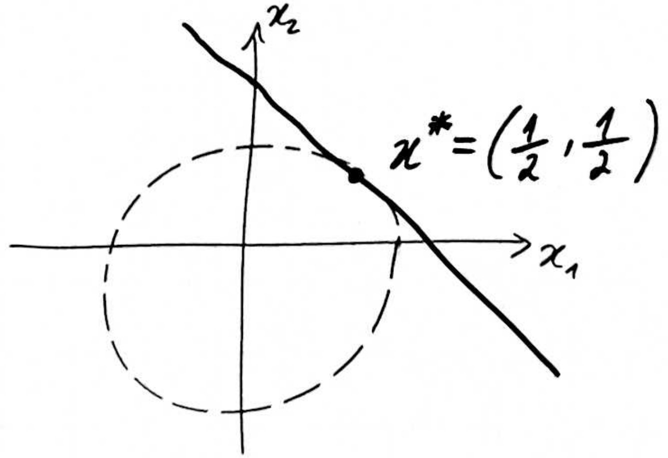
(b) $\phi(x^{k+1}) \leq \phi(x^k)$ (VIABILIDADE MELHORA)

(c) $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$ (F.O. NÃO DIMINUI).


ρ_k PEQ.
$\rho_{k+1} > \rho_k$
x^k
x^{k+1}
CONJUNTO
VIÁVEL

2) APLICAR O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA AO PROBLEMA

$$\min \ x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$$



ANALIZAR POSSÍVEIS INCONSISTÊNCIAS NA RESOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA.

---

3) (EX. 6.4 – ANA) MOSTRE QUE NO MÉTODO DO GRADIENTE COM BUSCA LINEAR <u>EXATA</u>, TEMOS

$$\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0 .$$

DISCUTIR O POSSÍVEL EFEITO "ZIG-ZAG" E COMO A BUSCA LINEAR USANDO ARMIJO PODE EVITÁ-LO.

RESOLUÇÃO:

2) O SUBPROBLEMA É

$$SP(\rho_k): \quad \min \; x_1^2 + x_2^2 + \frac{\rho_k}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

RESOLVENDO:

$$\nabla\left(f + \frac{\rho_k}{2}\phi\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \\ 2x_2 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (1) \\ 2x_2 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

FAZENDO (1) − (2), OBTEMOS $2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

ASSIM, $2x_1 + \rho_k(2x_1 - 1) = 0 \implies 2x_1(\rho_k + 1) = \rho_k$

$$\implies x_1^k = \frac{\rho_k}{2(\rho_k+1)} \quad . \text{ LOGO,}$$

$$x^k = \left(\frac{\rho_k}{2(\rho_k+1)} , \frac{\rho_k}{2(\rho_k+1)} \right)$$

ESSE x^k É O MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$, DADO QUE É O ÚNICO PONTO ESTACIONÁRIO E $SP(\rho_k)$ É UM PROBLEMA CONVEXO.

VEJA QUE $\lim_{k \to \infty} x^k = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = x^*$ (MINIMIZADOR GLOBAL DO PROB. ORIGINAL).

$$SP(\rho_k): \quad \min \quad x_1^2 + x_2^2 + \frac{\rho_k}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

$$\nabla\left(f + \frac{\rho_k}{2}\phi\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \\ 2x_2 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2\left(f + \frac{\rho_k}{2}\phi\right) = \begin{bmatrix} 2 + \rho_k & \rho_k \\ \rho_k & 2 + \rho_k \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES DE $\nabla^2\left(f + \frac{\rho_k}{2}\phi\right)$:

$$\det\left(\nabla^2(\dots) - \lambda I\right) = \det\begin{bmatrix} 2 + \rho_k - \lambda & \rho_k \\ \rho_k & 2 + \rho_k - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda + \rho_k)^2 - \rho_k^2$$

$$= (2-\lambda)^2 + 2(2-\lambda)\rho_k = (2-\lambda)\left[2-\lambda+2\rho_k\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2 + 2\rho_k$$

OS AUTOVALORES SE DISTANCIAM $\left(\lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 \xrightarrow[\ ]{} \infty\right)$.

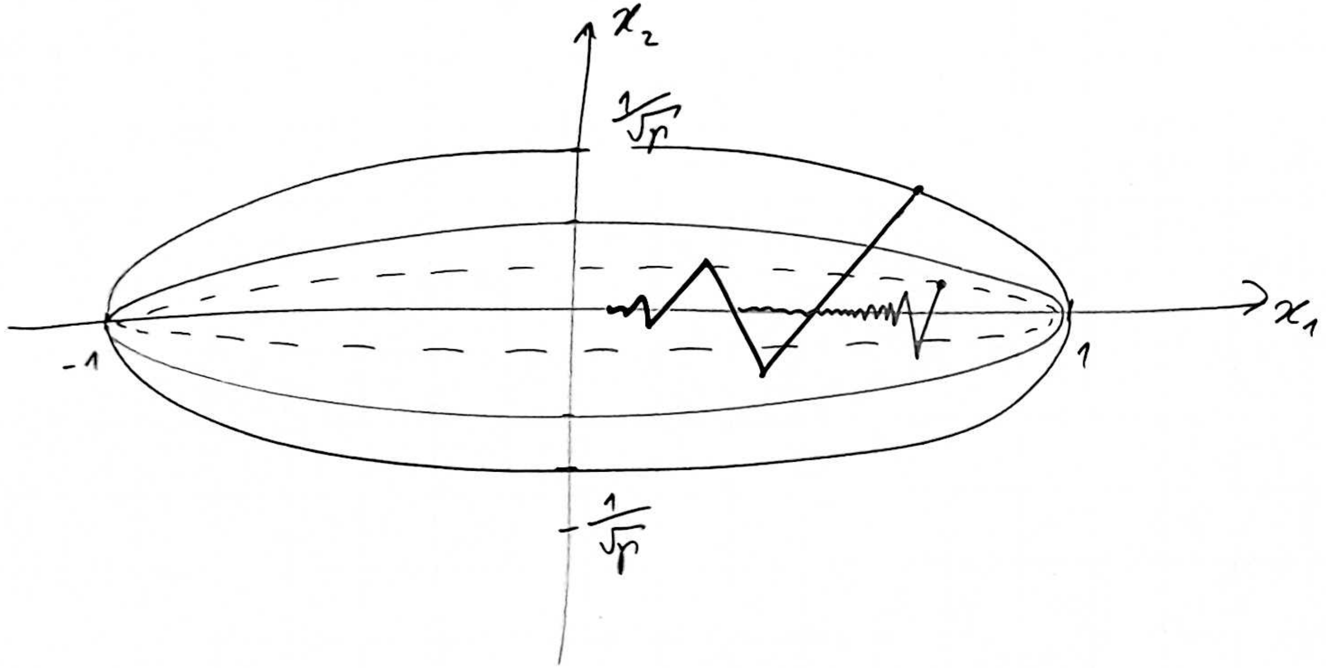
O NÚMERO DE CONDIÇÃO DA HESSIANA $D^2\left(f + \frac{\rho_k}{2}\phi\right)$ $\left(= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ VAI PARA INFINITO.

OS AUTOVALORES SÃO UMA MEDIDA DO TAMANHO DOS EIXOS DAS CURVAS DE NÍVEL DE UMA QUADRÁTICA.

POR EXEMPLO: CONSIDERE A FUNÇÃO

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + p\, x_2^2, \qquad p > 0.$$

NÍVEL 1: $g(x_1, x_2) = 1 \iff x_1^2 + \rho x_2^2 = 1$.



$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 1$.

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

AUTOVALORES DA HESSIANA:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2\rho x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\rho \end{bmatrix}.$$

AUTOVALORES SÃO $\lambda_1 = 2$ E $\lambda_2 = 2\rho$.

SE $\rho \to \infty$, AS CURVAS DE NÍVEL DE g SE ACHATAM. OU SEJA, A MEDIDA DOS EIXOS FICA "DESBALANCEADA".

EM NOSSO SUBPROBLEMA, QUANTO MAIS ρ_k AUMENTA, MAIS É DIFÍCIL NUMERICAMENTE RESOLVÊ-LO. POR EXEMPLO, O MÉTODO GRADIENTE TENDE A FAZER MAIS E MAIS "ZIG-ZAG".