

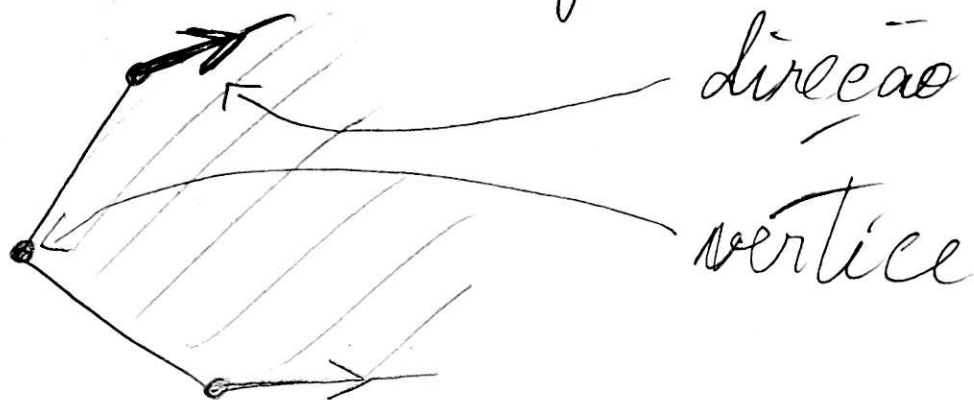
Elementos de PL (revisão)

1

Considere o poliedro $X = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ relativo a um PL na forma padrão (A $m \times n$).

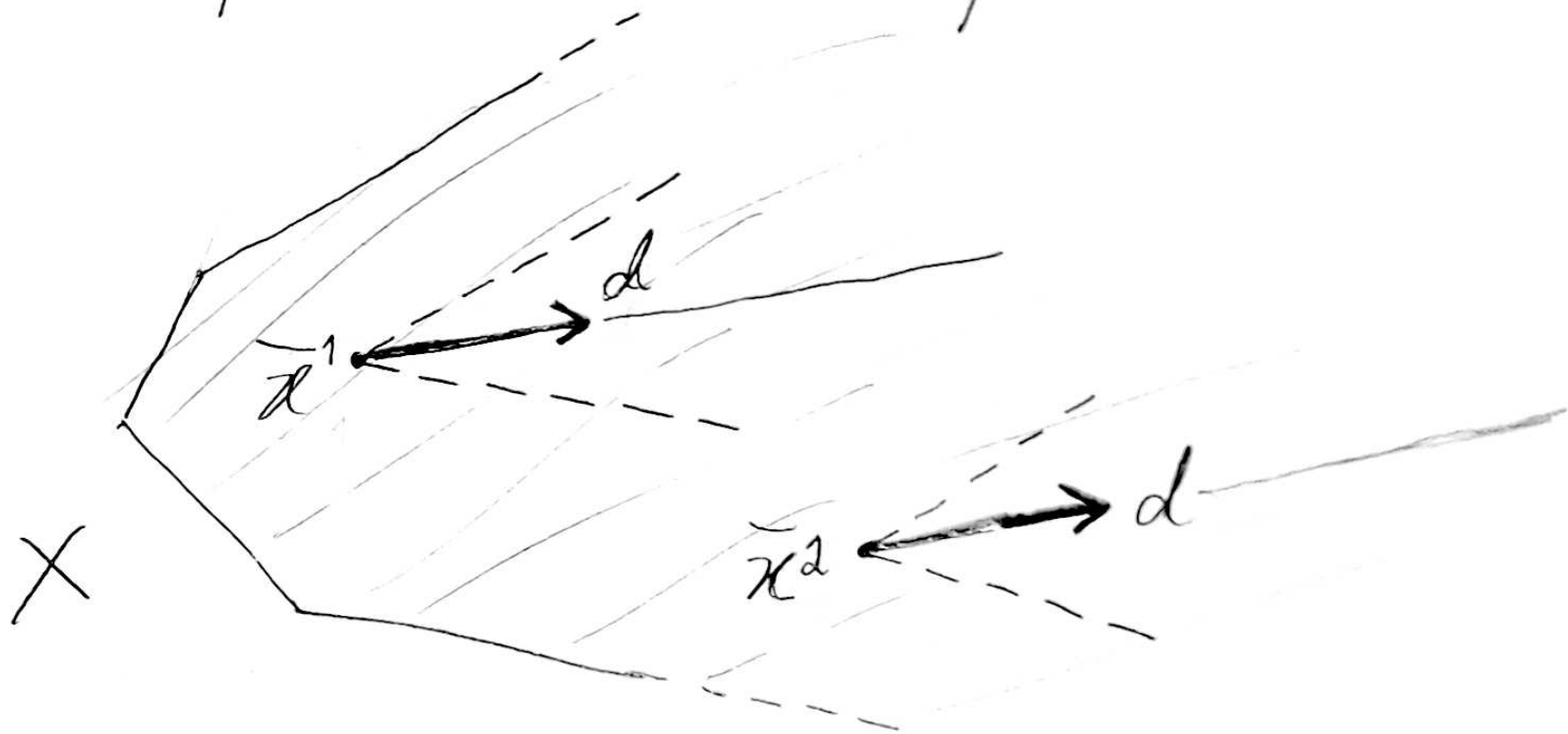
Geometricamente, é mais fácil requalizar o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b, x \geq 0\}$, mas a forma com "=" é algebricamente melhor.

$Ax \leq b$:



Dois elementos fundamentais: vértice e direção

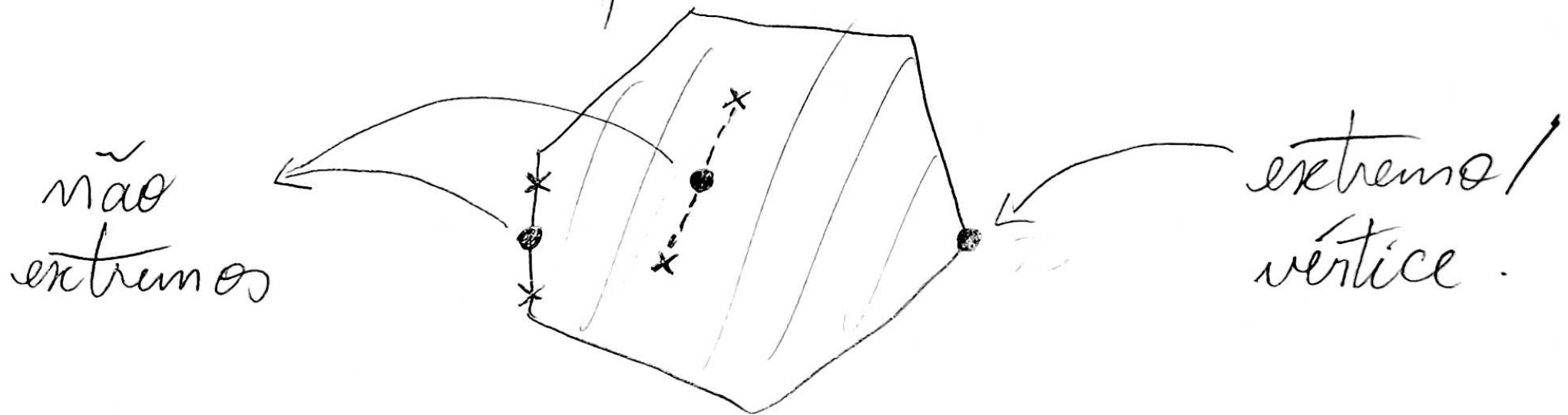
- Uma direção de X é um vetor $d \neq 0$ tal
que
$$\{\bar{x} + \mu d\} \subset X, \quad \forall \mu \geq 0, \quad \forall \bar{x} \in X.$$



- Um vértice (ou ponto extremo) de X [3]
é um ponto $x \in X$ que não pode ser
escrito como a combinação convexa

$$x = \frac{1}{2} \bar{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}$$

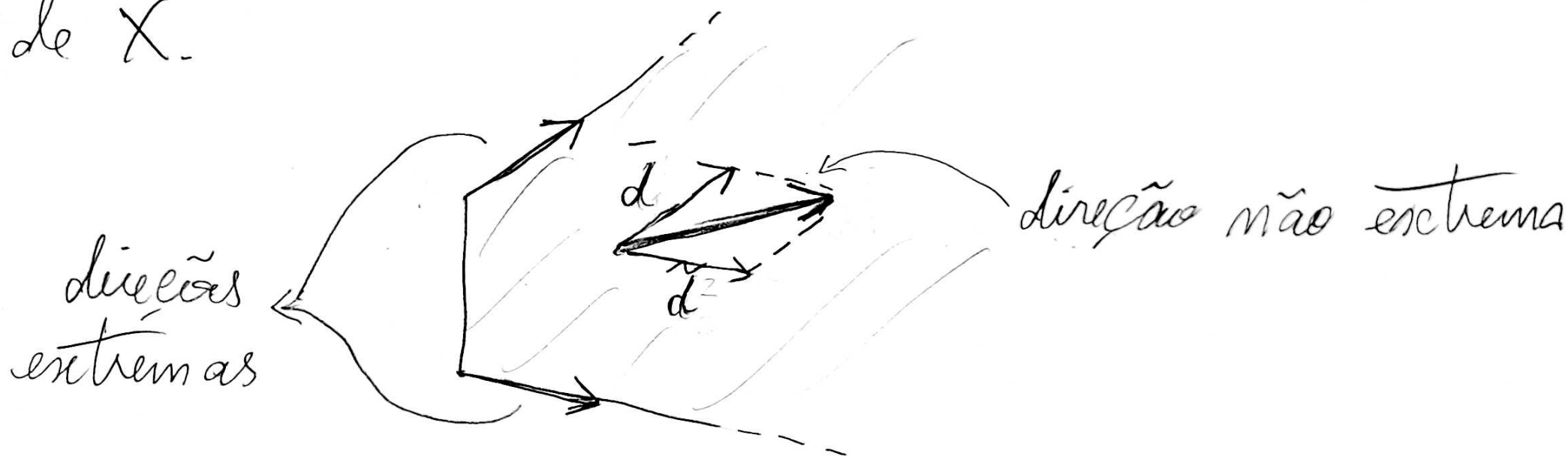
de outros dois pontos $\bar{x} \neq x$ e $\tilde{x} \neq x$ de X .



- Uma direção d de X é direção extrema /4 de X se não pode ser escrita com uma combinação positiva

$$d = \mu_1 \bar{d} + \mu_2 \tilde{d}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

de outras duas direções \bar{d} e \tilde{d} não colineares de X .



Geometricamente, as direções extremas 15
são as direções das "arestas ilimitadas" de
 X .

Veja que se d é direção de X então
 μd também é direção de X , $\forall \mu > 0$.

Assim, podemos considerar apenas as direções
normalizadas (pela norma $\|\cdot\|_1$):

$$\|d\|_1 = |d_1| + \dots + |d_m| = 1.$$

Algebricamente:

16

(i) um vértice x de $X = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ está associado a uma solução básica viável:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$A = [B \ N]$, B matriz $m \times m$ invertível (base) tal que $B^{-1}b \geq 0$ e N matriz $m \times (n - m)$.

Obs: estamos supondo $m > n$ e posto $A = m$.

(ii) uma direção d de X é caracterizada [7]

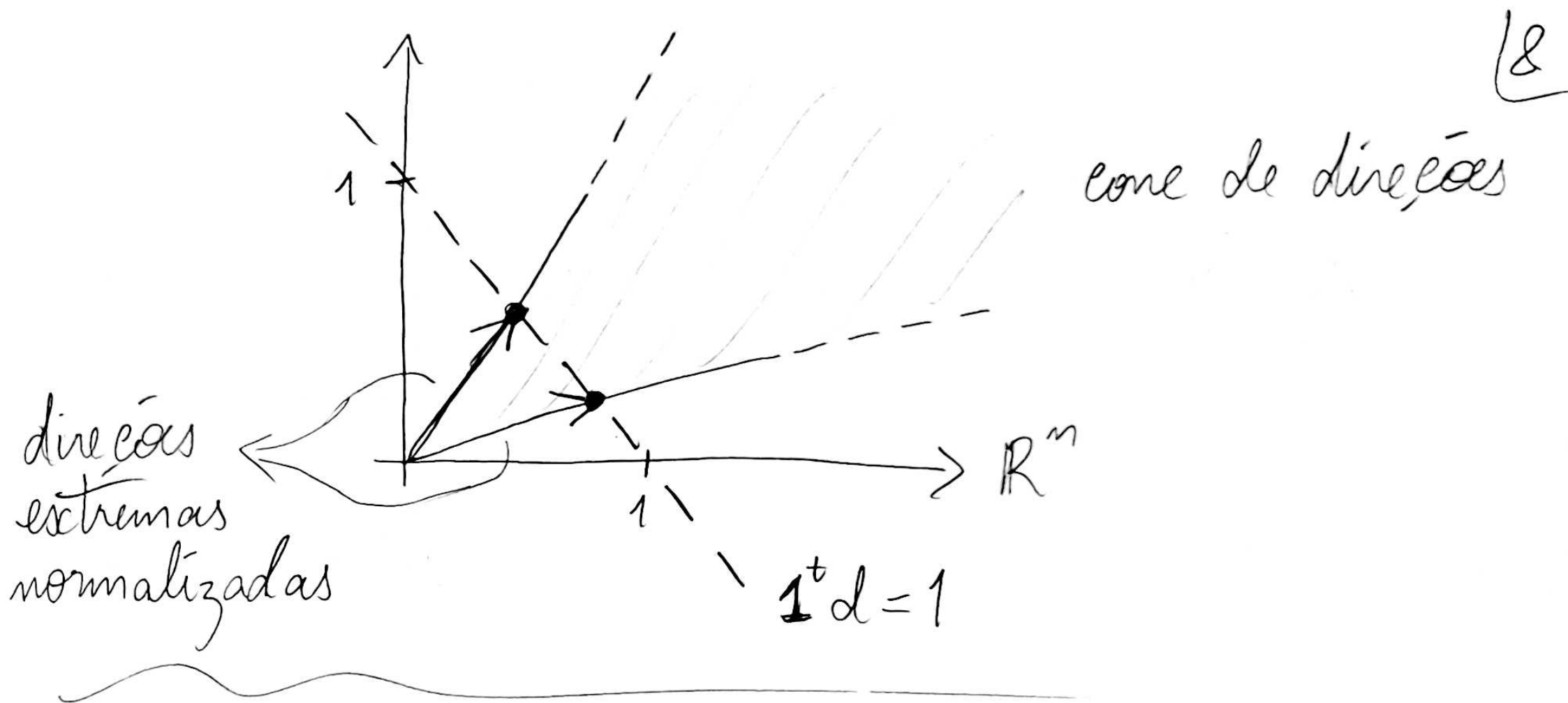
por

$$d \neq 0, \quad d \geq 0, \quad Ad = 0.$$

(verifique!)

(iii) as direções extremas (normalizadas) de X são os pontos extremos $\neq 0$ do poliedro

$$\{d \in \mathbb{R}^m; \quad Ad = 0, \quad \mathbf{1}^t d = 1, \quad d \geq 0\}.$$



Os itens (i) e (iii) mostram que temos apenas um número finito de vértices e de direções extremas normalizadas!

Teorema: Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ 19
nãõ vazio.

(i) X admite pontos extremos, e estes são em quantidade finita.

(ii) X admite direção $\Leftrightarrow X$ é ilimitado.

(iii) Se X é ilimitado, o número de direções extremas normalizadas é ≥ 1 e finito.

(iv) (representação de poliedros)

10

Qualquer $x \in X$ pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos x_1, \dots, x_k de X mais uma combinação não negativa das direções extremas normalizadas d_1, \dots, d_ℓ de X , isto é, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^k$ e $\exists \mu \in \mathbb{R}^\ell$ tais que

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i d_i, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Método Simplex

111

PL na forma padrão: (PL) $\min c^t x$
s.a. $Ax = b$
 $x \geq 0$

A $m \times n$, posto $A = m < n$.

- $X = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ é conjunto viável.
- x_1, \dots, x_k pontos extremos de X
- d_1, \dots, d_ℓ direções extremas normalizadas de X .

Pelo teorema anterior, item (iv), PL pode ser escrito como (12)

$$(PL) \quad \min \sum_{j=1}^K (c^t x_j) \lambda_j + \sum_{i=1}^l (c^t d_i) \mu_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^K \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, K$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i=1, \dots, l.$$

Supon $X \neq \emptyset$.

Mostrar que

13

- PL admite solução ótima $\Leftrightarrow c^t d_i \geq 0, \forall i$
 \hookrightarrow De fato, se $c^t d_i < 0$ para algum i , então a F.O. $\rightarrow -\infty$ fazendo $\mu_i \rightarrow \infty$.
-

- Se PL admite solução ótima, uma é um dos vértices x_1, \dots, x_k .
 \hookrightarrow De fato, neste caso $\mu_i^* = 0, \forall i, \lambda_j^* = 1$ para $j \in \arg \min_{1 \leq i \leq k} c^t x_i$ e $\lambda_i^* = 0$ para $i \neq j$.

O método Simplex declara problema ilimitado ¹⁴ ou encontra um vértice ótimo através da descrição de vértices como soluções básicas viáveis:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$A = [B \ N]$, B $m \times m$ invertível.

- x_B : variáveis básicas (VB's)
- x_N : variáveis não básicas (VNB's)
- B : base ; • R : conj. índices VNB's.

Álgebra do Simplex:

15

$$(PL) \min z = C_B^T x_B + C_N^T x_N$$

$$\text{s.a. } Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0.$$

$$\bullet x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j,$$

onde a_j é a coluna j de A . Chamando

$$\bar{b} = B^{-1}b \text{ e } y_j = B^{-1}a_j, \text{ temos}$$

$$x_B = \bar{b} - \sum_{j \in R} y_j x_j.$$

16

• A F.O. em $x = (x_B, x_N)$ é

$$z = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t \left(\bar{b} - \sum_{j \in R} y_j x_j \right) + \sum_{j \in R} c_j x_j$$

$$= z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j,$$

onde $z_0 = c_B^t \bar{b} = c_B^t B^{-1} b$ e $z_j = c_B^t y_j = c_B^t B^{-1} a_j.$

Assim,

$$(PL) \min z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = \bar{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in R$$

$$x_B \geq 0.$$

Alhando x_B como folga, podemos dercanta-lo
obtenendo o modelo só nas VNB's:

$$(PL) \quad \min z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in R} y_j x_j \leq \bar{b}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in R.$$

Como $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$, temos:

- $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R \Rightarrow x$ ótimo para PL.
- se $z_j - c_j > 0$ para algum $j \in R$, podemos tentar diminuir a F.O. aumentando o valor

da VNB x_j de 0 para > 0 (pivoteamento). (19)

Comentar quanto?

Suponha que $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$ seja

solução básica viável e $z_j - c_j > 0$ para um certo $j \in R$. Mantendo todas as VNB's x_i , $i \in N$, $i \neq j$, iguais a zero e aumentando apenas x_j , o novo x_B será

$$x_B = \bar{b} - y_j x_j$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} x_j$$

A fim de manter $x_B \geq 0$, devemos tomar

$$x_j = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} ; y_{ij} > 0 \right\}.$$

Note que se $y_{ij} \leq 0, \forall i$, então podemos 21
tomar $x_j \geq 0$ qualquer \Rightarrow PL ilimitado ($x_j \rightarrow \infty$)

Note também que $x_{B_n} = \bar{b}_n - y_{nj} x_j = \bar{b}_n - y_{nj} \frac{\bar{b}_n}{y_{nj}}$
 $\Rightarrow x_{B_n} = 0$. Assim, x_{B_n} vira VNB valendo

zero. Neste processo:

1) x_j entra na base

2) x_{B_n} sai da base

3) nova base: $B \leftarrow [a_{B_1} \dots a_{B_{n-1}} a_j a_{B_{n+1}} \dots a_{B_m}]$

Obs.: pode-se escolher qualquer VNB com $z_j - c_j > 0$ para entrar na base. Geralmente escolhe-se aquele com "maior ganho" na FO:

$$k \in N \text{ tal que } z_k - c_k = \max_{j \in R} \{z_j - c_j\}.$$

Resumindo (método Simplex)

(i) se $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, então PL está resolvido, com ótimo $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) caso contrário, escolha uma VNB x_j com ¹²³
 $z_j - c_j > 0$ para entrar na base.

(iii) Se $y_{ij} \leq 0, \forall i=1, \dots, m$, pare: PL é
ilimitado. Caso contrário, tome a VB x_{B_n}

com

$$\frac{\bar{b}_n}{y_{nj}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} ; y_{ij} > 0 \right\}$$

para sair da base.

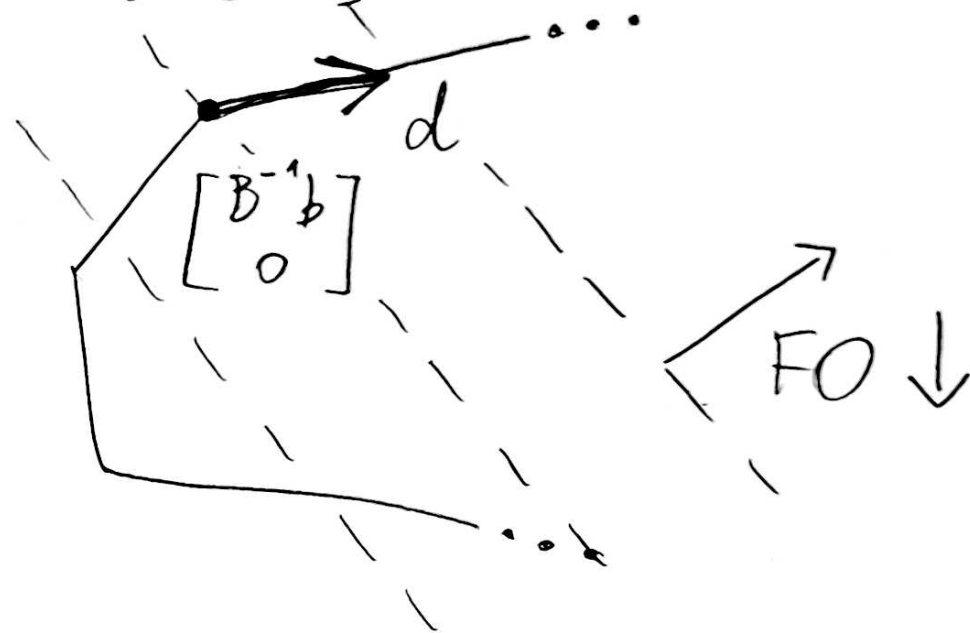
(iv) Faça a mudança de base tomando a nova VB como $x_j = \frac{\bar{b}_n}{y_{nj}} \geq 0$ e a nova VNB $x_{B_n} = 0$. (24)

Observações:

- no caso de PL ilimitado ($z_j - c_j > 0$ e $y_j \leq 0$), o vetor

$$d_j = \begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{normalizado})$$

é direção extrema emanando da solução básica viável $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ onde a FO $\rightarrow -\infty$. (25)



De fato, $Ad_j = [B \ N] \begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} = -By_j + Ne_j$

$= -BB^{-1}a_j + a_j = 0$ e \dots

$$c^t d_j = [c_B^t \quad c_N^t] \begin{bmatrix} -y_j \\ e_j \end{bmatrix} = -c_B^t y_j + c_N^t e_j$$

(26)

$$= -(z_j - c_j) < 0 \quad (d_j \text{ é direção de descida})$$

- o processo de mudança de base pode ser feito no "quadro Simplex" (pivoteamento)

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$c_B^t B^{-1} N - c_N^t$	$c_B^t \bar{b}$
x_B	0	I_m	$B^{-1} N$	\bar{b}

- Para iniciar o método com uma solução básica viável (caso exista), utilizamos o método de duas fases, que insere variáveis artificiais x_a ($Ax + x_a = b$), e inicia com $B = I_m$ relativa às VB's x_a .
-

- O método de duas fases identifica se o PL é inviável ($x_a^* \neq 0$ na FASE 1).