PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL (PQS / SQP)

PROBLEMA SÓ COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE:

$$P: \quad \min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x) = 0 \quad , \qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

KKT:

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) = 0$$

$$h(x) = 0 .$$

FUNÇÃO LAGRANGEANO (LAGRANGEANA):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) .$$

KKT É REESCRITO COMO

$$\nabla_x L(x,\lambda) = 0 \,, \qquad h(x) = 0 .$$

EM SQP, PROCURAMOS APLICAR NEWTON NO SISTEMA KKT

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

O PASSO DE NEWTON CONSISTE EM RESOLVER O SISTEMA LINEAR (EM d)

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x,\lambda) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ h(x) \end{bmatrix}$$

ASSIM,

$$\begin{cases} \nabla^2 L(x,\lambda)\, d_x + \nabla h(x)\, d_\lambda = -\nabla_x L(x,\lambda) \\ \nabla h(x)^T d_x = -h(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x)\right] d_x + \nabla h(x)\, d_\lambda^+ = -\nabla f(x) \\ \nabla h(x)^T d_x = -h(x) \end{cases} \qquad (1)$$

ONDE $\quad d_\lambda^+ = d_\lambda + \lambda\,.$

ESSE SISTEMA REPRESENTA AS CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DO PROBLEMA QUADRÁTICO

$$QP: \quad \min_{d_x} \ \frac{1}{2} d_x^T \left[\nabla^2 f(x) + \sum \lambda_i \nabla^2 h_i(x) \right] d_x + \nabla f(x)^T d_x$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0 .$$

DE FATO, FAZENDO KKT DESTE PROBLEMA, TEREMOS (1) ONDE d_λ^+ FAZ O PAPEL DE MULTIPLICADOR DA RESTRIÇÃO $\nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0$.

<u>IDEIA:</u> TROCAR A RESOLUÇÃO DE P POR UMA <u>SEQUÊNCIA</u> DE PROBLEMAS QUADRÁTICOS COMO ACIMA. GOSTARÍAMOS QUE QP FOSSE CONVEXO... PODEMOS TROCAR A MATRIZ

$\nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x)$, QUE PODE SER NÃO SEMI-DEF. POSITIVA,

POR UMA MATRIZ H DEFINIDA POSITIVA (E SIMÉTRICA).

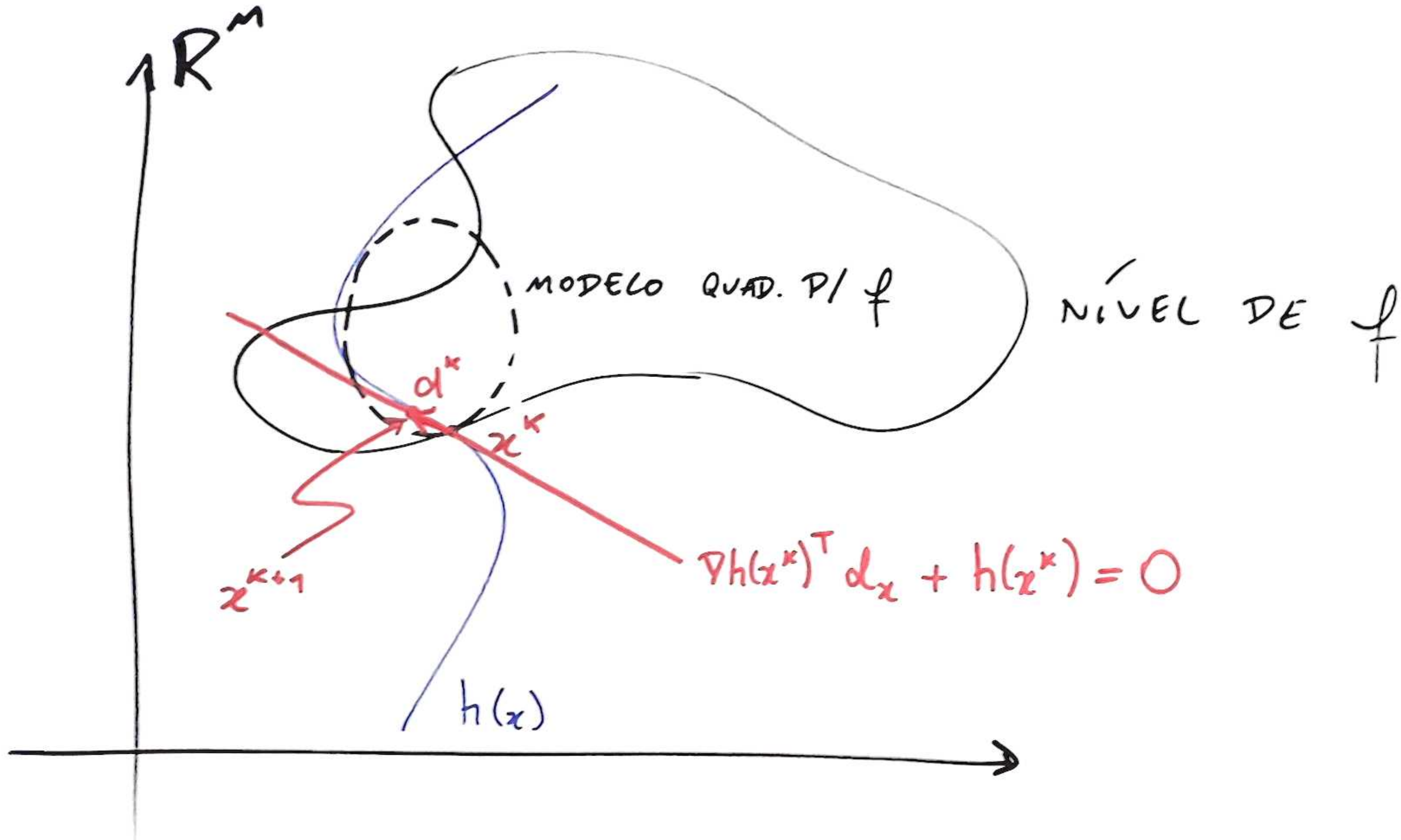
OU SEJA, QUEREMOS RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS

$$QP: \quad \min_{d_x} \ \frac{1}{2} d_x^T H d_x + \nabla f(x)^T d_x$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0$$

(LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES)

NOTE QUE x ESTÁ FIXO NESSE MODELO, A RESOLUÇÃO É EM d_x. OU SEJA, DADO x^k, CALCULA-SE d_x^k COMO SOLUÇÃO DE QP, E REALIZA-SE O PASSO $x^{k+1} = x^k + d_x^k$. REPETE-SE O PROCESSO...



$\mathbb{R}^n$
MODELO QUAD. P/ f
NÍVEL DE f
d^k
x^k
x^{k+1}
$\nabla h(x^k)^T d_x + h(x^k) = 0$
$h(x)$

A MATRIZ H^k DA ITERAÇÃO k PODE SER ATUALIZADA

- POR ESTRATÉGIAS QUASE-NEWTON (BFGS, DFP...)

- COMPUTAR A HESSIANA VERDADEIRA $\nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k)$ E ESTIMAR SEU MENOR AUTOVALOR μ_{min}. SE $\mu_{min} > 0$, H^k IGUAL A ESTA HESSIANA. CASO CONTRÁRIO, TOMO $H^k = \left(\nabla^2 f + \sum \lambda_i \nabla^2 h_i\right) + \sigma I$, COM $\sigma > 0$ GRANDE O SUFICIENTE (UM σ DESSES PODE SER OBTIDO POR DISCOS DE GERCHIGORIN (?)).

SQP BÁSICO

INICIALIZAÇÃO: (x^0, λ^0) QUALQUER. $K = 0$.

1) CALCULE A MATRIZ H^K.

2) RESOLVA O PROBLEMA QUADRÁTICO

$$\min_{d_x} \ \frac{1}{2} d_x^T H^K d_x + \nabla f(x^K)^T d_x$$
$$\text{s.a.} \ \nabla h(x^K)^T d_x + h(x^K) = 0 .$$

A SOLUÇÃO DO SISTEMA KKT DESTE PROBLEMA FORNECE UMA DIREÇÃO d_x^K E UM MULTIPLICADOR DE LAGRANGE $d_\lambda^{+,K}$.

3) FAÇA $x^{K+1} = x^K + d_x^K$ E $\lambda^{K+1} = \lambda^K + d_\lambda^{+,K}$. FAÇA $K \leftarrow K+1$ E VOLTE AO PASSO 1.

COMENTÁRIOS SOBRE CONVERGÊNCIA.

1) SE $H^k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k) \quad \forall k$, ENTÃO A VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA É A DE NEWTON (ORDEM DE CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA).

2) EXISTEM ESTRATÉGIAS QUE GARANTEM QUE ESSE MÉTODO CONVIRJA GLOBALMENTE, OU SEJA, VAI PARA SOLUÇÃO A PARTIR DE QUALQUER PONTO INICIAL (x^0, λ^0) (ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA OU CONTROLE DO TAMANHO DO PASSO — BUSCA LINEAR COM ARMIJO).

3) HÁ PROBLEMAS NUMÉRICOS COM ESSE ESQUEMA BÁSICO QUE

SÃO CONTORNADOS COM GAMBIARRAS (P. EX. SQP "ESTABILIZADO")

OBS.: ALGUNS PACOTES COMPUTACIONAIS IMPLEMENTAM ESTRATÉGIAS SQP...

- SNOPT: HÁ UMA VERSÃO DEMONSTRAÇÃO (LIMITADA) JUNTO DO AMPL.
- WORHP (WE OPTMIZE REALLY HUGE PROBLEMS)

  PAGO PARA INICIATIVA PRIVADA.

  HÁ LICENÇA COMPLETA PARA ACADEMIA.
- MATLAB TRAZ UM SQP.
- JULIA "LANGUAGE PROG".

COMO NA ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA, QP SÓ DESCREVE DE MANEIRA RAZOÁVEL O PROBLEMA ORIGINAL

$$\min f(x) \quad \text{s.a. } h(x) = 0$$

"PRÓXIMO" À x^k. ISTO É, DEVEMOS TER CUIDADO COM PASSOS GRANDES ($\|d_x^k\|$ GRANDE)

CONTROLAMOS FAZENDO:

1) CONTROLE DE PASSO (ARMIJO EM UMA FUNÇÃO QUE BALANCEIA DIMINUIÇÃO DE f COM AUMENTO DA VIABILIDADE — — FUNÇÃO DE MÉRITO).

2) REGIÃO DE CONFIANÇA PARA d_x: $\|d_x\|_\infty \leq \Delta_k$.

NOVO SUBPROBLEMA:

$$QP'' : \min_{d_x} \ \frac{1}{2} d_x^T H_k d_x + \nabla f(x^k)^T d_x$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x^k)^T d_x + h(\underline{x^k}) = 0$$

$$\underbrace{\|d_x\|_\infty \leq \Delta_k}_{\displaystyle -\Delta_k \leq d_{x,i} \leq \Delta_k, \ \forall i}.$$

OBS: SE Δ_k FOR PEQUENO, QP'' PODE SER INVIÁVEL. SOLUÇÃO: GAMBIARRA.