Capítulo 2

Sistemas Lineares

Uma *equação linear* nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma equação do tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ onde os a_i's e b são escalares. Um *sistema de equações lineares* (ou simplesmente um *sistema linear*) com m equações e n incógnitas é dado por

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Uma *solução* do sistema linear (2.1) é uma lista de n números $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz cada uma de suas m equações.

Tomando $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, podemos escrever o sistema (2.1) na forma matricial

$$AX = B.$$

Neste caso, A é dita *matriz dos coeficientes* de (2.1); X é dita *matriz das incógnitas* de (2.1) e B é dita *matriz dos termos independentes* de (2.1). Em particular, se $B = \mathbf{0}$ então o sistema $AX = \mathbf{0}$ é dito *sistema homogêneo.* Considerando a forma matricial de um sistema linear, diremos também que a matriz X_0 é *solução* do sistema $AX = B$ se $AX_0 = B$.

A matriz

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

é a *matriz ampliada* do sistema (2.1).

2.1 Operações e matrizes elementares

Numa matriz A de ordem $m \times n$, consideramos três operações sobre suas **linhas**:

(i) troca da linha i com a linha j $(i \neq j)$. Indicaremos essa operação por $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) multiplicação da linha i por um número real $k \neq 0$ $(L_i \to kL_i)$.

(iii) substituição da linha i pela linha i somada ao múltiplo k da linha j $(i \neq j)$. Neste caso pode-se ter $k = 0$. Indicaremos essa operação por $L_i \to L_i + kL_j$.

As três operações acima são chamadas *operações elementares.*

Exemplo 2.1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

- realizemos a operação elementar $L_1 \leftrightarrow L_2$ sobre A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \to A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar $L_3 \to 2L_3$ sobre A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \to A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

- realizemos a operação elementar $L_2 \to L_2 + 3L_1$ sobre A_2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Definição 2.1. *Sejam A e C matrizes de mesma ordem. Dizemos que C é* linha equivalente *à A se C pode ser obtida de A pela aplicação de finitas operações elementares.*

Assim, no exemplo anterior C é linha equivalente à matriz A.

O estudo de matrizes equivalentes é útil na resolução de sistemas lineares. Diremos que dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ que possuem as mesmas soluções são *equivalentes.* Nesse contexto, temos o

Teorema 2.1. *Dois sistemas lineares cujas matrizes ampliadas são linha equivalentes são equivalentes.*

Em outras palavras, o Teorema anterior afirma que ao aplicarmos operações elementares sobre a matriz ampliada de um sistema, mantemos soluções do sistema. Logo, podemos resolver um sistema linear transformando-o em um sistema mais fácil, como no exemplo a seguir. **Essa é a justificativa para o processo de escalonamento.**

Exemplo 2.2. Considere o sistema linear

$$S : \left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & & +x_3 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Apliquemos operações elementares em sua matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[]{\substack{L_3 \to L_3 + L_2 \\ L_1 \to 1/2 L_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[]{\substack{L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2L_3}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to 1/2 L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right] = [C|D].$$

O sistema $CX = D$ dado por

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} x_1 & & & = & 3/2 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1/2 \end{array} \right.$$

é equivalente ao sistema original S, e claramente tem única solução $(3/2, 1, -1/2)$. Portanto o sistema inicial S tem esse terno como única solução. □

A última matriz $[C|D]$ do exemplo anterior tem uma forma interessante pois o sistema associado é de fácil resolução. A fim de resolver sistemas lineares de uma forma geral, procuraremos formalizar a estrutura dessa matriz.

Definição 2.2. *Uma matriz A de ordem $m \times n$ é* matriz linha reduzida à forma escada *(MLRFE) satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) O primeiro elemento não nulo (da esquerda para a direita) de uma linha não nula é 1 (esse é o elemento líder *da linha);*

(ii) Cada coluna que contém o líder de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos;

(iii) Toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;

(iv) Se as linhas $1, 2, \ldots, r$ são as linhas não nulas de A, e se o líder da linha i ocorre na coluna k_i, $i = 1, \ldots, r$, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ (forma escada).

Exemplo 2.3. São matrizes linha reduzidas à forma escada:

- $\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right]$
- $\left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$
- I_n
- $\mathbf{0}_{m \times n}$

□

Teorema 2.2. *Toda matriz A é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.*

O Teorema acima diz que o processo de escalonamento feito no exemplo anterior é universal: ele **sempre** é possível, para **qualquer** sistema linear.

Relacionaremos agora operações elementares com produtos de matrizes.

Definição 2.3. *Uma matriz A quadrada de ordem n é dita* elementar *se pode ser obtida da identidade I_n por uma única operação elementar.*

Exemplo 2.4. São exemplos de matrizes elementares:

- $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \leftrightarrow L_2$ em I_3)
- $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \to 2L_1$ em I_2)
- $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2$ em I_3)

□

Quando convenienete, denotaremos por $e(A)$ a matriz resultante da aplicação da operação elementar e sobre a matriz A.

Teorema 2.3. *Seja e uma operação elementar e $E = e(I_m)$ a matriz elementar correspondente. Então para toda matriz A de ordem $m \times n$ temos*

$$e(A) = EA.$$

Em outras palavras, o Teorema 2.3 diz que aplicar uma operação elementar em A é o mesmo que multiplicar A a esquerda pela matriz elementar correspondente.

Cada matriz elementar é inversível, e sua inversa é a **matriz elementar correspondente à operação que desfaz** a original:

- a operação $L_i \to \frac{1}{k} L_i$ desfaz a operação $L_i \to kL_i$. Assim por exemplo, se $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ então $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$ (verifique este fato constatando que $EE^{-1} = I_2$).
- a operação $L_i \to L_j$ desfaz a própria operação $L_i \to L_j$. Assim por exemplo, se $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $E^{-1} = E$ (verifique!).
- a operação $L_i \to L_i - kL_j$ desfaz a operação $L_i \to L_i + kL_j$. Assim por exemplo, se $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ então $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (verifique!).

Atividade 2.1. Faça exemplos de inversas de matrizes elementares de ordem 3. Mostre que em geral matrizes elementares tem inversas descritas anteriormente.

Uma consequência imediata do Teorema 2.3 é o seguinte:

Corolário 2.1. *Sejam A e B matrizes de mesma ordem. Então B é linha equivalente a A se, e somente se $B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$ para certas matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$.*

Exemplo 2.5. Mostre que são linha equivalentes as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular a MLRFE de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to 1/3 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, sendo $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ as matrizes elementares correspondentes às operações realizadas, temos

$$C = E_2 E_1 A.$$

Agora, calculemos a MLRFE de B:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to 1/9 L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to 1/6 L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Sendo $E_3 = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$ temos

$$C = E_2 E_4 E_3 B,$$

e assim $E_2 E_4 E_3 B = E_2 E_1 A \Rightarrow E_4 E_3 B = E_2^{-1} E_2 E_1 A \Rightarrow \cdots \Rightarrow B = E_3^{-1} E_4^{-1} E_1 A$. Pelo Corolário anterior, B é linha equivalente à A. □

Em particular, se B é matriz quadrada de ordem n, linha equivalente à I_n, então $B = E_k \cdots E_1 I_n$. O produto $E_k \cdots E_1 = A$ é inversível com inversa $A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ (verifique!). Assim, $B = A I_n \Rightarrow A^{-1} B = I_n$, e B é inversível com inversa $B^{-1} = A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. **Concluímos então que se B é linha equivalente à I_n** (ou equivalentemente, se B é produto de matrizes elementares) **então B é inversível.**

A recíproca deste fato também é verdadeira, isto é, se B é inversível então é linha equivalente a I_n (Exercício 9, lista 2). Resumindo esse fato e considerando o Corolário 2.1, temos o

Teorema 2.4. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes as afirmações:*

(*i*) *A é inversível.*

(*ii*) *A é linha equivalente à I_n.*

(*iii*) *$A = E_k \cdots E_1$, para certas matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$.*

Com as operações e matrizes elementares, estabeleceremos uma maneira de

1. Resolver um sistema linear;
2. Inverter uma matriz, ou constatar que não há inversa.

Veremos isso nas seções seguintes.

2.2 Resolução de sistemas lineares

A possibilidade de simplificação da matriz ampliada de um sistema linear para a forma reduzida, garantida pelo Teorema 2.2, resulta em um processo sistemático para resolução de qualquer sistema linear.

Este processo (de escalonamento) nos fornecerá:

- as soluções do sistema, caso existam;
- se o sistema possui única ou várias soluções;
- se o sistema não possui solução.

O estudo da quantidade/existência de soluções está relacionado com a noção de *posto* e *nulidade* das matrizes associadas ao sistema linear.

Definição 2.4. *Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, seja B sua MLRFE. Então o* posto *de A é o número de linhas não nulas de B. A* nulidade *de A é o número $n - p$, onde p é o posto de A.*

Exemplo 2.6. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$. A MLRFE de A é a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto o posto de A é 2, e a nulidade de A é $3 - 2 = 1$. □

Exemplo 2.7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$. A MLRFE de A é a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto o posto de A é 2, e a nulidade de A é $3 - 2 = 1$. □

Teorema 2.5. *Seja $AX = B$ um sistema linear, com m equações e n incógnitas (A tem ordem $m \times n$). Então*

(i) $AX = B$ admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada $[A|B]$ é igual ao posto da matriz dos coeficientes A.

(ii) Se A e $[A|B]$ têm mesmo posto $p = n$ então $AX = B$ tem única solução.

(iii) Se A e $[A|B]$ têm mesmo posto $p < n$ então $AX = B$ tem infinitas soluções. Dizemos neste caso que a nulidade de A é o grau de liberdade *de $AX = B$.*

Exemplo 2.8. Para cada sistema linear abaixo, diga se há ou não solução e, caso possua, se é única, infinitas; neste caso, calcule-as (faremos durante a aula):

(a) $S : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

Calculemos a MLRFE da matriz ampliada do sistema, escalonando-a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_2]{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vemos que o número de linhas não nulas da MLRFE da matriz ampliada e da MLRFE da matriz dos coeficientes (as três primeiras colunas da última matriz acima) são iguais a 3. Ou seja,

$$p = \text{posto}\,[A|B] = \text{posto}\,A = 3 = n.$$

Pelo Teorema 2.5(ii), o sistema S admite única solução. O sistema equivalente, associado à MLRFE da ampliada, é

$$S' : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & -5 \\ & x_2 & & = & 3 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array} \right. ,$$

cuja solução é $X = (-5, 3, 1)$. Geometricamente, o sistema original S é a interseção de três planos 2 a 2 não paralelos.

(b) $S : \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ & +x_2 & +x_3 & & = & 2 \end{array} \right.$

Primeiro escalonamos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Vemos que o número de linhas não nulas na matriz ampliada escalonada é 3, igual ao número de linhas não nulas da matriz dos coeficientes escalonada (as quatro primeiras colunas da última matriz acima). Ou seja,

$$p = \text{posto}\,[A|B] = \text{posto}\,A = 3 < 4 = n.$$

Pelo Teorema 2.5(iii), o sistema S admite infinitas soluções. Para encontrá-las, consideramos o sistema escalonado, proveniente da forma reduzida da matriz ampliada,

$$S' : \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & -x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & +2x_4 & = & 1 \\ & & +x_3 & -2x_4 & = & 1 \end{array} \right. ,$$

cujo *conjunto solução* é

$$\{X \in \mathbb{R}^4 \mid X = (\,-1 + x_4\,,\, 1 - 2x_4\,,\, 1 + 2x_4\,,\, x_4\,),\ x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Veja que a nulidade desse sistema é $n - p = 1$, o que indica que temos "1 grau de liberdade", isto é, podemos escolher *qualquer* valor para uma das variáveis (no conjunto acima, x_4), obtendo várias soluções. Assim, x_4 faz o papel de variável livre, enquanto as demais estão em função de x_4.

É interessante observar a geometria do conjunto solução: trata-se de uma reta em $\mathbb{R}^4$, passando pelo ponto $(-1, 1, 1, 0)$ na direção do vetor $(1, -2, 2, 1)$.

(c) $S : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & = & 0 \end{array} \right.$

Escalonemos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{2}L_2]{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, as matrizes reduzidas à forma escada da ampliada e da matriz dos coeficientes são, respectivamente,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

Essas matrizes têm posto diferente: a primeira tem posto 3, e a segunda, 2. Do Teorema 2.5(i), concluímos que o sistema S não possui solução.

$\square$

2.3 Um processo para inversão de matrizes

Sabemos que uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$, onde $E_1^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ são matrizes elementares. Neste caso,

$$E_k \cdots E_1 A = I \quad \text{e} \quad A^{-1} = E_k \cdots E_1 I.$$

Assim, aplicando as operações elementares relativas às matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ sobre $[A|I]$, obtemos a sequência

$$[A|I] \xrightarrow{E_1} [E_1 A | E_1 I] \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_k} [E_k \cdots E_1 A | E_k \cdots E_1 I] = [I | A^{-1}].$$

Em outras palavras, A é inversível se, e somente se $[A|I]$ é linha equivalente a uma matriz $[I|S]$, e neste caso $A^{-1} = S$.

Exemplo 2.9. Calcular a inversa de cada matriz abaixo, se existir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_2]{L_2 \to L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}]{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \to 1/2 L_3 \\ L_1 \to L_1 + L_3}]{L_2 \to 1/2 L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right].$$

Logo $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

$$[B|I_2] = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Observe que a MLRFE de B é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$, e daí B não é inversível.

□

2.4 Exercícios

Veja a lista de exercícios 2.

2.5 Demonstrações

Demonstração do Teorema 2.1. Seja $AX = B$ um sistema linear. É suficiente mostrar que cada uma das três operações elementares sobre $[A|B]$ resulta num sistema linear $CX = D$ com as mesmas soluções de $AX = B$. Façamos a prova para a operação $L_i \to L_i + kL_j$ $(i \neq j)$ e deixamos as outras duas como exercício. Supomos que ao realizar a operação $L_i \to L_i + kL_j$ sobre $[A|B]$, obtemos a matriz linha equivalente $[C|D]$. Comparando os sistemas $AX = B$ e $CX = D$, vemos que a única diferença está na linha i:

- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ é a linha i de $AX = B$;
- $(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = (b_i + kb_j)$ é a linha i de $CX = D$;

Então,

$$\begin{gathered}
(x_1, \ldots, x_n) \text{ é solução de } CX = D \\
\Updownarrow \\
(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = (b_i + kb_j), \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
\Updownarrow \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i - k\underbrace{(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - b_j)}_{0}, \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \neq i \\
\Updownarrow \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \forall k \\
\Updownarrow \\
(x_1, \ldots, x_n) \text{ é solução de } AX = B,
\end{gathered}$$

isto é, $CX = D$ e $AX = B$ têm as mesmas soluções. □

Atividade 2.2. Complete a prova do teorema anterior fazendo a demonstração para as operações $L_i \leftrightarrow L_j$ e $L_i \to kL_i$.

Demonstração do Teorema 2.3. Deixamos a prova do resultado para as operações $L_i \leftrightarrow L_j$ e $L_i \to kL_i$ para o leitor. Seja e a operação $L_i \to L_i + kL_j$ $(i \neq j)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $i = 1$ e $j = 2$. Assim

$$
\begin{aligned}
EA &= \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} & \cdots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = e(A).
\end{aligned}
$$

□

Atividade 2.3. Complete a prova do teorema anterior.

Referências Bibliográficas

[1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações.* Bookman, 2010.

[2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear.* Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.

[3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear.* Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.

[4] David Lay. *Álgebra Linear.* LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.

[5] David Poole. *Álgebra linear.* Thonsom Learning, São Paulo, 2006.