

MÉTODO DE NEWTON

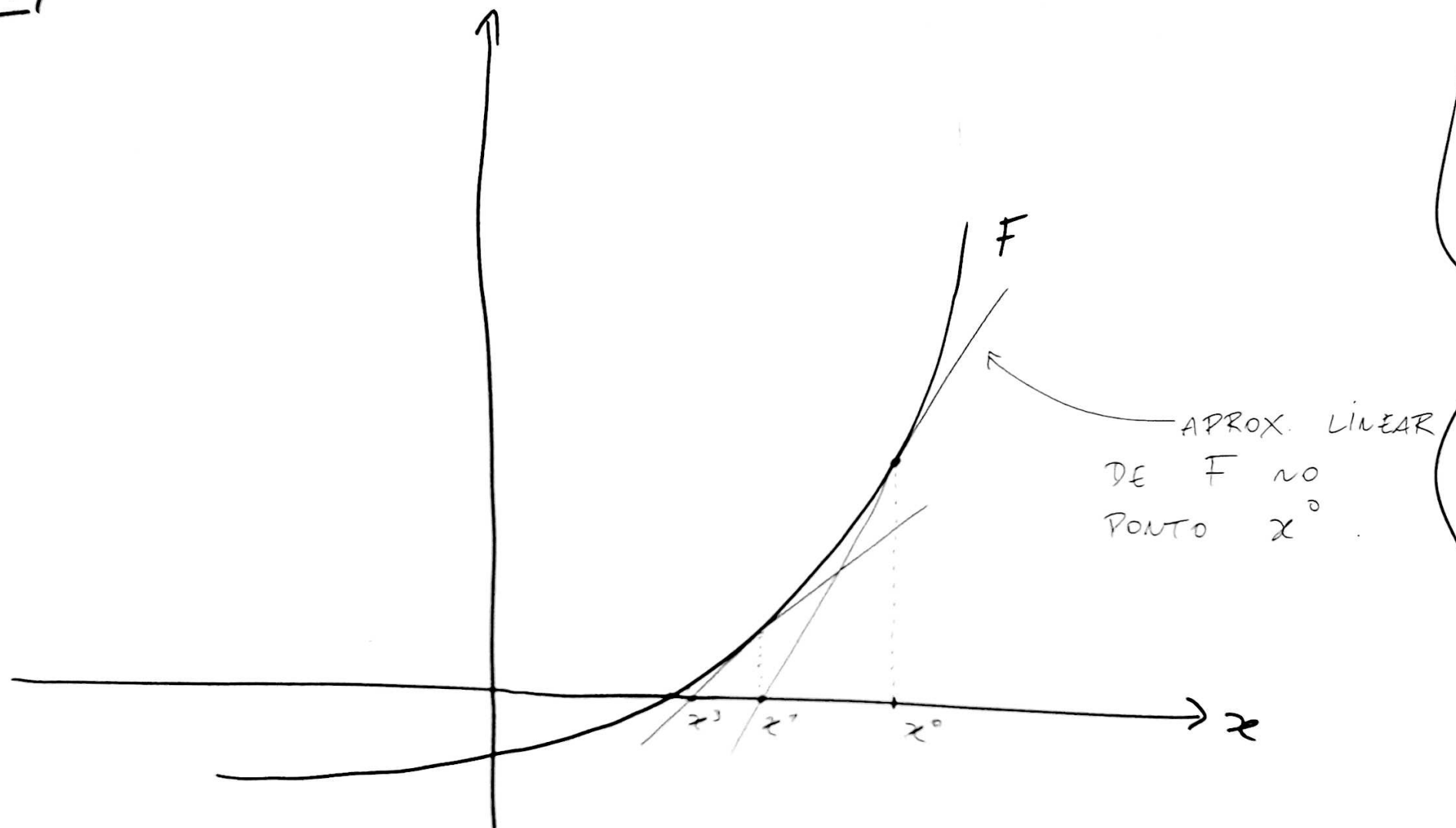
- RESOLVE SISTEMAS NÃO LINEARES DE EQUAÇÕES

$$F(x) = 0,$$

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{DE CLASSE } C^1.$$

- O INTERESSE EM OTIMIZAÇÃO É RESOLVER $F(x) = \nabla f(x) = 0$.

$m=1$



IDEIA: TROCAR O PROBLEMA COMPLICADO $F(x) = 0$ POR
UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS FÁCEIS.

QUE PROBLEMAS FÁCEIS?

RESOLVER O SISTEMA QUE ANULA APROXIMAÇÕES LINEARES.

APROX. LINEAR NO PONTO x^k :

$$F'(x^k)(x - x^k) + F(x^k) = 0.$$

O ITERANDO x^{k+1} É SOLUÇÃO DESSE SISTEMA LINEAR.

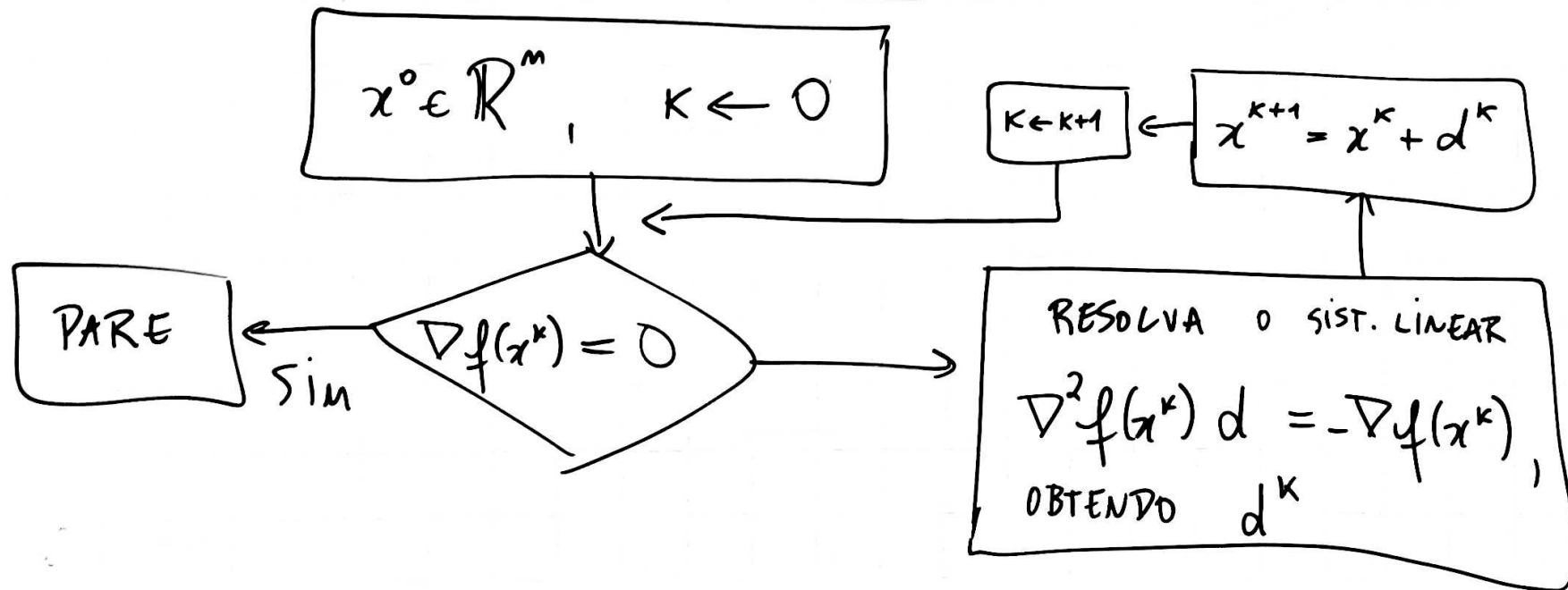
$$F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -F(x^k).$$

TOMANDO $d^k = x^{k+1} - x^k$ ($\Leftrightarrow x^{k+1} = x^k + d^k$), A DIREÇÃO
NEWTONIANA É DADA POR

$$\nabla^2 f(x^k) d^k = -\nabla f(x^k)$$

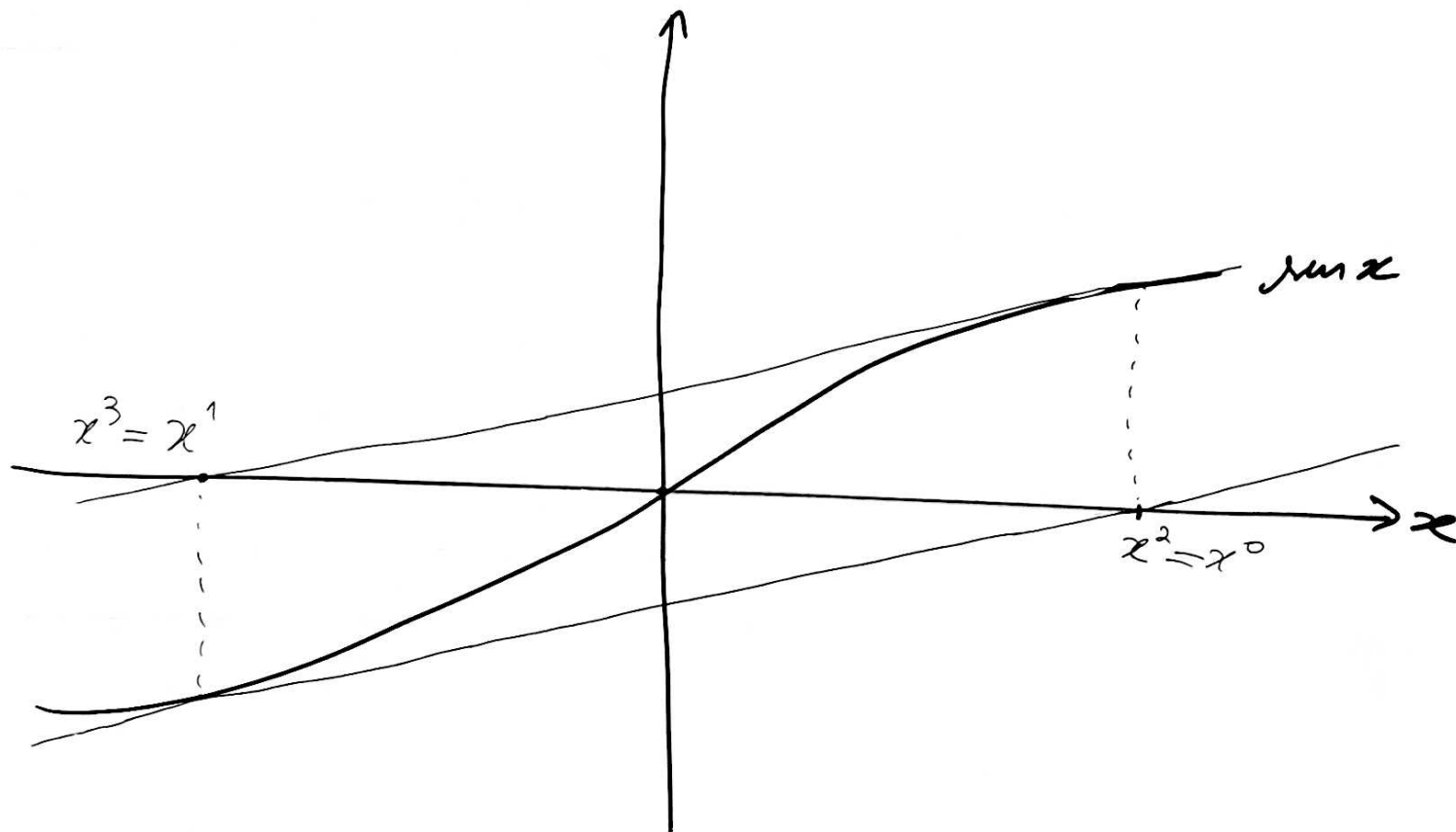
$$(\Leftrightarrow d^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k))$$

MÉTODO DE NEWTON (PURO)



EXEMPLO: $f(x) = -\cos x$

QUERO RESOLVER $f'(x) = \sin x = 0$. $(f''(x) = \cos x)$



(O MÉTODO DE NEWTON PODE OSCILAR!)

PASSO DE NEWTON: DADO x^k , RESOLVER

$$f''(x^k) d = -f'(x^k)$$

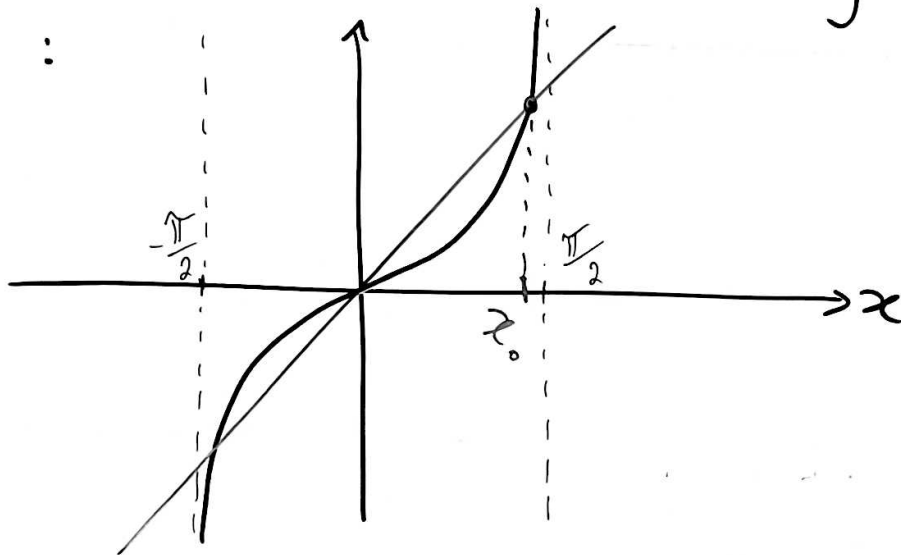
$$\Leftrightarrow (\cos x^k) d = -\sin x^k$$

$$\Leftrightarrow d^k = -\operatorname{tg} x^k$$

$$\Rightarrow x^{k+1} = x^k - \operatorname{tg} x^k.$$

COME $x^0 \neq 0$ TAL QUE $\operatorname{tg} x^0 = 2x^0$.

x^0 EXISTE:



DAÍ,

$$x^1 = x^0 - \operatorname{tg} x^0 = x^0 - 2x^0 = -x^0 ;$$

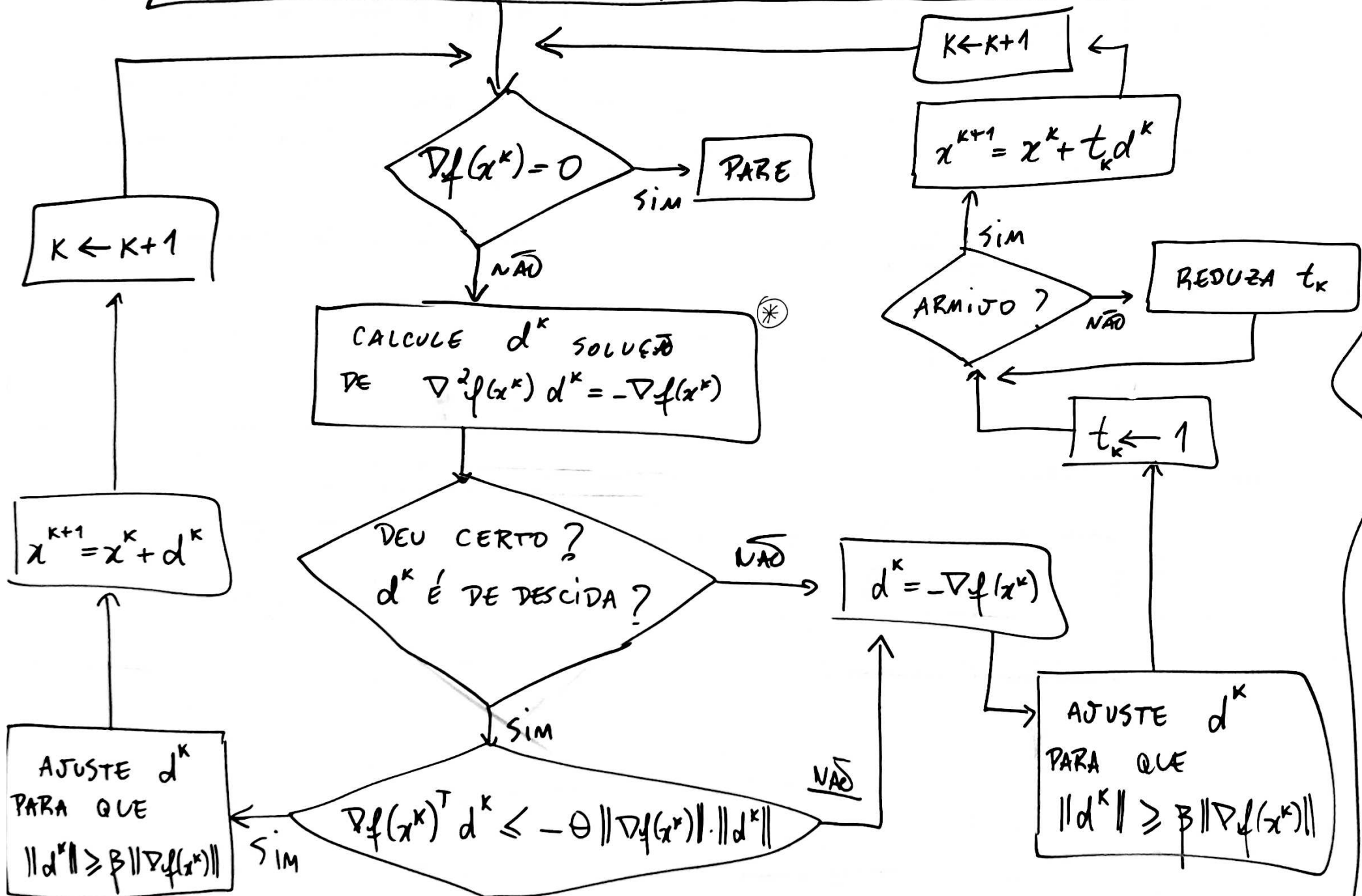
$$x^2 = x^1 - \operatorname{tg} x^1 = -x^0 - \operatorname{tg}(-x^0) = -x^0 + \operatorname{tg} x^0 = x^0$$

$$x^3 = -x^0, \quad x^4 = x^0, \dots$$

ESSE EXEMPLO MOSTRA QUE O MÉTODO DE NEWTON
NÃO CONVERGE GLOBALMENTE.

SOLUÇÃO: COLOCAR NEWTON NO ESQUEMA DE DESCIDA
GERAL, QUE POSSUI CONVERGÊNCIA GLOBAL !!!

DADOS $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\theta \in (0,1)$, $K \leftarrow 0$



COMO RESOLVER (*) NA PRÁTICA ?

- $\nabla^2 f(x^*)$ É SIMÉTRICA
- SE $\nabla^2 f(x^*)$ FOR DEFINIDA POSITIVA, EXISTE A CHAMADA "FATORAÇÃO DE CHOLESKY". ISTO É, É POSSÍVEL ESCREVER

$$\nabla^2 f(x^*) = GG^T,$$

ONDE G É TRIANGULAR INFERIOR COM DIAGONAL POSITIVA. ASSIM, DEVEMOS RESOLVER

$$\underbrace{GG^T}_{\text{matriz}} d^k = -\nabla f(x^*). \quad \text{RESOLVA 2 SISTEMAS TRIANGULARES:}$$

$$Gy = -\nabla f(x^*), \quad G^T d^k = y.$$

• PARA $m \gg 1$, É MELHOR UTILIZAR UM MÉTODO
ITERATIVO PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES.
(GRADIENTES CONJUGADOS).

"SORTE": AMBAS AS ESTRATÉGIAS IDENTIFICAM SE
 $\nabla^2 f(x^*)$ NÃO É DEFINIDA POSITIVA.

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

QUERO RESOLVER $Ad = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

FATORAÇÃO DE CHOLESKY:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{G^T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ ac = 3 \\ c^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$a=3, c=1 \text{ e } b=2.$$

ENTÃO

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ RESOLVENDO } Ad = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_y \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1º SISTEMA: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

2º SISTEMA: $(G^T d = y)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -\frac{1}{18} \\ d_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$