Decomposição de Dantzig-Wolfe

A decomposição de Dantzig-Wolfe consiste na aplicação da ideia anterior à problemas com restrições separáveis + bloco aclopagem:

$$
\begin{aligned}
P: \min_{x} \quad & c_1^t x^1 + c_2^t x^2 + \cdots + c_K^t x^K \\
\text{s.a.} \quad & A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_K x^K = b_0 \\
& D_1 x^1 = b_1 \\
& D_2 x^2 = b_2 \\
& \quad \vdots \\
& D_K x^K = b_K \ , \quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

onde $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Escrevendo $X_i = \{x^i \in \mathbb{R}^{n_i};\ D_i x^i = b_i,$

$x_i \geq 0\}$,

o problema fica

$$P: \min_{x} \sum_{i=1}^{K} c_i^t x^i$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{K} A_i x^i = b_0 \,, \quad x^i \in X_i \,, \forall i.$$

Naturalmente, X_i pode assumir outras

formas, como

$$X_i = \{x^i \in \mathbb{R}^{n_i} ; D_i x^i \leq b_i , x^i \geq 0\}.$$

A decomposição segue o que foi visto:

- consideramos pontos/direções extremas de cada X_i. Para simplificar, tome apenas os pontos extremos $x^i_1, \ldots, x^i_{k_i}$ de X_i, e suponha que não há direções extremas (isto é, X_i limitado).

- cada $x^i \in X_i$ é combinação convexa dos pontos extremos de X_i:

$$x^i = \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i x_j^i \quad , \quad \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1 \, , \quad \lambda^i \geq 0 .$$

- Problema mestre:

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K_i} (c^t x_j^i) \lambda_j^i$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K_i} (A_i x_j^i) \lambda_j^i = b_0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1 \, , \; i=1,\dots,K$$

$$\lambda_j^i \geq 0 \, , \; \forall i,j .$$

• Problemas auxiliares:

O problema auxiliar é separável, equivale à K problemas:

$$\max_{x^i} (A_i^t u_1 - c_i)^t x^i + u_0^i \quad , \quad i=1,\dots,K.$$
$$\text{s.a. } D_i x^i = b_i \ , \ x^i \geq 0$$

onde $\bar{c}_B^t B^{-1} = [u_1^t \ u_0^1 \cdots u_0^K]$. Note que há K restrições $\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i$ $(i=1,\dots,K)$, e logo $u_0 \in \mathbb{R}^K$.

A base corrente do problema mestre será ótima se $(A_i^t u_1 - c_i)^t x^{i*} + u_0^i \leq 0$, $\forall i$.

O início do método e declaração de possível ilimitabilidade é da forma padrão (inserção de variáveis artificiais — base I — e método de duas fases, com colunas calculadas pelo problema auxiliar correspondente).

PL's com variáveis inteiras

$$\text{PL: } \min_{x} \sum_{i=1}^{K} c_i^t x^i$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^{K} A_i x^i = b_0$$

$$D_i x^i = b_i \quad , \quad x^i \in \mathbb{Z}_+^{n_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, K$$

Agora,

$$X_i = \{ x^i \in \underline{\mathbb{Z}_+^{n_i}} \; ; \; D_i x^i = b_i \} \quad (\text{ou } D_i x^i \leq b_i)$$

Vamos supor que cada X_i seja finito.

Essa suposição não é tão restritiva pois podemos impor limitantes "artificiais" $x^i \leq s^i$.
Ou ainda, inúmeras aplicações têm apenas variáveis binárias: $x^i \in \{0,1\}^{n_i}$.

Assim, sejam $x^i_1, \dots, x^i_{K_i}$ todos os pontos de X_i, $i = 1, \dots, K$.

Temos claramente

$$X_i = \left\{ \bar{x}^i \in \mathbb{R}^{n_i} ; \ \bar{x}^i = \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i x_j^i , \ \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1, \ \lambda_j^i \in \{0,1\}, \ \forall i,j \right\}.$$

As restrições $\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1$, $\lambda^i \in \{0,1\}^{K_i}$ dizem que $\bar{x}^i$ é igual a um dos pontos de X_i ...

Isso nos leva ao problema mestre, equivalente ao PL original

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{K} c_i^t x^i$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K_i} (A_i x_j^i) \lambda_j^i = b_0$$

$$\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1 \ , \quad i = 1, \dots, K$$

$$\lambda_j^i \in \{0, 1\} \ , \quad j = 1, \dots, K_i \ , \quad i = 1, \dots, K.$$

A relaxação linear deste problema requer $\lambda_j^i \geq 0$ e $\lambda_j^i \leq 1$, porém a segunda restrição é redundante tendo em vista $\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i = 1.$

Assim, a relaxação linear é o "mesmo" problema (trocando "vértice" por "todos pontos") que o visto anteriormente.

↳ podemos aplicar geração de colunas!

Note que os problemas auxiliares terão variáveis inteiras:

$$\max_{x^i} (A_i^t u_i - c_i)^t x^i + u_0^i$$
$$\text{s.a. } D_i x^i = b_i, \quad x^i \in \mathbb{Z}_+^{n_i}. \qquad (*)$$

Logo, a estrutura de D_i deve favorecer uma fácil resolução (solução fechada, métodos baratos). De qualquer forma, a dimensão desses problemas é $n_i \ll n$ ... Muitas vezes, a relaxação linear de $(*)$ possui vértices inteiros, o que torna $(*)$ "trivial".

Problema: estamos trabalhando com a relaxação linear do problema mestre ($\lambda_j^i \geq 0$). Logo sua resolução pode fornecer λ_j^i's fracionários ($\in (0,1)$).

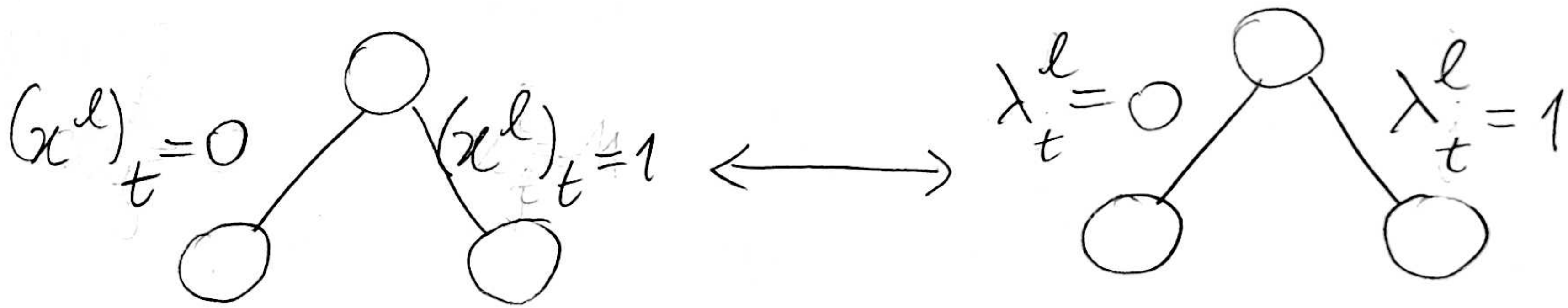
Solução: enumerar!

↳ Branch-and-price: enumeração + geração colunas.

↳ Branch-and-cut-and-price: + cortes

Caso particular: $x^i \in \{0,1\}^{n_i}$.

Observe que se x e $\tilde{x}$ forem binários e distintos então $\lambda x + \tilde{\lambda}\tilde{x}$ é binário se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\tilde{\lambda} = 0$ (considerando $\lambda + \tilde{\lambda} = 1$, $\lambda \geq 0$, $\tilde{\lambda} \geq 0$). Assim, podemos ramificar em x ou λ.



- Ramificar sobre λ pode ser não efetivo, pois fixar um λ_t^ℓ não modifica as restrições dos problemas auxiliares. Isso pode levar à geração de colunas já descartadas anteriormente (fazer λ_t^ℓ elimina a coluna correspondente no problema mestre).

• é mais razoável ramificar sobre x...

A variável x^ℓ do problema original foi descrita como

$$x^\ell = \sum_{j=1}^{K_\ell} \lambda_j^\ell x_j^\ell \qquad \text{(binária)}$$

no problema mestre. Agora, suponha que resolvemos o problema mestre com as colunas geradas até então, e obtivemos

$$(x^\ell)_t = \sum_{j=1} \lambda_j^\ell (x_j^\ell)_t \notin \{0,1\}.$$

(a t-ésima componente de x^i é fracionária). Queremos ramificar

$$(x^l)_t = 1 \qquad e \qquad (x^l)_t = 0.$$

↳ Como ficam os problemas mestre/auxiliares no nó da árvore de enumeração?

Digamos que $(x^l)_t = p$, $p = 0, 1$.

Problema mestre do nó

Como $(x^\ell)_t = \sum_{j=1}^{K_\ell} \lambda_j^\ell (x_j^\ell)_t = p$, devemos

considerar todos os x_j^ℓ da soma que

possuem $(x_j^\ell)_t = 1$:

$$\sum_{j:(x_j^\ell)_t = p} \lambda_j^\ell = 1.$$

Assim, o problema mestre do nó é

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{K} c_i^t x^i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K_i} (A_i x_j^i) \lambda_j^i = b_0$$

$$\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_j^i = 1, \quad i \neq l$$

$$\sum_{j:(x_j^l)_t = p} \lambda_j^l = 1$$

$$\lambda_j^i \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Observação:

- O problema mestre do nó é tão fácil quanto os problemas mestres anteriores.

Problemas auxiliares:

O único problema auxiliar que muda é

$$\max_{x^l} \ (A_l^t u_1 - c_l)^t x^l + u_0^l$$

$$\text{s.a. } D_l x^l = b_l \ , \ (x^l)_t = p \ , \ x^l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}.$$

Observações:

1) este problema é tão fácil quanto o anterior (a variável $(x^l)_t$ pode ser eliminada até).

2) não é possível gerar uma coluna descartada, pois sempre teremos $(x^l)_t = p$.

3) ao termos fixados várias variáveis os problemas mestres/auxiliares são construídos analogamente.