

PENALIZAÇÃO INTERNA / MÉTODO DE BARREIRAS / PONTOS INTERIORES.

REFERÊNCIA: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO,
UNICAMP. (VER LINK NA PÁGINA DA DISCIPLINA).

$$P: \min f(x)$$

$$\text{s.a. } g(x) \geq 0,$$

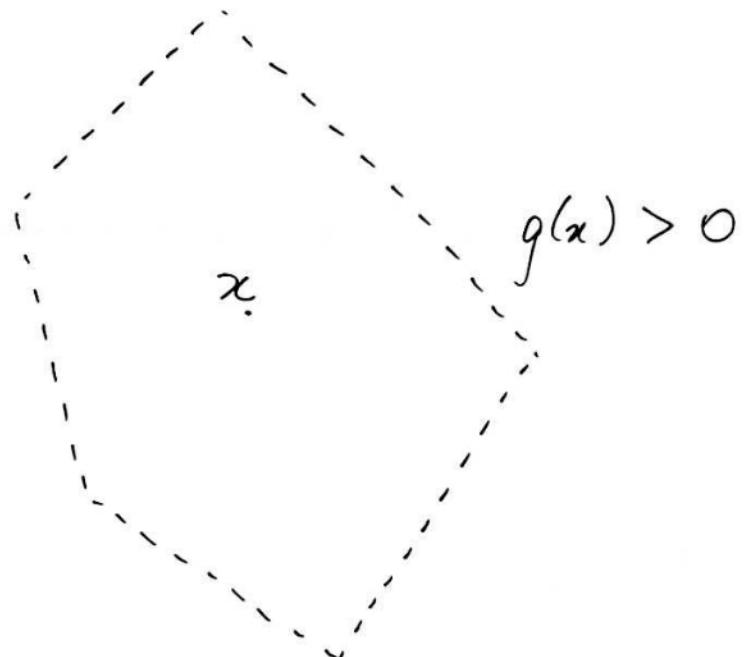
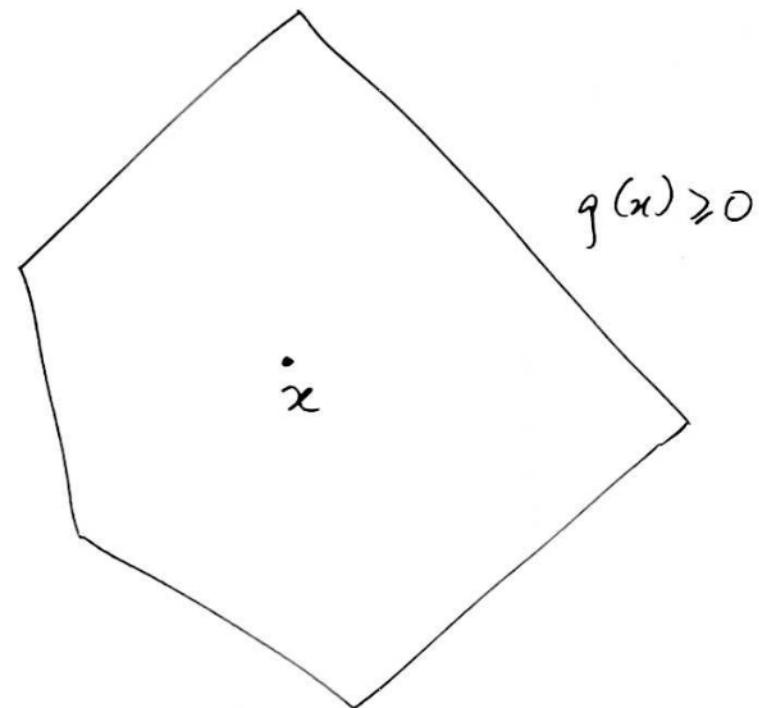
$x \in D$, $D \subset \mathbb{R}^m$ é compacto.

OBS.: AS RESTRIÇÕES $g(x) \geq 0$ PODEM SER EXPRESSAS NA FORMA
PADRÃO $-g(x) \leq 0$.

CONJUNTO VIÁVEL: $\Omega = \{x \in D; g(x) \geq 0\}$.

INTERIOR (RELATIVO): $\Omega^\circ = \{x \in D; g(x) > 0\}$.

→ DESCARTA A FRONTEIRA $g(x) = 0$.



HIPÓTESE: $\Omega^\circ \neq \emptyset$.

IDEIA: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS ONDE
A "VIABILIDADE ESTRITA" É PENALIZADA.

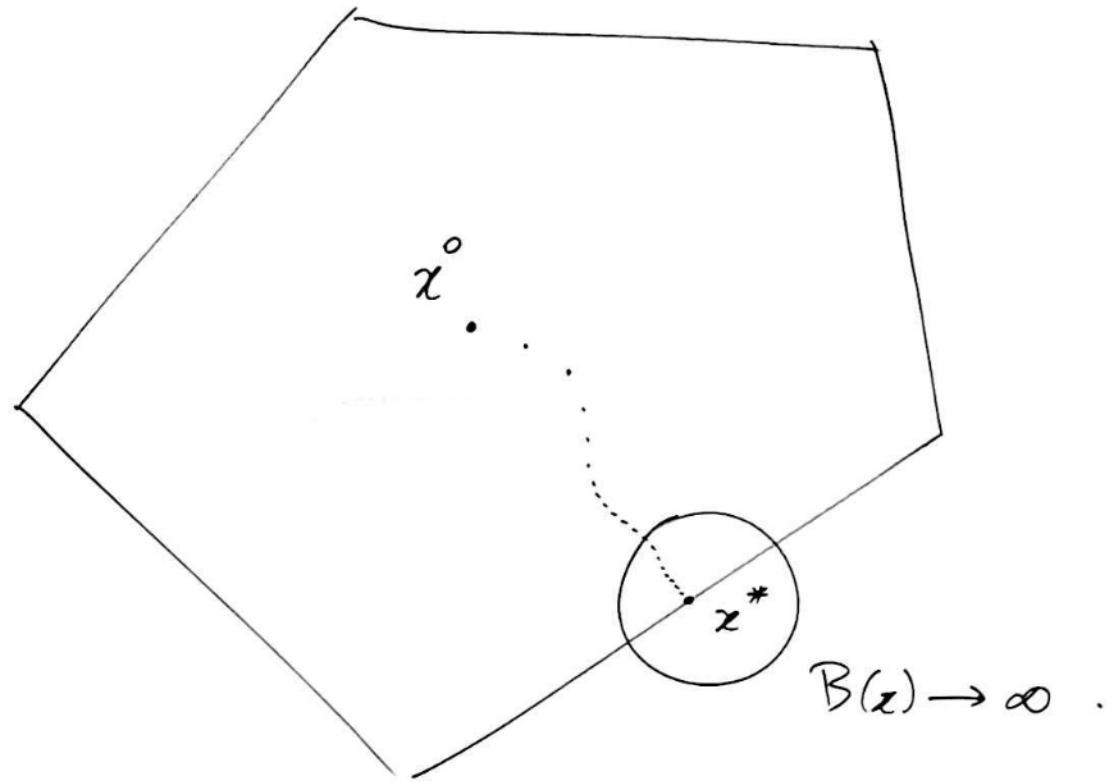
OU SEJA, OBRIGAMOS NO INÍCIO QUE x^* ESTEJA "NO
MEIO" DO CONJUNTO Ω^0 E AO LONGO DO PROCESSO
AFROUXAMOS ESSA EXIGÊNCIA, PERMITINDO QUE x^* SE APROXIME
DA FRONTEIRA DE Ω^0 .

UMA FUNÇÃO $B(x)$ QUE FAZ ESSE TRABALHO É
TAL QUE

(i) ESTÁ DEFINIDA EM Ω^0 .

(ii) $B(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega^0$

(iii) SE $\lim_{x \rightarrow x^*} g_i(x) = 0$ PARA ALGUM i , ENTÃO $\lim_{x \rightarrow x^*} B(x) = \infty$.



B é CHAMADA FUNÇÃO DE BARREIRA.

DUAS FUNÇÕES DE BARREIRA COMUNS:

$$1) \quad B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad (\text{BARREIRA INVERSA})$$

$$2) \quad B(x) = - \sum_{i=1}^n \log(g_i(x)). \quad (\text{BARREIRA LOGARÍTMICA})$$

ESSA É A MAIS USADA. É EMPREGADA EM PACOTES COMPUTACIONAIS COMO IPOPT (INTERIOR POINT OPTIMIZER).

VEJA QUE ESTA $B(x)$ PODE SER NEGATIVA. PORÉM, COMO $x \in D$ (COMPACTO), EXISTE $M > 0$ TAL QUE

$$B(x) + M \geq 0, \quad \forall x \in \Omega^0.$$

SUBPROBLEMA: $SP(t_k) : \min_x f(x) + t_k B(x)$, $t_k > 0$.

s.a. $x \in \Omega^0$.

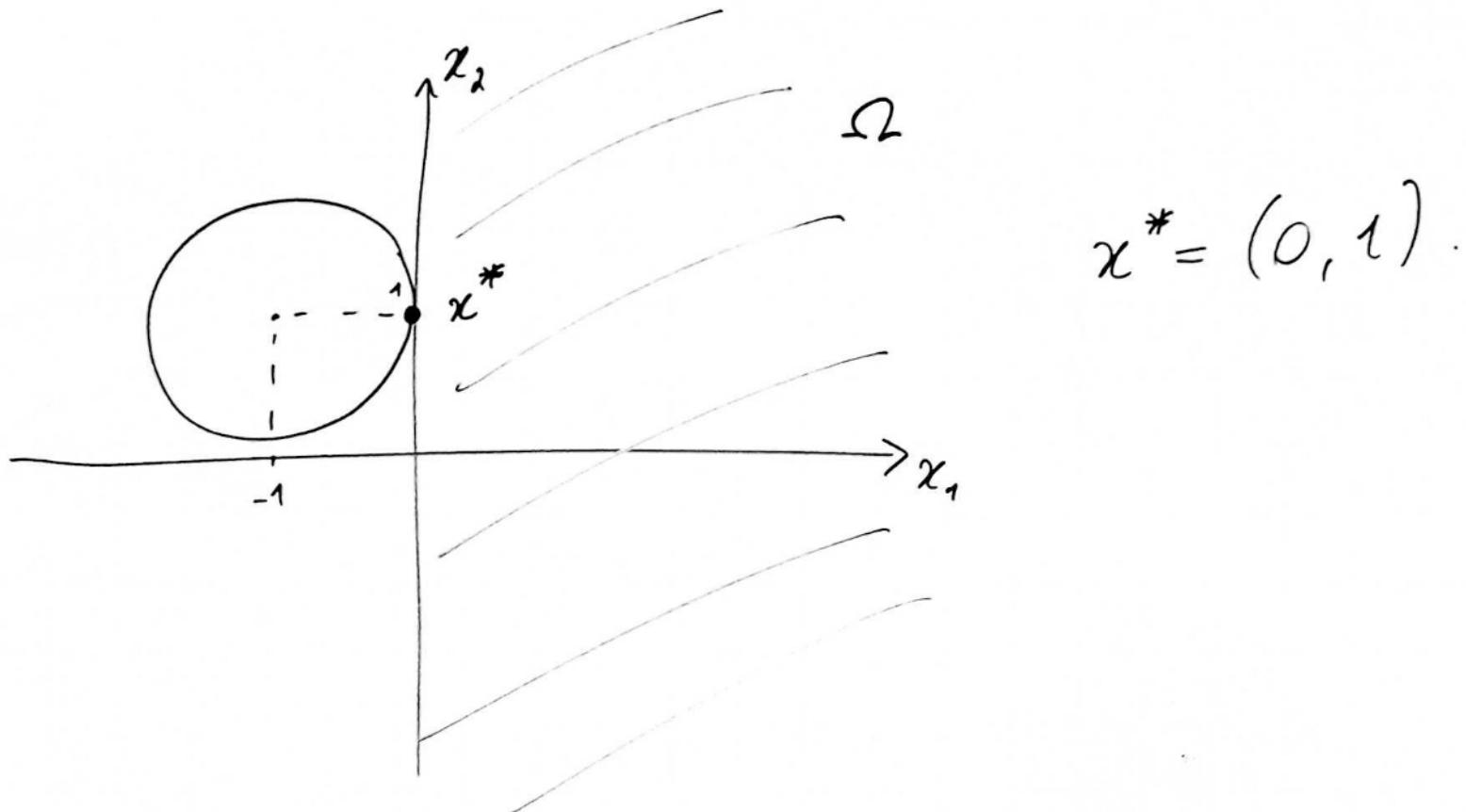
ESTRATÉGIA DE PENALIZAÇÃO INTERNA:

SEJA DADO $t_0 > 0$. FAÇA $K = 0$.

- 1) CALCULE x^k MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_k)$.
- 2) DIMINUA t_k (OU SEJA, TOME $0 < t_{k+1} < t_k$),
FAÇA $K \leftarrow K + 1$ E VOLTE AO PASSO 1.

OBS.: NESSA ESTRATÉGIA, $\lim_{K \rightarrow \infty} t_k = 0$.

EXEMPLO: P: $\min_x f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$
s.a. $x_1 \geq 0$.



$$x^* = (0, 1)$$

SUBPROBLEMA:

$$\text{SP}(t_k): \min_x \quad (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - t_k \ln(x_1)$$

s.a. $x_1 > 0$.

(t_k é fixo)

RESOLVENDO:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1^k + 1) - t_k \frac{1}{x_1^k} \\ 2(x_2^k - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2^k = 1$$

E $2(x_1^k + 1) = \frac{t_k}{x_1^k}$. Daí, $2(x_1^k)^2 + 2x_1^k - t_k = 0$.

$$\Delta = 4 + 8t_k$$

$$x_1^k = \frac{-2 + \sqrt{4 + 8t_k}}{4} > 0$$

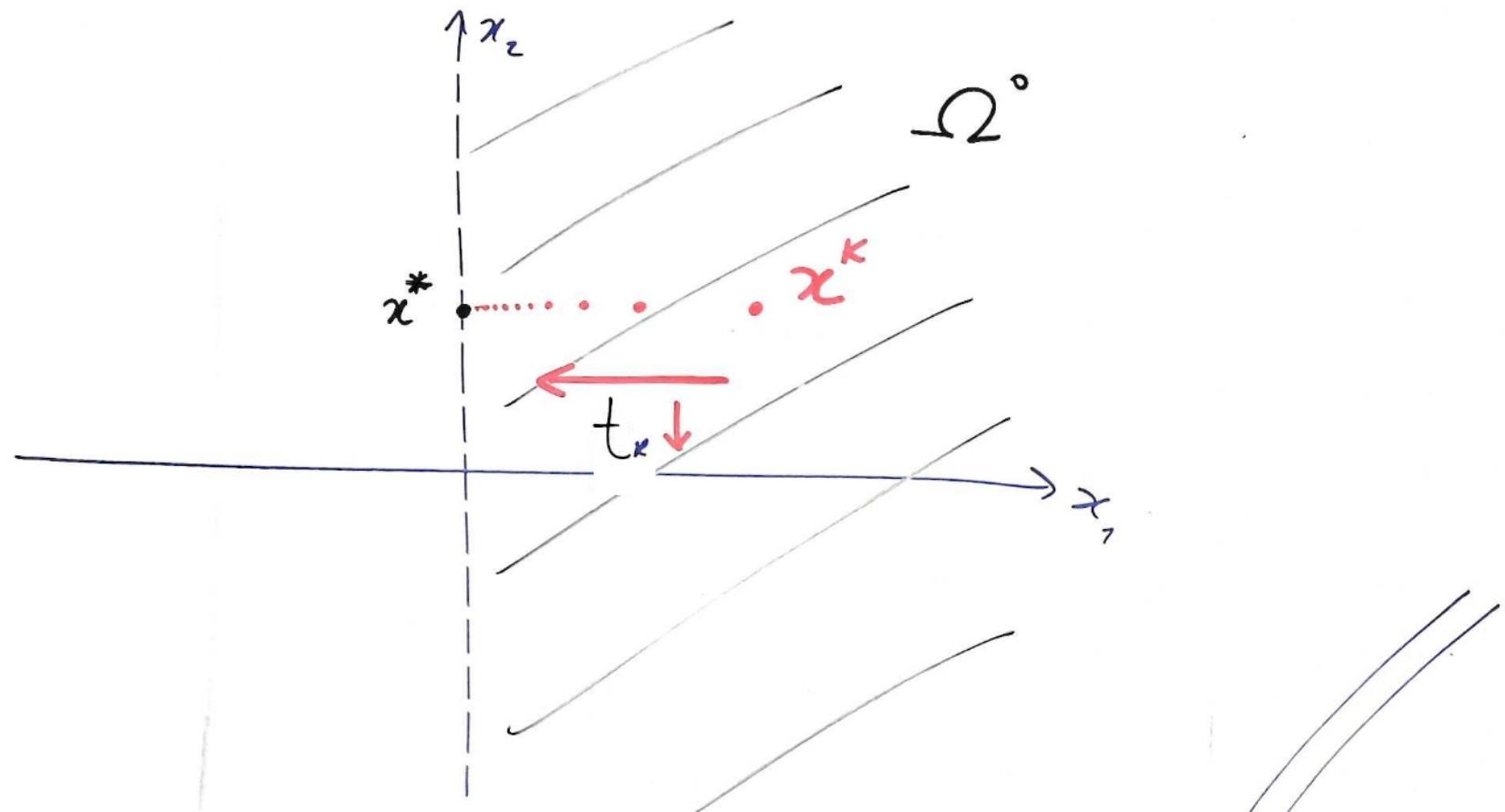
$$x_1^k = \frac{-2 - \sqrt{4 + 8t_k}}{4} < 0 \quad (\text{não serve})$$

Assim, o ponto crítico do subproblema é $x^k = \left(\frac{-2 + \sqrt{4 + 8t_k}}{4}, 1 \right)$.

DADO QUE A F.O. DE $SP(t_k)$ É CONVEXA, x^k É

MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_k)$. OBSERVE QUE

$$x_k = \left(\frac{-2 + \sqrt{4 + \delta t_k}}{4}, 1 \right) \rightarrow (0, 1) = x^*.$$



ASSIM COMO A PENALIZAÇÃO EXTERNA, A INTERNA

SOFRE DE INSTABILIDADE NUMÉRICA QUANDO $t_k \rightarrow 0^+$

(VEJA NO EXEMPLO QUE $t_k \rightarrow 0^+ \Rightarrow x_i^k \rightarrow 0$, E LOGO

) $\frac{t_k}{x_i^k}$ "É INSTÁVEL". VEJA QUE A HESSIANA DA F.O.

DE $SP(t_k)$ É

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{t_k}{(x_i^k)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SEUS AUTOVALORES SÃO $\lambda_1^k = 2 + \frac{t_k}{(x_i^k)^2}$ E $\lambda_2^k = 2$.

COMO $2(x_i^k + 1) - \frac{t_k}{x_i^k} \rightarrow 0$ E $x_i^k \rightarrow 0^+$

TEMOS $\frac{t_k}{x_i^k} \rightarrow 2$ E LOGO $\frac{t_k}{(x_i^k)^2} = \frac{t_k}{x_i^k} \cdot \frac{1}{x_i^k} \rightarrow \infty$.

ASSIM $\lambda_i^k \rightarrow \infty$, E A HESSIANA FICA PADA VEZ MAIS MAL CONDICIONADA.

CURIOSAMENTE ESTE MAL CONDICIONAMENTO NÃO INTERFERE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES OU QUADRATICOS CONVEXOS (OU SEJA, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$, A SEMI-DEF. POSITIVA), SE O MÉTODO FOR BEM IMPLEMENTADO. ISSO É IMPLEMENTADO EM PACOTES DE PL (CPLEX, GUROBI, KNITRO ETC).

CONVERGÊNCIA

TEOREMA: SEJA $\{x^k\}$ UMA SÉQUENCIA GERADA PELO MÉTODO, ONDE $t_k \downarrow 0$. ENTÃO TODO PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$ É MINIMIZADOR GLOBAZ DO PROBLEMA ORIGINAL

$$P: \min_x f(x) \quad \text{s.a. } c(x) \geq 0, x \in D.$$

PROVA: COMO $0 < t_{k+1} < t_k \in B(x) \geq 0, \forall x \in \Omega^\circ$,
ENTÃO

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) + t_{k+1} B(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + t_{k+1} B(x^k) && (x^{k+1} \text{ minimiza } SP(t_{k+1})) \\ &\leq f(x^k) + t_k B(x^k), \quad \forall k. \end{aligned}$$

DEFINIMOS

$$b^k = f(x^k) + t_k B(x^k)$$

o VALOR ÓTIMO DE $SP(t_k)$. PELO QUE ACABAMOS DE ARGUMENTAR, A SÉQUENCIA $\{b^k\}$ É MONÓTONA NÃO-PRESCENTE. TAMBÉM,

$$b^k \geq f(x^k) \geq f^*, \quad \forall k, \quad (1)$$

ONDE f^* É O VALOR ÓTIMO DE P . OU SEJA,

$\{b^k\}$ É LIMITADA INFERIORMENTE. ASSIM, EXISTE O LIMITE

$$\bar{b} = \lim_k b^k.$$

AFIRMAMOS QUE $\bar{b} = f^*$. OBSERVE QUE DE (1) JÁ TEMOS

$\bar{f} > f^*$. SUPONHAMOS QUE $\bar{f} > f^*$. SEJA x^* UM MINIMIZADOR GLOBAL DE P ($f(x^*) = f^*$) E TOMEMOS

$x' \in V \cap \Omega^\circ$, V vizinhança de x^* , TAL QUE

$$f(x') < \frac{1}{2}f^* + \frac{1}{2}\bar{f}. \quad (2)$$

COMO $t_k \downarrow 0$, PARA ESTE x' FIXO, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') \rightarrow 0.$$

ASSIM, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') < \frac{1}{2}\bar{f} - \frac{1}{2}f^*, \quad \forall k \gg 1. \quad (3)$$

$$\left(\text{NOTE QUE } \frac{1}{2}\bar{f} - \frac{1}{2}f^* = \frac{1}{2}(\bar{f} - f^*) > 0 \right)$$

SOMANDO (2) com (3), OBTEMOS

$$b^* \leq f(x^*) + t_* B(x^*) < \bar{b} , \quad \forall \epsilon > 0 .$$

ASSIM,

$$\dots \leq b''' \leq b^* < \bar{b} , \quad \forall \epsilon > 0 ,$$

E LOGO $\bar{b} > \lim_{\epsilon \rightarrow 0} b^*$, UM ABSURDO. CONCLUIMOS
ASSIM QUE $\bar{b} = f^*$.

CONSIDEREMOS AGORA x^* PONTO DE AVALIAÇÃO DE
 $\{x^*\}_{k \in K}$. TEMOS

$$0 = \lim_{k \in K} (f^* - \bar{b}) = \lim_{k \in K} [f(x^*) + t_* B(x^*) - f^*]$$

$$= \lim_{k \in K} \left[\underbrace{(f(x^k) - f^*)}_{\geq 0} + \underbrace{t_k B(x^k)}_{\geq 0} \right]$$

$$\implies f(x^*) = \lim_{k \in K} f(x^k) = f^*.$$

OU SEJA, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P . 