

BOA DEFINIÇÃO DO SQP BÁSICO

NO SQP BÁSICO, RESOLVEMOS UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS

$$QP_k : \min_{d_x} \frac{1}{2} d_x^t H^k d_x + \nabla f(x^k)^t d_x$$

$$\text{s.a. } \nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) = 0,$$

E FAZEMOS O PASSO:

$$x^{k+1} = x^k + d_x^k,$$

ONDE d_x^k É SOLUÇÃO DE QP_k .

HIPÓTESES:

H1) $\nabla h(x^*)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO.

$$\nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ \nabla h_1(x^*) & \dots & \nabla h_m(x^*) \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

DIZER QUE $\nabla h(x^*)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO É
O MESMO QUE DIZER QUE x^* É REGULAR.

H2) H^k É DEFINIDA POSITIVA.

TEOREMA: SE VALEM $H1$ E $H2$, EXISTE UMA
VIZINHANÇA ABERTA $V(z^*)$ DE z^* PARA A
QUAL QP_x TEM SOLUÇÃO SEMPRE QUE
 $x^k \in V(z^*)$.

PROVA: DE $H1$, AS COLUNAS DE $\nabla h(x^*)$ SÃO
L.I.'S. COMO $\nabla h(x)$ É CONTÍNUA ("HIPÓTESE GERAL"),
EXISTE UMA VIZINHANÇA $V(z^*)$ DE z^* TAL QUE
 $\nabla h(x^k)$ TEM POSTO COLUNA COMPLETO SEMPRE QUE
 $x^k \in V(z^*)$. PARTICIONANDO / REORDENANDO AS COLUNAS
DE $\nabla h(x^k)^T$, PODEMOS ESCRVER-LA COMO

$$\begin{bmatrix} B^k & N^k \end{bmatrix},$$

ONDE B^k $m \times m$ É INVERSÍVEL. ASSIM,

$$\nabla h(x^k)^T d_x + h(x^k) = 0 \quad \text{É EQUIVALENTE À}$$

$$\begin{bmatrix} B^k & N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_x^N \end{bmatrix} + h(x^k) = 0 \quad \Rightarrow \quad B^k d_x^B + N^k d_x^N + h(x^k) = 0$$

$$\Rightarrow d_x^B = -\left(B^k\right)^{-1} \left(N^k d_x^N + h(x^k)\right).$$

OBSERVE QUE TODA SOLUÇÃO DE $\nabla h(x^k)^T d_x + h(x^k) = 0$ POSSUI ESSA FORMA. TOMANDO $d_x^N = 0$, TEMOS UMA SOLUÇÃO PARTICULAR.

ASSIM MOSTRAMOS QUE QP_k É VIÁVEL.

CONCLUÍMOS DE $H2$ QUE QP_k É PROBLEMA QUADRÁTICO,
ESTRITAMENTE CONVEXO E VIÁVEL. LOGO POSSUI MINIMIZADOR
ÚNICO (VOCÊ PODE ENCONTRÁ-LO VIA KKT). //

- O TEOREMA ACIMA DIZ QUE, PRÓXIMO À x^* ,
- SQP BÁSICO É BEM DEFINIDO.

OBS.: SOB AS HIPÓTESES DE QUE $\nabla^2 f$ E $\nabla^2 h_i$, $i=1, \dots, m$,
SÃO LIPSCHITZIANAS, É POSSÍVEL PROVAR QUE A SEQUÊNCIA
GERADA PELO MÉTODO

$$x^{k+1} = x^k + d_x^k \quad \text{CONVERGE À } x^*.$$

PROBLEMAS:

CONSEGUIMOS NA PRÁTICA SATISFAZER $H2$ (H^k É DEF. POSIT.,
(ALAS FUTURAS)).

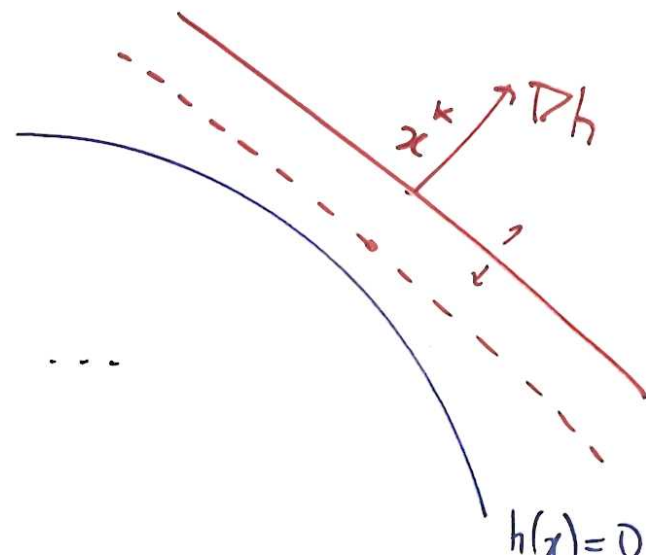
MAS $H1$ ($\nabla h(x^k)$ POSTO COL. COMPLETO) NÃO É

RAZOÁVEL VERIFICAR NA PRÁTICA...

SE NÃO PODEMOS GARANTIR $H1$, QP_k PODE SER
INVIAVEL:

$$\nabla h(x^k)^t d_x + \underline{h(x^k)} = 0$$

EX.:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{1} \end{bmatrix} = 0$$



UMA FORMA DE CONTORNAR ESSE PROBLEMA:

MODIFICAR A LINEARIZAÇÃO ("DESLOCAR").

QUERO DESLOCAR, OU SEJA, MUDAR $h(x^k)$... QUAL
O DESLOCAMENTO?

PRIMEIRO, RESOLVEMOS O PROBLEMA AUXILIAR

$$\min \| \nabla h(x^k)^t d_x + h(x^k) \|^2 \quad (P_{aux})$$

LEMBRE QUE $x^{k+1} = x^k + d_x^k \Rightarrow d_x = x - x^k$. DAÍ

(P_{aux}) FICA

$$\min \| \nabla h(x^k)^t (x - x^k) + h(x^k) \|^2$$

CONSIDERE x_{mel}^k UMA SOLUÇÃO DESSE PROBLEMA.

TROCAMOS $\nabla h(x^*)^t (x - x^*) + \underline{h(x^*)} = 0$ POR

$$\nabla h(x^*)^t (x - x^*) - \underline{\nabla h(x)^t (x_{\min}^k - x^*)} = 0$$

ESTE SISTEMA SEMPRE POSSUI SOLUÇÃO (P. EX., $x = x_{\min}^k$).

O QP_k FICA

$$QP_k: \min \frac{1}{2} (x - x^*)^t H^k (x - x^*) + \nabla f(x^*)^t (x - x^*)$$

$$s.a. \quad \nabla h(x^*)^t (x - x^*) - \nabla h(x)^t (x_{\min}^k - x^*) = 0$$

MELHORIAS:

1º) É COMUM TERMOS RESTRIÇÕES $l \leq x \leq u$. PODEMOS INCLUIR ESSAS RESTRIÇÕES DIRETO EM QP_k.

2º) QP_k só é confiável enquanto modelo para o problema original próximo à x^* \rightarrow usamos regiões de confiança.

Assim,

$$QP_k: \min_x \frac{1}{2} (x - x^*)^t H^k (x - x^*) + \nabla f(x^*)^t (x - x^*)$$

$$\text{sa. } \nabla h(x^*)^t (x - x^*) - \nabla h(x^*)^t (x_{\text{mon}}^* - x^*) = 0 \quad ($$

$$l \leq x \leq u, \quad \|x - x^*\|_\infty \leq \Delta_k.$$

NO INTUITO DE QUE ESTE QP_k MAIS REPRESENTATIVO

TELHA MINIMIZADOR, ADAPTAMOS O DESLOCAMENTO x_{mov}^k
PARA COMPORTAR 1°) E 2°): x_{mov}^k SERÁ MINIMIZADOR DE

$$P_{\text{aux}} : \min_x \left\| \nabla h(x^*)^T (x - x^*) + h(x^*) \right\|^2$$

s.a. $l \leq x \leq u, \quad \|x - x^*\| \leq r \Delta_k,$

ONDE $r \in (0, 1]$.

OBS.: O CONTROLE DO RAIO DE CONFIANÇA Δ_k É
REALIZADO CONFORME ESQUEMA PARA REGIÕES DE
CONFIANÇA JÁ VISTO.

REF.: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO.