

$$\min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x)=0, \quad g(x) \leq 0.$$

EXERCÍCIOS:

1) DêSA x^k o ITERANDO DO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA.

SUPONHA QUE $\rho_{k+1} > \rho_k, \forall k$. PROVE QUE, $\forall k$,

$$(i) \quad f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1}) \geq f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k)$$

$$\text{ONDE} \quad \phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2$$

(A F.O. DO SUBPROBLEMA AUMENTA)

$$(ii) \quad \phi(x^{k+1}) \leq \phi(x^k) \quad (\text{INVIABILIDADE NÃO PIORA})$$

$$(iii) \quad f(x^{k+1}) \geq f(x^k) \quad (\text{F.O. DO PROB. ORIGINAL NÃO DIMINUI})$$

3) MOSTRE QUE, NO MÉTODO DO GRADIENTE, SE USARMOS BUSCA LINEAR EXATA ENTÃO $\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0$.

DISCUTIR O POSSÍVEL EFEITO DE "ZIG-ZAG" E COMO A BUSCA LINEAR COM ARMIJO PODE EVITAR.

SOLUÇÃO: NO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO, x^k É MINIMIZADOR GLOBAL DO SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k): \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x).$$

TEMOS

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^{k+1})$$

$(x^k \text{ é min. GL. de } SP(\rho_k))$

$$\leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1})$$

$(\rho_k < \rho_{k+1} \text{ e } \phi(x^{k+1}) \geq 0)$

ISSO MOSTRA (i).

AGORA,

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^{k+1}) \quad (1)$$

E

$$f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^k) \quad (2)$$

FAZENDO $(1) - (2)$, OBTENEMOS

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k) - \left[f(x^k) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^k) \right]$$

$$\leq f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^{k+1}) - \left[f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1}) \right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{2}}_{< 0} \phi(x^k) \leq \frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1})$$

$$\Rightarrow \phi(x^k) \geq \phi(x^{k+1}) . \quad \text{Assim, mostramos (ii)}$$

VAMOS AGORA PROVAR (iii). DE (1) VEM

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \geq \frac{\rho_k}{2} [\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})] \geq 0 ,$$

CONCLUINDO A PROVA //

3) A BUSCA LINEAR EXATA CONSISTE EM CALCULAR t_k RESOLVENDO

$$\min_{t > 0} \varphi(t) = f(x^k - t \nabla f(x^k))$$

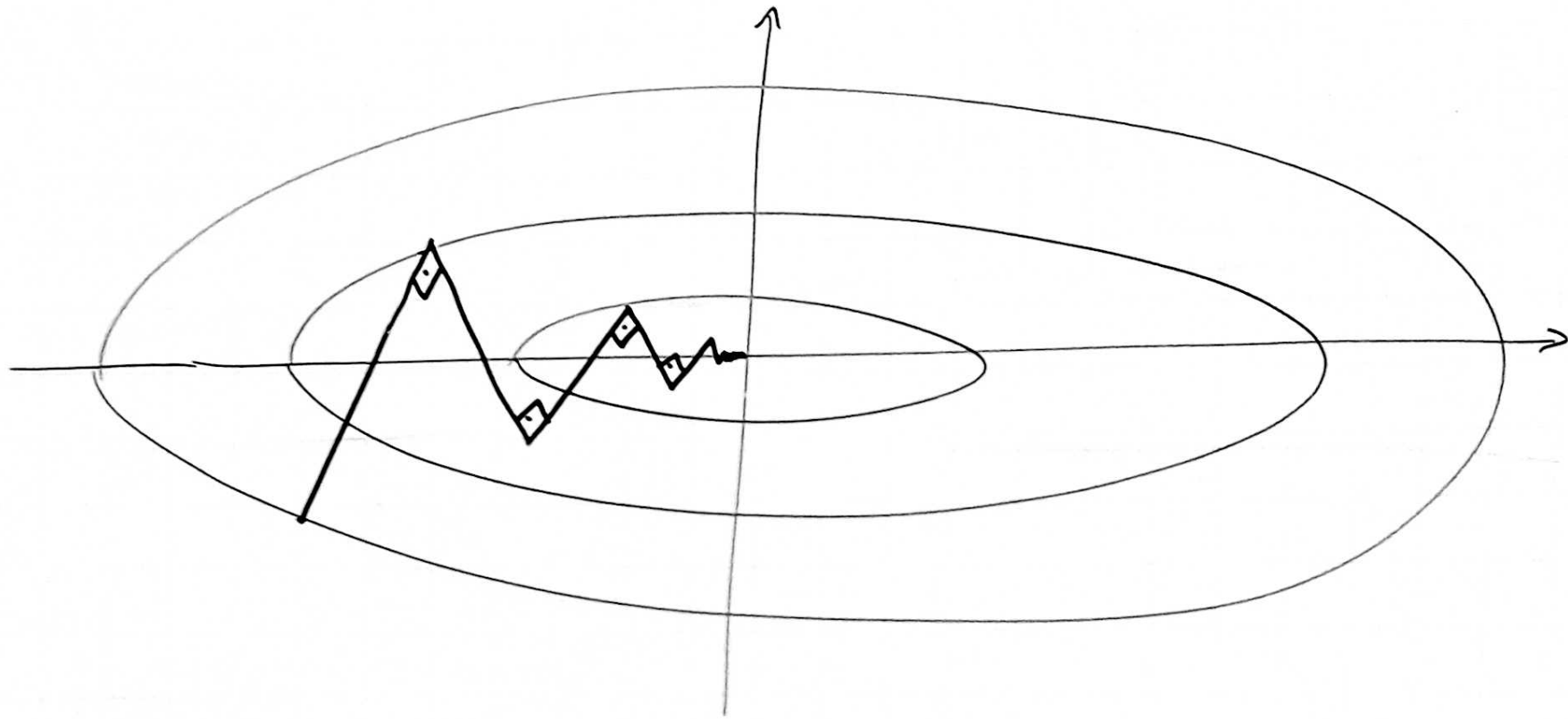
SENDO t_k MINIMIZADOR DESTA PROBLEMA,

$$0 = \varphi'(t_k) = \underbrace{\nabla f(x^k - t_k \nabla f(x^k))}_{x^{k+1}}^T (-\nabla f(x^k))$$

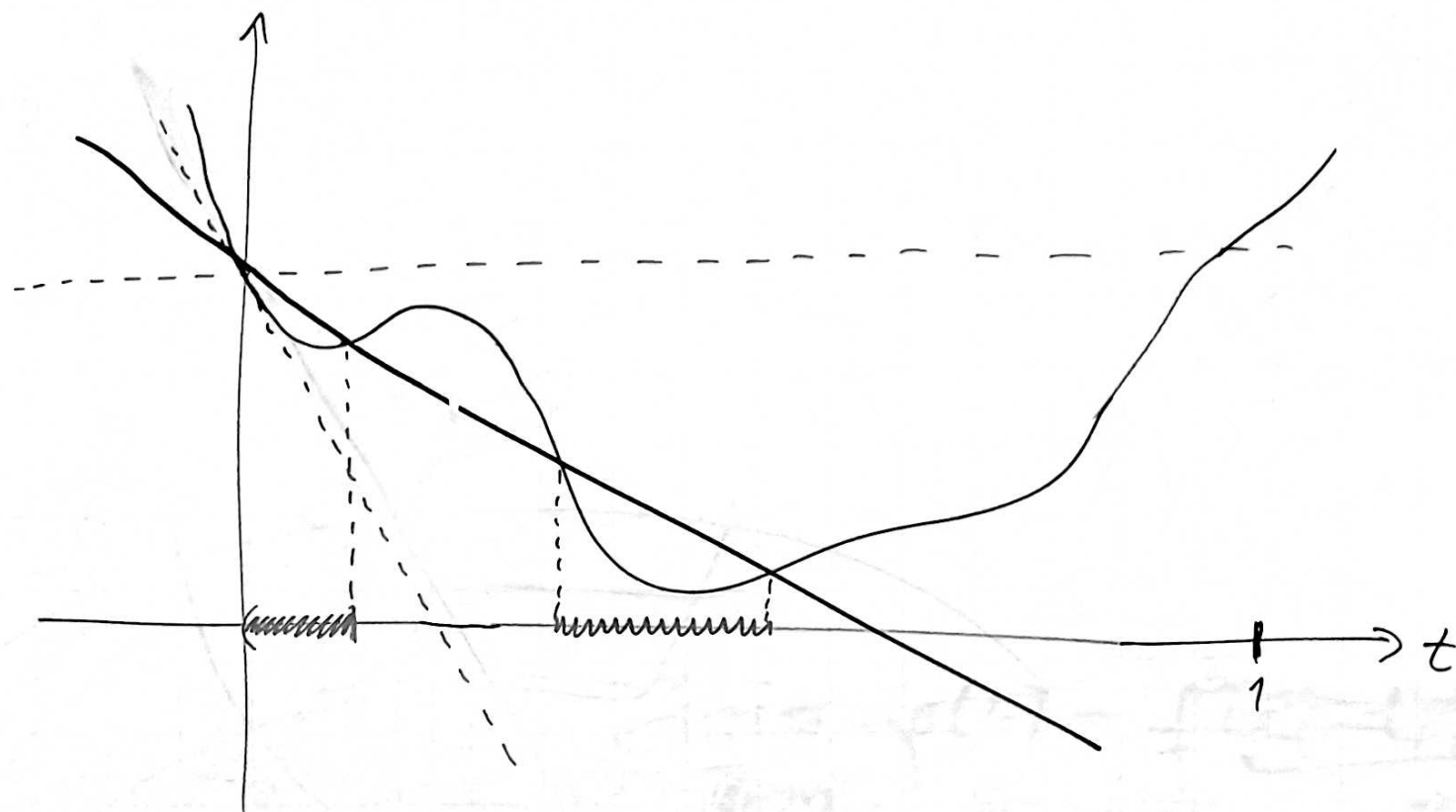
$$\Rightarrow \nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0.$$

O MÉTODO DO GRADIENTE COM BUSCA LINEAR EXATA TEM UMA TENDÊNCIA EM FAZER "ZIG-ZAG" QUANDO AS CURVAS DE NÍVEL DE f SÃO "ALONGADAS". POR SIMPLICIDADE, CONSIDERAR $\varphi(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$,

ONDE A É SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA.



PODEMOS DIMINUIR ESSE EFEITO ALTERANDO O ÂNGULO ENTRE OS SEGMENTOS DE x^k A x^{k+1} . CONSIDERANDO QUE AS DIREÇÕES SEMPRE SÃO $-\nabla f(x^k)$, ALTERAMOS O TAMANHO DO PASSO. UMA DESSAS ESTRATÉGIAS É ARMJQ.



ARMJO É UMA CONDIÇÃO QUE GARANTE DECRESCIMO "SUFICIENTE" PARA f . PERTO DA SOLUÇÃO, AO CONTRÁRIO DA BUSCA EXATA, ARMJO TENDE A FAZER O MÉTODO CONVERGIR MAIS RÁPIDO.

6.6 (ANA)

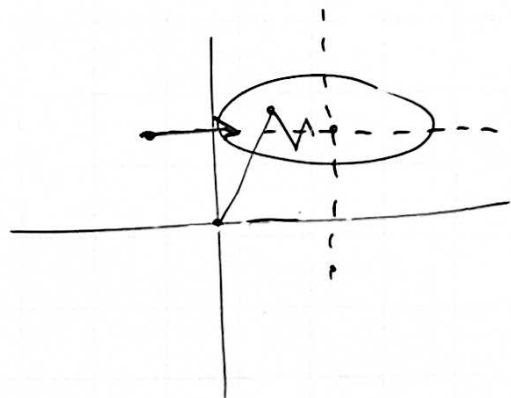
$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2, \quad x^0 = (0, 0).$$

TEMOS

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 8(x_2 - 1) \end{bmatrix}.$$

O ÚNICO PONTO ESTACIONÁRIO É $x^* = (2, 1)$, QUE É O MINIMIZADOR DADO QUE f É CONVEXA.

AFIRMAMOS QUE SE $x_1^k \neq 2$ E $x_2^k \neq 1$ ENTÃO $x_1^{k+1} \neq 2$ E $x_2^{k+1} \neq 1$.



NOTE QUE

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x, \quad \text{ONDE}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{O PASSO } t_k \text{ DA BUSCA}$$

LINEAR EXATA RESOLVE $\min_{t>0} f(x^* - t \nabla f(x^*))$.

ASSIM

$$0 = \frac{d}{dt} f(x^* - t_k \nabla f(x^*)) = -\nabla f(x^* - t_k \nabla f(x^*))^T \nabla f(x^*)$$

SUBSTITUINDO A EXPRESSÃO DE f NA EQ. ACIMA E MANIPULANDO,
ENCONTRAMOS

$$t_k = \frac{\nabla f(x^*)^T \nabla f(x^*)}{\nabla f(x^*)^T A \nabla f(x^*)}$$

TEMOS

$$t_k = \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{2 \cdot 4\alpha^2 + 8 \cdot 64\beta^2}$$

ONDE $\alpha = x_1^* - 2 \neq 0$ e $\beta = x_2^* - 1 \neq 0$.

OBSERVE QUE

$$t_k < \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{2(4\alpha^2 + 64\beta^2)} = \frac{1}{2}$$

E

$$t_k > \frac{4\alpha^2 + 64\beta^2}{8(4\alpha^2 + 64\beta^2)} = \frac{1}{8}$$

SE FOSSE $x_1^{k+1} = 2$, ENTÃO TERÍAMOS

$$x_1^{k+1} = x_1^k - t_k(2(x_1^k - 2)) \Rightarrow 2 = x_1^k - 2t_k(x_1^k - 2)$$

$$\Rightarrow 2t_k(x_1^k - 2) = x_1^k - 2 \Rightarrow t_k = \frac{1}{2},$$

UM ABSURDO. POR OUTRO LADO, SE FOSSE $x_2^{k+1} = 1$, TERÍAMOS

$$x_2^{k+1} = x_2^k - t_k(8(x_2^k - 1)) \Rightarrow 8t_k(x_2^k - 1) = x_2^k - 1 \Rightarrow t_k = \frac{1}{8}, \text{ UM ABSURDO.}$$

DAÍ, $x_1^{k+1} \neq 2$ E $x_2^{k+1} \neq 1$.

ISSO MOSTRA QUE, INICIANDO EM $x^0 = (0, 0)$, NÃO CHEGAMOS
A $x^* = (2, 1)$ EM FINITOS PASSOS.

SE x^0 ESTIVER SOBRE ALGUM EIXO DA ELIPSE ($f(x) = c > 0$),
ISTO É, $x_1^0 = 2$ OU $x_2^0 = 1$, ENTÃO O MÉTODO DO GRADIENTE
COM BUSCA LINEAR EXATA TERMINA EM 1 PASSO.

2.14 (AVA) $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$, Q SIMÉTRICA DEF. POSITIVA.

SEJAM $x^0, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$, $\delta^j = x^j - x^0$, $\gamma^j = \nabla f(x^j) - \nabla f(x^0)$, $j = 1, \dots, m$.
PROVE QUE SE $\{\delta^1, \dots, \delta^m\}$ É L.I. ENTÃO

$$\tilde{x} = x^m - [\delta^1 \dots \delta^m] \cdot [\gamma^1 \dots \gamma^m]^{-1} \nabla f(x^m) \quad \text{É MINIMIZADOR GLOBAL DE } f.$$

RESOLUÇÃO: Como Q é DEFINIDA POSITIVA, POSSUI INVERSA.

VEJA QUE

$$y^j = \nabla f(x^j) - \nabla f(x^0) = (Qx^j - b) - (Qx^0 - b) = Qs^j.$$

COMO $\{s^1, \dots, s^m\} \in \angle I$, A MATRIZ

$$[y^1 \dots y^m] = [Qs^1 \dots Qs^m] = Q[s^1 \dots s^m]$$

TEM INVERSA, E LOGO \tilde{x} ESTÁ BEM DEFINIDO. TEMOS

$$\begin{aligned} \nabla f(\tilde{x}) &= Q\tilde{x} - b = Q\left[x^m - [s^1 \dots s^m] (Q[s^1 \dots s^m])^{-1} (Qx^m - b)\right] - b \\ &= \cancel{Qx^m} - \underbrace{(Q[s^1 \dots s^m]) (Q[s^1 \dots s^m])^{-1}}_I (\cancel{Qx^m - b}) - \cancel{b} = 0. \end{aligned}$$

OU SEJA, \tilde{x} É PONTO ESTACIONÁRIO DE f . MAS COMO
 f É CONVEXA ($\nabla^2 f(x) = A$ É DEF. POSIT.), \tilde{x} É SEU MINIMIZA-
DOR GLOBAL.