MODELOS QUADRÁTICOS

REGIÕES DE CONFIANÇA: $\min_{d} \frac{1}{2} d^t B_k d + \nabla f(x^k)^t d$

s.a. $\|d\| \leq \Delta_k$

SQP: $\min_{d} \frac{1}{2} d^t B_k d + \nabla f(x^k)^t d$

s.a. $\nabla h(x^k)^t d + h(x^k) = 0$

COMO ESCOLHER B_{k+1} ?

- DESEJO: $B_{k+1} = \nabla^2 f(x^k)$ OU $B_k = \nabla^2 L(x^k, \lambda^k)$
- PROBLEMA: ESTAS ESCOLHAS PODEM NÃO SER SEMIDEF. POSITIVAS (SUBPROBLEMA NÃO CONVEXO).

$\boxed{1^{\underline{a}}\ \text{ESCOLHA}}$ $B_{k+1} = \nabla^2 L + \alpha I$, ONDE $\alpha > 0$ É GRANDE O SUFICIENTE PARA QUE B_{k+1} SEJA DEF. POSIT.

VEJA QUE

$$0 < x^t B_{k+1} x = x^t \nabla^2 L x + \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \alpha > -\frac{x^t \nabla^2 L x}{\|x\|^2}, \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \alpha > -\lambda_{min}(\nabla^2 L) = -\text{"MENOR AUTOVALOR"}$$

O CÁLCULO DO MENOR AUTOVALOR É CARO. PORÉM, É SUFICIENTE CALCULAR UMA COTA INFERIOR PARA $\lambda_{min}(\nabla^2 L)$.

UMA MANEIRA DE CALCULAR UMA COTA É ATRAVÉS DOS CÍRCULOS / DISCOS DE GERSHGORIN.

$$A = \nabla^2 L = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

DEFINIMOS O <u>CÍRCULO DE GERSHGORIN</u> COMO

$$D_i = \{ \lambda \in \mathbb{R} \,;\, |\lambda - a_{ii}| \leq \underbrace{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{\text{LINHA } i \text{ DE } A} \}.$$

<u>TEOREMA:</u> TODO AUTOVALOR λ DE A PERTENCE A ALGUM D_i.

<u>PROVA:</u> SEJA $Av = \lambda v$, E i O ÍNDICE

TAL QUE $|v_i| = \max_j |v_j|$. A i-ÉSIMA LINHA DE $Av = \lambda v$ É

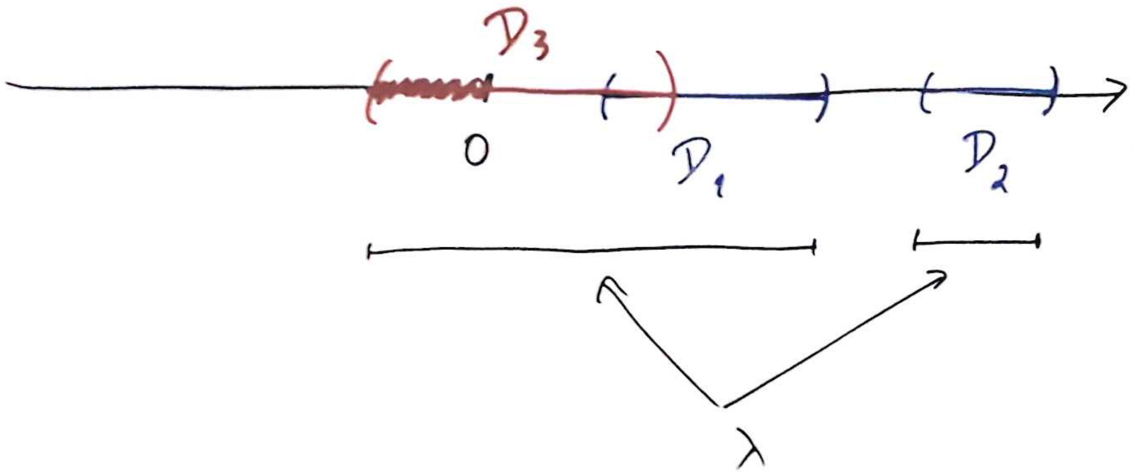
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

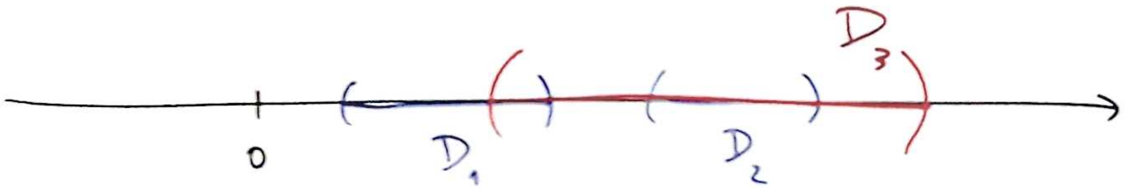
$$\iff \lambda v_i - a_{ii} v_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j$$

$$\implies |\lambda - a_{ii}| \cdot |v_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |v_j|$$

$$\underset{v_i \neq 0}{\implies} |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \underbrace{\frac{|v_j|}{|v_i|}}_{\leq 1} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$\blacksquare$





$\Longrightarrow A$ DEF. POS.

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \{ \lambda \in \mathbb{R} \,;\, |\lambda - 5| \leqslant 3 \}$$
$$= [2, 8] ,$$

$$D_2 = [2, 6] , \quad D_3 = [4, 10] .$$

$$\Rightarrow 0 \notin \bigcup D_i \Longrightarrow \lambda_{min}(A) \geqslant 2$$

ASSIM A É DEF. POSIT. DIZ-SE QUE ESTA A É "DIAGONALMENTE DOMINANTE". //

SE $\lambda_{min}(\nabla^2 L) > 0$, $\nabla^2 L$ JÁ É DEF. POSIT. E PODEMOS TOMAR $\alpha = 0$. O CASO QUE IMPORTA É QUANDO $\lambda_{min}(\nabla^2 L) \leq 0$. NA DÚVIDA, TOMAMOS O "AVANÇO MAIS NEGATIVO" DOS DISCOS D_i:

$$\sigma = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

VEJA QUE

$$\lambda \in D_i \iff a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

$$\implies \sigma = \min \left\{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \leq \lambda \,, \quad \forall \text{ AUTOVALOR}$$

$$\implies \sigma \leq \lambda_{min}(\nabla^2 L).$$

OBSERVE QUE σ SERVE PARA α (POIS É UMA COTA INFERIOR PARA $\lambda_{min}(\nabla^2 L)$) E É FÁCIL DE CALCULAR. TOMAMOS

$$\alpha = |\sigma| + 1.$$

FINALMENTE,

$$B_{k+1} = \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) + \rho(|\sigma|+1) I \quad , \quad \rho \in (0, 1].$$

ISSO É EMPREGADO NO SQP WORHP.

- SE $\rho \approx 0$, HÁ RISCO DE B_{k+1} NÃO SER DEF. POSIT. POR OUTRO LADO, $\rho = 1$, HÁ GARANTIA TEÓRICA DE B_{k+1} SER DEF. POSIT.
- WORHP "FAZ UMA APOSTA" AO TOMAR $\rho < 1$, EM NOME DA ESTABILIDADE NUMÉRICA.

$\boxed{2^{\underline{a}} \text{ ESCOLHA}}$ BASEADA EM UMA APROXIMAÇÃO DE $\nabla^2 L$.

QUEREMOS A APROXIMAÇÃO B_{k+1} SIMÉTRICA, DEF. POSIT, E QUE NÃO DEPENDA DO CÁLCULO DE $\nabla^2 L$.

POR SIMPLICIDADE, VAMOS CONSIDERAR UM PROBLEMA IRRESTRITO... LOGO $B_{k+1} \approx \nabla^2 f$.

TAYLOR:

$$\nabla f(x^{k+1}) \approx \nabla f(x^k) + \underline{\nabla^2 f(x^k)} (x^{k+1} - x^k)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\nabla^2 f(x^k)} (x^{k+1} - x^k) \approx \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k).$$

B_{k+1} SERÁ SOLUÇÃO DO SISTEMA

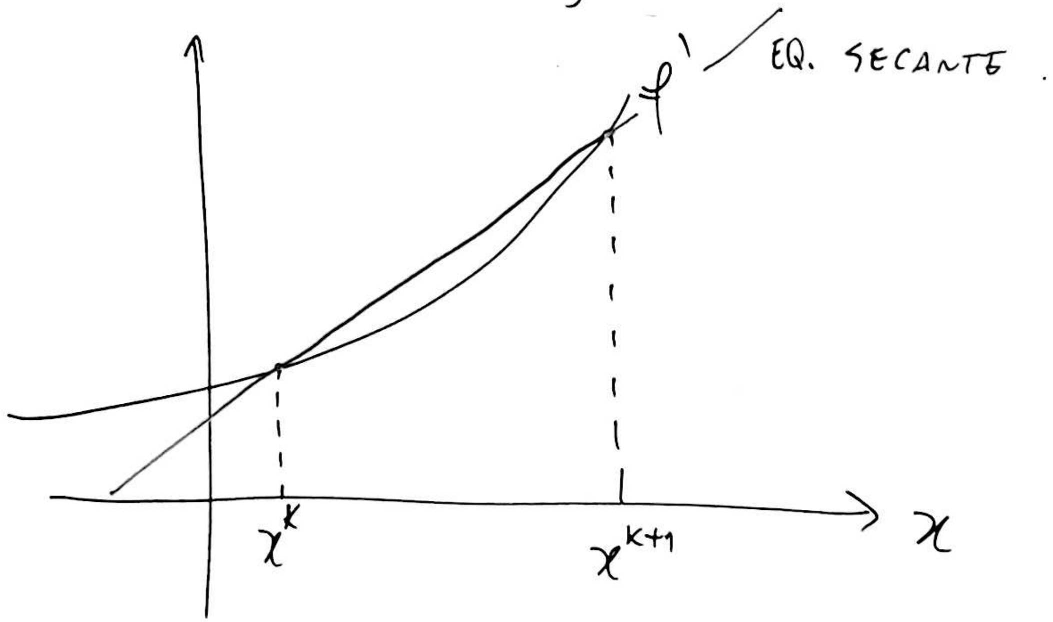
$$B_{k+1}\left(x^{k+1}-x^{k}\right)=\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^{k}),$$

OU

$$\boxed{B_{k+1}\, s = y}$$ (EQUAÇÃO SECANTE)

ONDE $s = x^{k+1}-x^{k}$ E $y=\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^{k})$.

$\boxed{n=1}$



<u>TEOREMA</u>: A EQUAÇÃO SECANTE POSSUI SOLUÇÃO EM B.

<u>PROVA</u>: DEFINIMOS $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ PONDO

$$g(t) = \nabla f(x^k + t(x^{k+1} - x^k)).$$

PELO TEO. FUNDAMENTAL PARA INTEGRAIS DE LINHA,

$$\int_0^1 \nabla g(t)\, dt = g(1) - g(0).$$

AGORA,

$$\nabla g(t) = \nabla^2 f(x^k + t(x^{k+1} - x^k))(x^{k+1} - x^k)$$

ASSIM

$$\underbrace{\left[\int_0^1 \nabla^2 f(x^k + t(x^{k+1} - x^k))\, dt\right]}_{\text{MATRIZ } m \times m.} (x^{k+1} - x^k) = g(1) - g(0)$$

$$= \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$$

DESTA FORMA, $\int_0^1 \nabla^2 f(x^k + t(x^{k+1} - x^k))\, dt$ É UMA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO SECANTE. ∎