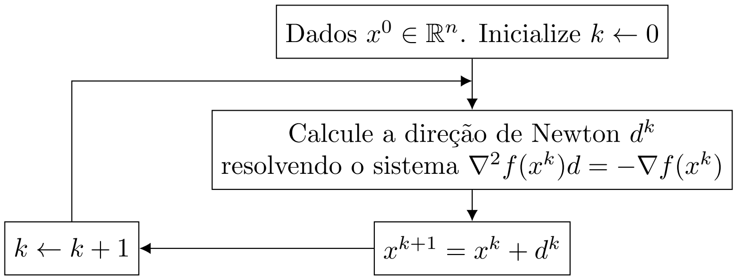
# Capítulo 12

# Método de Newton




Algoritmo 12.1: Método de Newton.

## 12.1 Convergência local

Dada uma matriz quadrada $A$, lembre-se que a *norma de $A$* é dada por

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

onde $\|Ax\|$ é norma usual do vetor $Ax$. Neste caso dizemos que a norma matricial $\|\cdot\|$ é induzida pela norma correspondente $\|\cdot\|$ de vetores. Nesta seção, $\|A\|$ indicará a norma matricial induzida pela norma euclideana de vetores.

**Exercício:** Mostre que

1. $\|\cdot\|$ é de fato uma norma no espaço das matrizes, isto é, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ e $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
2. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ ($A$ matriz, $x$ vetor) e $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ($A, B$ matrizes);
3. $\|I\| = 1$, onde $I$ é matriz identidade.

**Lema 2.** *Se $F$ é uma matriz quadrada tal que $\|F\| < 1$, então $I - F$ é não singular e $\|(I-F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|F\|}$.*

*Demonstração.* Veja o Lema 2.3.3 de (Golub, Van Loan. Matrix Computations. 4 ed. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013). □

O próximo lema diz que, dada uma matriz não singular $A_*$, qualquer matriz suficientemente próxima é também não singular, e a norma da sua inversa pode ser majorada pela norma da inversa de $A_*$. Resultados do tipo são encontrados em livros de análise matricial, veja por exemplo [4, Teorema 2.3.1]. O resultado aqui apresentado é muito similar ao Lema 5.4.1 de [2], e será útil na prova de convergência do método de Newton, dado que temos que lidar com a inversa da hessiana de $f$ próximo à solução.

**Lema 3.** *Seja $A_*$ matriz quadrada não singular. Se $A$ é tal que $\|A - A_*\| < 1/\|A_*^{-1}\|$ então $A$ é não singular e $\|A^{-1}\| \leq 2\|A_*^{-1}\|$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar primeiro, por contraposição, que $A$ é não singular. Suponha que $A$ seja singular. Então existe $z \neq 0$ tal que $Az = 0$. Pelas propriedades da norma de matrizes, segue que

$$\|z\| = \| - A_*^{-1}A_*z\| = \|A_*^{-1}(A - A_*)z\| \leq \|A_*^{-1}\|\|(A - A_*)\|\|z\|.$$

Dividindo a expressão acima por $\|z\| > 0$, obtemos $\|A - A_*\| \geq 1/\|A_*^{-1}\|$, como queríamos.

Para mostrar que $\|A^{-1}\| \leq 2\|A_*^{-1}\|$, note primeiro que $AA_*^{-1}$ é inversível e

$$\|I - AA_*^{-1}\| = \|(A - A_*)A_*^{-1}\| \leq \|A - A_*\|\|A_*^{-1}\| < 1.$$

Aplicando o Lema 2 com $F = I - AA_*^{-1}$ obtemos

$$\|(AA_*^{-1})^{-1}\| = \|[I - (I - AA_*^{-1})]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - AA_*^{-1}\|} \leq 2. \tag{12.1}$$

Assim,

$$\|A^{-1}\| = \|A_*^{-1}A_*A^{-1}\| = \|A_*^{-1}(AA_*^{-1})^{-1}\| \leq \|A_*^{-1}\|\|(AA_*^{-1})^{-1}\| \leq 2\|A_*^{-1}\|,$$

como queríamos demonstrar. □

**Teorema 5.** *Suponha que $f$ tenha derivadas de segunda ordem contínuas. Seja $x^*$ tal que $\nabla f(x^*) = 0$ e suponha que $\nabla^2 f(x^*)$ seja não singular. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, vale:*

1. *A sequência $x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k)$, $k \geq 0$, está bem definida (isto é, o passo de Newton está bem definido para todo $k \geq 0$);*

2. *$\{x^k\}$ converge a $x^*$ com ordem superlinear;*

3. *Se a função $\nabla^2 f$ é Lipschitz contínua, isto é, se existe $L > 0$ tal que*

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

*então $\{x^k\}$ converge a $x^*$ com ordem quadrática.*

*Demonstração.* Como $\nabla^2 f$ é contínua e não singular em $x^*$, temos $\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| > 0$ e a existência de um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x - x^*\| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x^*)\| \leq \frac{1}{4\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|}. \tag{12.2}$$

Assim, tomando $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, o Lema 3 garante que $x^1 = x^0 - (\nabla^2 f(x^0))^{-1}\nabla f(x^0)$ está bem definido. Por hipótese temos $\nabla f(x^*) = 0$, e logo

$$\begin{aligned} \|x^1 - x^*\| &= \|x^0 - x^* - \nabla^2 f(x^0)^{-1}\nabla f(x^0)\| \\ &= \|\nabla^2 f(x^0)^{-1}[-\nabla^2 f(x^0)(x^0 - x^*) + \nabla f(x^0) - \nabla f(x^*)]\| \\ &\leq \|\nabla^2 f(x^0)^{-1}\|\|\nabla f(x^0) - \nabla f(x^*) - \nabla^2 f(x^0)(x^0 - x^*)\|. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Consideremos a função $\varphi$ de uma variável definida por

$$\varphi(t) = \nabla f(tx^0 + (1 - t)x^*), \quad t \in [0, 1].$$

Temos

$$\varphi'(t) = \nabla^2 f(tx^0 + (1 - t)x^*)(x^0 - x^*).$$

Pelo Teorema do Valor Médio aplicado à $\varphi$, existe $\bar{t} \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi'(\bar{t}) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$

o que implica

$$\nabla^2 f(\bar{t}x^0 + (1-\bar{t})x^*)(x^0 - x^*) = \nabla f(x^0) - \nabla f(x^*).$$

Usando essa expressão em (12.3), chegamos a

$$\begin{aligned} \|x^1 - x^*\| &\leq \|\nabla^2 f(x^0)^{-1}\| \|\nabla^2 f(\bar{t}x^0 + (1-\bar{t})x^*)(x^0 - x^*) - \nabla^2 f(x^0)(x^0 - x^*)\| \\ &\leq r_0 \|x^0 - x^*\|, \end{aligned} \tag{12.4}$$

onde

$$r_0 = \|\nabla^2 f(x^0)^{-1}\| \max_{t\in[0,1]} \|\nabla^2 f(tx^0 + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^0)\|.$$

Note que para $t \in [0,1]$, temos

$$\|tx^0 + (1-t)x^*\| = (1-t)\|x^0 - x^*\| \leq \|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Assim, (12.2) e o Lema 3 garantem que

$$r_0 \leq 2\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \frac{1}{4\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|} = \frac{1}{2}.$$

Daí, segue de (12.4) que

$$\|x^1 - x^*\| \leq r_0\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

e usando novamente (12.2) e o Lema 3, concluímos que $x^2$ está bem definido. Repetindo indutivamente o argumento, provamos que, para todo $k \geq 0$, o iterando $x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k)^{-1})\nabla f(x^k)$ está bem definido (item 1) e que

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq r_0 \cdot r_1 \cdots r_k \|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}\|x^k - x^*\|,$$

onde

$$r_k = \|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \max_{t\in[0,1]} \|\nabla^2 f(tx^k + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^k)\| \leq 1/2.$$

Isso mostra que $\lim_k x^k = x^*$ com ordem superlinear (item 2).

Vamos mostrar a convergência quadrática (item 3). Suponha que $\nabla^2 f$ seja Lipschitz contínua com constante $L > 0$, como no enunciado. O passo de indução realizado na prova dos itens 1 e 2 fornece uma expressão análoga à (12.4), com $x^{k+1}$ no lugar de $x^1$ e $x^k$ no lugar de $x^0$. Assim, usando o Lema 3, temos

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &\leq r_k\|x^k - x^*\| \\ &= \Big(\|\nabla^2 f(x^k)^{-1}\| \max_{t\in[0,1]} \|\nabla^2 f(tx^k + (1-t)x^*) - \nabla^2 f(x^k)\|\Big)\|x^k - x^*\| \\ &\leq \Big(2\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \max_{t\in[0,1]} L\|\underbrace{tx^k + (1-t)x^* - x^k}_{(1-t)\|x^k - x^*\|}\|\Big)\|x^k - x^*\| \\ &\leq 2\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \|x^k - x^*\|^2 \max_{t\in[0,1]}(1-t), \end{aligned}$$

o que implica

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C\|x^k - x^*\|^2, \tag{12.5}$$

onde $C = 2\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| > 0$. Ou seja, $\lim_k x^k = x^*$ com ordem quadrática. □