TEOREMA: SEJA x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA $\{x^k\}$ GERADA PELO ALGORITMO. ENTÃO

$$\nabla f(x^*) = 0 .$$

PROVA: SEJA $\{x^k\}_{k \in N}$ SUBSEQUÊNCIA DE $\{x^k\}$ COM LIMITE x^*.

CASO 1. $\|t_k d^k\| \geq \varepsilon_1 > 0$ PARA ALGUM $\varepsilon_1 > 0$, E PARA INFINITOS $k \in N$. DAS CONDIÇÕES DE ARMIJO E DO ÂNGULO TEMOS

$$\underline{f(x^{k+1})} = f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) + \alpha t_k \nabla f(x^k)^t d^k$$

$$\leq f(x^k) - \alpha t_k \theta \|\nabla f(x^k)\| . \|d^k\|$$

$$\leq \underline{f(x^k) - \alpha \varepsilon_1 \theta \|\nabla f(x^k)\|} \quad \text{PARA TODOS} \quad k \in N_1 \subset \mathbb{N},$$

PARA CERTO $N_1 \underset{\infty}{\subset} \mathbb{N}$. DAÍ,

$$\|\nabla f(x^k)\| \leq \frac{f(x^k) - f(x^{k+1})}{\alpha \varepsilon_1 \theta}$$

COMO a sequência {f(x^k)} é decrescente e limitada inferiormente, O LIMITE

DO LADO DIREITO É NULO. ASSIM,

$$\|\nabla f(x^*)\| = \lim_{k \in N_1} \|\nabla f(x^k)\| = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$

<u>CASO 2</u>: $\|t_k d^k\| \longrightarrow 0$.

SE FOREM FEITAS INFINITAS ESCOLHAS $t_k = 1$ NO ALGORITMO, DIGAMOS QUE $t_k = 1$, $\forall k \in N_2 \subseteq_\infty N$, OLHAMOS PARA A CONDIÇÃO β:

$$\|d^k\| \geq \beta \|\nabla f(x^k)\|.$$

COMO $\|t_k d^k\| \to 0$ E $t_k = 1$, TEMOS $\lim\limits_{k \in N_2} \|d^k\| = 0$.

ASSIM,

$$\|\nabla f(x^*)\| = \lim_{k \in N_2} \|\nabla f(x^k)\| \leq \lim_{k \in N_2} \frac{\|d^k\|}{\beta} = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$

CONSIDERAMOS AGORA O CASO EM QUE $t=1$ FALHA A PARTIR DE CERTA ITERAÇÃO DO MÉTODO. EXISTE ENTÃO UM $K_1 \in \mathbb{N}$ TAL QUE $t_K < 1$ PARA TODOS $K \geq K_1$. SEJA $\mathbb{N}_3 = \{ K \in \mathbb{N} ; K \geq K_1 \}$. ($\mathbb{N}_3 \subseteq_\infty \mathbb{N}$). A CONDIÇÃO DE ARMIJO NÃO VALE NA PRIMEIRA TENTATIVA ($t=1$) NOS ÍNDICES DE $\mathbb{N}_3$.

SEJA $\tilde{t}_K$ O PASSO REJEITADO IMEDIATAMENTE ANTES DO PASSO ACEITO t_K. TEMOS

$$t_K \in [0{,}1\,\tilde{t}_K \,,\, 0{,}9\,\tilde{t}_K]$$

(SALVAGUARDA)

DAÍ,

$$\|\tilde{t}_k d^k\| \overset{t_k \geq \frac{1}{10}\tilde{t}_k}{\leq} 10\,\|t_k d^k\| \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

NO MÉTODO, ARMIJO FALHOU:

$$f(x^k + \tilde{t}_k d^k) > f(x^k) + \alpha\,\tilde{t}_k \nabla f(x^k)^t d^k. \qquad (2)$$

A SEQUÊNCIA $\left\{ \dfrac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|} \right\}$ É LIMITADA, E LOGO PODEMOS

TOMAR UM PONTO DE ACUMULAÇÃO SEU, DIGAMOS

$$v^* = \lim_{k \in N_4} \frac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|}, \quad N_4 \underset{\infty}{\subset} N_3.$$

DA CONDIÇÃO DO ÂNGULO,

$$\nabla f(x^k)^t \frac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|} \leq -\Theta \|\nabla f(x^k)\|$$

, E PASSANDO

O LIMITE EM N_4, OBTEMOS

$$\nabla f(x^*)^t v^* \leq -\Theta \lim_{k \in N_4} \|\nabla f(x^k)\| = -\Theta \|\nabla f(x^*)\|. \quad (3)$$

SE OLHARMOS PARA A FUNÇÃO

$$\varphi(\delta) = f(x^k + \delta \tilde{t}_k d^k)$$

PODEMOS APLICAR O TEO. DO VALOR MÉDIO RELATIVO

AO INTERVALO $[0,1]$: EXISTE $\delta_k \in (0,1)$ TAL QUE

$$\varphi'(\delta_k) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1-0} = \varphi(1) - \varphi(0).$$

OU SEJA,

$$\tilde{t}_k \nabla f(x^k + \delta_k \tilde{t}_k d^k)^t d^k = f(x^k + \tilde{t}_k d^k) - f(x^k).$$

USANDO (2), OBTEMOS

$$\alpha \tilde{t}_k \nabla f(x^k)^t d^k < \tilde{t}_k \nabla f(x^k + \delta_k \tilde{t}_k d^k)^t d^k$$

DIVIDINDO ESTA DESIGUALDADE POR $\|\tilde{t}_k d^k\|$,

PASSANDO O LIMITE SOBRE N_4 E CONSIDERANDO

(1) OBTEMOS

$$\alpha \nabla f(x^*)^t v^* \leq \nabla f(x^*)^t v^* . \qquad (4)$$

COMO $\alpha \in (0,1)$ E

$$\nabla f(x^*)^t v^* \leq 0 \qquad (\text{DE } (3))$$

SE $\nabla f(x^*) \neq 0$ ENTÃO A EXPRESSÃO (4) SERIA CONTRADITÓRIA. LOGO SÓ PODE SER

$$\nabla f(x^*) = 0$$

$\blacksquare$