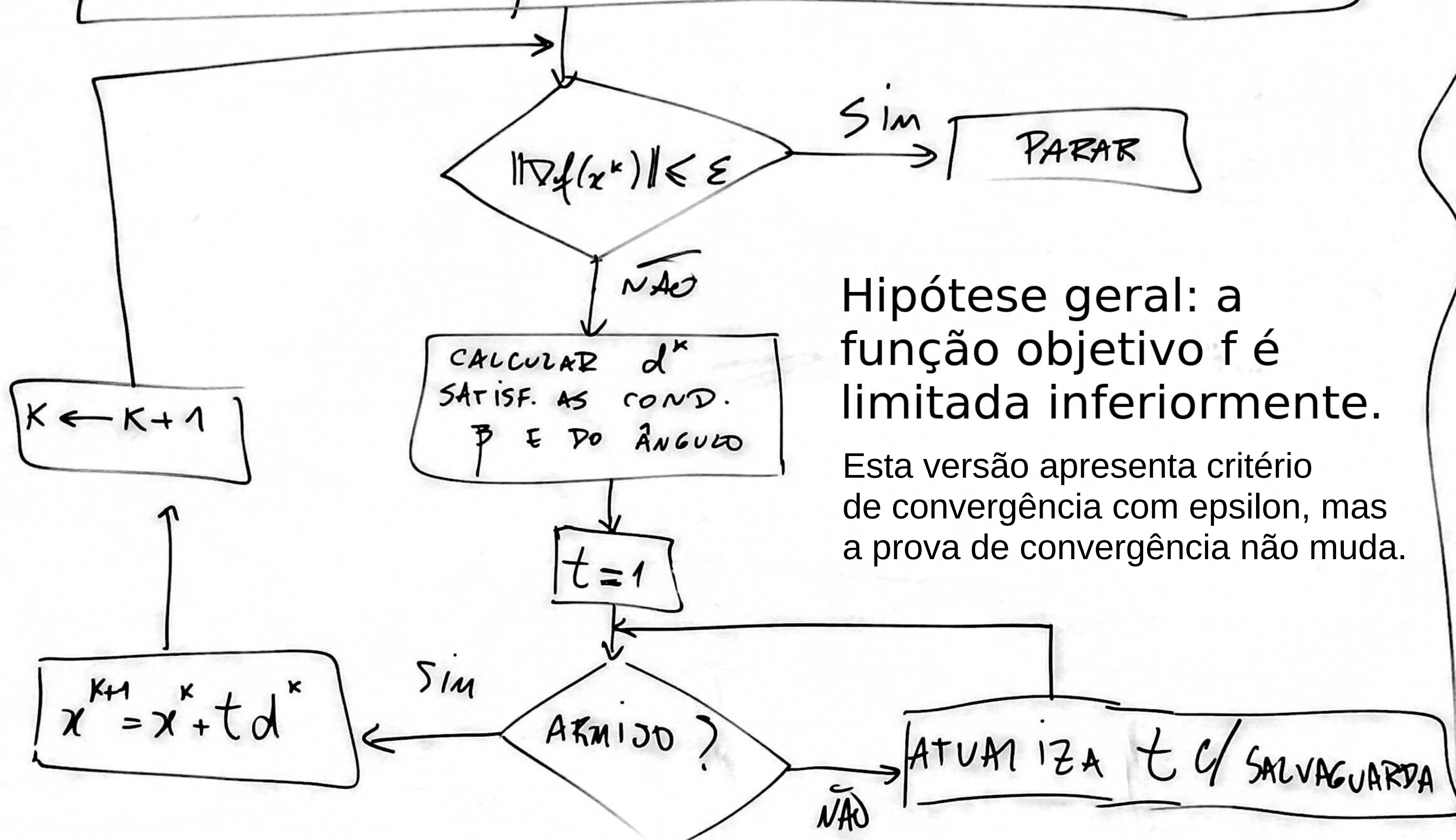


CONVERGÊNCIA GLOBAL DO MÉTODO DE DESCIDA

$x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$, $k \leftarrow 0$



Hipótese geral: a função objetivo f é limitada inferiormente.

Esta versão apresenta critério de convergência com epsilon, mas a prova de convergência não muda.

TEOREMA: SEJA x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA
 $\{x^k\}$ GERADA PELO ALGORITMO. ENTÃO

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

PROVA: SEJA $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ SUBSEQUÊNCIA DE $\{x^k\}$ COM
LÍMITE x^* .

CASO 1. $\|t_k d^k\| \geq \varepsilon_1 > 0$ PARA ALGUM $\varepsilon_1 > 0$, E PARA
INFINITOS $k \in \mathbb{N}$. DAS CONDIÇÕES DE ARMISO E DO ÂNGULO
TEMOS

$$\begin{aligned} \underline{f(x^{k+1})} &= f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) + \alpha t_k \nabla f(x^k)^t d^k \\ &\leq f(x^k) - \alpha t_k \theta \|\nabla f(x^k)\| \cdot \|d^k\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{f(x^k) - \alpha \varepsilon_1 \theta \|\nabla f(x^k)\|}{\alpha \varepsilon_1 \theta} \quad \text{PARA TODOS } k \in N_1 \subset N,$$

PARA CERTO $N_1 \subseteq N$. DAÍ,

$$\|\nabla f(x^k)\| \leq \frac{f(x^k) - f(x^{k+1})}{\alpha \varepsilon_1 \theta}$$

COMO a sequência $\{f(x^k)\}$ é decrescente e limitada inferiormente, o LIMITE

DO LADO DIREITO É NULO. ASSIM,

$$\|\nabla f(x^*)\| = \lim_{k \in N_1} \|\nabla f(x^k)\| = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$

CASO 2: $\|t_k d^k\| \rightarrow 0$.

SE FOREM FEITAS INFINITAS ESCOLHAS $t_k = 1$ NO ALGORITMO, DIGAMOS QUE $t_k = 1, \forall k \in N_2 \subseteq N$, OBTAMOS PARA A CONDIÇÃO β :

$$\|d^k\| \geq \beta \|\nabla f(x^k)\|.$$

COMO $\|t_k d^k\| \rightarrow 0$ E $t_k = 1$, TEMOS $\lim_{k \in N_2} \|d^k\| = 0$.

ASSIM,

$$\|\nabla f(x^*)\| = \lim_{k \in N_2} \|\nabla f(x^k)\| \leq \lim_{k \in N_2} \frac{\|d^k\|}{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$

CONSIDERAMOS AGORA O CASO EM QUE $t=1$

FALHA A PARTIR DE CERTA ITERAÇÃO DO MÉTODO.

EXISTE ENTÃO UM $k_1 \in \mathbb{N}$ TAL QUE $t_k < 1$

PARA TODOS $k \geq k_1$. SEJA $N_3 = \{k \in \mathbb{N}; k \geq k_1\}$.

$(N_3 \subset \mathbb{N})$. A CONDIÇÃO DE ARMIZO NÃO VALE NA PRIMEIRA TENTATIVA ($t=1$) NOS ÍNDICES DE N_3 .

SEJA \tilde{t}_k O PASSO REJEITADO IMEDIATAMENTE

ANTES DO PASSO ACEITO t_k . TEMOS

$$t_k \in [0,1\tilde{t}_k, 0,9\tilde{t}_k]$$

(SALVAGUARDA)

DAÍ,

$$\| \tilde{t}_k d^k \| \leq 10 \| t_k d^k \| \rightarrow 0 \quad (1)$$

$t_k \geq \frac{1}{10} \tilde{t}_k$
↓

NO MÉTODO, ARMIZO FALHOU:

$$f(x^k + \tilde{t}_k d^k) > f(x^k) + \alpha \tilde{t}_k \nabla f(x^k)^T d^k. \quad (2)$$

A SEQUÊNCIA $\left\{ \frac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|} \right\}$ É LIMITADA, E LOGO PODEMOS

TOMAR UM PONTO DE ACUMULAÇÃO SEU, DICAMOS

$$19^* = \lim_{k \in N_4} \frac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|}, \quad N_4 \subset_{\infty} N_3.$$

DA CONDIÇÃO DO ÂNGULO,

$$\nabla f(x^*)^t \frac{\tilde{t}_k d^k}{\|\tilde{t}_k d^k\|} \leq -\theta \|\nabla f(x^*)\|, \quad \text{E PASSANDO}$$

O LIMITE EM N_4 , OBTENEMOS

$$\nabla f(x^*)^t v^* \leq -\theta \lim_{k \in N_4} \|\nabla f(x^*)\| = -\theta \|\nabla f(x^*)\|. \quad (3)$$

SE OLHARMOS PARA A FUNÇÃO

$$\varphi(\delta) = f(x^* + \delta \tilde{t}_k d^k)$$

PODEMOS APLICAR O TEOR. DO VALOR MÉDIO RELATIVO

AO INTERVALO $[0, 1]$: EXISTE $\delta_k \in (0, 1)$ TAL QUE

$$\varphi'(s_k) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} = \varphi(1) - \varphi(0).$$

OU SEJA,

$$\tilde{t}_k \nabla f(x^* + s_k \tilde{t}_k d^k)^t d^k = f(x^* + \tilde{t}_k d^k) - f(x^*).$$

USANDO (2), OBTENEMOS

$$\alpha \tilde{t}_k \nabla f(x^*)^t d^k < \tilde{t}_k \nabla f(x^* + s_k \tilde{t}_k d^k)^t d^k$$

DIVIDINDO ESTA DESIGUALDADE POR $\|\tilde{t}_k d^k\|$,
PASSANDO O LIMITE SOBRE N_4 E CONSIDERANDO

(1) OBTENEMOS

$$\alpha \nabla f(x^*)^t v^* \leq \nabla f(x^*)^t v^* \quad (4)$$

COMO $\alpha \in (0, 1)$ E

$$\nabla f(x^*)^t v^* \leq 0 \quad (\text{DE (3)})$$

SE $\nabla f(x^*) \neq 0$ ENTÃO A EXPRESSÃO (4)

SERIA CONTRADITÓRIA. LOGO SÓ PODE SER

$$\nabla f(x^*) = 0$$

