

# PLANOS DE CORTE

$$P: \min c^t x$$

$$\text{s.a. } x \in S,$$

ONDE  $S \subset \mathbb{R}^m$  É UM CONJUNTO CONVEXO E FECHADO.

OBSERVE QUE UM PROBLEMA

$$\min f(y)$$

$$\text{s.a. } y \in R$$

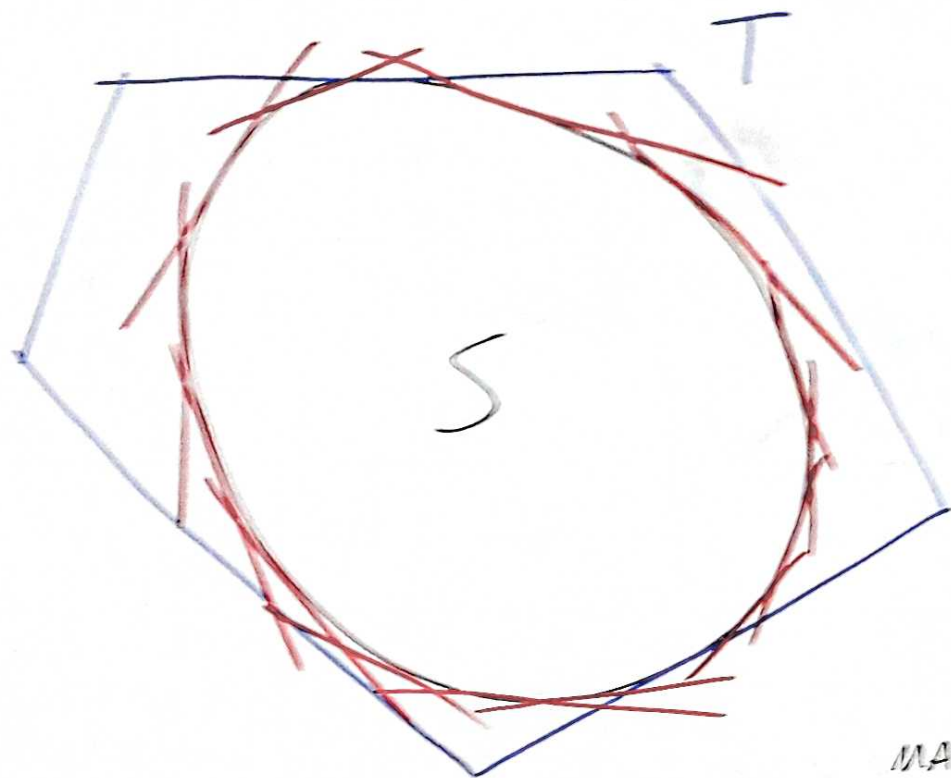
,  $R$  CONVEXO E FECHADO,  $f$  CONVEXA

PODEMOS REESCREVÊ-LO COMO

$$\min 1^t z$$

$$\text{s.a. } f(y) - z \leq 0, y \in R.$$

$$\text{AQUI, } S = \{x = (y, z) ; f(y) - z \leq 0, y \in R\}.$$



$S$  CONVEXO, FECHADO



$\exists T$  POLIEDRAL TAL QUE

$$S \subset T.$$

MAIS AINDA,

$$S = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n; a_i^t x \leq b_i\},$$

$I$  CONJUNTO INFINITO DE ÍNDICES.

O MÉTODO DE PLANOS DE CORTE CONSISTE EM  
GERAR HIPERESPAÇOS  $\{x \in \mathbb{R}^n; a_i^t x \leq b_i\}$  DE  
A APROXIMAR  $S$ .

NOTE QUE O PROBLEMA QUE APROXIMA  $P$   
É UM PL:

$$\min c^t x$$

$$\text{s.a. } a_i^t x \leq b_i, \quad i \in \overline{I},$$

ONDE  $\overline{I}$  É FINITO.

OBSERVE QUE O NÚMERO DE RESTRIÇÕES AUMENTA, MAS  
O NÚMERO DE VARIÁVEIS PERMANECE CONSTANTE, O QUE  
NOS LEVA A UTILIZAR O DUAL DO PL. (DUAL SIMPLEX).

## ESQUEMA GERAL:

1) Tome um poliedro  $T^0 \supset S$ , e  $x^0 \in \mathbb{R}^m$ . Faça  $k=0$

2) RESOLVA  $\min c^t x$   
s.a.  $x \in T^k$ ,

obtendo  $x^k$ .

3) Se  $x^k \in S$ , PARE. Caso  $x^k \notin S$ , CERE um  
HIPERPLANO  $H^k = \{x \in \mathbb{R}^m; a_k^t x \leq b_k\}$  TAL QUE

$S \subset T^k \cap H^k$  e  $x^k \notin H^k$ .

Tome  $T^{k+1} = T^k \cap H^k$ ,  $k \leftarrow k+1$  E VOLTE AO PASSO 2.



OBS.: NA PRÁTICA É INTERESSANTE DESCARTAR HIPERPLANOS REDUNDANTES. UMA ESTRATÉGIA É DESCARTAR HIPERPLANOS INATIVOS NO PONTO CORRENTE  $x^k$ .

CONSIDERE O PROBLEMA

$$\min c^t x$$

$$\text{s.a. } g_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, P,$$

$g_i$ 's SÃO CONVEXAS E CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS.

$$\text{Aqui, } S = \{x \in \mathbb{R}^n; g_i(x) \leq 0, \forall i\}.$$

DADO  $x^* \notin S$ , TEMOS  $g_j(x^*) > 0$  PARA ALGUNS  $j$ 's.

DA CONVEXIDADE DE  $g_j$ , TEMOS

$$g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*)^t (x - x^*) \leq g_j(x), \quad \forall x.$$

o DESEJO É QUE  $g_j(x) \leq 0$  CONSIDERAMOS

o HIPERESPACO

$$H^k = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*)^t (x - x^*) \leq 0\}.$$

OBSERVE QUE

(i)  $S \subset H^k$

(ii)  $x^k \notin H^k$ , DADO QUE

$$g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*)^t (x^k - x^*) = g_j(x^*) > 0.$$

OBS.: isso só funciona supondo  $\nabla g_j(x^*) \neq 0$ .

## CONVERGÊNCIA

TEOREMA: SEJAM  $q_i$ ,  $i=1, \dots, p$ , FUNÇÕES CONVEXAS DE CLASSE  $C^1$ . SUPONHA QUE O MÉTODO DE PLANOS DE PORTE GERE UMA SEQUÊNCIA  $\{x^k\}$  COM SUCESSO. ENTÃO QUALQUER PONTO DE ACUMULAÇÃO  $x^*$  DE  $\{x^k\}$  É MINIMIZADOR DE

$$\min c^T x$$

$$\text{s.a. } q_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, p.$$

PROVA: EXERCÍCIO (VEJA LIVRO DE LUENBERGER). //



## RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE INEQUAÇÕES CONVEXAS

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_p(x) \leq 0 \end{cases}, \quad g_i\text{'s são } \subset \text{ CONVEXAS}$$

DADO  $x^*$ , CONSIDERE O CONJUNTO

$$M(x^*) = \{ i ; g_i(x^*) = \max_{j=1, \dots, p} g_j(x^*) \}$$

OBSERVE QUE  $x^*$  NÃO É SOLUÇÃO DO SISTEMA,  $g_i(x^*) > 0, \forall i \in M(x^*)$

TOMAMOS

$$w^* = \sum_{i \in M(x^*)} \alpha_i \nabla g_i(x^*) \quad \text{ONDE} \quad \sum_{i \in M(x^*)} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \forall i \in M(x^*)$$

CONSIDERE O HIPERESPACO

$$H^k : \left( \max_{i=1, \dots, p} g_i(x^*) \right) + (x - x^k)^t w^k \leq 0.$$

TEMOS :

(i) AS SOLUÇÕES DO SISTEMA SATISFAZEM  $H^k$  POIS, SE  
 $x$  É UMA SOLUÇÃO, ENTÃO

$$g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^t (x - x^*) \leq g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \quad (\text{CONVEXIDADE})$$

$$\Rightarrow \alpha_i g_i(x^*) + \alpha_i \nabla g_i(x^*)^t (x - x^*) \leq 0, \quad \forall i \in M(x^*)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in M(x^*)} \alpha_i g_i(x^*) + \left[ \sum_{i \in M(x^*)} \alpha_i \nabla g_i(x^*) \right]^t (x - x^*) \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{i \in M(x^k)} g_i(x^k) \cdot \sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i + (w^k)^t (x - x^k) \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{i=1, \dots, p} g_i(x^k) + (x - x^k)^t w^k \leq 0 \Rightarrow x \in H^k \quad \square$$

(ii) TRIVIALMENTE  $x^k$  NÃO É SOLUÇÃO  $\Rightarrow x^k \notin H^k$ .

ALGORITMO:

1) SEJA  $x^0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $T^0 = \{x \in \mathbb{R}^m; l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i\}$   
 TAL QUE  $T^0$  CONTÉM SOLUÇÕES DO SISTEMA (ISSO É  
 POSSÍVEL SE TOMAMOS LIMITANTES LARGOS). FAÇA  $k = 0$ .

2) CALCULE  $M(x^k)$  E  $w^k = \sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i^k \nabla g_i(x^k)$ ,  $\sum_{i \in M(x^k)} \alpha_i = 1$ ,  
 $\alpha_i^k \geq 0, \forall i \in M(x^k)$

3) RESOLVA O PL

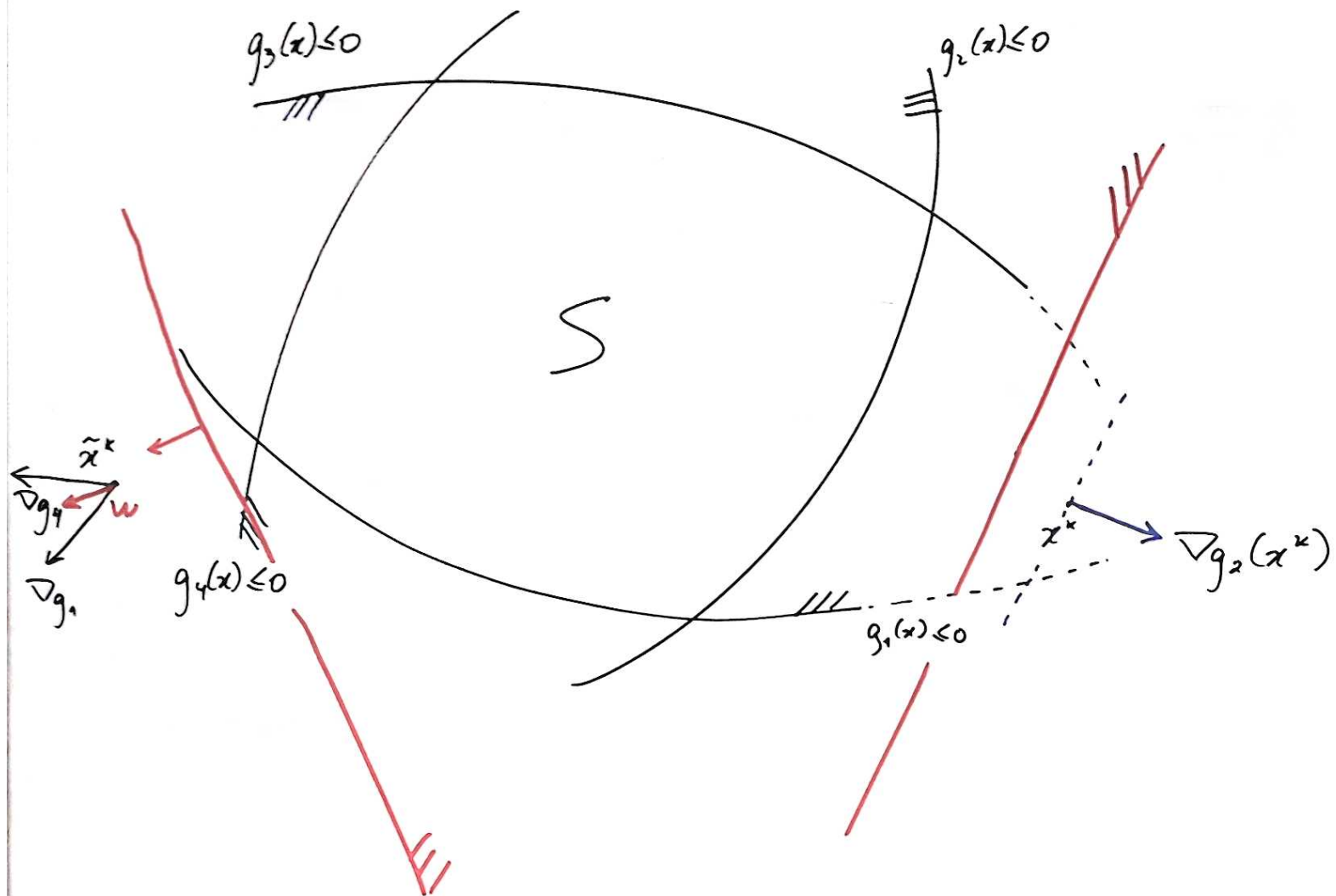
$$\begin{array}{ll} \min_{x, z} & z \\ \text{s.a.} & z \geq \left( \max_{i=1, \dots, p} g_i(x^j) \right) + (x - x^j)^t w^j, \\ & j = 0, \dots, K \end{array}$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad \forall i.$$

SEJA  $x^{k+1}$  A SOLUÇÃO ENCONTRADA.

4) SE  $x^{k+1}$  RESOLVE O SISTEMA DE INEQUAÇÕES, PARE.

CASO CONTRÁRIO, FAÇA  $K \leftarrow K+1$  E VOLTE AO PASSO 2.



## OUTRO CRITÉRIO DE PARADA

CONSIDERE AS NOTAÇÕES

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, p} g_i(x)$$

E

$$F_k(x) = \max \left\{ f(x^0) + (x - x^0)^t w^0, \dots, \right.$$

$$\left. f(x^k) + (x - x^k)^t w^k \right\}.$$

QUEREMOS DECIDIR COMO PARAR EM  $x^{k+1}$ . É POSSÍVEL PROVAR

QUE

$$F_k(x^{k+1}) \leq \min_{x \in [d, m]} f(x) \leq \min_{j=0, \dots, k+1} f(x^j).$$

VEJA QUE

$$\min_{j=0, \dots, k+1} f(x^j) - F_k(x^{k+1}) \geq 0$$

COMO VISTO NO TEOREMA DE CONVERGÊNCIA, À MEDIDA QUE GERAMOS CORTES,  $x^{k+1}$  SE APROXIMA DE UMA SOLUÇÃO. DESTA FORMA A DIFERENÇA ACIMA TENDE A ZERO, E LOGO UM CRITÉRIO DE PARADA PRÁTICO É

$$\min_{j=0, \dots, k+1} f(x^j) - F_k(x^{k+1}) \leq \epsilon \quad (\epsilon > 0 \text{ PRECISO}).$$

OBSERVE QUE O CÁLCULO É FEITO COM ELEMENTOS QUE JÁ TEMOS EM MÃOS NO ALGORITMO !!!