

MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE DESIGUALDADE /

MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS

(CAPS 9 E 10 DO LIVRO
DE ANA FRIEDLANDER).

$$\min f(x)$$

$$\text{s.a. } Ax \leq b.$$

CONJUNTO VIÁVEL:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n; a_i^T x \leq b_i, \quad i=1, \dots, m\}.$$

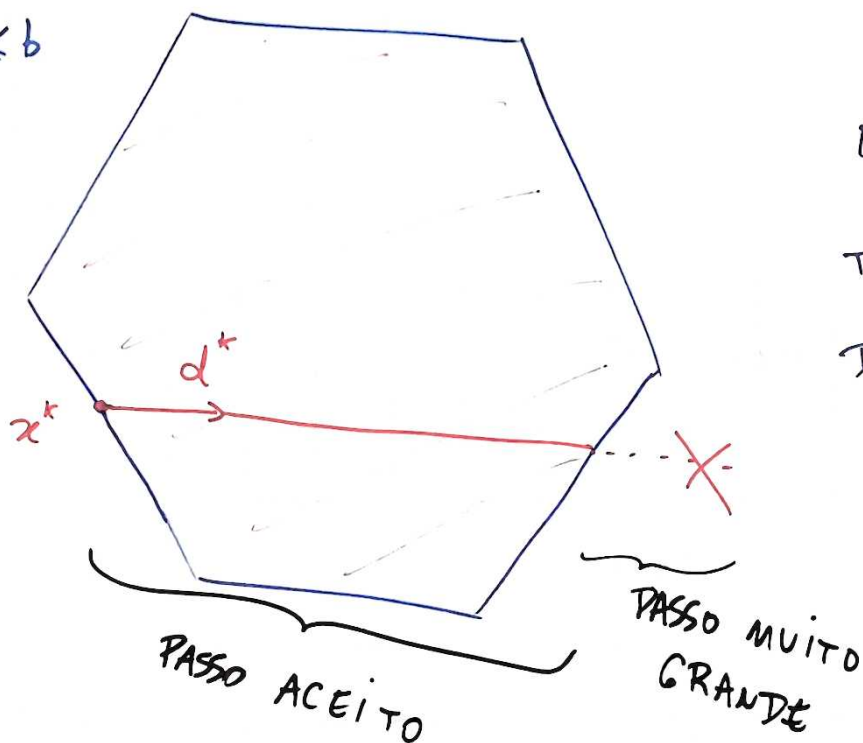
ONDE a_i É A i -ÉSIMA LINHA DE A .

$$\left(A = \begin{bmatrix} -a_1 & - \\ & \vdots & \\ -a_m & - \end{bmatrix} \right).$$

ADMITIMOS QUE O PROBLEMA TENHA SOLUÇÃO.

IDEIA: A PARTIR DE UM PONTO VIÁVEL $x^k \in \Omega$, CAMINHAR EM DIREÇÕES d^k QUE MANTENHAM A VIABILIDADE (LOCALMENTE) E QUE DECRESÇA f .

$$Ax \leq b$$



DIFERENTEMENTE DAS RESTRIÇÕES LINEARES DE IGUALDADE, AQUI TEMOS QUE CONTROLAR O TAMANHO DO PASSO PARA MANTER VIABILIDADE.

TEMOS

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k.$$

QUEREMOS QUE $Ax^{k+1} \leq b$, OU SEJA,

$$a_i^T (x^k + t_k d^k) \leq b_i, \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow a_i^T x^k + t_k a_i^T d^k \leq b_i, \quad \forall i$$

CASO 1: $a_i^T x^k = b_i$ (A i -ÉSIMA RESTRIÇÃO É ATIVA EM x^k)

NESTE CASO,

$$b_i + t_k a_i^T d^k \leq b_i \Leftrightarrow t_k (a_i^T d^k) \leq 0.$$

ISSO SERÁ VÁLIDO, $\forall t_k > 0$, SEMPRE QUE $a_i^T d^k \leq 0$.

CASO 2: $a_i^T x^k < b_i$.

TEMOS

$$t_k (a_i^T d^k) \leq b_i - a_i^T x^k.$$

SE $a_i^T d^k \leq 0$ ENTÃO A DESIG. ACIMA VALE $\forall t_k > 0$.

SE $a_i^T d^k > 0$ ENTÃO A DESIG. ACIMA VALE PARA

$$0 < t_k \leq \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k}.$$

RESUMO: TEMOS QUE MAJORAR t_k SOMENTE NO CASO EM QUE $a_i^T d^k > 0$ (E $a_i^T x^k < b_i$). PARA TANTO BASTA

TOMAR $t_k \in (0, \bar{t}]$, ONDE

$$\bar{t} = \min_{\substack{a_i^T d^k > 0 \\ a_i^T x^k - b_i < 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\} > 0.$$

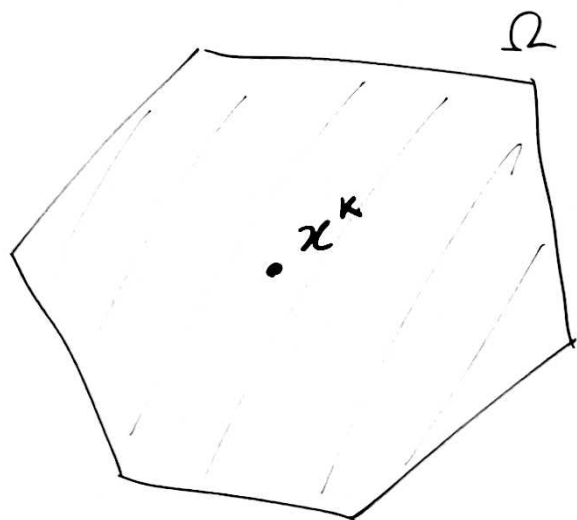
NOTAÇÃO:

$$I^k = I(x^k) = \{ i \ ; \ a_i^T x^k = b_i \}$$

(conjunto dos índices das restrições ativas em x^k).

QUANDO DECIDIMOS PARAR?

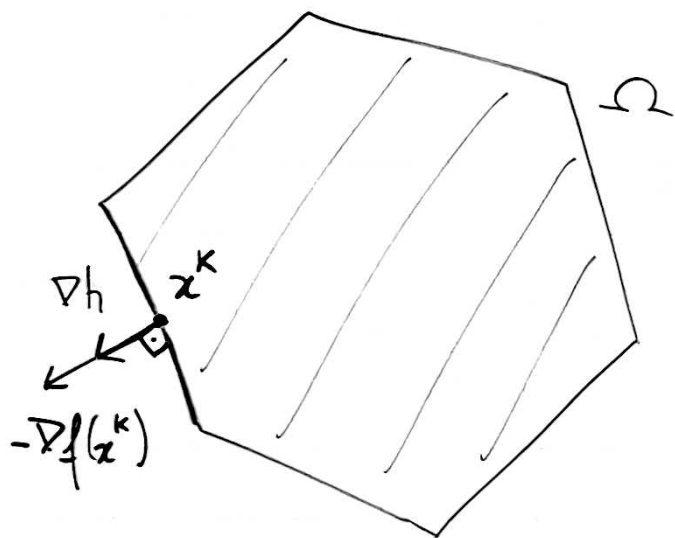
- x^k é a solução, onde vamos parar.



CASO x^* PERTENÇA AO INTERIOR DE Ω , ENTÃO LOCALMENTE O PROBLEMA SE COMPORTA COMO UM PROBLEMA SEM RESTRIÇÕES.

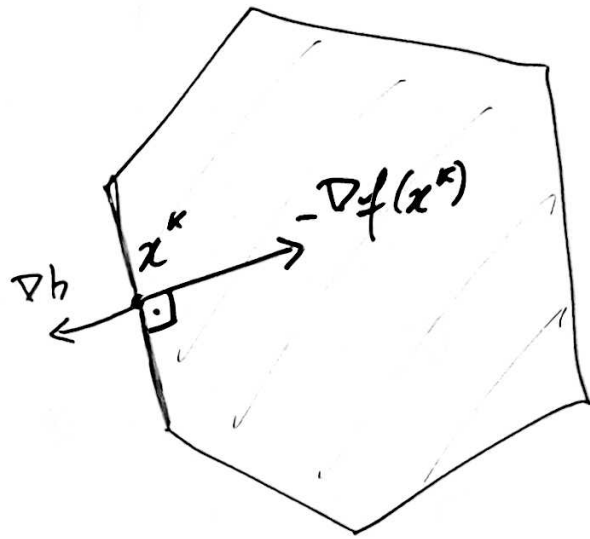
PARADA:

$$I^k = \emptyset, \quad \nabla f(x^k) = 0.$$



CASO ALGUMA RESTRIÇÃO SEJA ATIVA EM x^k ($I^k \neq \emptyset$), x^k DEVE SER PONTO KKT PARA O PROBLEMA ORIGINAL.

OU SEJA, $\nabla f(x^k) + A^T \lambda^k = 0, \quad \lambda^k \geq 0.$



IDEIA: QUANDO $I^k \neq \emptyset$ (x^k ESTÁ NA BORDA),

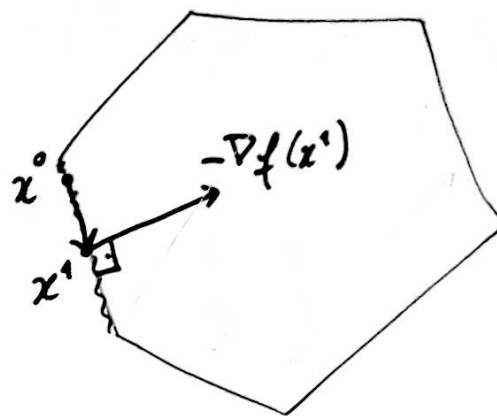
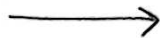
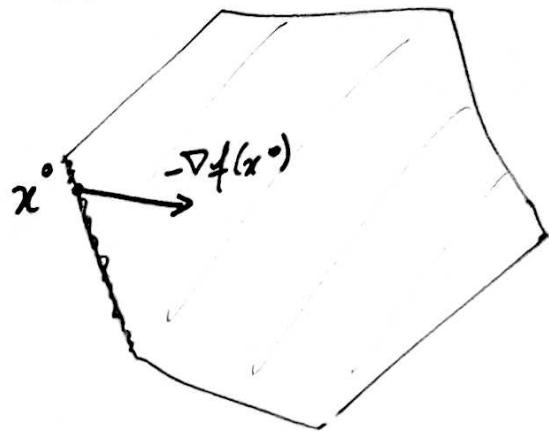
PODEMOS OLHAR SOMENTE PARA AS RESTRIÇÕES DE
IGUALDADE. OU SEJA, RESOLVER O PROBLEMA

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & a_i^T x = b_i, \quad i \in I^k \end{aligned}$$

ou

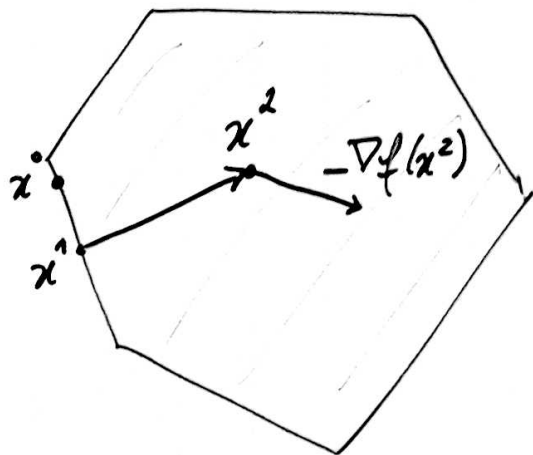
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & A_{I^k} x = b_{I^k} \end{aligned}$$

IDEIA PARA MINIMIZAR f SUJEITA A $Ax \leq b$:



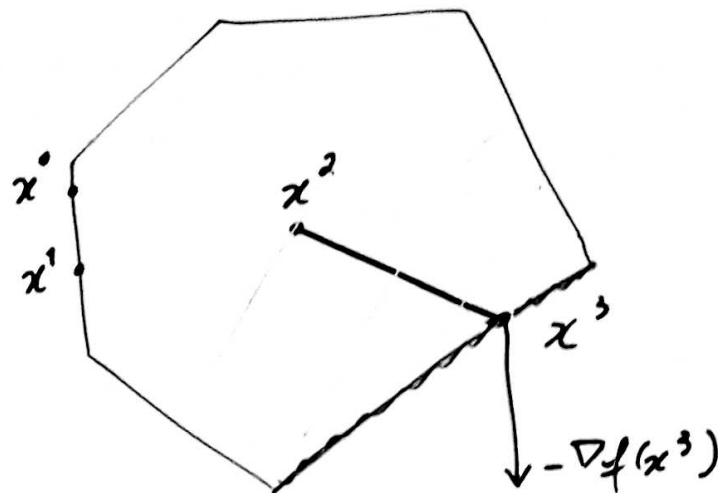
x^0 NÃO É KKT PARA
O PROBLEMA RESTRITO
ÀS IGUALDADES.

CAMINHO NA FACE DO
POLIEDRO (RESOLVO O PROBLEMA
COM IGUALDADES). x^1 É KKT
PARA O PROBLEMA COM IGUALDADES,
MAS NÃO PARA O PROB. ORIGINAL.
($\lambda \neq 0$).

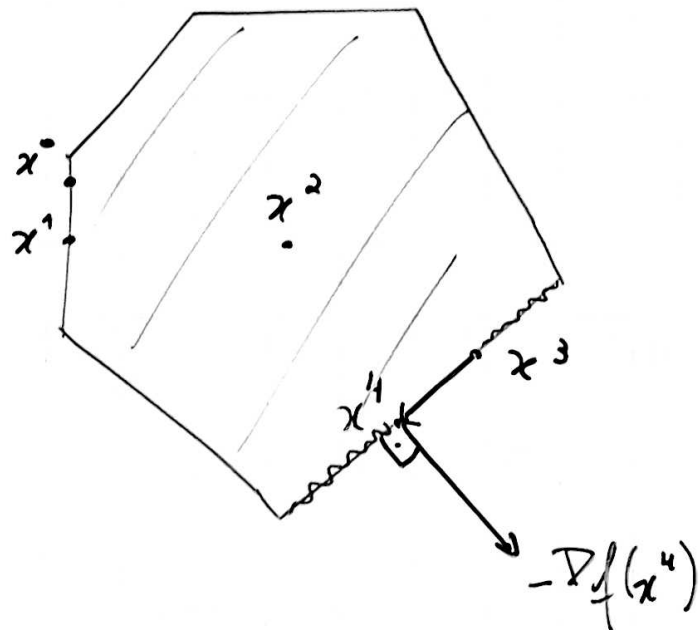


ABANDONAMOS A FACE.

$$(I^2 = \emptyset)$$



x^3 ENCONTRA-SE NUMA OUTRA BORDA ($I^3 \neq \emptyset$).

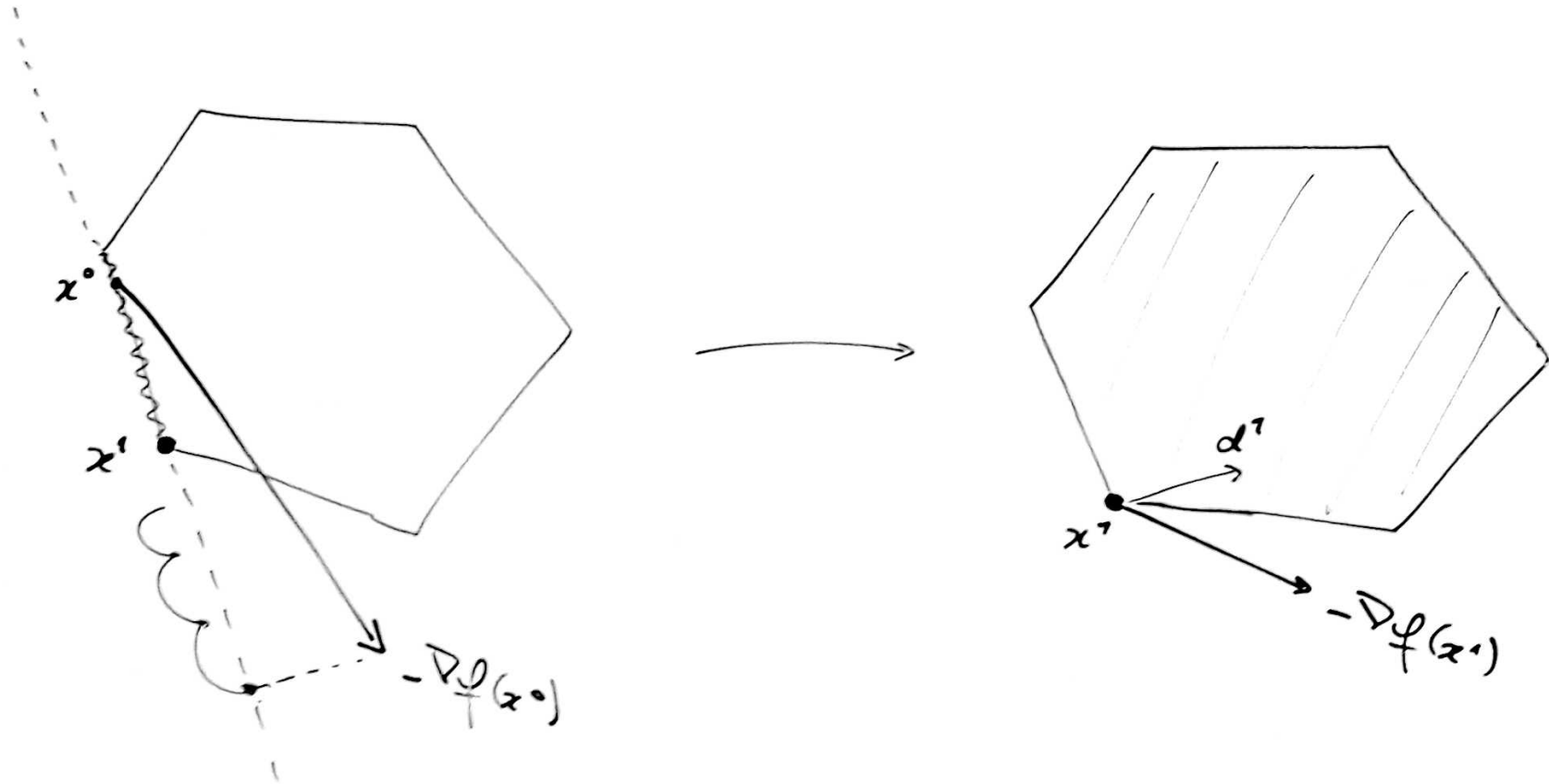


MINIMIZAMOS SOBRE A BORDA (RESOLVEMOS UM PROBLEMA COM IGUALDADES), OBTENDO x^4 .

x^4 É KKT PARA O PROBLEMA ORIGINAL

\Rightarrow PARAMOS !

O MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS É UMA REALIZAÇÃO DA IDEIA ANTERIOR.



AO DEIXAR UMA FACE DO POLIEDRO, DEVEMOS GARANTIR

que a direção d^k forneça pontos viáveis E que decresça f localmente.
Ou seja, devemos ter

$$(1) \quad A(x^k + t d^k) \leq b, \quad \text{para todo } t \text{ em } (0, t^{\text{barra}}) \\ \text{(direção factível)}$$

$$(2) \quad \text{grad } f(x^k)^T d^k < 0 \quad \text{(direção de descida)}$$

MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE DESIGUALDADE /

MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS (CONT.)

$$\min f(x)$$

$$\text{s.a. } Ax \leq b, \quad A \text{ matriz } m \times n.$$

NOTAÇÃO:

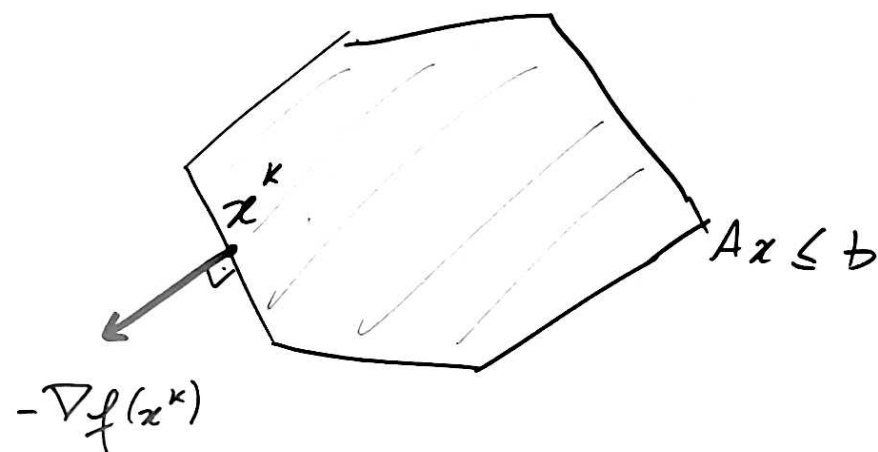
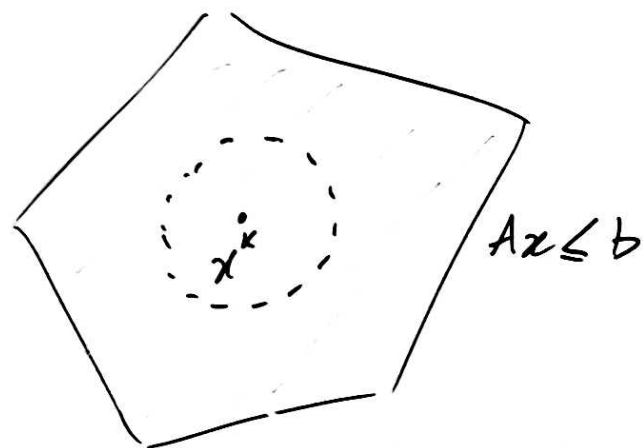
$$I^k = I(x^k) = \{ i ; a_i^T x^k = b_i \}$$

(conjunto dos índices das restrições ativas)

CRITÉRIOS DE PARADA:

$$\bullet I^k = \emptyset, \quad \nabla f(x^k) = 0.$$

$$\bullet I^k \neq \emptyset, \quad \nabla f(x^k) + A_{I^k}^T \lambda^k = 0, \quad \lambda^k \geq 0.$$



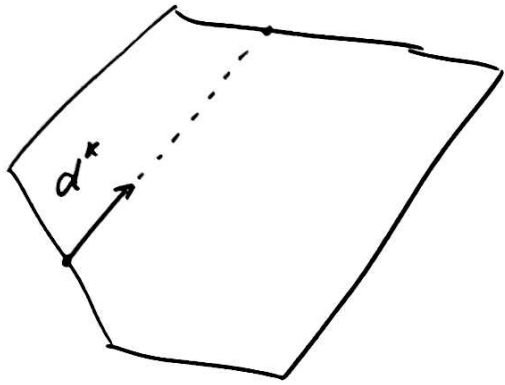
SE x^k NÃO FOR SOLUÇÃO, CALCULAMOS UMA DIREÇÃO d^k FACTÍVEL E DE DESCIDA.

• (DIREÇÃO FACTÍVEL)

$$A(x^k + t d^k) \leq b, \quad \forall t \in (0, \bar{t}] \quad (x^k \text{ É VIÁVEL})$$

isto é,

$$Ax^k + t Ad^k \leq b \iff a_i^T x^k + t a_i^T d^k \leq b_i, \forall i.$$

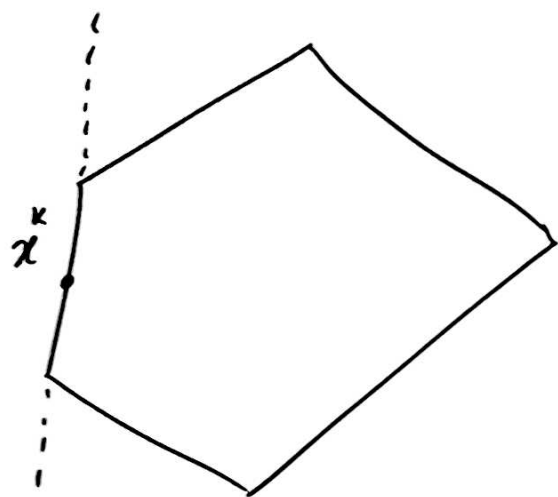


SE $i \in I^k$ ENTÃO DEVEMOS TER $\forall a_i^T d^k \leq 0$.
 DAÍ, $a_i^T d^k \leq 0$ (*)

SE $i \notin I^k$ ENTÃO DEVEMOS TER $\forall a_i^T d^k \leq b_i - a_i^T x^k$. ASSIM,

$t \leq \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \quad (a_i^T d^k > 0)$. O PASSO MÁXIMO É

$$\bar{t} = \min_{\substack{i \notin I^k \\ a_i^T d^k > 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\}.$$



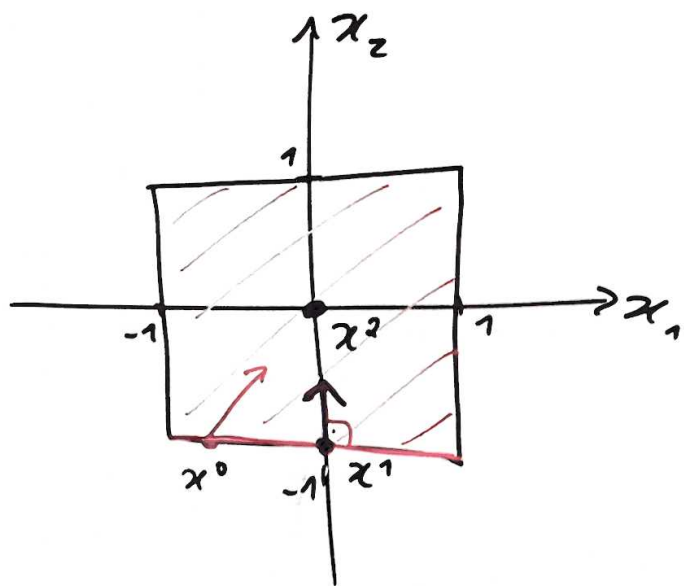
(*) É SATISFEITA SE $d^k \in \text{Nm}(A_{I^k})$. isso CORRESPONDE
 À ESTRATÉGIA DE MINIMIZAR f SOBRE UMA FACE DO
 POLIEDRO (PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE FORMADAS PELAS
 RESTRIÇÕES ATIVAS EM x^k).

EXEMPLOS:

1) $\min x_1^2 + x_2^2$

s.a. $-1 \leq x_1 \leq 1$

$-1 \leq x_2 \leq 1$



$$\begin{pmatrix} x_1 \leq 1 \\ -x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ -x_2 \leq 1 \end{pmatrix}$$

• $x^0 = (-\frac{3}{4}, -1)$

• RESOLVER

$$\min x_1^2 + x_2^2$$

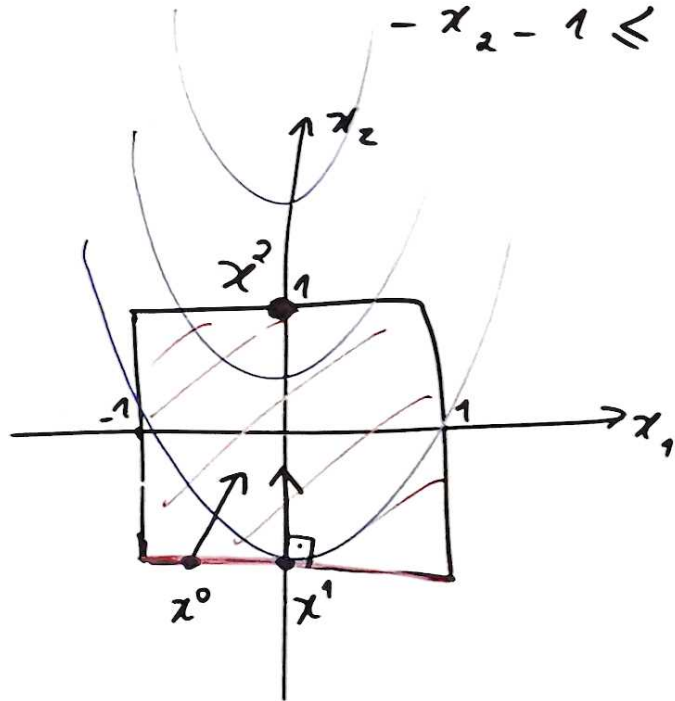
s.a. $-x_2 - 1 = 0$

KKT: $\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

NO PONTO $x^1 = (0, -1)$, $\lambda_1 = -2 < 0$.

• $I^2 = \emptyset$, $\nabla f(x^1) = \nabla f(0,0) = (0,0)$ ✓ .

2) $\min x_1^2 - x_2$
 s.o. $x_1 - 1 \leq 0$
 $-x_1 - 1 \leq 0$
 $x_2 - 1 \leq 0$
 $-x_2 - 1 \leq 0$



• $x^0 = (-\frac{3}{4}, -1)$.

• $\min x_1^2 - x_2$
 s.o. $-x_2 - 1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = -1 < 0$.

$x^1 = (0, -1)$

• $d^1 = (0, 1)$ É DIREÇÃO FACTÍVEL E
 DE DESCIDA .

- $$f(x' + t d') = f(0, -1 + t)$$

$$= -(1 + t) = 1 - t.$$

- RESTRIÇÕES INATIVAS EM x' :

$$\underbrace{x_1 - 1 \leq 0}, \quad \underbrace{-x_1 - 1 \leq 0}, \quad \underbrace{x_2 - 1 \leq 0}.$$

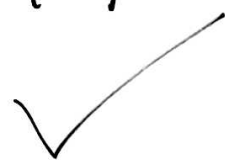
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

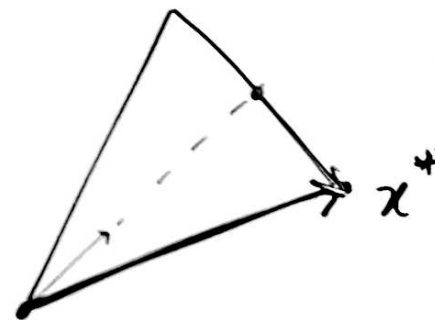
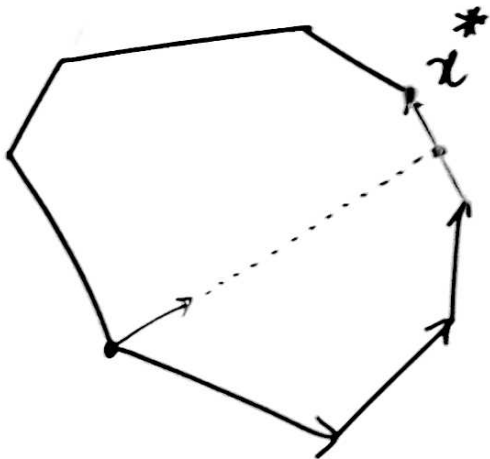


$$\bar{t} = \min \left\{ \frac{1 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\} = \frac{2}{1} = 2.$$

- $$f(x' + \bar{t} d') = 1 - \bar{t} = -1, \quad x^2 = x' + \bar{t} d' = (0, -1) + 2(0, 1) = (0, 1)$$

OBS.: O MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS SE APLICA
À RESTRIÇÕES "DE CAIXA" ($l \leq x \leq u$), COMO
NOS EXEMPLOS ANTERIORES.

PACOTE "GENCAN" (FORTRAN) — PROJETO "TANGO".



MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS.

INICIALIZAÇÃO. x^0 VIÁVEL ($Ax^0 \leq b$), $k=0$.

PASSO 1. CALCULE $I^k = I^k(x^k)$.

• SE $I^k = \emptyset$ E $\nabla f(x^k) = 0$, PARE! (PARADA COM x^k NO INTERIOR — $Ax^k < b$).

• SE $I^k = \emptyset$ E $\nabla f(x^k) \neq 0$, VÁ PARA O PASSO 7.

• SE $I_k \neq \emptyset$, VÁ PARA O PASSO 2.

PASSO 2: RESOLVER $\nabla f(x^k) + A_{I^k}^T \lambda = 0$ (KKT DO PROB. COM IGUALDADES DA FACE). SE NÃO TEM SOLUÇÃO, VÁ P/ O PASSO 4 (NÃO É KKT DA FACE). SE TEM SOLUÇÃO, VÁ P/ O PASSO 3.

PASSO 3 (PARADA COM KKT NA BORDA).

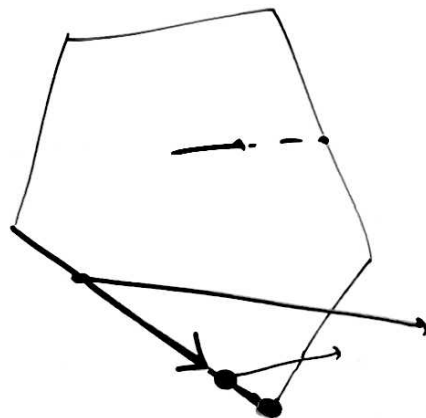
Se $\lambda \geq 0$, PARE (KKT DO PROBLEMA ORIGINAL).

CASO CONTRÁRIO, VÁ P/ O PASSO 7.

PASSO 4 (MINIMIZAÇÃO NA BORDA)

CALCULE $d^* \in \text{Nu}(A_{I^*})$ TAL QUE $\nabla f(x^*)^T d^* < 0$.

(UMA POSSÍVEL ESCOLHA É $-\nabla f(x^*)$ PROJETADO NO
CONJUNTO $A_{I^*} x = b_{I^*}$)



PASSO 5: CALCULAR

$$\bar{t} = \min_{\substack{i \notin I^k \\ a_i^T d^k > 0}} \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \right\}.$$

PASSO 6 (BUSCA LINEAR)

REALIZAR UMA BUSCA LINEAR NA DIREÇÃO d^k NO INTERVALO $[0, \bar{t}]$, UTILIZANDO ARMISO.

SE $t_k < \bar{t}$, FAZER $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $K \leftarrow K+1$ E IR
AO PASSO 2 (AQUI CONTINUAMOS NA MESMA FACE,
E $I^{k+1} = I^k$).

SE $t_k = \bar{t}$, FAZER $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $K \leftarrow K+1$ E IR AO
PASSO 1

PASSO 7 : CALCULE d^k DIREÇÃO FACTÍVEL E DE DESCIDA.

PASSO 8 : IGUAL AO PASSO 5.

PASSO 9 (BUSCA LINEAR) REALIZAR UMA BUSCA LINEAR
EM $[0, \bar{t}]$ USANDO ARMISO. FAZER

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k, \quad k \leftarrow k+1 \text{ E IR AO PASSO 1.}$$

• EXERCÍCIO 10.3 — LIVRO ANA.