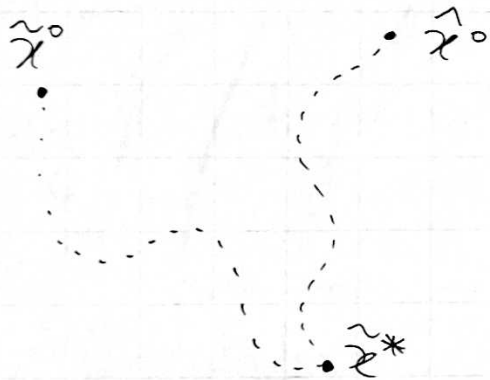


CONVERGÊNCIA GLOBAL: COMEÇANDO DE QUALQUER PONTO INICIAL x^0 ,
O MÉTODO CAMINHA PARA UMA SOLUÇÃO x^* .

CONVERGÊNCIA LOCAL: DADA UMA SOLUÇÃO x^* , EXISTE $\varepsilon > 0$
TAL QUE, SE $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$ ENTÃO
O MÉTODO CAMINHA PARA x^* .

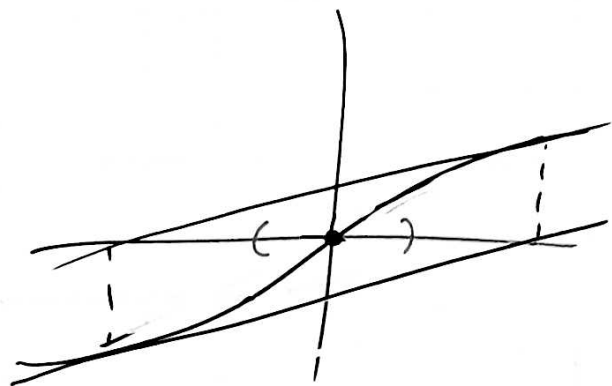


GLOBAL



LOCAL.

O MÉTODO DE NEWTON (PURO) PODE NÃO CONVERGIR
GLOBALMENTE (EXEMPLO DA AULA PASSADA).



SEJA DADA UMA FUNÇÃO $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. DIZEMOS QUE g
É LIPSCHITZ (-CONTÍNUA) SE EXISTE $L > 0$ TAL QUE

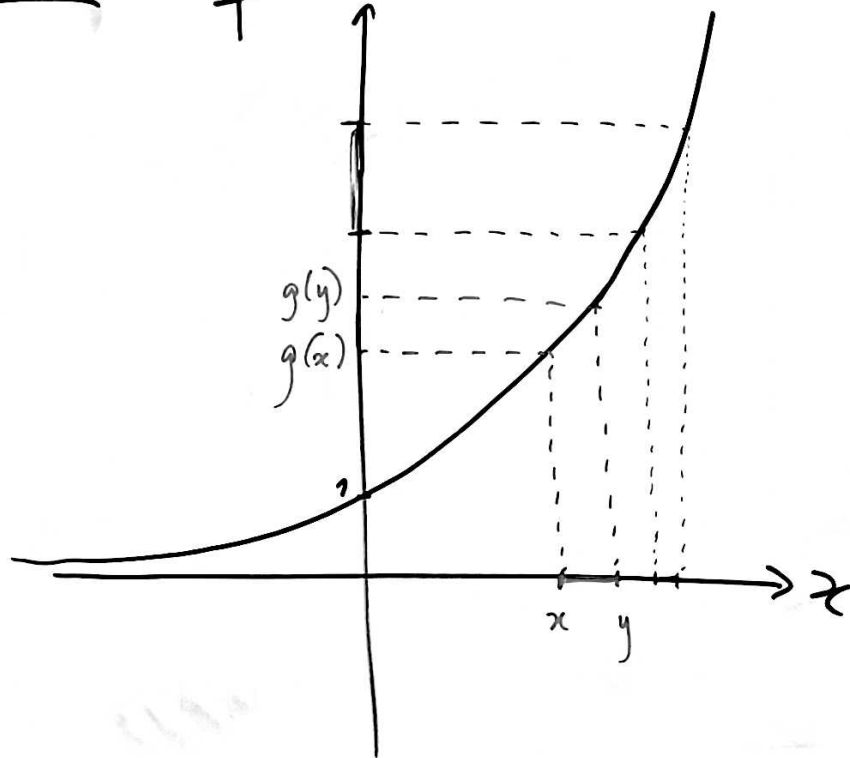
$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

OBS.: 1) TODA FUNÇÃO LIPSCHITZIANA É CONTÍNUA.

DE FATO, $x - y \rightarrow 0$ ENTÃO $g(x) - g(y) \rightarrow 0$.

2) NEM TODA FUNÇÃO CONTÍNUA É LIPSCHITZIANA.

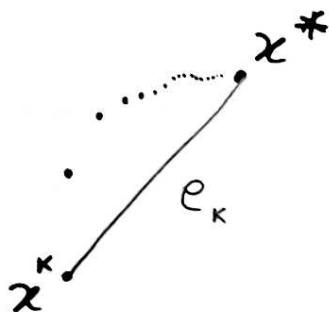
EX.: $f(x) = e^x$.



COMO MEDIMOS A VELOCIDADE DE UM ALGORITMO ?

DISTÂNCIA ENTRE O ITERANDO DO ALGORITMO À SOLUÇÃO;
(ERRO)

$$e_k = \|x^k - x^*\|.$$



ORDEN DE CONVERGÊNCIA

SEJA $\{x^k\}$ COM $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$. A ORDEN DE

CONVERGÊNCIA DE $\{x^k\}$ À x^* É

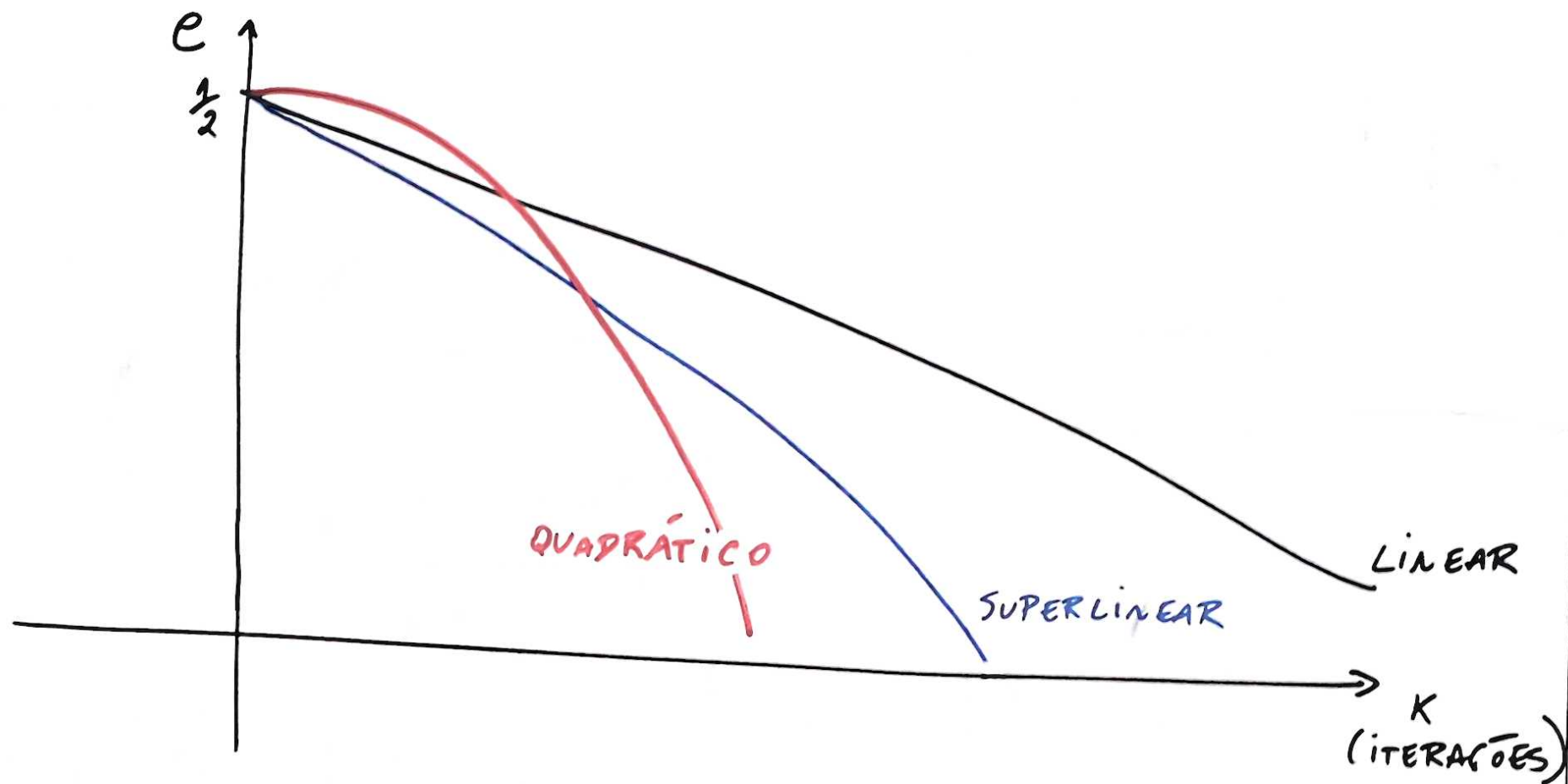
• LINEAR SE EXISTE $\alpha \in (0,1)$ TAL QUE

$$e_{k+1} \leq \alpha e_k, \quad \forall k \text{ GRANDE.}$$

• SUPERLINEAR SE EXISTE $\{\pi_k\}$ TAL QUE $\pi_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = 0$
 E $e^{k+1} \leq \pi_k e^k$, $\forall k$ GRANDE.

• QUADRÁTICA SE EXISTE $C > 0$ TAL QUE
 $e^{k+1} \leq C(e^k)^2$, $\forall k$ GRANDE.

LINEAR: $\pi = \frac{1}{2}$	SUPERLINEAR: $\pi_k = \frac{1}{k+2}$	QUADRÁTICA: $C = 1$
$e_0 = \frac{1}{2}$	$e_0 = \frac{1}{2}$ ($\pi_0 = \frac{1}{2}$)	$e_0 = \frac{1}{2}$
$e_1 \leq \frac{1}{4}$	$e_1 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ($\pi_1 = \frac{1}{3}$)	$e_1 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$e_2 \leq \frac{1}{8}$	$e_2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ ($\pi_2 = \frac{1}{4}$)	$e_2 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$
$e_3 \leq \frac{1}{16}$	$e_3 \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{120}$ ($\pi_3 = \frac{1}{5}$)	$e_3 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$



- MÉTODOS DE DESCIDA COM CONVERGÊNCIA GLOBAL COSTUMAM TER ORDEM LINEAR...
- MÉTODO DE NEWTON TEM ORDEM QUADRÁTICA SE VALE UMA HIPÓTESE DE LIPSCHITZ:

TEOREMA: SUPONHA QUE f É DE CLASSE C^1 EM x^*
SOLUÇÃO ($\nabla f(x^*) = 0$) SUPONHA QUE $\nabla^2 f(x^*)$
TEM INVERSA

ENTÃO EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE, SE
 $\|x^* - x^0\| \leq \varepsilon$, TEMOS

(i) A SEQUÊNCIA DEFINIDA POR

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

(O PASSO NEWTONIANO É BEM DEFINIDO)

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ COM ORDEM SUPERLINEAR.

(iii) SE A FUNÇÃO $\nabla^2 f(x)$ FOR LIPSCHITZ, ENTÃO
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ COM ORDEM QUADRÁTICA.

PROVA: SITE ...

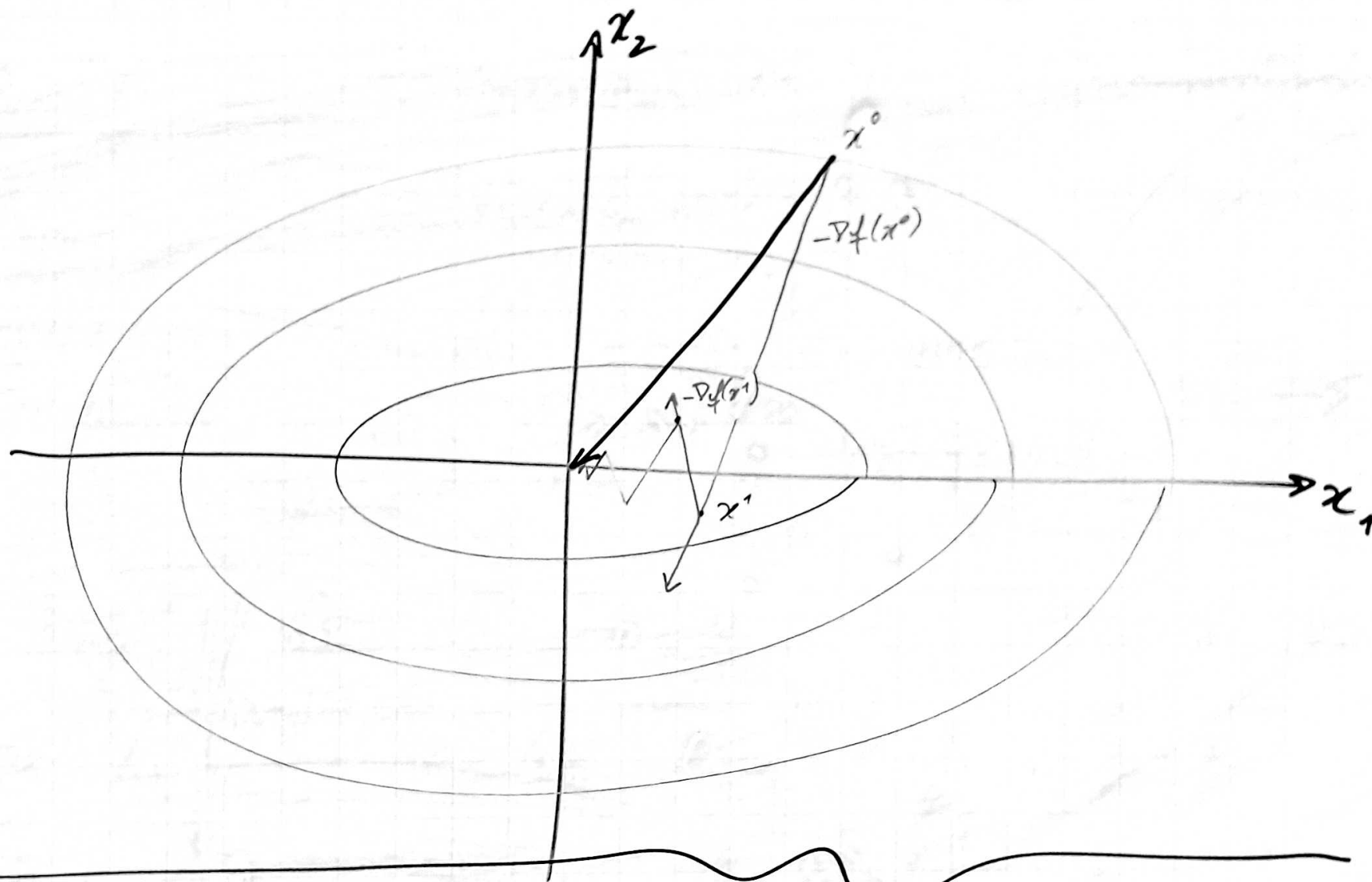
IDEIA DO ESQUEMA DA NUA PASSADA
(NUNCA GLOBALIZADO).

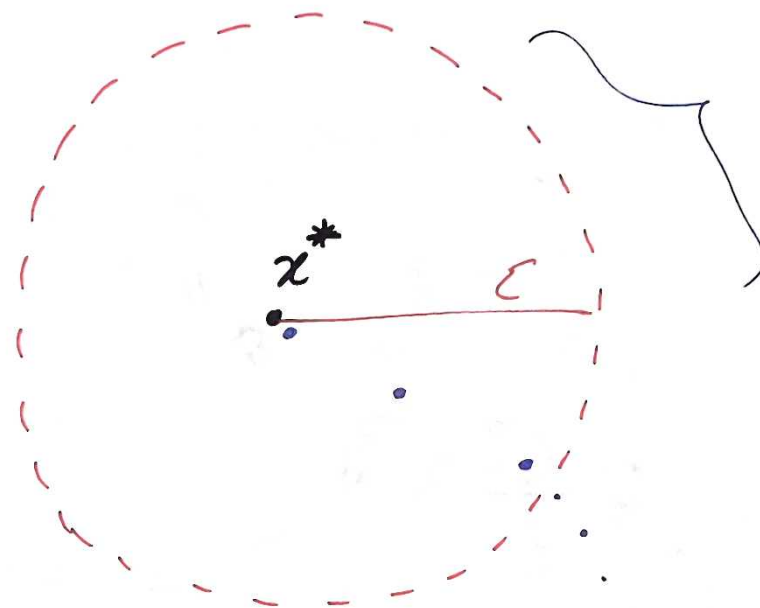
1) INICIE COM QUALQUER x^0

2) TENTE LENTAMENTE SE DEU CERTO, OK!

SE DEU CERTO, TOME $d^0 = -\nabla f(x^0)$.

3) O PROBLEMA ANTERIOR DIZ QUE, SE $x^k \rightarrow x^*$, ENTÃO
DARÁ CERTO DE UM CERTO PUNTO EM DIANTE!!!





MÉTODO DE NEWTON
(CONVERGÊNCIA
QUADRÁTICA)

MÉTODO DO
GRADIENTE
(DIREÇÃO DE NEWTON
FALHARAM)

