Resolução do problema lagrangiano via método do subgradiente.

$P: \min_{x} c^t x$ s.a. $Ax = b$, $Dx \leq e$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$

$P(u): \min_{x} c^t x + u^t(Ax - b)$ s.a. $Dx \leq e$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$

$L^*(u) = \min_{x} \{ c^t x + u^t(Ax-b) \, ; \, Dx \leq e, \, x \in \mathbb{Z}^n_+ \}$.

$\boxed{D: \max_{u} L^*(u)} \longleftrightarrow \boxed{-\min_{u} -L^*(u)}$

(problema convexo como visto na teoria)

Teorema: Seja u^k e $x^k \in \underset{x}{\operatorname{argmin}} -L^*(u^k)$ (isto é o mínimo em $-L^*(u^k)$ é atingido em x^k). Então

$$g^k = -(Ax^k - b)$$

é um subgradiente de $-L^*$ em u^k.

Prova: De fato, dado u qualquer temos

$$-L^*(u^k) - (g^k)^t(u - u^k) = \underbrace{-L^*(u^k) + c^t x^k + (u^k)^t(Ax^k - b)}_{=0}$$

$$- c^t x^k - u^t(Ax^k - b)$$

$$\leq -L^*(u), \text{ dado que}$$

$$-L^*(u) = \max_x \{ -c^t x - u^t (Ax^k - b) ; Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n \} \text{ e } Dx^k \leq e, \ x^k \in \mathbb{Z}_+^n. \ \blacksquare$$

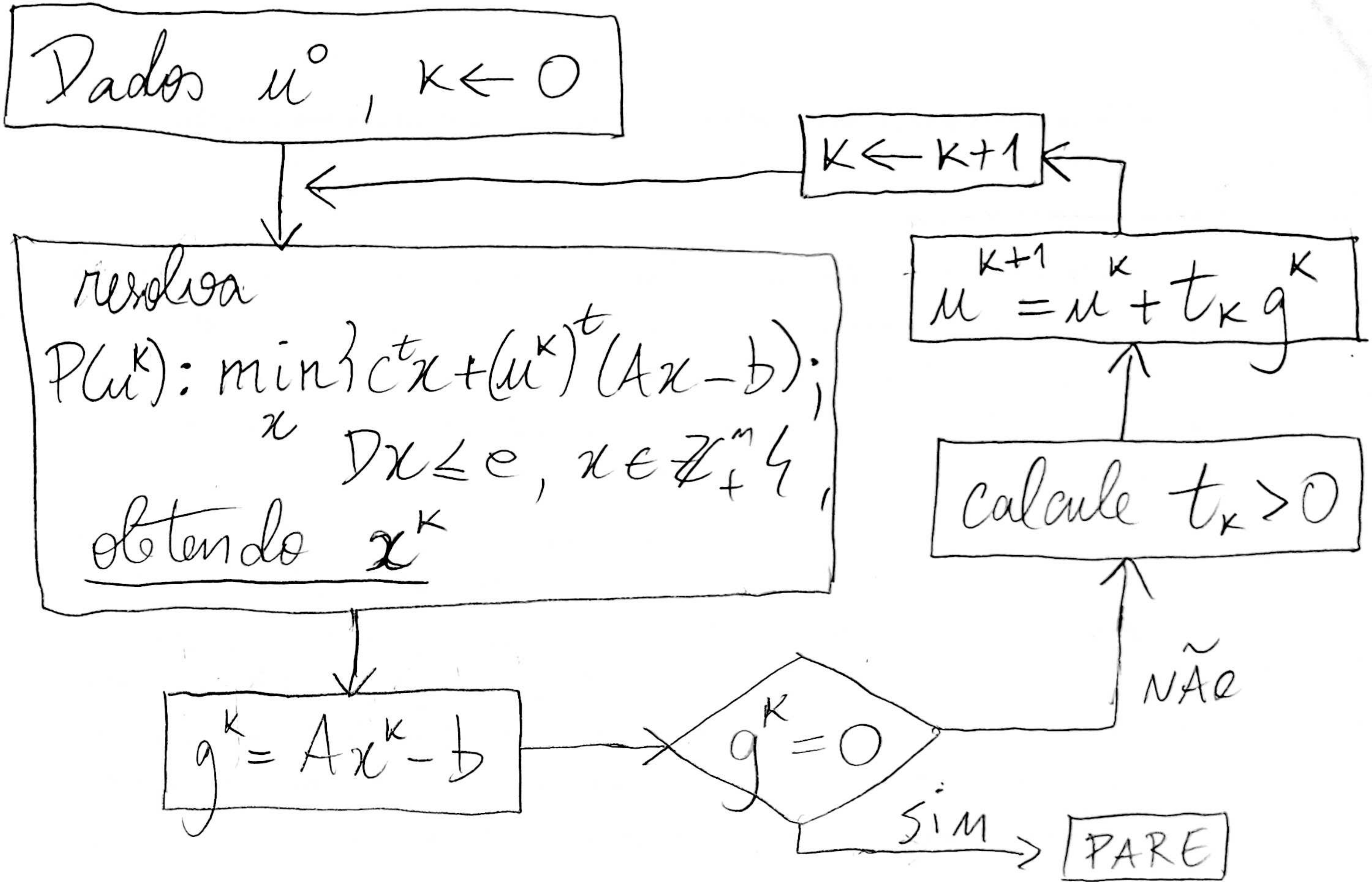
Este teorema sugere tomar

$$u^{k+1} = u^k - t_k g^k = u^k + t_k (Ax^k - b),$$

onde $t_k > 0$ é calculado por alguma das regras mencionadas anteriormente. Daqui para frente vamos usar $g^k = Ax^k - b$ e escrever

$$u^{k+1} = u^k + t_k g^k.$$

Método do subgradiente para $\max\limits_{u} L^*(u)$.



Observações:

1) O critério de parada $g^k = Ax^k - b = 0$ implica a viabilidade de x^k para P, já que vale sempre $Dx^k \leq e$, $x^k \in \mathbb{Z}^n_+$. Isso implica que x^k é ótimo para P (veja exercício 1 da lista). Neste caso, o limitante obtido é o próprio valor ótimo f^* de P.

2) Do contrário, se há brecha entre f^* e $\max_u L^*(u)$, então $g^k \neq 0, \forall k$. Neste caso, o método para por número máximo de iterações (a menos que outro critério seja definido).

3) Se dualizarmos $Dx \leq e$, o penalizador v deve ser ≥ 0. No método escolhemos

$$v^{k+1} = \max\{0, v^k + t_k(Dx^k - e)\},$$

onde o máximo é coordenada a coordenada.