

LEONARDO SECCHIN.

OTIMIZAÇÃO I.

OBJETIVO: ENCONTRAR VALORES DE MÁXIMO OU
MÍNIMO DE FUNÇÕES (POSSIVELMENTE NÃO LINEARES)

DADOS DA DISCIPLINA: AVA-UFES, <https://leonardosecchin.github.io>

BIBLIOGRAFIA:

FRIEDLANDER. ELEMENTOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR (UNICAMP).

RIBEIRO; KARAS. OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA. CENGAGE, 2013.

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$D \subset \mathbb{R}^m.$$

QUERO RESOLVER

minimizar $f(x)$.

SUJEITA A $x \in D$.

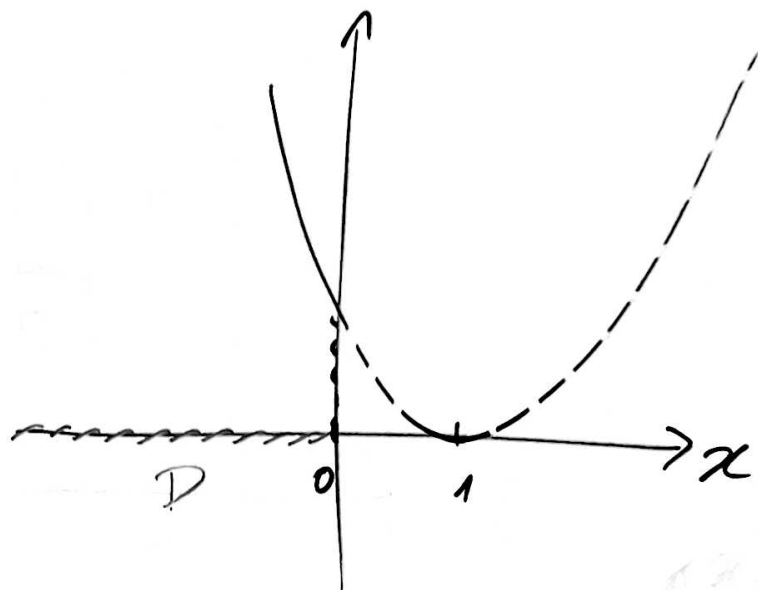
EXEMPLO:

minimizar $(x-1)^2$

SUJEITA A $x \leq 0$

SOLUÇÃO

$$x^* = 0.$$



OTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES (IRRESTRITA) : $D = \mathbb{R}^n$

" COM " (RESTRITA) : $D \subsetneq \mathbb{R}^n$

O QUE É RAZOÁVEL SUPOR TENDO EM VISTA
A RESOLUÇÃO PRÁTICA DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

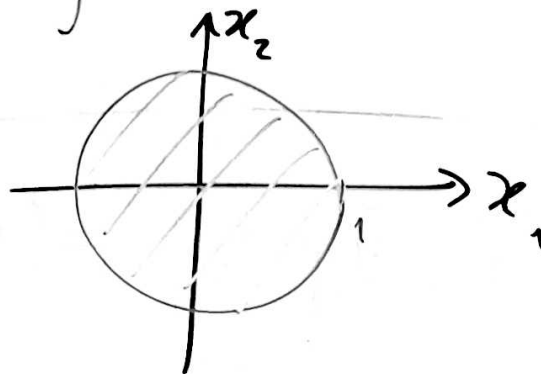
\mathcal{D} DEVE TER UMA ESTRUTURA "TRATÁVEL":

$$\mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}^n ; h(x) = 0, g(x) \leq 0 \}.$$

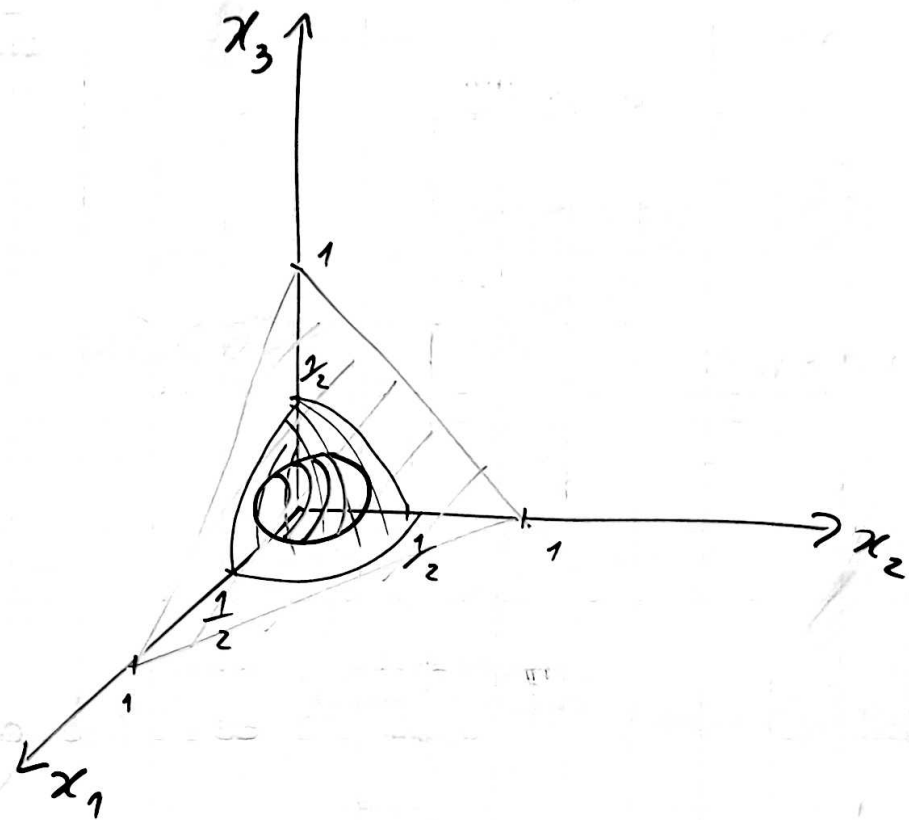
EXEMPLOS:

$$\bullet \mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}^1 ; g(x) = x \leq 0 \}.$$

$$\bullet \mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \}.$$



• $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 ; \underline{x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0}, \underline{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{2} \leq 0}, \underline{x \geq 0} \}$



HIPÓTESE COMUM: f e g SÃO FUNÇÕES CONTINUAMENTE
DIFERENCIÁVEIS (DERIVADAS CONTÍNUAS).

"MINIMIZAR"

$\min f(x)$

"FUNÇÃO OBJETIVO"

s.a. $h(x) = 0$

} RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

$g(x) \leq 0$

} " DE DESIGUALDADE

"SUJEITO A"

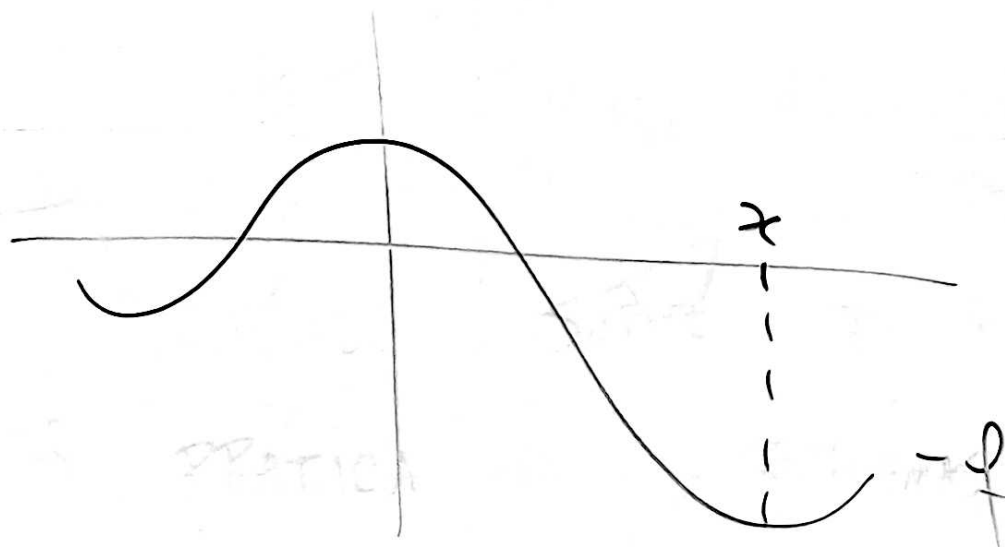
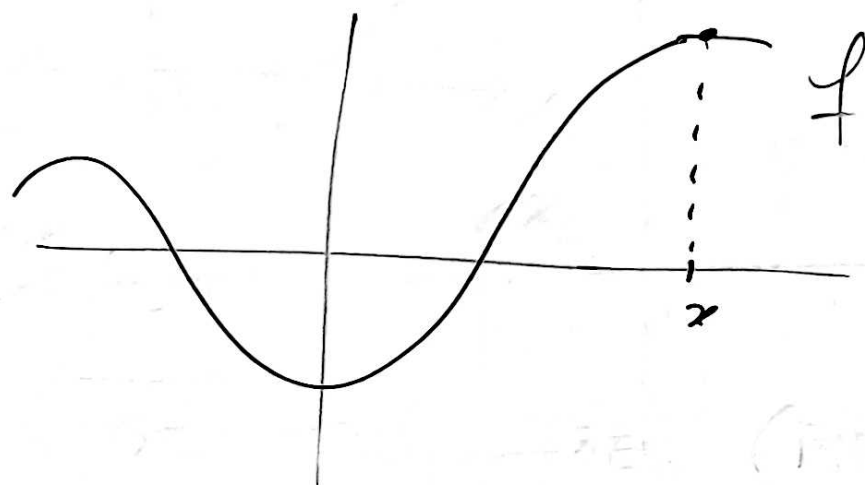
OBS.: • $D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$

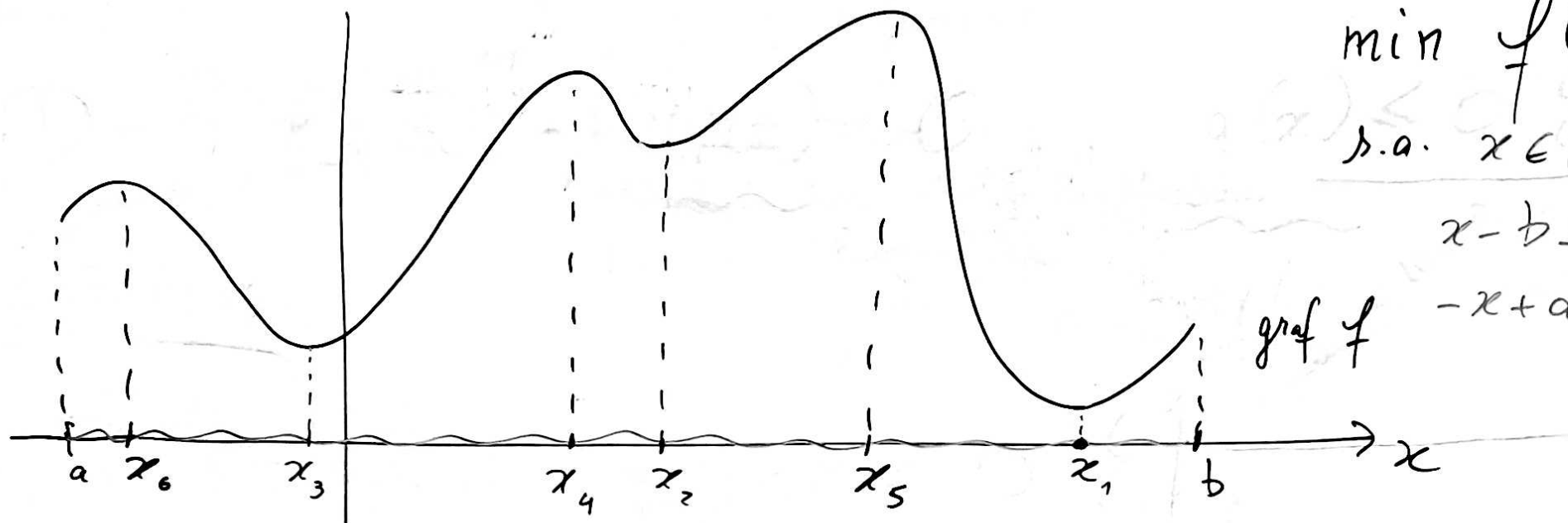
"CONJUNTO VIÁVEL"

• $x \in D$: PONTO VIÁVEL / SOLUÇÃO
(FACTÍVEL)

• MAXIMIZAR f É O MESMO QUE MINIMIZAR $-f$.

\Rightarrow PODEMOS CONSIDERAR APENAS MINIMIZAÇÃO.





$$\min f(x).$$

$$\text{s.a. } x \in [a, b]$$

$$x - b \leq 0$$

$$-x + a \leq 0.$$

graf f

• x_1 : MINIMIZADOR GLOBAL.

• x_2 e x_3 : MINIMIZADORES LOCAIS.

• x_5 : MAXIMIZADOR GLOBAL ; x_4 e x_6 : MAXIMIZADORES LOCAIS.

DEFINIÇÃO: $x^* \in D$ é dito MINIMIZADOR GLOBAL DE

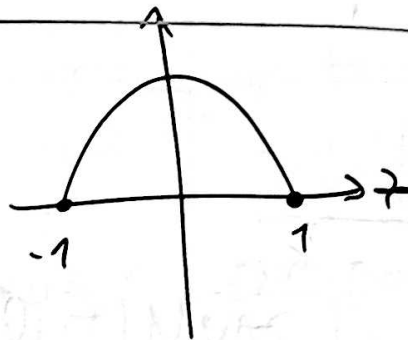
f SUJEITA A $x \in D$ SE

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \underline{\forall x \in D}.$$

(OBS.: x^* PODE NÃO SER ÚNICO...)

$x^* \in D$ é dito MINIMIZADOR LOCAL SE EXISTE
UMA BOLA $B_\delta(x^*)$ DE RAIO $\delta > 0$ E CENTRO x^*

EXEMPLO: $\min f(x) = -x^2 + 1$
s.a. $x \in [-1, 1]$



TAL QUE $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in D \cap B_\delta(x^*)$.

OBS: TODO MINIMIZADOR GLOBAL TAMBÉM É LOCAL.

OBS: NÃO É ESPERADO QUE UMA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL UTILIZE ESSA DEFINIÇÃO, POIS ENVOLVERIA A AVALIAÇÃO DE UMA QUANTIDADE ENORME DE PONTOS PRÓXIMOS A UM DADO x^* .

FUTURAMENTE DEVEREMOS DESCREVER MINIMIZADORES SEM A NECESSIDADE DA AVALIAÇÃO DE "TODOS" OS PONTOS NUMA VIZINHANÇA. EXEMPLO: $f'(x^*) = 0$ (CÁLCULO I).

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO
NÃO LINEAR GERAL (PNL).

• x^* é MINIMIZADOR GLOBAL SE $f(x^*) \leq f(x)$
 $\forall x$ VIÁVEL.

• x^* é MINIMIZADOR LOCAL SE $f(x^*) \leq f(x)$

$\forall x \in B_\delta(x^*)$ VIÁVEL, PARA ALGUMA $\delta > 0$.

$$B_\delta(x^*) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x^*\| \leq \delta \}.$$

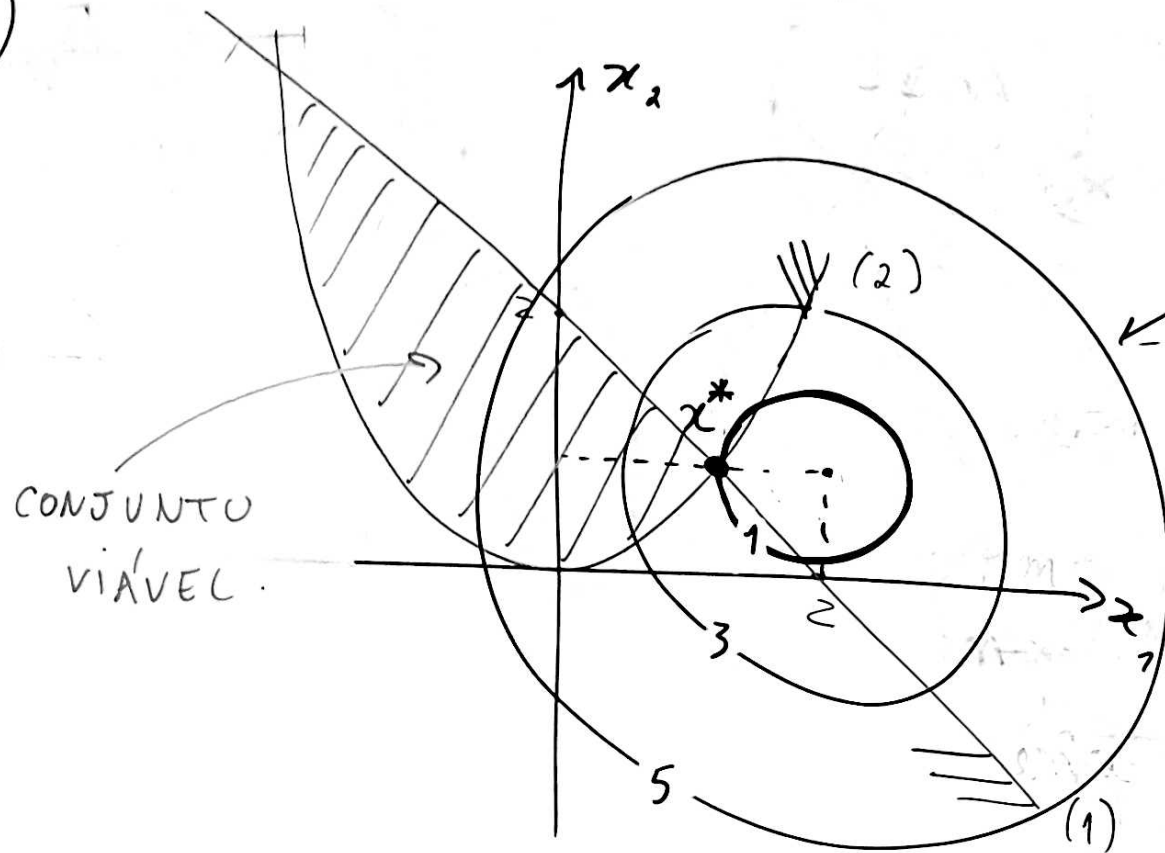
EXEMPLOS:

1) $\min (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

s.a. $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$ (1)

$x_1^2 - x_2 \leq 0$ (2)

(PNL COM RESTRIÇÕES).



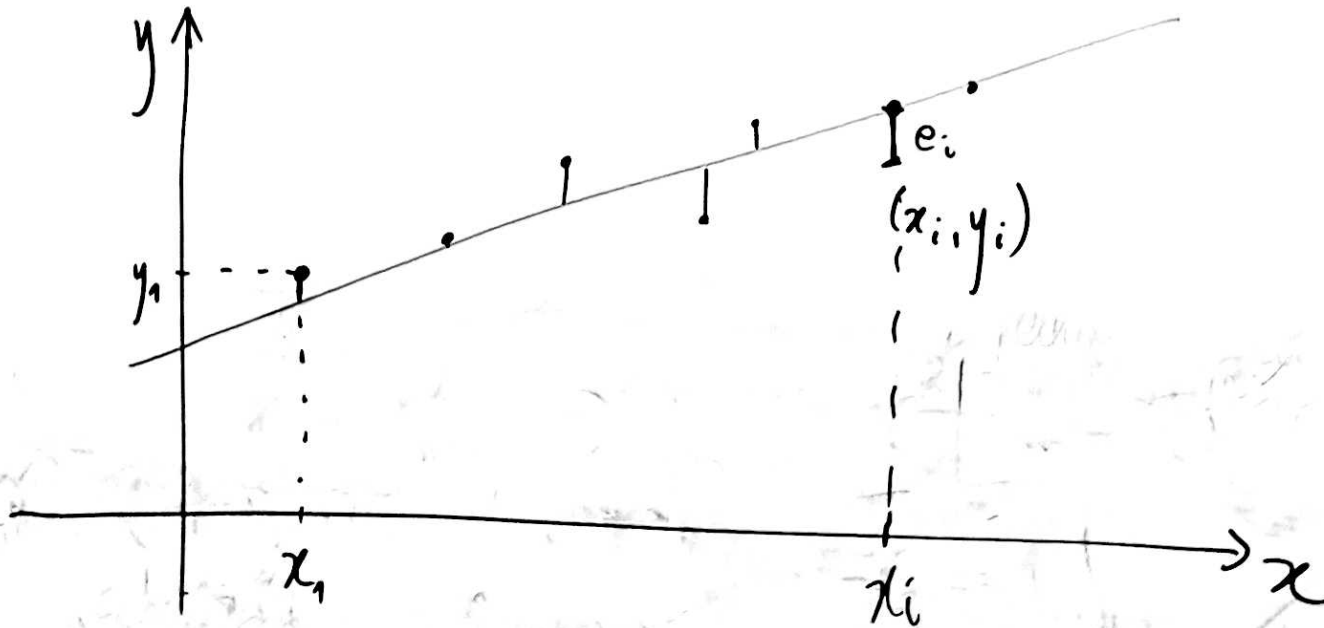
NÍVEIS DA FUNÇÃO
OBJETIVO (F.O.)

$x^* = (1, 1)$ É O MINIMIZADOR (GLOBAL) DO PROBLEMA. GEOMETRICAMENTE, x^*

ESTÁ NA INTERSEÇÃO DA REGIÃO VIÁVEL E A CURVA DE NÍVEL "ÓTIMA" DA F.O.

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1.$$

2) SUPONHA QUE TENHAMOS m PONTOS (x_i, y_i) NO PLANO PRONIENTES DE ESTATÍSTICAS.



PERGUNTA: SE OS DADOS EVOLVEM SEGUNDO UMA FUNÇÃO AFIM, QUEREMOS SABER QUAL DESSAS FUNÇÕES MELHOR APROXIMA OS DADOS.

IDEIA: MINIMIZAR A SOMA DOS ERROS ENTRE A MEDIDA E A FUNÇÃO

$$p(x) = ax + b.$$

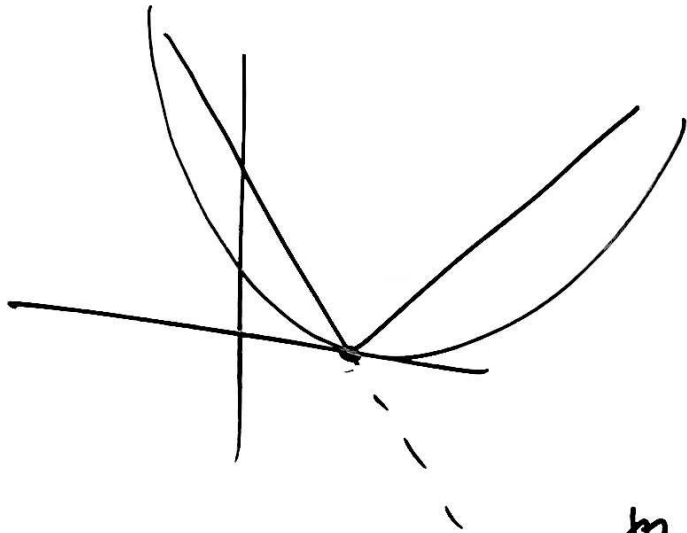
ERRO ENTRE P E O PONTO (x_i, y_i) :

$$e_i = |ax_i + b - y_i|.$$

RESOLVER

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^m e_i = \sum_{i=1}^m |ax_i + b - y_i|.$$

(OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA).



ESTA F.O. NÃO TEM DERIVADAS
EM TODOS OS PONTOS $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

SOLUÇÃO: TROCAR O PROBLEMA!

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2.$$

3) SISTEMA LINEAR $Ax=b$.

$$Ax=b \text{ TEM SOLUÇÃO} \Leftrightarrow \|Ax-b\|^2 = 0.$$

$\min_x \|Ax-b\|^2$: FORNECE SOLUÇÃO DO SISTEMA
QUANDO EXISTE, E UM PONTO
 x^* "BOM" QUANDO NÃO HÁ SOLUÇÃO.

OBS.: HÁ ALGORITMOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS QUE SE
BASEIAM NESTA IDEIA ("MÉTODOS NUMÉRICOS I").

4) $m=100$ OPÇÕES DE INVESTIMENTO.

$K (=3)$: NÚMERO MÁXIMO DE OPÇÕES A SEREM CONTRATADAS.

ρ_{ij} : A CORRELAÇÃO ENTRE AS OPÇÕES i E j .
RETORNO AO ESCOLHER i E j SEJA
MEDIDO POR

$$x_i \rho_{ij} x_j,$$

ONDE x_i : \$ NA OPÇÃO i .

$S = [\rho_{ij}]$: MATRIZ DE CORRELAÇÃO.

RETORNO TOTAL: $x^t S x$.

$x \in R_+^m$: $\$$ en cada opción x_i

$$\min_x -x^t S x$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^m z_i \leq K$$

$$M \gg 1 \text{ cte}$$

$$x_i \leq M z_i, \forall i.$$

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq M$$

($M = \text{CAPITAL TOTAL}$)

$$z_i \in \{0, 1\}, \forall i.$$

$$x_i \geq 0, \forall i.$$

$$\begin{aligned} P: \min_x & f(x) \\ \text{s.a.} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

EXEMPLOS:

$$1) \min_x c^t x$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$Cx \leq d$$

$$\boxed{x_i \in \mathbb{Z}}, i \in I.$$

(PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR)

→ DISCIP. "PESQUISA OPERACIONAL I/II"

2) PROB. DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA.

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x, \quad Q \text{ é simétrica}$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$Cx \leq d.$$

"fácil" de resolver quando

- Q é definida positiva, isto é,

$$d^T Q d > 0, \quad \forall d \neq 0.$$

(ou equivalentemente, se todos os autovalores de Q são positivos).

- Q é semi-definida positiva, isto é, $d^T Q d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$

• NÃO HÁ $Cx \leq d$.

EXERCÍCIOS:

1) FORMULE O SEGUINTE PROBLEMA: DADO $l > 0$ FIXO,
QUAL O RETÂNGULO DE MAIOR ÁREA E PERÍ-
METRO l ?

→ TENTE RESOLVER...

2) FAÇA O MESMO COM ELIPSES.

→ QUAL ELIPSE VOCÊ ACHA QUE POSSUI A MAIOR ÁREA ?

3) TENTE FORMULAR ESTE PROB. DE MAXIMIZAÇÃO DE ÁREAS PARA
UMA CURVA FECHADA (E SIMPLES ?) QUALQUER. É SIMPLES
RESOLVÊ-LO ?