MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO.

$$\mathcal{P}: \quad \min f(x)$$
$$\text{s.a.} \quad h(x) = 0$$
$$g(x) \leq 0$$
$$x \in \Omega = \mathbb{R}^n.$$

x^* VIÁVEL

KKT:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

$$\mu_j \, g_j(x^*) = 0 \, , \forall j.$$

FUNÇÃO LAGRANGEANO (OU LAGRANGEANA):

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x)$$

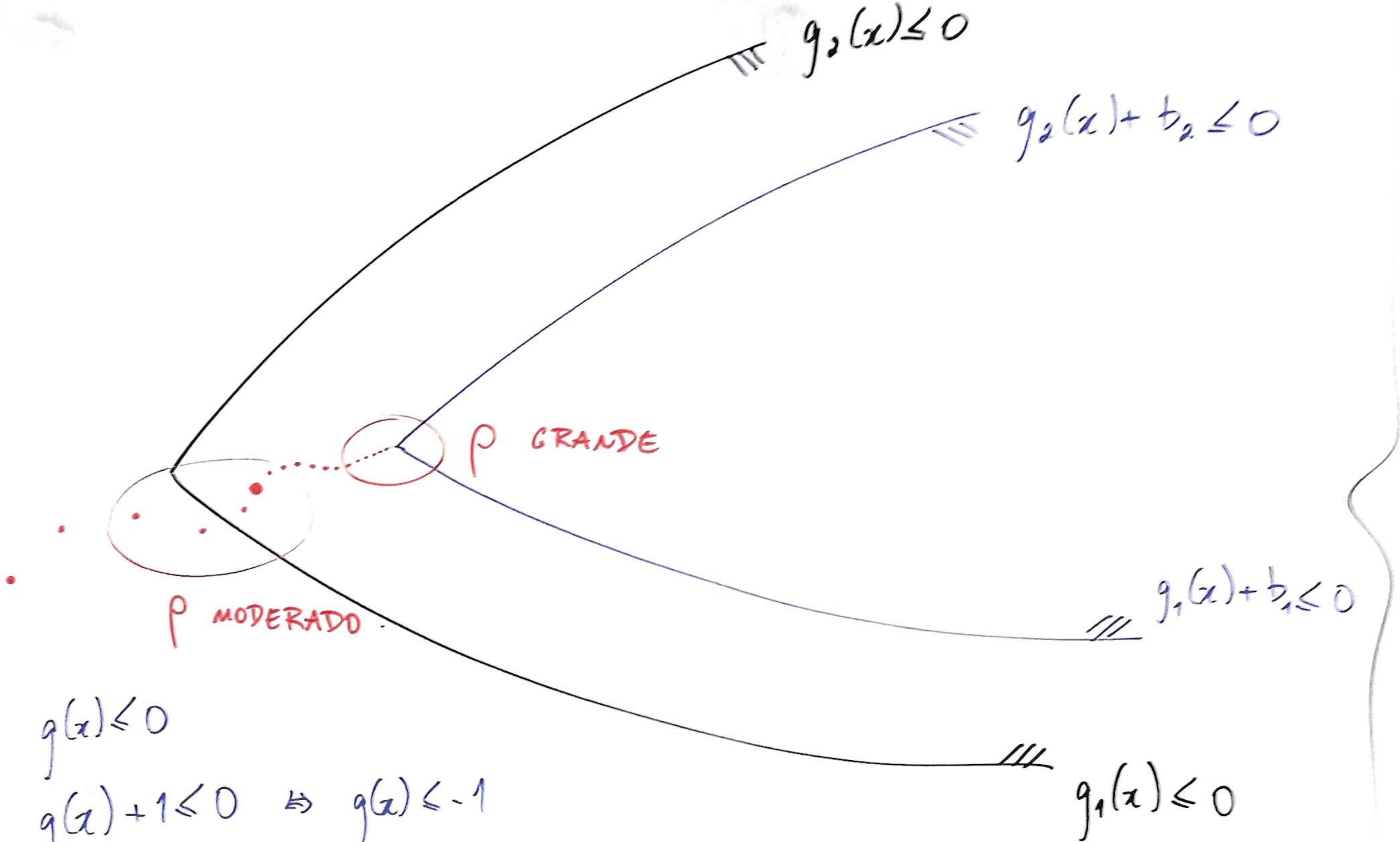
KKT: $\nabla_x L(x^*,\mu,\lambda) = 0$, $\mu \geq 0$, $\max\{g_j(x^*), -\mu_j\} = 0$ $\forall j$.

PENALIZAÇÃO EXTERNA PURA: ρ_k PODE CRESCER MUITO.

TENTAMOS EVITAR AUMENTAR ρ:

- CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE
- APLICAR A PENALIZAÇÃO AO PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DESLOCADAS

$h(x) + a = 0 \ , \qquad g(x) + b \leq 0$



$g(x) \leq 0$

$g(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq -1$

1) AO DESLOCARMOS RESTRIÇÕES, GANHAMOS VIABILIDADE MAIS PRECOCEMENTE EM RELAÇÃO AOS ITERANDOS DO MÉTODO.

2) POR OUTRO LADO, DEVEMOS FAZER $a \to 0$ E $b \to 0$ A FIM DE RECUPERAR O PROBLEMA ORIGINAL P.

IDEIA: FAZER $a \to 0$ E $b \to 0$ NA MEDIDA EM QUE $\rho \to \infty$:

$$a = \frac{\bar{\lambda}}{\rho}, \qquad b = \frac{\bar{\mu}}{\rho},$$

ONDE $\bar{\lambda}_i \in [-\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ E $\bar{\mu}_j \in [0, \mu_{max}]$ ($\bar{\lambda}$ E $\bar{\mu}$ SÃO LIMITADOS).

O MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO É UMA REALIZAÇÃO DESTA IDEIA (ALGENCAN).

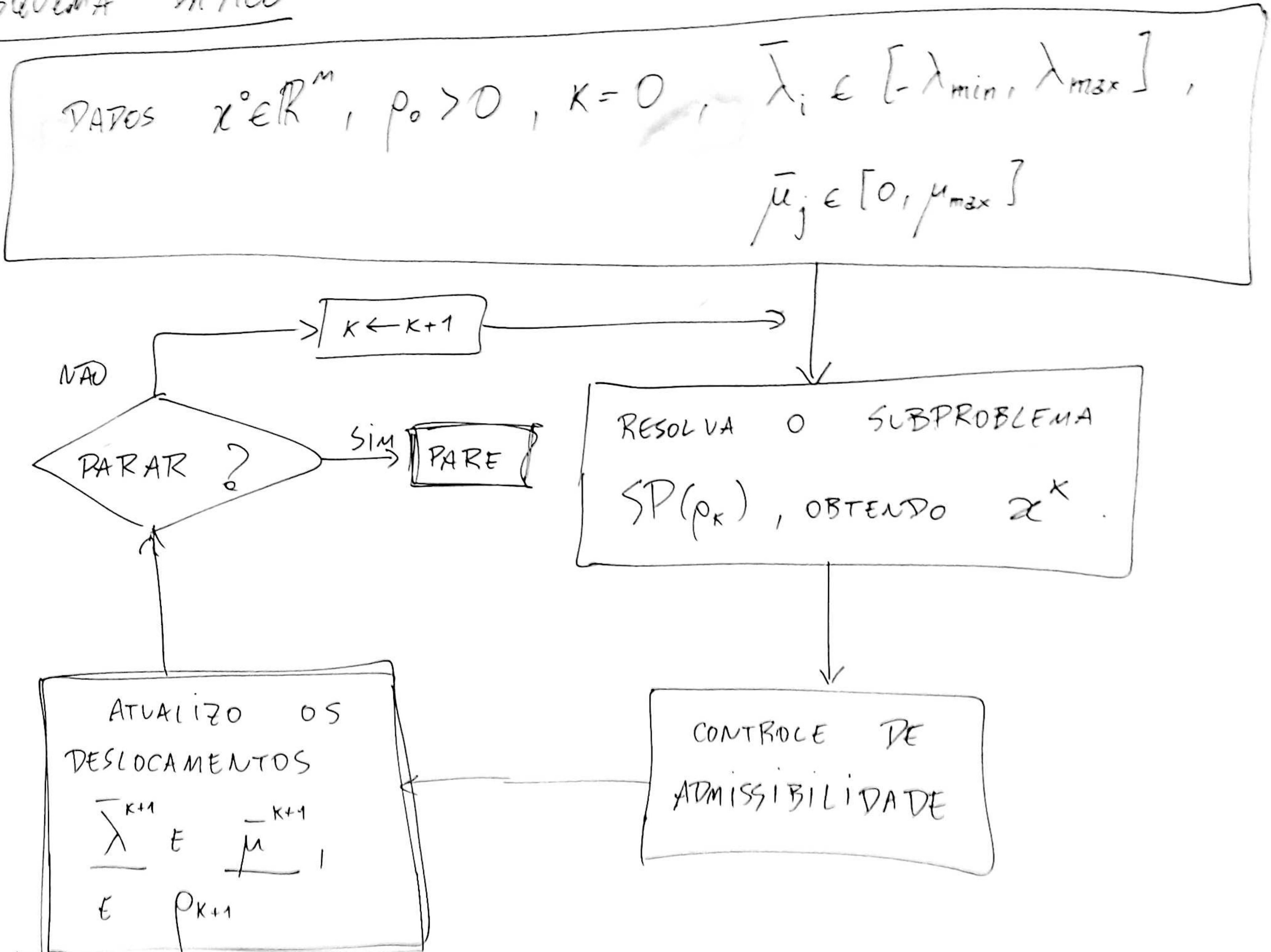
SUBPROBLEMA (COM RESTRIÇÕES DESLOCADAS)

$$SP(\rho_k): \quad \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right]$$

ONDE

$$\left(g(x) + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \right)_+ = \text{máx}\left\{ 0 \, , \, g(x) + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \right\}.$$

ESQUEMA BÁSICO



DEFINIMOS A <u>LAGRANGEANA AUMENTADA</u> COMO

$$L_\rho(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) = f(x) + \frac{\rho}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(h_i(x) + \frac{\bar{\lambda}_i}{\rho}\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\left(g_j(x) + \frac{\bar{\mu}_j}{\rho}\right)_+^2\right]$$

RESOLVER O SUBPROBLEMA $SP(\rho_k)$ É FAZER

$$\nabla_x L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \rho_k\left(h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k}\right)\nabla h_i(x^k)$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \rho_k\left(g_j(x^k) + \frac{\bar{\mu}_j^k}{\rho_k}\right)_+ \nabla g_j(x^k) = 0.$$

$\Longrightarrow$

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k) \right) \nabla h_i(x^k)$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k) \right)_+ \nabla g_j(x^k) = 0 .$$

OS TERMOS $\bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k)$ E $\left(\bar{\mu} + \rho_k g(x^k) \right)_+$ FAZEM O PAPEL DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE DO PROB. ORIGINAL P.

É RAZOÁVEL QUE A ATUALIZAÇÃO $\bar{\lambda}^{k+1}$ E $\bar{\mu}^{k+1}$ SEJAM FEITAS COM ESSES VALORES:

$$\lambda_i^{k+1} = \bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k) \quad , \forall i \quad \text{E}$$

$$\mu_j^{k+1} = \left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k)\right)_+ \quad , \forall j$$

FAZEMOS $\bar{\lambda}_i^{k+1}$ E $\bar{\mu}_j^{k+1}$ IGUAIS ÀS PROJEÇÕES DE λ_i^{k+1} E μ_j^{k+1} NOS INTERVALOS $[-\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ E $[0, \mu_{max}]$

ASSIM, $\bar{\lambda}$ E $\bar{\mu}$ IMITAM OS MULTIPLICADORES DA SOLUÇÃO DE P (MULTIPLICADORES PROJETADOS)

OBS: SE OS INTERVALOS $[-\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ E $[0, \mu_{max}]$ SÃO PEQUENOS, O MÉTODO MAIS PARECE A PENALIZAÇÃO PURA. NA PRÁTICA, É INTERESSANTE TOMAR INTERVALOS GRANDES.

EXEMPLO: $\min x$ s.a. $-x \leq 0$ SOLUÇÃO: $x^* = 0$.

PENALIZAÇÃO EXTERNA PURA:

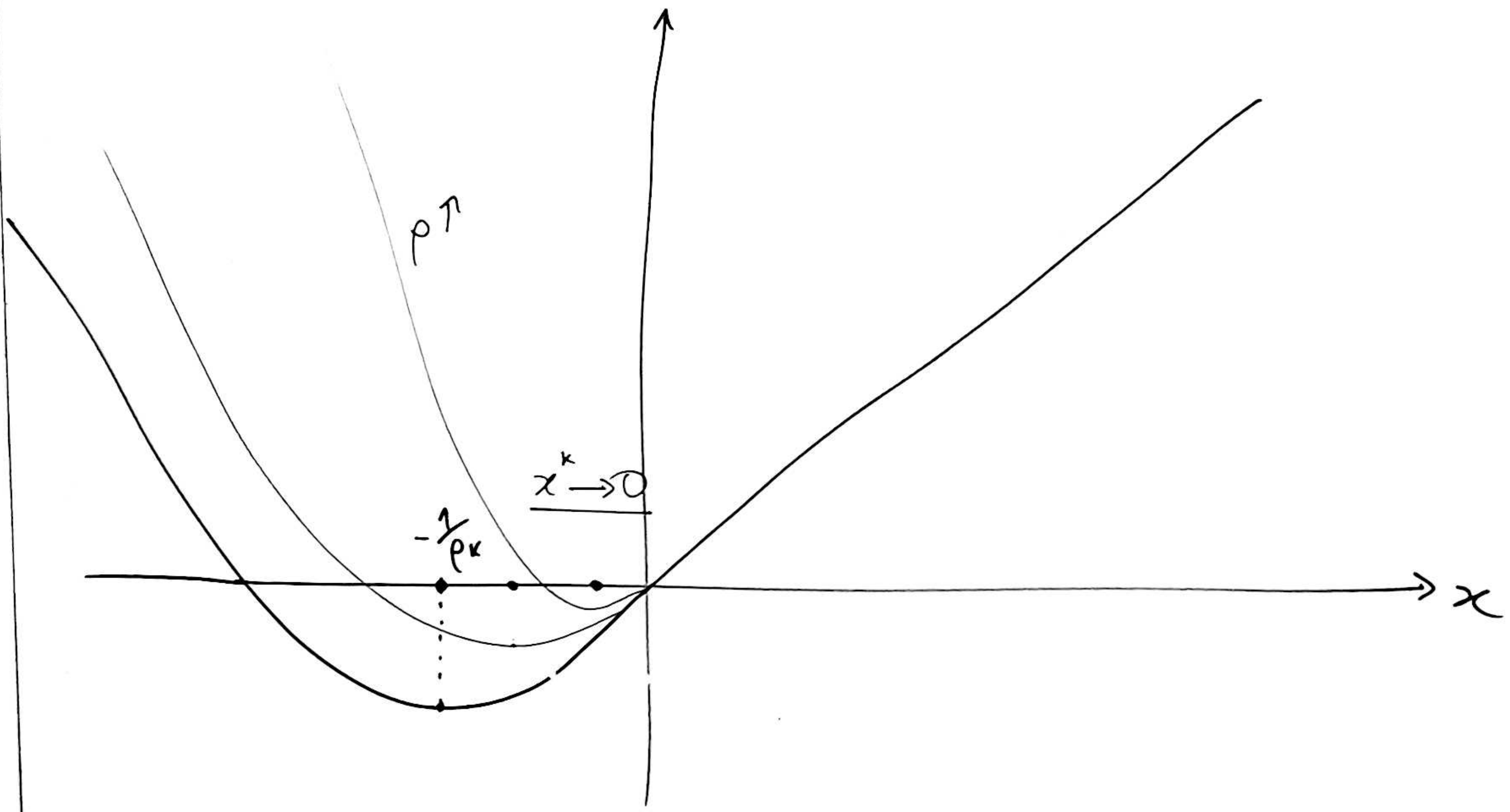
$$SP(\rho_k): \quad \min \; x + \frac{\rho_k}{2}(-x)_+^2$$

SUPONHA $x \leq 0 \ldots$

DAÍ, $x + \frac{\rho_k}{2}(-x)_+^2 = x + \frac{\rho_k}{2}x^2$.

$$SP(\rho_k): \; \min \; x + \frac{\rho_k}{2}x^2 .$$

RESOLVENDO, $1 + \rho_k x^k = 0 \Longrightarrow \boxed{x^k = -\frac{1}{\rho_k}}$



$\rho\pi$
$x^k \longrightarrow 0$
$-1/\rho_k$
x

COM DESLOCAMENTO:

DADOS: $\bar{\mu}^0 = 0$, $\rho_0 = 1$.

$$SP(\rho_0) : \min \quad x + \frac{\rho_0}{2} (-x)_+^2$$

COMO ANTERIORMENTE, $x^0 = -1$.

ATUALIZAMOS $\bar{\mu}$: $\mu^1 = \left(\bar{\mu}^0 + \rho_0(-x^0)\right)_+ = (0 + 1.1)_+$

$\Longrightarrow \bar{\mu}^1 = 1$.

$\rho_1 = 10\rho_0 = 10$.

VEJA QUE

$$1+\bar{\mu}^1(-1)=0 \quad (\text{POIS } \bar{\mu}^1=1),$$

$$\bar{\mu}^1(-x^1)=0, \quad (\text{POIS } x^1=0).$$

$$\bar{\mu}^1=1\geq 0.$$

OU SEJA, O ITERANDO x^1 DO MÉTODO É KKT DO PROBLEMA ORIGINAL COM MULTIP. $\bar{\mu}^1$.

- PENALIZAÇÃO EXTERNA SEM DESLOCAMENTO: LEVA "INFINITOS" PASSOS PARA ATINGIR $x^*=0$
- " " COM " : LEVA 1 PASSO.