Método dual afim escala

P: $\min_{x} c^t x$
s.a. $Ax = b$
$x \geq 0$

D: $\max_{y,z} b^t y$
s.a. $A^t y + z = c$
$z \geq 0$

Primal afim escala: dá passos na var. primal.

$Ax^k = b\,,\ x^k > 0 \longrightarrow$ estima $y^k, z^k \longrightarrow d^k \longrightarrow x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$

$\boxed{\text{Dual afim escala}}$: dá passos nas var. duais.

$A^t y^k + z^k = c\,,\ z^k > 0 \longrightarrow$ estima $x^k \longrightarrow d_y^k\,,\ d_z^k$

$\longrightarrow y^{k+1} = y^k + \alpha_k d_y^k\,,\ z^{k+1} = z^k + \alpha_k d_z^k$.

Dado (y^0, z^0) dual viável e interior (i.é., $A^t y^0 + z^0 = c$, $z^0 > 0$), buscamos uma boa estimativa para x. Lembre-se que as condições de otimalidade são

$$Ax = b \,, \quad x \geq 0$$

$$A^t y + z = c \,, \quad z \geq 0 \quad \checkmark$$

$$XZe = 0 \quad (\Leftrightarrow ZXe = 0 \Leftrightarrow Zx = 0)$$

Buscamos minimizar $\|Zx\|$ mantendo viabilidade primal:

$$\min_x \tfrac{1}{2}\|Zx\|_2^2$$
$$\text{s.a. } Ax = b.$$

Resolvendo: pelas condições KKT, devemos ter

$$Z^2x - A^t w = 0 \quad , \quad Ax = b.$$

Como $z > 0$, temos $\boxed{x = Z^{-2}A^t w}$ e

$$Ax = b \Rightarrow AZ^{-2}A^t w = b \Rightarrow \boxed{w = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b}$$

Considere a direção $d_z = -Z^2 x$. Queremos uma direção d_y que aumente a F.O. dual

$b^t y$ e que forneça $(y+\alpha d_y, z+\alpha d_z)$ dual viável para algum $\alpha > 0$:

(i) $A^t(y+d_y) + z + d_z = c \Rightarrow \underline{A^t y} + A^t d_y + \underline{z} + d_z = c$

$\Rightarrow A^t d_y + d_z = 0 \Rightarrow d_z = -A^t d_y.$

Assim $d_z = -Z^2 x = -A^t d_y \Rightarrow Z^2(Z^{-2} A^t w) = A^t d_y \Rightarrow A^t d_y = A^t w.$

Como posto $A = m \leq n$, só pode ser

$d_y = w \Longrightarrow \boxed{d_y = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b}$

Em resumo,

$$d_y = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b, \quad d_z = -A^t d_y.$$

(ii) y é variável livre. ~~Portanto~~, α_k deve garantir apenas que $z^{k+1} > 0$. Como antes,

$$\alpha_k = \tau \min_i \left\{ -\frac{z_i^k}{d_{z_i}^k} \,;\, d_{z_i} < 0 \right\},$$

onde $\tau \in (0,1)$.

(iii) $b^t(y+d_y) = b^t y + \underbrace{b^t(AZ^{-2}A^t)^{-1}b}_{>0} > b^t y$.

Método dual afim escala

Dado (y^0, z^0) dual viável interior.

para $k = 0, \dots, maxit$

$$d_y^k = (AZ^{-2}A^t)^{-1} b \quad , \quad d_z^k = -A^t d_y^k$$

$$\alpha_k = \tau \min_i \left\{ -z_i^k / d_{z_i}^k \; ; \; d_{z_i}^k < 0 \right\}$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_k d_y^k$$

$z^{k+1} = z^k + \alpha_k d_z^k$ (melhor: $z^{k+1} = c - A^t y^{k+1}$)

até "convergir"

$x = -Z^{-2} d_z^k$ (retorna solução de P)

Ponto inicial

Precisamos de (y^0, z^0) com $A^t y^0 + z^0 = c$ e $z^0 > 0$. (FASE 1)

1) $\tilde{y}^0 = \dfrac{\|c\|}{\|A^t b\|} b$

2) se $\tilde{z}^0 = c - A^t \tilde{y}^0 > 0$, então $(y^0, z^0) = (\tilde{y}^0, \tilde{z}^0)$.

3) se $\tilde{z}^0 \not> 0$ então tome $M = 10^5 \dfrac{|b^t \tilde{y}^0|}{\sigma^0}$,

onde $\sigma^0 = -2 \min\limits_i \tilde{z}_0 > 0$.

4) Resolva $\min_{y,z,\sigma} -(b^t y - M\sigma)$

s.a. $A^t y - \sigma e + z = c$, $z \geq 0$,

onde $e = (1, \dots, 1)$, pelo método dual afim escala. Note que $(\tilde{y}^0, c - A^t\tilde{y}^0 + \sigma^0 e, \sigma^0)$ é viável e interior. Obtenha (y^*, z^*, σ^*).

- $\sigma^* > 0 \Rightarrow D$ não tem solução
  $\Rightarrow P$ ilimitado ou inviável.

- Se $\sigma^k \leq 0$ então podemos parar e retornar y^k e $z^k = c - A^t y^k > 0$.

Critério de parada

Ideia: parar quando a F.O. dual não melhora de uma iteração para a seguinte em relação à sua magnitude.

$$\frac{|b^t y^{k+1} - b^t y^k|}{\max\{1, |b^t y^k|\}} \leq \varepsilon \quad (\text{p.ex. } \varepsilon = 10^{-8})$$