Capítulo 1

Matrizes

Uma *matriz* $A_{m\times n}$ *de ordem* $m\times n$ é uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Definição 1.1. *Duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{r\times s}$ *são* iguais *se* $m = r$*,* $n = s$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todos* $i = 1, \cdots m$ *e* $j = 1, \cdots, n$*.*

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, dizemos que A é

- *quadrada* se $m = n$. Neste caso, podemos dizer simplesmente que A tem ordem n.
- *matriz nula* se $a_{ij} = 0$ para todos i, j.
- *matriz linha* se A tem ordem $1 \times n$ (possui apenas uma linha).
- *matriz coluna* se A tem ordem $m \times 1$ (possui apenas uma coluna).
- *matriz diagonal* se A é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Os elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ constituem a *diagonal principal* de A. Por exemplo, a matriz A abaixo é matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Em particular, a matriz diagonal

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  cuja diagonal principal é formada de 1's é chamada *matriz identidade (de ordem n).*

- *matriz triangular superior* se A é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  é matriz triangular superior.

- *matriz triangular inferior* se A é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

é matriz triangular inferior.

- *matriz simétrica* se A é quadrada e $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i, j. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

é matriz simétrica.

1.1 Operações usuais com matrizes

Dadas $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem $m \times n$ e $k \in \mathbb{R}$, definimos as operações com matrizes:

- a *soma* $A + B$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos i, j.

- a *multiplicação por escalar* kA é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = ka_{ij}$ para todos i, j.

Exemplo 1.1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Então

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$\square$

As operações de soma e multiplicação por escalar seguem as mesmas regras que a de números reais.

Teorema 1.1 (Propriedades da soma e da multiplicação por escalar)**.** *Dadas matrizes A, B e C de ordem $m \times n$ e $a, b \in \mathbb{R}$, vale:*

(*i*) $A + B = B + A$ *(comutatividade)*

(*ii*) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(*iii*) $a(bA) = (ab)A$

(*iv*) $A + \mathbf{0}_{m\times n} = A$, *onde* $\mathbf{0}_{m\times n}$[1] *é matriz nula.*

(*v*) $a(A + B) = aA + aB$

(*vi*) $(a + b)A = aA + bA$

[1]Denotaremos a matriz nula por $\mathbf{0}$ (em **negrito**) e o número real zero por 0.

(vii) $0A = \mathbf{0}_{m\times n}$ *(a multiplicação da matriz A pelo escalar 0 é matriz nula)*

A *transposta* de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é a matriz $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Exemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

□

Teorema 1.2 (Propriedades da transposição de matrizes)**.** *Seja A uma matriz e $a \in \mathbb{R}$. Vale:*

(i) *A é simétrica se, e somente se $A^t = A$.*

(ii) $(A^t)^t = A$.

(iii) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(iv) $(aA)^t = aA^t$.

Agora, dadas $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ definimos a *multiplicação* AB (de matrizes) como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Muita atenção nas ordens das matrizes: o produto AB **só** é possível se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B (veja que a soma acima só faz sentido neste caso). Então ao multiplicar matrizes, observe as ordens:

$$\Big[m \times \mathbf{p}\Big]\ \Big[\mathbf{p} \times n\Big] = \Big[m \times n\Big]$$

Não confunda a multiplicação de uma matriz por um escalar com a multiplicação de duas matrizes. São operações diferentes!

A expressão de c_{ij} acima significa que a entrada (i, j) do produto AB é obtida somando os "produtos correspondentes entre a linha i de A e a coluna j de B". De fato, observe na soma que aparecem os índices a_{i*} e b_{*j} (o índice k percorre a linha de A e a coluna de B).

No exemplo a seguir, imagine a multplicação da linha 1 de A contra a coluna 1 de B; isso fornecerá o elemento da primeira linha, primeira coluna de AB. Faça o mesmo raciocínio para os outros elementos de AB.

Exemplo 1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times \mathbf{3}}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{3}\times 4} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

□

Ao contrário das outras operações com matrizes, a multiplicação entre matrizes não se comporta exatamente como a multiplicação entre números reais. O exemplos a seguir mostra que

- **nem sempre** é verdade que $AB = BA$;
- **nem sempre** é verdade que se $AB = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

Exemplo 1.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 1.3 (Propriedades da multiplicação entre matrizes)**.** *Sejam A, B e C matrizes. Desde que as operações sejam possíveis, vale:*

(*i*) $AI = A$ *e* $IA = A$

(*ii*) $A(B + C) = AB + AC$ *(distributividade)*

(*iii*) $(A + B)C = AC + BC$ *(distributividade)*

(*iv*) $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade)*

(*v*) $(AB)^t = B^t A^t$

(*vi*) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *(a multiplicação da matriz A pela matriz nula é matriz nula)*

Atividade 1.1. Verifique as propriedades (*ii*) e (*v*) para matrizes A de ordem 2×3 e B, C de ordem 3×3. Tente se convencer que vale para quaisquer ordens.

1.2 Matrizes inversíveis

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, dizemos que B é uma *inversa* de A se $AB = BA = I_n$ (B também deve ser quadrada de ordem n). Neste caso diremos que A é *inversível.*

Teorema 1.4 (Unicidade da inversa)**.** *Se A admite uma inversa, ela é única.*

Devido à unicidade da inversa, denotaremos a inversa de A por

$$A^{-1}$$

O próximo resultado é útil para verificar se uma matriz é a inversa de outra. Ele diz que para verificar que B é a inversa de A, basta verificar **se alguma** das expressões vale: $AB = I$ ou $BA = I$; ou seja, não é necessário verificar as **duas**. Não daremos uma demonstração neste momento.

Teorema 1.5. *Se A é matriz quadrada e B é tal que $BA = I$ (ou $AB = I$), então A é inversível e $A^{-1} = B$.*

Exemplo 1.5. A matriz $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. De fato,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = I_2.$$

□

Teorema 1.6 (Inversa do produto)**.** *Sejam A e B matrizes inversíveis de mesma ordem. Então AB é inversível, com*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.3 Exercícios

Veja a lista de exercícios 1.

1.4 Demonstrações

Demonstração do Teorema 1.4. Se B e C são inversas de A então $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$. Assim,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

□

Demonstração do Teorema 1.6. Como A^{-1} e B^{-1} são matrizes quadradas de mesma ordem, o produto $B^{-1}A^{-1}$ pode ser realizado. Neste caso,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(IB) = B^{-1}B = I,$$

e pelo Teorema 1.5 concluímos que AB é inversível, e sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$. □