

Notas de aula – Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais

Definição 1. Um **espaço vetorial** é constituído de um conjunto V , cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- a **soma** (ou **adição**) que leva um par de vetores $(u, w) \in V \times V$ a um vetor $u + w \in V$;
- a **multiplicação por escalar**, que leva um par $(a, u) \in \mathbb{R} \times V$ a um vetor $au \in V$,

que devem satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$:

- (i) $u + w = w + u$ (comutatividade)
- (ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(ab)u = a(bu)$ (associatividade)
- (iii) existe um vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo tal que $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$, para todo $u \in V$ (existência de vetor nulo)
- (iv) $(a + b)u = au + bu$ e $a(u + w) = au + aw$ (distributividade)
- (v) $1 \cdot u = u$ (multiplicação por 1)
- (vi) para todo $u \in V$, existe um vetor $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$ (inverso aditivo)

Essas propriedades “imitam” a geometria de vetores no plano. No entanto, observe que o conjunto V pode ser formado de elementos muito mais gerais, tais como listas ordenadas de n escalares (vetores no \mathbb{R}^n), matrizes, ou até mesmo polinômios e funções!

Exemplo 1. 1. O conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \quad \text{e} \quad a(u_1, u_2) = (au_1, au_2).$$

2. O conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

$$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad \text{e} \quad a(u_1, u_2, u_3) = (au_1, au_2, au_3).$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i\}$ com as operações usuais

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Note que essas operações coincidem com a geometria de vetores no plano e no espaço.

4. O conjunto $M(m, n)$ das matrizes de ordem $m \times n$ com as operações usuais definidas anteriormente, a saber, a soma de matrizes e a multiplicação por escalar:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

5. O conjunto P_n dos polinômios de grau $\leq n$ mais o polinômio nulo, munido das operações

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) \quad \text{e} \quad (ap)(x) = ap(x).$$

Note que $p + q$ e ap são polinômios. Por exemplo, se $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ e $q(x) = 3x^3 + x^2 - 4x$, então

$$(p + q)(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 4, \quad (2p)(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8, \quad (3p - q)(x) = -7x^2 + 4x + 12.$$

□

Atividade 1. Verifique que os conjuntos do exemplo anterior com as suas operações são espaços vetoriais.

Neste texto, **0** (em negrito) será usado para o *vetor nulo*, para distinguir do número zero. Por exemplo,

- em \mathbb{R}^2 , **0** = (0, 0)
- em \mathbb{R}^n , **0** = (0, \dots , 0)
- em $M(m, n)$, **0** = “matriz nula de ordem $m \times n$ ”
- em P_n , **0** é o polinômio identicamente nulo $p(x) = 0$ para todo x .

São fatos acerca de qualquer espaço vetorial:

1. Vale a “lei do corte”, tal como para números reais:

$$\text{se } w + u = w + v \text{ então } u = v.$$

Justificativa: Temos

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{0} + u = (-w + w) + u \\ &= -w + (w + u) = -w + (w + v) \\ &= (-w + w) + v = \mathbf{0} + v \\ &= v. \end{aligned}$$

2. Se $w + u = w$ então $u = \mathbf{0}$.

Justificativa: Utilizando a lei do corte vem

$$w + u = w \Rightarrow w + u = w + \mathbf{0} \Rightarrow u = \mathbf{0}.$$

Isso mostra que o vetor nulo é único.

3. Se $w + u = \mathbf{0}$ então $u = -w$.

Justificativa: Utilizando a lei do corte vem

$$w + u = \mathbf{0} \Rightarrow w + u = w + (-w) \Rightarrow u = -w.$$

Isso mostra que o inverso aditivo de um vetor $w \in V$ é único. Em particular, esse fato implica que a propriedade (vi) da definição de espaço vetorial decorre das outras.

4. Dado $w \in V$, temos $0w = \mathbf{0}$ (a multiplicação de um vetor por zero é o vetor nulo).

Justificativa: De fato, $w + 0w = 1w + 0w = (1 + 0)w = 1w = w = w + \mathbf{0} \Rightarrow 0w = \mathbf{0}$.

5. Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (qualquer múltiplo do vetor nulo é o próprio vetor nulo).

Justificativa: De fato, $a\mathbf{0} = a(-w + w) = a(-w) + aw = (-a)w + aw = (-a + a)w = 0w = \mathbf{0}$.

6. Se $a \neq 0$ e $w \neq \mathbf{0}$ então $aw \neq \mathbf{0}$ (múltiplos não nulos de vetores não nulos são vetores não nulos).

Justificativa. Suponha por absurdo que $a \neq 0$, $w \neq \mathbf{0}$ e $aw = \mathbf{0}$. Então $w = 1w = (\frac{1}{a} \cdot a)w = \frac{1}{a}(aw) = \frac{1}{a}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, isto é, $w = \mathbf{0}$, um absurdo. \square

7. Dado $w \in V$, temos $(-1)w = -w$.

Justificativa. $w + (-1)w = 1w + (-1)w = (1 - 1)w = 0w = \mathbf{0} \Rightarrow (-1)w = -w$. \square

Subespaços vetoriais

Definição 2. Dado um espaço vetorial V , um subconjunto $W \subset V$ é um **subespaço vetorial** de V se

(i) $u + v \in W$ para todos $u, v \in W$ (W é fechado para a soma)

(ii) $au \in W$ para todos $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ (W é fechado para multiplicação por escalar)

Naturalmente, as operações em W são as mesmas de V . Assim, um subespaço vetorial W de V é ele mesmo um espaço vetorial com as operações herdadas de V . Observe ainda que o vetor nulo de W é o vetor nulo de V .

Exemplo 2. Dado um espaço vetorial V , são subespaços vetoriais *triviais* de V os subconjuntos $\{\mathbf{0}\}$ e o próprio V . \square

Exemplo 3. O subconjunto

$$W = \{(at, bt, ct) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

é subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , com as mesmas operações usuais de \mathbb{R}^3 . Geometricamente, se $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ então W é a reta do espaço na direção do vetor (a, b, c) e que passa pela origem. No caso em que $(a, b, c) = \mathbf{0}$, $W = \{\mathbf{0}\}$. \square

Exemplo 4. O subconjunto

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x, x = 2y\}$$

é subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 . De fato, podemos escrever $W = \{(2y, y, 6y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$, e W é a reta na direção de $(2, 1, 6)$ e que passa pela origem. \square

Exemplo 5. Considere um sistema linear homogêneo $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{A} tem ordem $m \times n$. Então o conjunto das soluções \mathbf{X} desse sistema,

$$W = \{\mathbf{X} \in M(n, 1) \mid \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}\},$$

munido das operações usuais sobre matrizes é um subespaço vetorial de $M(n, 1)$. De fato, dadas duas soluções \mathbf{U} e \mathbf{V} de $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e um escalar a , temos

$$\mathbf{A}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(a\mathbf{U}) = a\mathbf{A}\mathbf{U} = a\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

e logo $\mathbf{U} + \mathbf{V} \in W$ e $a\mathbf{U} \in W$.

Por exemplo, considere o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases},$$

que em forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As soluções do sistema são matrizes colunas em $M(3, 1)$ que satisfazem a equação acima. Sejam

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

duas soluções, e $a \in \mathbb{R}$. Você pode verificar que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left(a \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\square

Exemplo 6. O conjunto das soluções de um sistema **não** homogêneo nem sempre é subespaço vetorial. Para ver isso, considere por exemplo o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 3y = 0 \end{cases},$$

e suas soluções $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ e $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ e **verifique que $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ não é solução.**

\square

Exemplo 7. O conjunto $T_S(n)$ das matrizes triangulares superiores de ordem n é subespaço vetorial de $M(n, n)$.

De fato, dadas $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ e $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ matrizes em $T_S(n)$ temos $u_{ij} = 0$ e $v_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Assim, os elementos c_{ij} de $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ são tais que $c_{ij} = u_{ij} + v_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, isto é, $\mathbf{U} + \mathbf{V} \in T_S(n)$. Isso mostra que $T_S(n)$ é fechado para a soma.

Agora, seja $a \in \mathbb{R}$. Os elementos d_{ij} de $a\mathbf{U}$ são tais que $d_{ij} = au_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, ou seja, $a\mathbf{U} \in T_S(n)$, e $T_S(n)$ é fechado para a multiplicação por escalar.

Podemos ver isso “escrevendo” as matrizes: dadas matrizes $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_S(n)$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

e $a \in \mathbb{R}$ quaisquer, você pode notar que as matrizes

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} & \cdots & u_{1n} + v_{1n} \\ 0 & u_{22} + v_{22} & \cdots & u_{2n} + v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} + v_{nn} \end{bmatrix}, \quad a\mathbf{U} = \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} & \cdots & au_{1n} \\ 0 & au_{22} & \cdots & au_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & au_{nn} \end{bmatrix}$$

são também triangulares superiores. □

Exemplo 8. O conjunto $T_I(n)$ das matrizes triangulares inferiores de ordem n é subespaço vetorial de $M(n, n)$. A prova é análoga ao exemplo anterior. □

Exemplo 9. O subconjunto de P_2 dado por $W = \{p \in P_2 \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$ é subespaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 (p' é a derivada de p).

De fato, para que um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

esteja em W , devemos ter $p(0) = 0$ e $p'(1) = 0$. A primeira condição implica $c = 0$, e com a segunda condição, chegamos a $2a + b = 0$. Assim concluímos que

$$W = \{ax^2 + bx \mid 2a + b = 0\}.$$

Mostremos agora que W é fechado para as operações em P_2 :

(i) Se $p(x) = ax^2 + bx$ e $q(x) = \bar{a}x^2 + \bar{b}x$ estão em W , então

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (ax^2 + bx) + (\bar{a}x^2 + \bar{b}x) = (a + \bar{a})x^2 + (b + \bar{b})x.$$

Mas $2(a + \bar{a}) + (b + \bar{b}) = (2a + b) + (2\bar{a} + \bar{b}) = 0$, e logo $p + q \in W$.

(ii) Se $p(x) = ax^2 + bx$ está em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha(ax^2 + bx) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x.$$

Mas $2(\alpha a) + \alpha b = \alpha(2a + b) = 0$, e portanto $\alpha p \in W$. □

Exemplo 10. O vetor nulo $\mathbf{0} \in V$ pertence a qualquer subespaço W de V . De fato, W é fechado para multiplicação por escalar (propriedade (ii) da Definição 2), e logo $\mathbf{0} = 0u \in W$.

Assim,

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$$

não é subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 , pois $\mathbf{0} = (0, 0) \notin W$. Geometricamente, W representa uma reta que **não** passa pela origem. \square

Exemplo 11. O conjunto

$$W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

não é subespaço de \mathbb{R}^2 , apesar de $\mathbf{0} \in W$. De fato, W não é fechado para a soma: tome por exemplo $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4)$. Temos $u, v \in W$, mas $u + v = (3, 5) \notin W$. \square

Teorema 1 (Interseção de subespaços). *Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços seus. Então $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial de V .*

Exemplo 12. O conjunto $D(n) = T_S(n) \cap T_I(n)$ é o subespaço vetorial de $M(n, n)$ das matrizes diagonais de ordem n . \square

Contrariando as expectativas, a união $W_1 \cup W_2$ de subespaços vetoriais W_1 e W_2 **nem sempre é um subespaço vetorial**.

Por exemplo, $W_1 = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ são subespaços de \mathbb{R}^2 , mas

$$(1, 0), (0, 1) \in W_1 \cup W_2$$

e

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2,$$

o que mostra que $W_1 \cup W_2$ não é fechado para a soma, e portanto não é subespaço.

No entanto, se “unirmos” subespaços **somando vetores** seus, geramos um novo subespaço vetorial. Mais especificamente, temos o

Teorema 2 (Soma de subespaços). *Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços seus. Então o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

é subespaço vetorial de V .

O subespaço $W_1 + W_2$ é chamado a *soma* dos subespaços W_1 e W_2 . Quando $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ a soma $W_1 + W_2$ é chamada *soma direta*, e escrevemos $W_1 \oplus W_2$.

Exemplo 13. Considere os subespaços de \mathbb{R}^2 dados por

$$W_1 = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Então

$$W_1 + W_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = (t, 0) + (0, s), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Ou seja, $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$. Observe ainda que $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$, e logo $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$. \square

Atividade 2. Reveja TODOS os exemplos da seção 4.3, tópico “Subespaços Vetoriais”, do livro texto.

Combinação linear

Definição 3. Seja V um espaço vetorial e vetores $v_1, \dots, v_n \in V$. Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, o vetor de V

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

é uma **combinação linear** de v_1, \dots, v_n .

Fixados $v_1, \dots, v_n \in V$, o conjunto W de todas as combinações lineares de v_1, \dots, v_n ,

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V \mid v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de V , chamado *subespaço gerado* por v_1, \dots, v_n . Dizemos também que v_1, \dots, v_n *geram* W .

Vamos mostrar que $W = [v_1, \dots, v_n]$ é subespaço: sejam dados $u, v \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Existem $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Assim

(i)

$$u + v = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) v_i \in W$$

e W é fechado para a soma;

(ii) $\alpha u = \alpha \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i) v_i \in W$, e W é fechado para a multiplicação por escalar.

Concluimos portanto que W é subespaço.

Exemplo 14. Considere um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ com $v \neq \mathbf{0}$. Então o subespaço gerado por v ,

$$[v] = \{av \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\},$$

é a reta que passa pela origem $(0, 0, 0)$ na direção do vetor v . □

Atividade 3. Faça uma figura que represente esta geometria e veja que a soma de vetores sobre a reta está contida na reta.

Agora, imagine uma reta que não passe pela origem. Porque essa reta **não** constitui um subespaço vetorial? Quais propriedades de subespaço vetorial não são satisfeitas?

Exemplo 15. Considere dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ não colineares (isto é, $u \neq av$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e $v \neq \mathbf{0}$). Então

$$[u, v] = \{au + bv \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

é o plano que passa pela origem e é paralelo aos vetores u e v . □

Atividade 4. Faça uma figura que represente esta geometria e veja que a soma de vetores sobre o plano está contida no plano.

Exemplo 16. O subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$ é

$$W = [(1, 0, 1); (0, 1, -1)] = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Geometricamente, W é o plano que passa pela origem e é paralelo aos vetores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$. **Faça uma figura que represente esta geometria.** □

Exemplo 17. O subespaço de \mathbb{R}^2 gerado por $(1, 0)$ e $(0, 1)$ é

$$[(1, 0); (0, 1)] = \{a(1, 0) + b(0, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

O subespaço de \mathbb{R}^2 gerado por $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ é

$$\begin{aligned} [(1, 0); (0, 1); (1, 1)] &= \{a(1, 0) + b(0, 1) + c(1, 1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a + c, b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{(a', b') \mid a', b' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Assim, $[(1, 0); (0, 1); (1, 1)] = [(1, 0); (0, 1)]$. □

Exemplo 18. Generalizando o exemplo anterior, vale

$$u \in [v_1, \dots, v_n] \Leftrightarrow [v_1, \dots, v_n, u] = [v_1, \dots, v_n].$$

Ou seja, vetores que são combinações lineares de outros não fazem diferença no subespaço que eles geram. Isso será útil no estudo de base de um espaço vetorial.

Vamos mostrar tal afirmação. Se $u \in [v_1, \dots, v_n]$ então $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ para certos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Assim

$$\begin{aligned} [v_1, \dots, v_n, u] &= [v_1, \dots, v_n, \sum_{i=1}^n a_i v_i] \\ &= \left\{ v \in V \mid v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n + b \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \right), b_1, \dots, b_n, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{v \in V \mid v = (b_1 + b a_1) v_1 + \dots + (b_n + b a_n) v_n, b_1, \dots, b_n, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v \in V \mid v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\} \\ &= [v_1, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, $u = 0v_1 + \dots + 0v_n + 1u \in [v_1, \dots, v_n, u] = [v_1, \dots, v_n]$, e logo $u \in [v_1, \dots, v_n]$. □

Exemplo 19. Vamos encontrar um conjunto de vetores que geram o subespaço

$$W = \{(x, y, 2x, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

de \mathbb{R}^4 . Observe que

$$(x, y, 2x, x + y) = (x, 0, 2x, x) + (0, y, 0, y) = x(1, 0, 2, 1) + y(0, 1, 0, 1),$$

e logo $W = [(1, 0, 2, 1); (0, 1, 0, 1)]$. □

Dependência e independência linear

Definição 4. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (LI)** ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI se a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}$$

admitir somente a solução trivial $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ não for LI, então dizemos que este conjunto é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LD.

Observamos que o subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ de um espaço vetorial V qualquer não é LI, pois a equação da Definição 4 é satisfeita para todo $a_1 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20. Os vetores

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

de \mathbb{R}^3 são LI. De fato, da equação $a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ segue que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. \square

Exemplo 21. O subconjunto de $M(2, 2)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LI pois de

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 2a_1 + 3a_2 \\ 0 & a_1 - a_2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

chegamos ao sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases},$$

que possui somente a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$. \square

Exemplo 22. O subconjunto $\{(1, 2); (2, 2); (3, 7)\}$ de \mathbb{R}^2 é LD pois

$$(3, 7) = 4(1, 2) - \frac{1}{2}(2, 2).$$

\square

Exemplo 23. O subconjunto $\{p, q, r\}$ de P_2 , onde

$$p(x) = x^2, \quad q(x) = x + 1, \quad r(x) = x^2 + x - 1$$

é LI. De fato, a equação $a_1p + a_2q + a_3r = \mathbf{0}$ diz que $a_1p(x) + a_2q(x) + a_3r(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$a_1(x^2) + a_2(x + 1) + a_3(x^2 + x - 1) = (a_1 + a_3)x^2 + (a_2 + a_3)x + (a_2 - a_3) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde segue o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases}.$$

Esse sistema possui somente a solução trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (verifique!), e portanto $\{p, q, r\}$ é LI. \square

Você pode notar no Exemplo 22 que um dos vetores foi escrito como combinação linear dos outros. Quando os vetores são LD, isso sempre ocorre. De fato, quando $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0}$ admite solução não trivial, digamos $a_1 \neq 0$, então podemos escrever

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}v_n.$$

A volta também vale: se um vetores é combinação dos outros, então os vetores são LD.

Teorema 3. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um dos vetores desse conjunto é combinação linear dos outros.

Uma forma equivalente de escrever o Teorema anterior é a seguinte:

“ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI se, e somente se, nenhum dos vetores desse conjunto é combinação linear dos outros”.

Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição 5. Dado um espaço vetorial V , um conjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é uma **base** de V se:

- (i) β é LI;
- (ii) β gera V , isto é, $[\beta] = [v_1, \dots, v_n] = V$.

Exemplo 24. O conjunto

$$\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{onde } e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

é base de \mathbb{R}^2 . De fato, temos

$$(a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

e qualquer (x, y) em \mathbb{R}^2 pode ser escrito como a combinação linear

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Portanto $\{e_1, e_2\}$ é LI e gera \mathbb{R}^2 , ou seja, é base. Esta é chamada a *base canônica* de \mathbb{R}^2 . \square

Exemplo 25. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } i}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

é o vetor de \mathbb{R}^n constituído de zeros, exceto na posição i igual a 1, é a *base canônica* de \mathbb{R}^n . \square

Atividade 5. Adapte o argumento do Exemplo 24 para mostrar que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é base de \mathbb{R}^n .

Exemplo 26. $\{(1, 1); (0, 1)\}$ é base de \mathbb{R}^2 pois é LI e qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$. \square

Exemplo 27. $\{(0, 1); (0, 2)\}$ não é base de \mathbb{R}^2 pois não é LI (um dos vetores é claramente combinação do outro). Também, este conjunto não gera \mathbb{R}^2 . Por exemplo, o vetor $(1, 0)$ não é combinação linear de $(0, 1)$ e $(0, 2)$ (tente escrever a combinação e veja que não dá certo). \square

Exemplo 28. $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$ não é base de \mathbb{R}^3 pois não gera \mathbb{R}^3 (por exemplo, $(0, 0, 1) \notin [(1, 0, 0); (0, 1, 0)]$). \square

Exemplo 29. O conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é *base canônica* de $M(2, 2)$. De fato, β é LI pois

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

e gera $M(2, 2)$, pois qualquer matriz 2×2 pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\square

Exemplo 30. Generalizando o exemplo anterior, a *base canônica* de $M(m, n)$ é o conjunto das matrizes $\mathbf{A}^{ij} = [a_{ij}]_{m \times n}$ tais que $a_{ij} = 1$ e $a_{kl} = 0$ sempre que $(k, l) \neq (i, j)$. \square

Atividade 6. Mostre que o conjunto das matrizes \mathbf{A}^{ij} do exemplo anterior é base de $M(m, n)$.

Exemplo 31. O conjunto de polinômios $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é a *base canônica* de P_n . \square

Atividade 7. Mostre que o conjunto β do exemplo anterior é base de P_n .

Observamos que, de acordo com o primeiro item da Definição 5, o espaço vetorial trivial $\{\mathbf{0}\}$ não admite base.

Vimos no Exemplo 17 que \mathbb{R}^2 pode ser gerado por dois vetores LI, e que adicionando um terceiro vetor, o subespaço gerado não muda. De outro modo, dos três vetores usados, podemos extrair dois que geram todo o \mathbb{R}^2 (uma base de \mathbb{R}^2). Em geral, sempre é possível extrair bases de conjunto de vetores que geram todo o espaço vetorial.

Teorema 4. *Sejam v_1, \dots, v_n vetores não nulos que geram um espaço vetorial V . Então, dentre esses vetores podemos extrair uma base de V .*

Exemplo 32. Afirmamos que

$$[(1, 0, 0); (0, 1, -1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)] = \mathbb{R}^3.$$

De fato, você pode verificar que $(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1) + (x - y - z)(1, 1, 0) + (-x + y + z)(1, 1, 1)$.

Agora, observe que

$$(1, 1, 0) = 1(1, 0, 1) + 1(0, 1, -1) + 0(1, 1, 1),$$

isto é, $\alpha = \{(1, 0, 0); (0, 1, -1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$ é LD. Mais ainda, isso mostra que

$$(1, 1, 0) \in [(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)]$$

e logo $[(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)] = \mathbb{R}^3$. Como $\beta = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)\}$ é LI (verifique!), segue que β é base de \mathbb{R}^3 . O que fizemos portanto foi extrair do conjunto α de geradores de \mathbb{R}^3 uma base β de \mathbb{R}^3 . \square

Pelo que vimos acima, três vetores LI geram \mathbb{R}^3 . O exemplo indica ainda que ao agregar um quarto vetor, este será LD com os anteriores: é como que a base de \mathbb{R}^3 não comporta mais que 3 vetores. O mesmo ocorre com \mathbb{R}^2 : uma base tem no máximo 2 vetores (geometricamente, tente desenhar 3 vetores LI no plano e se convença que é impossível). Esse fato vale para qualquer espaço vetorial: se um conjunto de vetores já gera todo o espaço, qualquer vetor adicional será LD.

Teorema 5. *Seja V um espaço vetorial. Se $V = [v_1, \dots, v_n]$ (n vetores) então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.*

Exemplo 33. Sabemos que a base canônica de \mathbb{R}^3 tem três elementos, e que gera \mathbb{R}^3 . Com isso já sabemos de antemão que o conjunto α do Exemplo 32 é LD, pois possui mais de três vetores de \mathbb{R}^3 . \square

Em outras palavras, o Teorema anterior diz o seguinte: se n vetores geram V , qualquer vetor adicional será LD com os anteriores. Então o número mínimo de geradores de todo o espaço é sempre o mesmo, independente de quais geradores escolhamos. Isso nos leva ao conceito de dimensão de um espaço vetorial.

Corolário 1. *Qualquer base de um espaço vetorial V tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado **dimensão de V** , e denotado por $\dim V$.*

Reforçando o que o resultado anterior diz: a **dimensão** de um espaço vetorial é a quantidade de vetores de qualquer base sua.

Exemplo 34. Como $\{(1, 0); (0, 1)\}$ é base de \mathbb{R}^2 , temos $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Mais geralmente, considerando a base canônica de \mathbb{R}^n , segue que $\dim \mathbb{R}^n = n$. \square

Exemplo 35. Do Exemplo 29, segue que $\dim M(2, 2) = 4$. Mais geralmente, do exemplo 30 concluímos que $\dim M(m, n) = mn$. \square

Exemplo 36. Do Exemplo 31 segue que $\dim P_n = n + 1$, já que $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma base de P_n . \square

Atividade 8. Seja W um subespaço vetorial de V . Mostre que $\dim W = \dim V$ se, e somente se $W = V$.

O espaço vetorial trivial $\{0\}$ não admite base, pois não há subconjunto seu que seja LI. Convencionaremos no entanto que $\dim\{0\} = 0$.

Como dito no Exemplo 28, os vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são LI, não geram \mathbb{R}^3 . Porém, agregando um terceiro vetor LI, temos uma base de \mathbb{R}^3 . Por exemplo,

$$\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}, \quad \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 4)\}, \quad \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (1, 1, 1)\}$$

são bases de \mathbb{R}^3 . O teorema abaixo diz que **sempre** é possível completar um conjunto LI a fim de obter bases de um espaço vetorial.

Teorema 6. *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V pode ser completado de modo a obter-se uma base de V .*

Corolário 2. *Se $n = \dim V$, qualquer subconjunto de V com n vetores LI é uma base de V .*

Exemplo 37. Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Então o conjunto LI $\{(1, 0, -1); (0, 1, 2)\}$ não é base de \mathbb{R}^3 . A demonstração do Teorema 6 nos dá uma maneira de completar esse conjunto a uma base de \mathbb{R}^3 : basta escolher um vetor $(x, y, z) \notin [(1, 0, -1); (0, 1, 2)]$ e uni-lo ao conjunto. Observe que

$$[(1, 0, -1); (0, 1, 2)] = \{a(1, 0, -1) + b(0, 1, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, 2b - a) + b(0, 1, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

e logo $(1, 1, 0) \notin [(1, 0, -1); (0, 1, 2)]$. Com isso $\beta = \{(1, 0, -1); (0, 1, 2); (1, 1, 0)\}$ é LI, e como possui $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vetores, é uma base de \mathbb{R}^3 . \square

Exemplo 38. Vamos completar o conjunto LI $\{(1, 0, 1, 2); (2, 1, 0, 0)\}$ a uma base de \mathbb{R}^4 . Primeiro, temos

$$W_1 = [(1, 0, 1, 2); (2, 1, 0, 0)] = \{(a + 2b, b, a, 2a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhemos $(1, 1, 0, 0) \notin W_1$. Agora,

$$W_2 = [(1, 0, 1, 2); (2, 1, 0, 0); (1, 1, 0, 0)] = \{(a + 2b + c, b + c, a, 2a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhendo então $(1, 0, 2, 0) \notin W_2$, obtemos a base

$$\beta = \{(1, 0, 1, 2); (2, 1, 0, 0); (1, 1, 0, 0); (1, 0, 2, 0)\}$$

de \mathbb{R}^4 . □

Teorema 7. Se U e W são subespaços de V então $\dim U \leq \dim V$, $\dim W \leq \dim V$ e

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Exemplo 39. Considere os subespaços de \mathbb{R}^3

$$U = \{(x, y, z) \mid x = y\}, \quad W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}.$$

Como

$$U = \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

segue que $\beta_U = \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ e $\beta_W = \{(1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ são bases de U e W , respectivamente. Assim, $\dim U = \dim W = 2$, e

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1.$$

Vamos verificar que de fato $\dim(U \cap W) = 1$. Temos

$$U \cap W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0, x = y\} = \{(x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 2)],$$

ou seja, $\dim(U \cap W) = 1$. □

Pela definição de base, qualquer vetor v de um espaço vetorial V pode ser escrito em uma base β . O resultado a seguir diz que essa escrita só pode ser feita de uma única forma. Você poderá notar isso nos exemplos e exercícios!

Teorema 8. Dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , cada vetor v de V se escreve de maneira **única** como combinação linear dos vetores de β .

Já que a escrita em uma base é única, vamos chamar os coeficientes a_1, \dots, a_n da escrita

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

de v na base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de *coordenadas* de v em relação à β . Se levarmos em consideração a ordem dos vetores em β (que neste caso referimos a β como *base ordenada*), escrevemos

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Poderemos omitir o termo “ordenada” quando o contexto deixar claro que se trata de uma base ordenada.

Recorde que em Geometria Analítica, as coordenadas de um vetor $v = (x, y, z)$ são os números x , y e z . De fato, esses são as **coordenadas** da escrita de v na base canônica de \mathbb{R}^3 :

$$v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Em Geometria Analítica, a base canônica é largamente utilizada (ela dá as direções dos eixos coordenados).

Exemplo 40. Em \mathbb{R}^2 , consideremos a base (ordenada) $\beta = \{(1, 1); (-1, 2)\}$. Como

$$(-1, 8) = 2(1, 1) + 3(-1, 2)$$

segue que

$$[(-1, 8)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos a base $\beta' = \{(-1, 2); (1, 1)\}$ proveniente da mudança de ordem em β , vemos que

$$[(-1, 8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

□

Daqui para frente, vamos denotar a base canônica de um espaço por “*can*”. Assim,

- em \mathbb{R}^2 , $can = \{(1, 0); (0, 1)\}$
- em \mathbb{R}^n , $can = \{e_1, \dots, e_n\}$
- em $M(2, 2)$, $can = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- em $M(m, n)$, $can = \{A^{ij} \mid A_{ij}^{ij} = 1, A_{kl}^{ij} = 0, \forall (k, l) \neq (i, j), \text{ para cada } i, j\}$
- em P_n , $can = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Exemplo 41. Em $M(2, 2)$, considere a base canônica can . Como

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

segue que

$$[v]_{can} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 42. Em \mathbb{R}^n , considere a base canônica $can = \{e_1, \dots, e_n\}$. Qualquer vetor $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser facilmente escrito na base can . De fato, temos

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

e logo

$$[v]_{can} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 43. Um vetor de um espaço vetorial pode ser facilmente descrito em certas bases. Por exemplo, o exemplo anterior mostra que é fácil descrever um vetor de \mathbb{R}^n em sua base canônica. Outro exemplo é o seguinte: considere a base canônica $can = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ de P_n . Um vetor $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ qualquer de P_n tem escrita na base canônica

$$[p]_{can} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 44. Qualquer matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ do espaço vetorial $M(m, n)$ tem escrita na base canônica de $M(m, n)$

$$[\mathbf{A}]_{can} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^t.$$

□

Mudança de base

Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases ordenadas suas. Nosso objetivo é descobrir qual a relação entre as escritas de um vetor $v \in V$ nessas bases, isto é, qual a relação entre $[v]_\beta$ e $[v]_{\beta'}$. Fixado $v \in V$, escrevamos

$$v = \sum_1^n x_i u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_1^n y_i w_i,$$

isto é,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como β é base de V , podemos escrever cada vetor de β' como combinação linear dos vetores de β , digamos

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots a_{nn}u_n \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_1^n y_i w_i = \sum_1^n y_i (a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \cdots a_{ni} u_n) \\
 &= (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots a_{1n} y_n) u_1 + \cdots + (a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots a_{nn} y_n) u_n \\
 &= \sum_1^n (a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots a_{in} y_n) u_i
 \end{aligned}$$

Mas a escrita de v na base $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ é única, de modo que os coeficientes dos u_i 's que aparecem na soma anterior são os x_i 's:

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots a_{1n} y_n \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots a_{2n} y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots a_{nn} y_n \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

chegamos à expressão

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}.$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada *matriz de mudança da base β' para a base β* .

A notação é adequada: você pode ver $[I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$ como o “produto $v = Iv$ ” onde as bases β' são “canceladas”.

Observe que as colunas de $[I]_{\beta}^{\beta'}$ são os coeficientes da escrita dos vetores da base inicial $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ na base final $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$. Para indicar tal fato, podemos escrever

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [w_1]_{\beta} & \cdots & [w_n]_{\beta} \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, fica fácil saber o que fazer para calcular uma matriz de mudança de base.

Exemplo 45. Sejam $\beta = \{(2, -1); (3, 4)\}$ e $can = \{(1, 0); (0, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^2 . Vamos calcular a matriz de mudança da base can para β :

$$[I]_{\beta}^{can} = \begin{bmatrix} | & | \\ [(1, 0)]_{\beta} & [(0, 1)]_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix}.$$

Devemos então calcular a escrita dos vetores de can na base β :

$$\bullet (1, 0) = a(2, -1) + b(3, 4) \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ -a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4/11, b = 1/11.$$

$$\text{Logo, } [(1, 0)]_\beta = \begin{bmatrix} 4/11 \\ 1/11 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Fazendo as contas, conclui-se que } [(0, 1)]_\beta = \begin{bmatrix} -3/11 \\ 2/11 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[I]_\beta^{\text{can}} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}.$$

Com isso podemos encontrar qualquer vetor na base β . Por exemplo, tomando $v = (5, -8)$, vemos que $[v]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$. Assim,

$$[v]_\beta = [I]_\beta^{\text{can}} [v]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Você pode verificar que realmente

$$(5, -8) = 4(2, -1) - 1(3, 4).$$

□

Exemplo 46. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de um espaço vetorial V . Então

$$[I]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [v_1]_\beta & [v_2]_\beta & \cdots & [v_n]_\beta \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n.$$

De fato, a escrita de cada vetor v_i na base β é

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n,$$

ou seja, $[v_i]_\beta$ é a coluna i da matriz identidade \mathbf{I}_n . □

Uma pergunta surge: se conhecemos a mudança de β' para β ($[I]_\beta^{\beta'}$), como obter a mudança inversa, de β para β' ($[I]_{\beta'}^\beta$)?

Vejam: dado $v \in V$ qualquer, temos

$$[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'} \quad \text{e} \quad [v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^\beta [v]_\beta.$$

Assim,

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^\beta [I]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

(veja como as bases se “cancelam” no produto de matrizes). Agora, se $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ então

$$[w_1]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [w_2]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad [w_n]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, $[w_i]_{\beta'}$ é a coluna i da identidade I_n . Então a expressão

$$[w_i]_{\beta'} = ([I]_{\beta'}^\beta [I]_{\beta}^{\beta'}) [w_i]_{\beta'}$$

diz que a coluna i de $[I]_{\beta'}^\beta [I]_{\beta}^{\beta'}$ é a coluna i de \mathbf{I}_n , para todo i . Portanto,

$$[I]_{\beta'}^\beta [I]_{\beta}^{\beta'} = \mathbf{I}_n,$$

isto é, $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é inversível e

$$[I]_{\beta'}^\beta = ([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1}.$$

Exemplo 47. Considere as bases *can* canônica e $\beta = \{(1, 0, 1); (0, 0, 2); (2, 2, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 . Vamos encontrar $[I]_{\beta}^{can}$. Observe que nessa matriz as colunas são as escritas dos vetores canônicos na base β . É conveniente portanto calculá-la invertendo a matriz

$$[I]_{can}^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3}]{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \rightarrow 1/2 L_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow 1/2 L_2}]{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

e logo

$$[I]_{\beta}^{can} = ([I]_{can}^\beta)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Demonstrações

Demonstração do Teorema 1. $u, w \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u, w \in W_1$ e $u, w \in W_2$. Como W_1 e W_2 são subespaços, temos $u + w \in W_1$ e $u + w \in W_2$. Assim $u + w \in W_1 \cap W_2$, ou seja, $W_1 \cap W_2$ é fechado para a soma. □

Atividade 9. Mostre que a interseção $W_1 \cap W_2$ no teorema anterior é fechada para a multiplicação por escalar, e conclua a prova desse teorema.

Demonstração do Teorema 2. $u, v \in W_1 + W_2 \Rightarrow u = w_1 + w_2, v = \bar{w}_1 + \bar{w}_2, w_1, \bar{w}_1 \in W_1, w_2, \bar{w}_2 \in W_2 \Rightarrow u + v = (w_1 + w_2) + (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = (w_1 + \bar{w}_1) + (w_2 + \bar{w}_2) \in W_1 + W_2$ pois W_1 e W_2 são subespaços. Isso mostra que $W_1 + W_2$ é fechado para a soma. □

Atividade 10. Mostre que $W_1 + W_2$ no teorema anterior é fechado para a multiplicação por escalar, e conclua a prova desse teorema.

Demonstração do Teorema 3. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD então existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos (digamos que $a_i \neq 0$) tais que $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0}$. Assim,

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{1}{a_i}(a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n) \\ &= \left(-\frac{a_1}{a_i}\right)v_1 + \dots + \left(-\frac{a_{i-1}}{a_i}\right)v_{i-1} + \left(-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)v_{i+1} + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_i}\right)v_n, \end{aligned}$$

ou seja, v_i é combinação linear de $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Reciprocamente, se v_i é combinação dos outros vetores, então

$$\begin{aligned} v_i &= a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n \\ \Rightarrow a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Com isso, a equação $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0}$ admite uma solução não trivial. Portanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD. \square

Demonstração do Corolário 1. Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ bases de V . Como $V = [\alpha]$ e β é LI, o Teorema 5 diz que $k \leq n$. Por outro lado, como $V = [\beta]$ e α é LI, também $k \geq n$. Assim, $k = n$, como queríamos. \square

Demonstração do Teorema 6. Seja $n = \dim V$ e $v_1, \dots, v_r \in V$ vetores LI. Se $[v_1, \dots, v_r] = V$ então $\{v_1, \dots, v_r\}$ já é base de V ($r = n$). Caso contrário, se $[v_1, \dots, v_r] \subsetneq V$, existe $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \notin [v_1, \dots, v_r]$ ($r < n$). Neste caso, $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ é LI. Com isso, se $[v_1, \dots, v_r, v_{r+1}] = V$, então $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ é base de V . Caso contrário, existe $v_{r+2} \in V$ tal que

$$[v_1, \dots, v_r, v_{r+1}] \subsetneq [v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}].$$

Prosseguindo se necessário, existem então $k = n - r$ vetores $v_{r+1}, \dots, v_{r+k} \in V$ tais que $\beta = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{r+k}\}$ é LI e $[\beta] = V$, ou seja, β é base de V . Note que este processo pára pois qualquer conjunto com n vetores de V é LD. \square

Demonstração do Corolário 2. Suponha por absurdo que o conjunto β com n vetores LI não é base de V . Assim, completamos β a uma base de V , obtendo uma base de V com mais de n vetores, um absurdo. \square

Demonstração do Teorema 8. Seja $v \in V$. Como $[v_1, \dots, v_n] = V$, v é combinação linear de v_1, \dots, v_n . Escrevamos $v = \sum_1^n a_i v_i$ e $v = \sum_1^n b_i v_i$. Devemos mostrar que $a_i = b_i$ para todo i . Ora, como

$$\mathbf{0} = v - v = \sum_1^n a_i v_i - \sum_1^n b_i v_i = \sum_1^n (a_i - b_i) v_i$$

e β é LI, segue que $a_i - b_i = 0$ para todo i , como queríamos demonstrar. \square