

$$\min f(x) \quad \text{s.a.} \quad h(x)=0, \quad g(x) \leq 0.$$

EXERCÍCIOS.

1) SEJA $\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2$, ONDE $g(x)_+ = \max\{g(x), 0\}$.

SUPONHA QUE O PARÂMETRO DE PENALIZAÇÃO ρ NO MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA SEMPRE CRESÇA ($\rho_{k+1} > \rho_k, \forall k$).

SEJA $\{x^k\}$ A SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO.

MOSTRE QUE, $\forall k$,

$$(a) \quad f(x^{k+1}) + \frac{\rho_{k+1}}{2} \phi(x^{k+1}) \geq f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \phi(x^k).$$

$$(b) \quad \phi(x^{k+1}) \leq \phi(x^k) \quad (\text{VIABILIDADE MELHORA})$$

$$(c) \quad f(x^{k+1}) \geq f(x^k) \quad (\text{F.O. NÃO DIMINUI}).$$

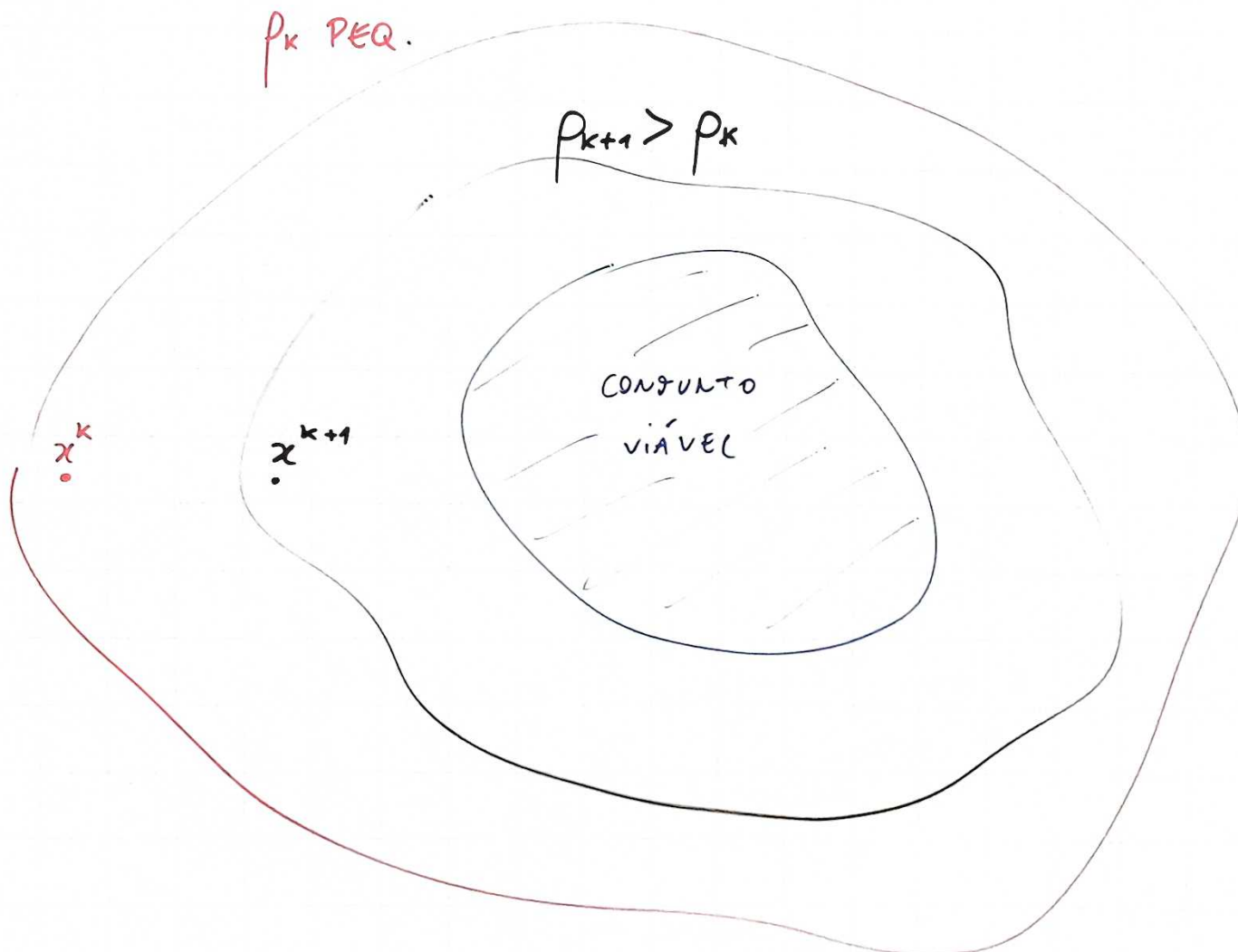
$p_k \notin Q.$

$$p_{k+1} > p_k$$

CONJUNTO
VIÁVEL

x^{k+1}

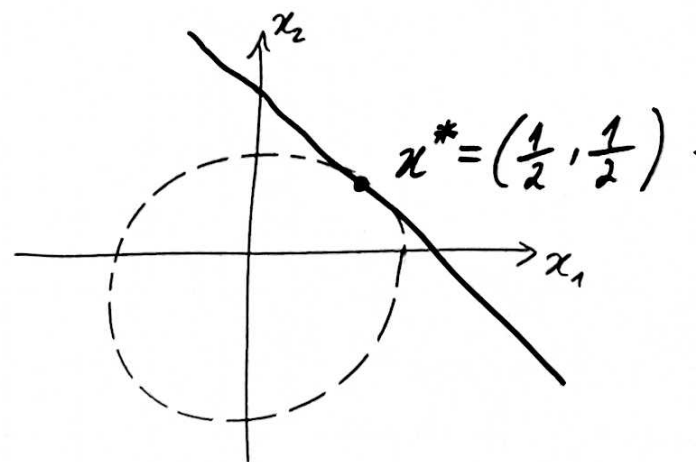
x^k



2) APLICAR O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA AO PROBLEMA

$$\min x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - 1 = 0$$



ANALIZAR POSSÍVEIS INCONSISTÊNCIAS
NA RESOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA.

3) (EX. 6.4 - ANA) MOSTRE QUE NO MÉTODO DO GRADIENTE
COM BUSCA LINEAR EXATA, TEMOS

$$\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^k) = 0.$$

DISCUTIR O POSSÍVEL EFEITO "ZIG-ZAG" E COMO A BUSCA
LINEAR USANDO ARMIJO PODE EVITÁ-LO.

RESOLUÇÃO:

2) O SUBPROBLEMA É

$$SP(\rho_k) : \min x_1^2 + x_2^2 + \frac{\rho_k}{2} (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

RESOLVENDO:

$$\nabla \left(f + \frac{\rho_k}{2} \phi \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \\ 2x_2 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (1) \\ 2x_2 + \rho_k(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

FAZENDO $(1) - (2)$, OBTENHAMOS $2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Assim, $2x_1 + p_k(2x_1 - 1) = 0 \Rightarrow 2x_1(p_k + 1) = p_k$

$\Rightarrow x_1^k = \frac{p_k}{2(p_k + 1)}$, logo,

$$x^k = \left(\frac{p_k}{2(p_k + 1)}, \frac{p_k}{2(p_k + 1)} \right)$$

Esse x^k é o minimizador global de $SP(p_k)$,
 dado que é o único ponto estacionário e $SP(p_k)$
 é um problema convexo.

veja que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = x^*$ (minimizador global do prob. original).

$$SP(\rho_k) : \min \quad x_1^2 + x_2^2 + \frac{\rho_k}{2} (x_1 + x_2 - 1)^2$$

$$\nabla \left(f + \frac{\rho_k}{2} \phi \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \rho_k (x_1 + x_2 - 1) \\ 2x_2 + \rho_k (x_1 + x_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 \left(f + \frac{\rho_k}{2} \phi \right) = \begin{bmatrix} 2 + \rho_k & \rho_k \\ \rho_k & 2 + \rho_k \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES DE $\nabla^2 \left(f + \frac{\rho_k}{2} \phi \right)$:

$$\det \left(\nabla^2(\dots) - \lambda I \right) = \det \begin{bmatrix} 2 + \rho_k - \lambda & \rho_k \\ \rho_k & 2 + \rho_k - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda + \rho_k)^2 - \rho_k^2$$

$$= (2-\lambda)^2 + 2(2-\lambda)\rho_r = (2-\lambda)[2-\lambda+2\rho_r] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2 + 2\rho_r$$

OS AUTOVALORES SE DISTANCIAM ($\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \infty$).

O NÚMERO DE CONDIÇÃO DA HESSIANA $\nabla^2(f + \frac{\rho_r}{2}\phi)$

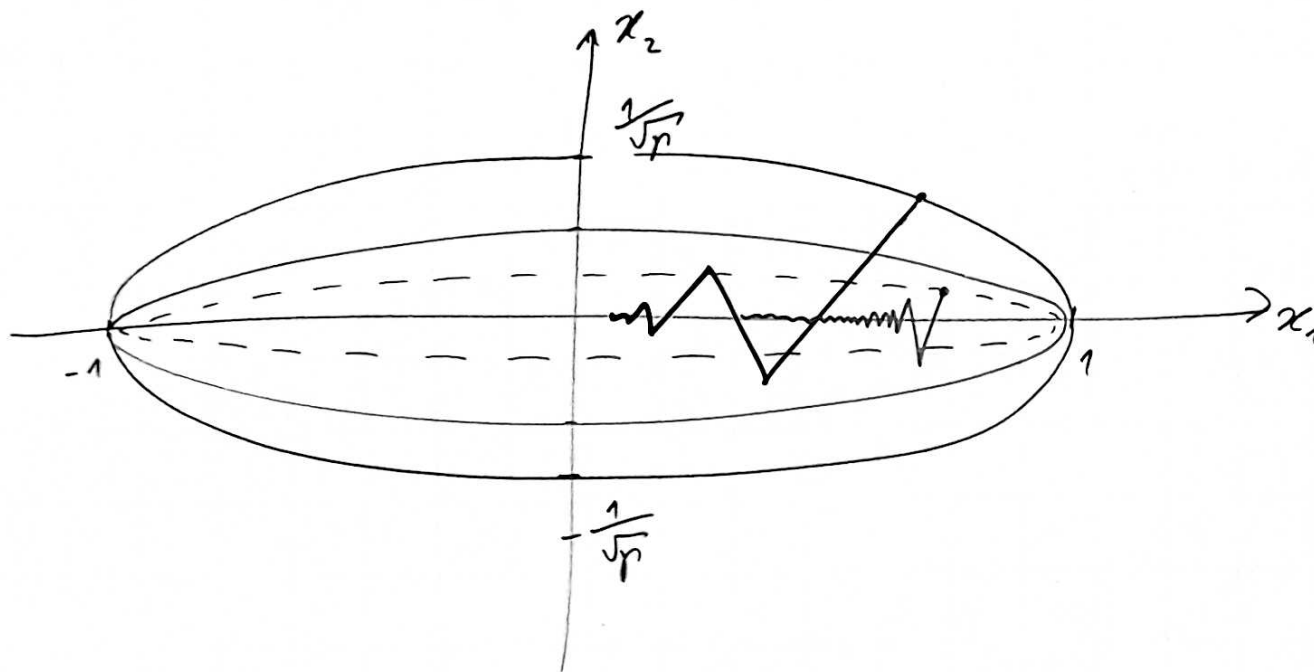
($= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$) VAI PARA INFINITO.

OS AUTOVALORES SÃO UMA MEDIDA DO TAMANHO DOS EIXOS DAS CURVAS DE NÍVEL DE UMA QUADRÁTICA.

POR EXEMPLO: CONSIDERE A FUNÇÃO

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + p x_2^2, \quad p > 0.$$

NÍVEL 1: $g(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + p x_2^2 = 1$.



$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{p}}$$

AUTOVALORES DA HESSIANA:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2px_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2p \end{bmatrix}.$$

AUTOVALORES SÃO

$$\lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = 2p.$$

SE $p \rightarrow \infty$, AS CURVAS DE NÍVEL DE g SE ACHATAM.
OU SEJA, A MEDIDA DOS EIXOS FICA 'DESBALANÇADA'.

EM NOSSO SUBPROBLEMA, QUANTO MAIS ρ_k AUMENTA, MAIS É
DIFÍCIL NUMERICAMENTE RESOLVÊ-LO. POR EXEMPLO, O MÉTODO
GRADIENTE TENDE A FAZER MAIS E MAIS "ZIG-ZAG".
