

PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL (PQS / SQP)

PROBLEMA só com RESTRIÇÕES DE IGUALDADE:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \quad & \min f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0, \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

$$\underline{\text{KKT}}: \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x) = 0$$

$$h(x) = 0.$$

FUNÇÃO LAGRANGEANO (LAGRANGEANA):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x).$$

KKT é REESCRITO COMO

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0.$$

EM SQP, PROCURAMOS APLICAR NEWTON AO
SISTEMA KKT

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O PASSO DE NEWTON CONSISTE EM RESOLVER O SISTEMA
LINEAR (em d)

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x, \lambda) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ h(x) \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} \nabla^2 L(x, \lambda) d_x + \nabla h(x) d_\lambda = -\nabla_x L(x, \lambda) \\ \nabla h(x)^T d_x = -h(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 h_i(x) \right] d_x + \nabla h(x) d_\lambda^+ = -\nabla f(x) \\ \nabla h(x)^T d_x = -h(x) \end{cases} \quad (1)$$

ONDE $d_\lambda^+ = d_\lambda + \lambda$.

ESSE SISTEMA REPRESENTA AS CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DO PROBLEMA QUADRÁTICO

$$\text{QP: } \min_{d_x} \frac{1}{2} d_x^T \left[\nabla^2 f(x) + \sum \lambda_i \nabla^2 h_i(x) \right] d_x + \nabla f(x)^T d_x$$
$$\text{s.a. } \nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0.$$

DE FATO, FAZENDO KKT DESTES PROBLEMAS, TEREMOS (1)

ONDE d_λ^+ FAZ O PAPEL DE MULTIPLICADOR DA RESTRIÇÃO

$$\nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0.$$

IDEIA: TROCAR A RESOLUÇÃO DE P POR UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS QUADRÁTICOS COMO ACIMA. GOSTARÍAMOS QUE

QP FOSSE CONVEXO... PODEMOS TROCAR A MATRIZ

$\nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 h_i(x)$, QUE PODE SER NÃO SEMI-DEF. POSITIVA,

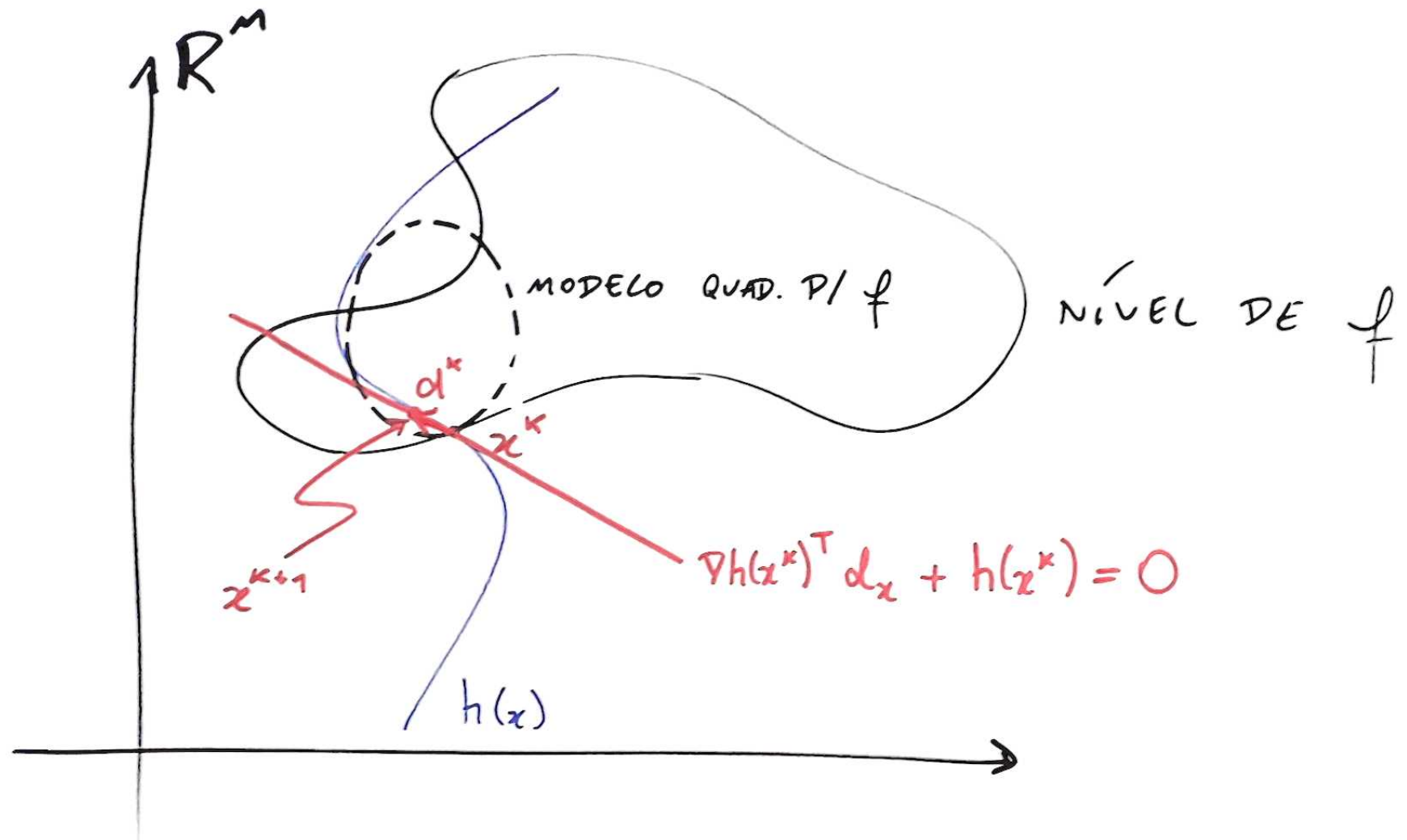
POR UMA MATRIZ H DEFINIDA POSITIVA (E SIMÉTRICA).

OU SEJA, QUEREMOS RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS

$$QP: \min_{d_x} \frac{1}{2} d_x^T H d_x + \nabla f(x)^T d_x$$

$$\text{s.a. } \nabla h(x)^T d_x + h(x) = 0 \quad (\text{LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES})$$

NOTE QUE x ESTÁ FIXO NESSE MODELO, A RESOLUÇÃO É EM d_x . OU SEJA, DADO x^k , CALCULA-SE d_x^k COMO SOLUÇÃO DE QP, E REALIZA-SE O PASSO $x^{k+1} = x^k + d_x^k$. REPETE-SE O PROCESSO...



A MATRIZ H^k DA ITERAÇÃO k PODE SER ATUALIZADA

- POR ESTRATÉGIAS QUASE-NEUTON (BFGS, DFP...)

- COMPUTAR A HESSIANA VERDADEIRA $\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*)$ E

ESTIMAR SEU MENOR AUTOVALOR μ_{\min} . SE $\mu_{\min} > 0$,

H^k IGUAL A ESTA HESSIANA. CASO CONTRÁRIO,

TOMO $H^k = \left(\nabla^2 f + \sum \lambda_i \nabla^2 h_i \right) + \sigma I$, COM $\sigma > 0$

GRANDE O SUFICIENTE (UM σ DESSES PODE SER OBTIDO POR DISCOS DE GERCHIGORIN (?)).

SQP BÁSICO.

INICIALIZAÇÃO: (x^0, λ^0) QUALQUER. $K = 0$.

1) CALCULE A MATRIZ H^k .

2) RESOLVA O PROBLEMA QUADRÁTICO

$$\min_{d_x} \frac{1}{2} d_x^T H^k d_x + \nabla f(x^k)^T d_x$$

$$\text{s.a. } \nabla h(x^k)^T d_x + h(x^k) = 0.$$

A SOLUÇÃO DO SISTEMA KKT DESTES PROBLEMA FORNECE
UMA DIREÇÃO d_x^k E UM MULTIPLICADOR DE LAGRANGE $d_{\lambda}^{+,k}$.

3) FAÇA $x^{k+1} = x^k + d_x^k$ E $\lambda^{k+1} = \lambda^k + d_{\lambda}^{+,k}$. FAÇA $K \leftarrow K+1$ E
VOLTE AO PASSO 1.

COMENTÁRIOS SOBRE CONVERGÊNCIA.

1) SE $H^k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k) \quad \forall k$, ENTÃO A

VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA É A DE NEWTON
(ORDEM DE CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA).

2) EXISTEM ESTRATÉGIAS QUE GARANTEM QUE ESSE
MÉTODO CONVERJA GLOBALMENTE, OU SEJA, VAI PARA
SOLUÇÃO A PARTIR DE QUALQUER PONTO INICIAL (x^0, λ^0) ,
(ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA OU CONTROLE
DO TAMANHO DO PASSO — BUSCA LINEAR COM ARMISTO).

3) HÁ PROBLEMAS NUMÉRICOS COM ESSE ESQUEMA BÁSICO QUE

SÃO CONTORNADOS COM GAMBIARRAS (P. EX. SQP "ESTABILIZADO")

OBS.: ALGUNS PACOTES COMPUTACIONAIS IMPLEMENTAM ESTRATÉGIAS SQP...

- SNOPT: HÁ UMA VERSÃO DEMONSTRAÇÃO (LIMITADA) JUNTO DO AMPL.

- WORHP (WE OPTIMIZE REALLY HUGE PROBLEMS)

PAGO PARA INICIATIVA PRIVADA.

HÁ LICENÇA COMPLETA PARA ACADEMIA.

- MATLAB TRAZ UM SQP.

- JULIA "LANGUAGE PROG".

COMO NA ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA,

QP SÓ DESCREVE DE MANEIRA RAZOÁVEL O PROBLEMA

ORIGINAL $\min f(x)$ "PRÓXIMO" À x^k . ISTO É,
s.a. $h(x)=0$

DEVEMOS TER CUIDADO COM PASSOS GRANDES ($\|d_x^k\|$ GRANDE)

CONTROLAMOS FAZENDO:

1) CONTROLE DE PASSO (ARMIZO EM UMA FUNÇÃO QUE
BALANCEIA DIMINUIÇÃO DE f COM AUMENTO DA VIABILIDADE —
—FUNÇÃO DE MÉRITO).

2) REGIÃO DE CONFIANÇA PARA d_x : $\|d_x\|_\infty \leq \Delta_k$.

NOVO SUBPROBLEMA:

$$QP'' : \min_{d_x} \frac{1}{2} d_x^T H_k d_x + \nabla f(x^k)^T d_x$$

$$\text{s.a.} \quad \nabla h(x^k)^T d_x + h(\underline{x}^k) = 0$$

$$\underbrace{\|d_x\|_\infty}_{\downarrow} \leq \Delta_k$$

$$-\Delta_k \leq d_{x,i} \leq \Delta_k, \forall i$$

OBS: SE Δ_k FOR PEQUENO, QP'' PODE SER
INVIAVEL. SOLUÇÃO: GAMBIARRA.