

Capítulo 6

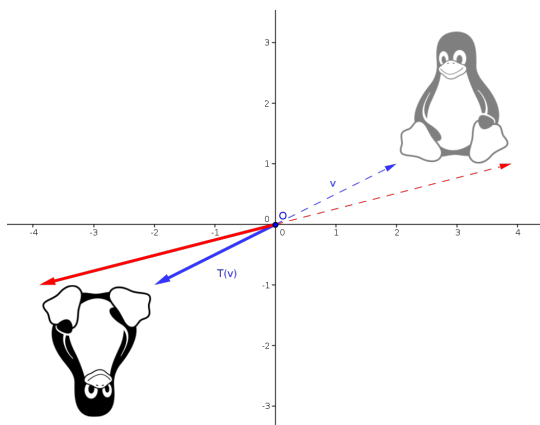
Autovalores e Autovetores

Considere a operador linear $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre \mathbb{R}^2 . Podemos nos perguntar o seguinte: para quais vetores $v \in \mathbb{R}^2$, a imagem $S(v) \in \mathbb{R}^2$ tem a mesma direção de v ? Isto é, queremos saber se para um dado $v \in \mathbb{R}^2$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$S(v) = \lambda v. \quad (6.1)$$

Exemplo 6.1. Considere a reflexão no plano ao redor da origem,

$$F(x, y) = (-x, -y).$$



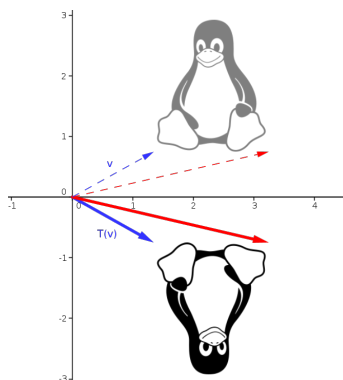
Como

$$F(x, y) = -1(x, y),$$

e logo (6.1) é satisfeita para todo (x, y) e $\lambda = -1$. □

Exemplo 6.2. Considere a reflexão em torno do eixo x , dada por

$$Q(x, y) = (x, -y).$$



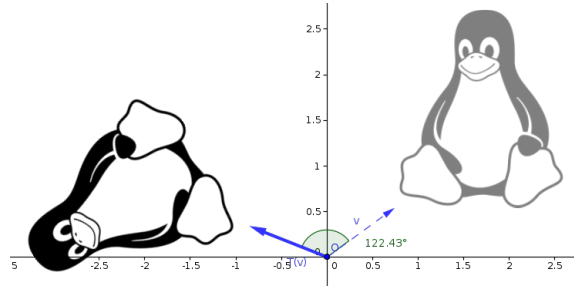
Os únicos vetores (x, y) que satisfazem (6.1) são da forma $(x, 0)$. Veja que

$$Q(x, 0) = 1(x, 0)$$

para todo $(x, 0)$ e $\lambda = 1$, mas $Q(x, y) \neq \lambda(x, y)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ quando $y \neq 0$. Geometricamente, os únicos vetores que permanecem inalterados por reflexão ao redor do eixo x são aqueles na direção do eixo x . \square

Exemplo 6.3. Considere a rotação ao redor da origem por um ângulo θ no sentido anti-horário,

$$R(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta).$$



- Se $\theta = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo nulo + voltas completas), então todo (x, y) é autovetor associado ao autovalor 1, isto é,

$$R(x, y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Se $\theta = \pi + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ (ângulo 180° + voltas completas), então todo (x, y) é autovetor associado ao autovalor -1 , isto é,

$$R(x, y) = -(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Se $\theta \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ ($0 < \theta < \pi$ + meias voltas) então R não possui autovalores reais (após rotação por um ângulo desses, os vetores mudam de direção).

\square

Atividade 6.1. Interprete geometricamente os três itens do exemplo anterior fazendo figuras.

Podemos levar esta ideia para um espaço vetorial qualquer: dada um operador linear $T : V \rightarrow V$, estamos interessados em determinar os pares (λ, v) para os quais

$$T(v) = \lambda v.$$

Neste caso, o escalar λ é chamado *autovalor* de T e v é chamado *autovetor* de T associado a λ . Podemos ainda dizer que (λ, v) é *autopar* de T .

Evidentemente, em qualquer caso, $v = \mathbf{0}$ satisfaz a equação (6.1) para qualquer λ , e logo o caso interessante é quando $v \neq \mathbf{0}$. Com isso, determinamos a noção de autovalor/autovetor de um operador qualquer.

Definição 6.1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre V . Se existirem $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, então dizemos que λ é **autovalor** de T e v é **autovetor** de T associado a λ .

Note que a definição exige que

$$T(v) = \lambda v \in V.$$

Logo, a imagem $T(v)$ deve ser elemento de V . Por isso **só definimos autovalores/autovetores para transformações entre um mesmo espaço vetorial V** (operador sobre V).

Um fato é que se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ , então av , $a \neq 0$ qualquer, também é autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ . De fato, sendo $T(v) = \lambda v$ temos

$$T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = \lambda(av).$$

Em resumo:

Teorema 6.1. *Se $v \neq \mathbf{0}$ é autovetor de T associado ao autovalor λ , então av , $a \neq 0$, é autovetor de T associado a λ .*

Dado um operador $T : V \rightarrow V$, o Teorema 6.1 motiva considerarmos o conjunto dos autovetores v associados a um autovalor λ , definido como

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

Atividade 6.2. Mostre que V_λ é subespaço vetorial de V .

O subespaço V_λ de V é chamado de *autoespaço associado ao autovalor λ* .

Uma visualização geométrica interessante dos autoespaços aparece em Geometria Analítica, da seguinte forma: dada uma cônica no plano rotacionada ao redor da origem (por exemplo, uma elipse rotacionada), os autoespaços associados à matriz dos termos de ordem 2 da cônica são as retas nas direções dos eixos da cônica. Veja a seção 6.5 para detalhes. Analogamente, autoespaços descrevem os eixos de quádricas rotacionadas no espaço.

6.1 Matrizes

Vimos anteriormente que podemos associar matrizes às transformações lineares. É natural, portanto, associar autovalores/autovetores às matrizes. Pela afirmação acima, somente **matrizes quadradas** são consideradas. Podemos pensar na matriz quadrada \mathbf{A} $n \times n$ **como a matriz de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas bases canônicas**. Logo, transitamos entre transformações e matrizes de forma natural:

$$[T]_{can}^{can} = \mathbf{A}$$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ matriz } n \times n$$

$$v \in \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ matriz coluna } n \times 1$$

$$T(v) = \lambda v \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Podemos então falar em autovalores/autovetores de matrizes quadradas:

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é *autovetor* da matriz quadrada \mathbf{A} associado ao *autovalor* λ se

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Com isso, calculamos autovalores/autovetores de um operador olhando para sua matriz nas bases canônicas.

Exemplo 6.4. As matrizes nas bases canônicas associadas aos operadores lineares dos Exemplos 6.1 e 6.2 são, respectivamente,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 6.5. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Seus autopares podem ser calculados resolvendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}.$$

- **Consideremos o caso em que $y \neq 0$.** Da segunda equação temos $\lambda = 1$, e logo a primeira equação torna-se $2x + 2y = x$, donde segue que $y = -\frac{1}{2}x$. Portanto

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix}, \quad x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor } \lambda_1 = 1.$$

Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

- **Consideremos o caso em que $y = 0$.** Neste caso o sistema se reduz à equação $2x = \lambda x$. Para $x \neq 0$, devemos ter $\lambda = 2$, ou seja,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \neq 0, \quad \text{são autovetores associados ao autovalor } \lambda_2 = 2.$$

Você pode verificar que $\mathbf{A}\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$.

□

6.2 Cálculo de autovalores – o polinômio característico

Como dissemos anteriormente, matrizes serão a ferramenta para o cálculo de autovalores. Veremos nesta seção uma forma sistemática de cálculo de autopares de matrizes (e consequentemente de operadores lineares).

Note que no Exemplo 6.5, calculamos os autopares (λ, \mathbf{v}) de uma matriz \mathbf{A} resolvendo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

para λ e \mathbf{v} simultaneamente. Lembre que tivemos que separar em dois casos e fazer uma análise cuidadosa. Porém, se **soubéssemos antes quais eram os autovalores** o termo, recairíamos em um **sistema linear homogêneo** na variável \mathbf{v} , já que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

Resolver $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pode ser feito por escalonamento. Então traçamos a seguinte estratégia:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$;
2. Para cada autovalor λ_i , resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Nossa primeira tarefa, portanto, é calcular os autovalores.

O sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

tem matriz quadrada $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, e portanto podemos calcular seu determinante. Se $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0$ então o sistema homogêneo acima possui única solução, que só pode ser $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ sempre é solução). Porém, lembre-se que por definição, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ não pode ser autovetor. Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$ só pode ser autovalor de \mathbf{A} se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Deste modo, o sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ terá solução não trivial $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que será autovetor de \mathbf{A} por (6.2). Ou seja, os autovalores são raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

$p(\lambda)$ é chamado *polinômio característico*.

Note que $p(\lambda)$ não envolve \mathbf{v} . Ou seja, ao resolver $p(\lambda) = 0$ estaremos calculando somente os autovalores de \mathbf{A} . Os autovetores são calculados em seguida, resolvendo o sistema linear associado, como no roteiro descrito anteriormente.

Abrindo a expressão de $p(\lambda)$, temos

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Veja que de cada termo da diagonal de \mathbf{A} é subtraído λ . O resultado dessa determinante é um polinômio na variável λ , o que explica seu nome. O roteiro para o cálculo de autovalores/autovetores torna-se:

1. Encontrar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, calculando as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

2. Para cada autovalor λ_i , resolver o sistema $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v}$) para encontrar os autovetores associados.

Exemplo 6.6. Vamos calcular os autovalores da matriz do Exemplo 6.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico associado é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

As raízes de p são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, os mesmos autovalores encontrados no Exemplo 6.5. \square

Exemplo 6.7. Vamos calcular os autovalores/autovetores da matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_3) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Usando desenvolvimento de Laplace sobre a primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^{1+1}(1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} 2 \det \begin{bmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[- \lambda(2 - \lambda) - 1] + 2(-1 + \lambda) \\ &= (1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3]. \end{aligned}$$

Temos $p(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Assim, os autovalores de \mathbf{B} são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (onde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$), ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & x \\ -x & +z & = & y \\ x & +y & +2z & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z & = & 0 \\ -x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$$

(o último sistema é $(\mathbf{B} - \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, você pode escrevê-lo diretamente). O último sistema tem soluções não triviais

$$\begin{bmatrix} x & -x & 0 \end{bmatrix}^t, \quad x \neq 0$$

(verifique!), que são os autovetores associados à $\lambda_1 = 1$.

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$. Devemos resolver $\mathbf{B}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, ou equivalentemente, $(\mathbf{B} + \mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Isto é,

$$\begin{cases} 2x & +2z & = & 0 \\ -x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +3z & = & 0 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema associado à MLRFE (última matriz), concluímos que os autovetores de \mathbf{B} associados à $\lambda_2 = -1$ são

$$\begin{bmatrix} -z & -2z & z \end{bmatrix}^t, \quad z \neq 0.$$

Autovetores associados a $\lambda_3 = 3$. Devemos resolver $(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\begin{cases} -2x & +2z & = & 0 \\ -x & -3y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Você pode resolver este sistema e verificar que suas soluções não triviais são

$$\begin{bmatrix} z & 0 & z \end{bmatrix}^t, \quad z \neq 0,$$

que são os autovetores de \mathbf{B} associados a $\lambda_3 = 3$. □

No exemplo acima, obtemos todos os autovalores e autovetores da matriz \mathbf{B} . Note que, em particular,

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_1 = 1$;
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_2 = -1$;
- $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ é autovetor associado à $\lambda_3 = 3$.

Observe que **todos** os autovetores são descritos pelos autoespaços V_λ associados a cada autovalor, e que cada um desses autoespaços é gerado pelos autovetores particulares acima (visto como vetores do \mathbb{R}^3):

$$V_1 = [v_1], \quad V_{-1} = [v_2], \quad V_3 = [v_3].$$

Atividade 6.3. Verifique que os três vetores acima v_1 , v_2 e v_3 são LI. Assim, formam uma base do \mathbb{R}^3 .

Veremos no próximo capítulo que o fato de v_1 , v_2 e v_3 serem LI não é a toa: autovetores associados a autovalores distintos (é o caso do exemplo anterior) são sempre LI. Isso será importante na diagonalização de matrizes/operadores, quando buscaremos uma base do espaço vetorial do operador formada por autovetores seus.

É possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Há teoria para lidar com esse tipo de situação, mas não faremos neste texto. Ou seja, vamos considerar apenas **autovalores reais**.

6.2.1 Casos particulares

Nesta seção apresentamos alguns casos frequentes em que o cálculo dos autovalores (ou parte deles) é direto.

Autovalores de matrizes não inversíveis. Se uma matriz \mathbf{A} não possui inversa ($\det \mathbf{A} = 0$) então $\lambda = 0$ sempre será **um dos seus autovalores** (os outros devem ser calculados em cada caso!). De fato, quando \mathbf{A} não é inversível, o sistema quadrado homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

possui solução $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Logo, este \mathbf{v} é autovetor associado ao autovalor nulo pois $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

Autovalores de matrizes triangulares. Seja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

uma matriz triangular superior de ordem n . Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}_n) = \det \begin{bmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} - \lambda & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} - \lambda & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Temos então um determinante de uma matriz triangular, que sabemos ser o produto dos elementos da sua diagonal (veja o capítulo sobre determinantes). Assim

$$p(\lambda) = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda),$$

cujas raízes são, claramente, $t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}$.

O mesmo ocorre vale para matrizes triangulares inferiores: basta notar que no polinômio característico só aparecem os termos da diagonal multiplicados.

Exemplo 6.8. Os autovalores de $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 56 & 23 & 11 \\ 0 & -2 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são 1, -2, 3 e -1. □

Autovalores de matrizes diagonais. Uma matriz diagonal é, em particular, uma matriz triangular. Portanto seus autovalores são os elementos da diagonal. Em particular, a matriz identidade de ordem n tem único autovalor $\lambda = 1$.

6.3 Autovalores de operadores via matrizes

Definimos em primeiro lugar autovalores/autovetores para operadores $T : V \rightarrow V$ sobre um espaço vetorial V qualquer. Vimos que a mesma definição vale para matrizes quadradas, e como podemos calcular seus autopares. Vamos agora conectar o cálculo de autovalores de matrizes com os operadores sobre V qualquer.

Seja β uma base de V e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Temos

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T]_{\beta}^{\beta} [v]_{\beta} = \lambda [v]_{\beta} \Leftrightarrow ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) [v]_{\beta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Assim, calcular os autovalores de T é equivalente a encontrar as raízes da matriz de T na base β , $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Seja agora α outra base de V . Lembrando que $[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$, veja que

$$\begin{aligned} \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda \mathbf{I}) &= \det([I]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha} - \lambda [I]_{\alpha}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \det([I]_{\alpha}^{\beta} ([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) [I]_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \det[I]_{\alpha}^{\beta} \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) \det[I]_{\beta}^{\alpha} \\ &= \underbrace{\det[I]_{\alpha}^{\beta} \det[I]_{\beta}^{\alpha}}_{=1} \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}) = \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}). \end{aligned}$$

O que acabamos de provar é que

O polinômio característico de $[T]_{\beta}^{\beta}$ é o mesmo para qualquer base β de V . Assim, a fim de calcular os autovalores de T , podemos escolher qualquer base β e encontrar as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda \mathbf{I}).$$

Exemplo 6.9. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x, y - z, x + 2z).$$

Escolhamos a base canônica do \mathbb{R}^3 para o cálculo dos autovalores,

$$[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando o desenvolvimento de Laplace obtemos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Consideramos agora a matriz de T na base $\beta = \{(1, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 0, 1)\}$. Calculando obtemos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma matriz diagonal! Logo, o cálculo do polinômio característico é direto:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

□

6.4 Multiplicidades algébrica e geométrica

Dois conceitos interessantes acerca de **autovalores** são as multiplicidades *algébrica* e *geométrica*.

- A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico;
- A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do autoespaço associado V_λ .

O nome “algébrico” justifica-se pela relação/manipulação/operação com o polinômio característico, elementos próprios do que se entende por “álgebra”. Já o nome “geométrico” justifica-se por fazer referência à forma do subespaço vetorial V_λ (dimensão 0, ponto; dimensão 1 reta; dimensão 2, plano etc).

Exemplo 6.10. No Exemplo 6.9, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 1$ é 2, e a de λ_2 é 1, visto que

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Vamos calcular os autovetores do operador T daquele exemplo, cuja matriz na base

$$\beta = \{(1, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 0, 1)\}$$

é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Devemos resolver

$$([T]_\beta^\beta - \mathbf{I}_3)[v]_\beta = \mathbf{0}.$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, é fácil ver que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Expandindo v na base β , vemos que

$$v = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + 0(0, 0, 2) = (x, y, x) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 1. Veja que conseguimos no máximo dois vetores desse tipo que são LI entre si, por exemplo,

$$v_1 = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 1, 0).$$

Logo $\{v_1, v_2\}$ é uma base para o autoespaço V_1 , ou seja, λ_1 tem multiplicidade geométrica igual a 2 (V_1 é um plano).

Autovetores associados a $\lambda_2 = 2$. Resolvendo

$$([T]_{\beta}^{\beta} - 2\mathbf{I}_3)[v]_{\beta} = \mathbf{0}$$

obtemos

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

(verifique!). Expandindo v na base β , vemos que

$$v = 0(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0) + z(0, 0, 2) = (0, 0, 2z) \neq \mathbf{0}$$

são os autovetores associados a 2. Conseguimos apenas 1 vetor desse tipo que forma um conjunto LI, por exemplo, $\{(0, 0, 2)\}$. Esse conjunto é uma base do autoespaço V_2 , e portanto $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. \square

É possível mostrar que para qualquer autovalor,

$$\text{multiplicidade geométrica} \leq \text{multiplicidade algébrica}.$$

Há casos em que a multiplicidade geométrica é estritamente menor que a algébrica.

Atividade 6.4. Calcule as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor $\lambda = 1$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e verifique que a multiplicidade geométrica é menor que a algébrica.

A multiplicidade geométrica tem utilidade na diagonalização de operadores, que veremos no próximo capítulo. Diagonalizar um operador significa obter uma base para a qual a matriz do operador é diagonal, tal como ilustrado no Exemplo 6.9. O segredo é obter uma *base de autovetores*, que existirá se a soma das multiplicidades geométricas for igual à dimensão do espaço (neste caso, decompomos o espaço vetorial na soma direta dos autoespaços associados aos autovalores distintos: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$).

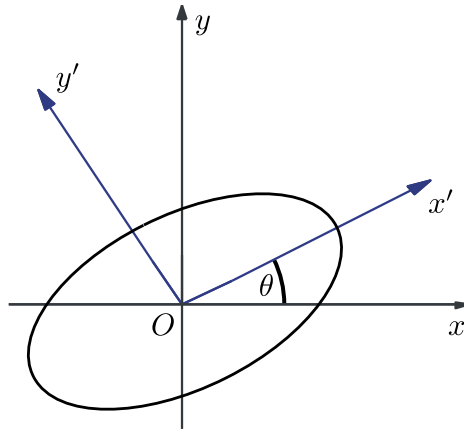
6.5 CONTEÚDO EXTRA E NÃO OBRIGATÓRIO – Autopares e cônicas rotacionadas

Nesta seção ilustramos o uso de autovalores/autovetores para identificação de cônicas rotacionadas no plano.

Seja dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0.$$

Essa equação representa uma cônica rotacionada se $b \neq 0$.



No caso em que $b \neq 0$, veremos como encontrar um ângulo θ tal que, rotacionando eixos x e y , eliminemos o termo xy na equação, escrevendo-a no novo sistema $x'Oy'$ como

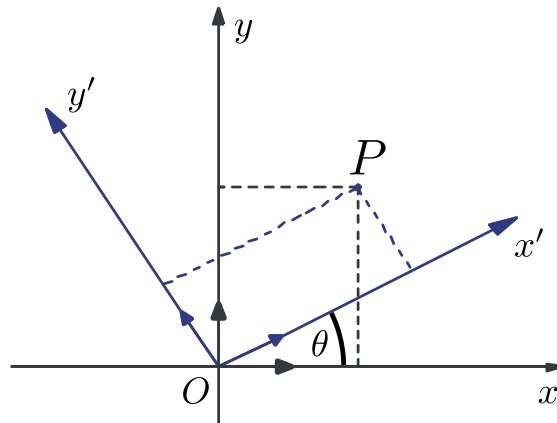
$$a'x'^2 + c'y'^2 + f' = 0 \quad (b' = 0).$$

A escrita acima é mais simples de interpretar, podemos facilmente capturar sua geometria (centro, focos, semi-eixos etc), como se faz em cursos de Geometria Analítica.

Vimos no início do capítulo sobre transformações lineares que rotacionar (x, y) no sentido anti-horário por um ângulo θ corresponde à multiplicação pela *matriz de rotação*

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

O que queremos é uma relação entre as coordenadas (x, y) de um ponto P do plano no sistema original xOy e suas coordenadas (x', y') no novo sistema rotacionado $x'Oy'$.



A figura acima ilustra que as coordenadas de P no sistema original xOy correspondem às coordenadas rotação de P no novo sistema $x'Oy'$ **após uma rotação** pelo ângulo θ (imagine a rotação de P e veja que as linhas pontilhadas azuis (novo sistema) terão os mesmos comprimentos das linhas pontilhadas pretas (sistema original)). Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Chamando $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ escrevemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{X}'.$$

Voltemos a analisar a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0. \quad (6.3)$$

Fazendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, podemos escrever (6.3) como

$$\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + f = 0.$$

Atividade 6.5. Verifique que a $\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + f = 0$ é a equação (6.3).

A fim de eliminar o termo xy , fazemos a rotação nos eixos $\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{X}'$. Lembrando que $(\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}')^t = \mathbf{X}'^t \mathbf{R}_\theta^t$, temos

$$(\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}')^t \mathbf{A} (\mathbf{R}_\theta \mathbf{X}') + f = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'^t (\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta) \mathbf{X}' + f = 0.$$

Chamando $\mathbf{B} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta$ temos

$$\mathbf{X}'^t \mathbf{B} \mathbf{X}' + f = 0.$$

Por analogia, essa é exatamente a equação

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + f = 0,$$

onde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta$.

Portanto, nosso objetivo é encontrar θ tal que $b' = 0$.

Antes disso, é necessário calcular a' e c' . Precisamos do resultado seguinte:

Atividade 6.6. Mostre por um cálculo direto que $\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\theta^t = \mathbf{I}_2$. Mostre também que $\det \mathbf{R}_\theta = 1$.

Usando a atividade acima, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) &= \det(\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta - \lambda \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta) \\ &= \det(\mathbf{R}_\theta^t (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) \mathbf{R}_\theta) \\ &= \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta^t}_1 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) \underbrace{\det \mathbf{R}_\theta}_1 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2). \end{aligned}$$

Logo, se $b' = 0$ então

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (a' - \lambda)(c' - \lambda).$$

Daí, a' e c' são raízes do polinômio característico de \mathbf{A} ,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a' e c' são os **autovalores da matriz** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

Em resumo, passamos da equação original

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$$

para a equação sem o termo misto xy ,

$$a'x'^2 + c'y'^2 + f = 0,$$

calculando a' e c' como os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Note que o termo livre f é o mesmo nas duas equações.

Finalmente, você pode verificar que os autovetores associados à a' e c' (os autovalores de \mathbf{A}) têm as direções dos eixos rotacionados x' e y' . Reflita sobre as figuras desta seção.

Atividade 6.7. Identifique cada cônica, eliminando o termo misto xy .

(i) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = -1$

(ii) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

(iii) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

(iv) $xy = 1$

Atividade 6.8. Mostre que $\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{R}_{\theta+\gamma}$, isto é, rotacionar eixos por um ângulo θ e daí rotacioná-los por um ângulo γ é o mesmo que rotacionar os eixos por um ângulo $\theta + \gamma$.

Atividade 6.9. Mostre que sempre é possível eliminar o termo misto xy , isto é, mostre que existe um ângulo θ tal que $b' = 0$.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{A} \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \frac{b'}{2} = -a \sin \theta \cos \theta - \frac{b}{2} \sin^2 \theta + \frac{b}{2} \cos^2 \theta + c \sin \theta \cos \theta \\ &\Rightarrow b' = (c - a) \sin(2\theta) + b \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Assim, $b' = 0$ se, e somente se $(a - c) \sin(2\theta) = b \cos(2\theta)$. Logo, se $a - c = 0$, basta fazer $\theta = 45^\circ$ ($\theta = \pi/4$) (pois com isso $\cos(2\theta) = 0$). Por outro lado, se $a - c \neq 0$, $b' = 0$ se

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{b}{a - c}.$$

Basta tomar então $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$ tal que a relação anterior valha. Isto mostra que sempre conseguimos θ tal que $b' = 0$.

6.6 Exercícios

Veja a lista de exercícios 7.

Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Bookman, 2010.
- [2] José Luiz Boldrini e outros. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, 3 edition, 1980.
- [3] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson, São Paulo, 2 edition, 1987.
- [4] David Lay. *Álgebra Linear*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 1999.
- [5] David Poole. *Álgebra linear*. Thonsom Learning, São Paulo, 2006.