

DERIVADAS DE FUNÇÕES

11

Gil da Costa Marques

- 11.1** O cálculo diferencial
- 11.2** Diferenças
- 11.3** Taxa de variação média
- 11.4** Taxa de variação instantânea e pontual
- 11.5** Primeiros exemplos
 - 11.5.1** Função polinomial geral de grau 1
 - 11.5.2** Função polinomial geral de grau 2
 - 11.5.3** Função polinomial de grau n
 - 11.5.4** Vazão
- 11.6** Interpretação geométrica da derivada
- 11.7** Derivadas de ordem superior

11.1 O cálculo diferencial

De modo geral, grandezas físicas variam (por se constituírem em variáveis dependentes) ao sabor da variação de outras das quais elas dependem (as variáveis independentes). O Cálculo infinitesimal é uma área da Matemática voltada para lidar com aspectos relativos a variações de grandezas decorrentes de variações diminutas de outras.

A base do Cálculo infinitesimal é constituída a partir de considerações sobre variações muito pequenas (variações infinitesimais, portanto) das variáveis independentes. Tais variações acarretam variações das grandezas (variações das funções) que delas dependem. A noção de infinitésimo ou variação infinitesimal de uma grandeza foi introduzida por Arquimedes cerca de 250 anos antes da era cristã.

O Cálculo diferencial se baseia no quociente das variações para definir a derivada de uma função. Esse quociente recebe o nome de taxa de variação média da função num determinado intervalo. No cálculo integral, consideram-se somas nas quais cada parcela é um produto do valor de uma função pela variação infinitesimal da variável independente.

Tanto no Cálculo diferencial quanto no Cálculo integral, o conceito de limite é empregado como uma forma de assegurar que as variações infinitesimais das duas grandezas sejam irrisoriamente pequenas, tão pequenas quanto possam ser. É nesse sentido que tomamos o limite em que a variação da variável independente tende a zero.

A definição de derivada a partir do conceito de limite foi introduzida por Cauchy, e permite um tratamento formal e rigoroso desse conceito. Tais desdobramentos acabam convergindo para a análise matemática.

Tendo em vista que uma das primeiras aplicações do Cálculo é a de encontrar a reta tangente a uma curva, que é o gráfico de uma função, passando por um determinado ponto (e essa é a interpretação geométrica da derivada de uma função), a origem do cálculo diferencial remonta aos tempos dos geômetras gregos. Alguns conceitos básicos do Cálculo são conhecidos e estudados há mais de dois milênios. Esse é o caso do problema da tangente a uma curva, o qual foi analisado primeiramente por geômetras gregos, com destaque para Euclides.

A versão moderna do Cálculo se iniciou quando Isaac Newton (1643 – 1727) procurou um novo método matemático para analisar as consequências das suas leis da dinâmica. Deu a ele o nome de cálculo dos fluxos (ou flúxons). No entanto, as primeiras publicações nessa fase do desenvolvimento inicial são devidas a Gottfried Leibniz (1646 – 1716).

A notação atualmente utilizada no Cálculo possui muitas características que foram introduzidas por Leibniz.

O Cálculo é fundamental para expressar e entender as leis físicas. Mas ele também é útil em todas as áreas do conhecimento.

Como veremos, a taxa de variação de uma grandeza f com respeito a x , salvo raras exceções, depende da variável x . Essa nova função, obtida da função dita primitiva (a função f), é denominada função derivada de f , e ela será representada pela função $g(x)$. Utilizando a notação de Leibniz, escrevemos essa nova função como:

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ ou } g(x) = \frac{df}{dx}(x) \quad 11.1$$

O Cálculo provê um método para a determinação da taxa de variação de uma função. Ele é baseado no conceito de diferenças da variável dependente e da variável independente (daí o nome) e de considerações a respeito do limite do quociente das mesmas.

11.2 Diferenças

Podemos visualizar o comportamento de uma função construindo o seu gráfico. Para tanto, como explicado no texto sobre **Limites**, colocamos os valores assumidos pela variável independente, x , no eixo horizontal (o eixo das abscissas) enquanto anotamos os valores da variável dependente no eixo vertical (o eixo das ordenadas). Uma vez que os gráficos fornecem importantes informações sobre as funções, suas derivadas e integrais, sua utilização é ampla no Cálculo.

Consideremos dois pontos P_1 e P_2 sobre um gráfico. Tais pontos têm coordenadas dadas por:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (x_1, f(x_1)) \\ &\text{e} \\ (x_2, y_2) &= (x_2, f(x_2)) \end{aligned} \quad 11.2$$

Considerando os pontos acima, podemos introduzir duas diferenças. A primeira delas é a diferença das abscissas, diferença essa que escrevemos sob a forma:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad 11.3$$

A segunda diferença relevante é a diferença entre os valores assumidos pela função, quando calculada para cada um dos dois valores de x , isto é, a diferença das ordenadas. Assim, quando uma grandeza (variável dependente) é função de uma outra, aqui designada por x (variável independente), então uma variação desta última grandeza a partir de um valor inicial x_1 , designada por Δx , acarreta uma variação da variável dependente. Tal diferença é representada por Δf . Por definição, temos que:

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

11.4

O gráfico da **Figura 11.1** ilustra essas diferenças:

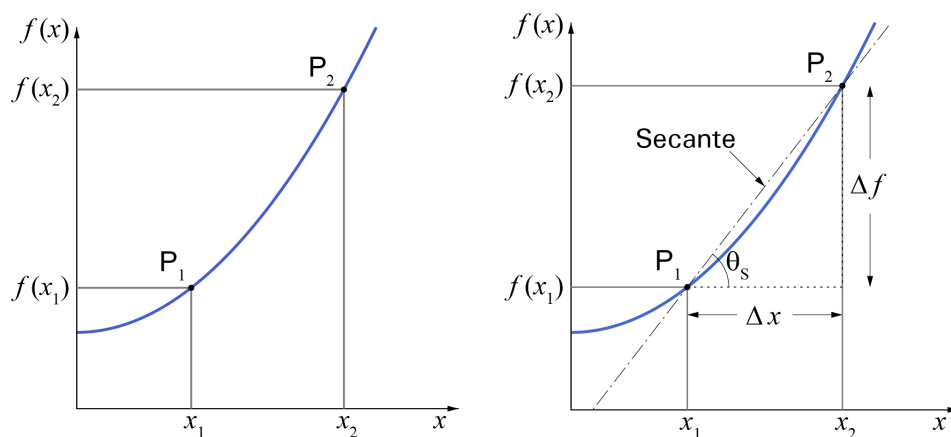


Figura 11.1: Uma variação Δx da variável independente acarreta uma variação Δf da variável dependente.

11.3 Taxa de variação média

Ao quociente entre a variação da variável dependente e a variação da variável independente, isto é, o comprimento do tamanho do intervalo associado a ela,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

11.5

damos o nome de razão média das variações ou taxa de variação média da função considerada, no intervalo dado. Tal taxa depende da variação Δx considerada, bem como do particular ponto

inicial x_1 . Assim, a taxa de variação média de uma função, num intervalo $[x_1, x_1 + \Delta x]$ contido em seu domínio, é o quociente definido acima.

A taxa de variação média tem um significado geométrico muito simples. De fato, como podemos ver na **Figura 11.1**, ela nada mais é do que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$. Uma vez que, por hipótese, esses dois pontos pertencem ao gráfico da função, essa reta é a reta secante ao gráfico por esses pontos.

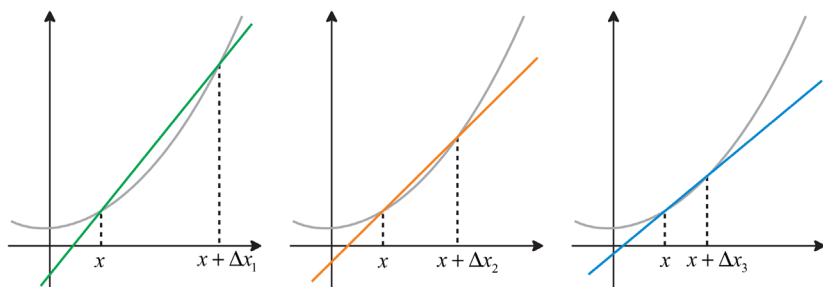


Figura 11.2: Diferentes valores do comprimento do intervalo levam a diferentes taxas de variação média.

11.4 Taxa de variação instantânea e pontual

É fácil determinar a taxa de variação média de uma dada função, uma vez que ela envolve apenas o cálculo da função para dois valores distintos da variável independente x , ou seja, ela é definida, e portanto determinada, para um comprimento Δx do intervalo.

Podemos sempre reduzir o comprimento do intervalo, considerando valores da variável independente cada vez mais próximos, ou seja, valores cada vez menores de Δx . Em particular, podemos pensar em valores muito pequenos (a despeito de não termos ainda uma clareza sobre o que isso significa). A tais valores diminutos damos o nome de valores infinitesimais. Comprimentos de intervalos infinitesimais são denotados por dx .

O nosso interesse é determinar a taxa de variação instantânea (quando a variável independente for o tempo), ou a taxa de variação pontual (nos demais casos), de uma função f . Tal taxa é denominada simplesmente taxa de variação de f no ponto x_0 . Ela é definida como aquela que é obtida a partir de intervalos da variável x cada vez menores. Mais precisamente, estamos interessados em obter o valor da taxa que resulta quando consideramos o limite em que o comprimento Δx do intervalo tende a zero. Esse limite define a taxa de variação de f no ponto x_0 .

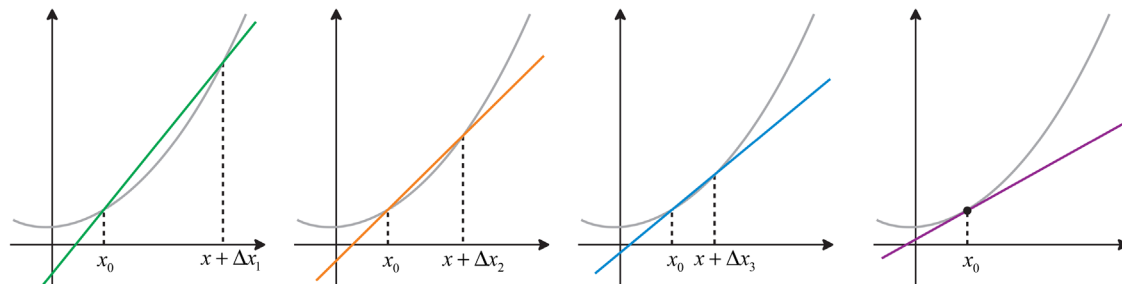


Figura 11.3: Conforme Δx se aproxima de zero, o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ se aproxima do ponto $(x_0, f(x_0))$, e a reta continua secante ao gráfico, sendo determinada por dois pontos cada vez mais próximos. Na posição limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Para calcular a taxa de variação pontual de f no ponto x_0 pertencente ao domínio da função, consideramos tanto os acréscimos positivos ($\Delta x > 0$) quanto os negativos ($\Delta x < 0$), de tal modo que o intervalo aberto $]x_0, x_0 + \Delta x[$, se $\Delta x > 0$, ou $]x_0 + \Delta x, x_0[$, se $\Delta x < 0$, esteja inteiramente contido no domínio da função. Assim, fica subentendido que, ao calcularmos o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, estamos fazendo Δx se aproximar de 0 tanto por valores positivos como negativos. Se o limite assim definido existe e é finito, ele define a derivada da função em um ponto do domínio de f . Escrevemos, assim, que a derivada é a função resultante desse processo limite, ou seja:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

11.6

Chamamos a atenção para o fato de que ambas as diferenças do quociente tendem a zero quando $\Delta x \rightarrow 0$. O resultado do quociente, no entanto, tende a um valor bem definido quando existe a derivada da função no ponto.

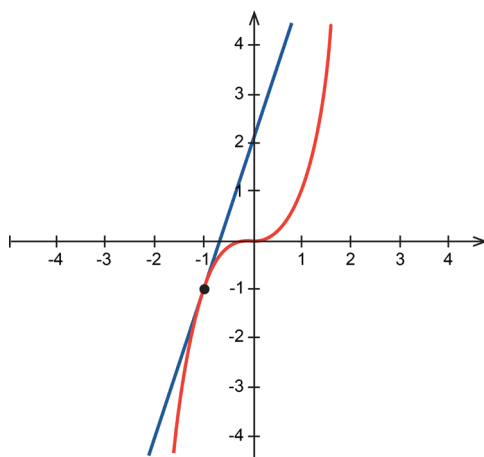


Figura 11.4: A derivada de uma função num determinado ponto de seu domínio é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função que passa por esse ponto.

Tendo em vista 11.6, podemos, de modo equivalente, escrever:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad 11.7$$

pois $\Delta x \rightarrow 0$ equivale a $x \rightarrow x_0$, sendo $x = x_0 + \Delta x$.

Se a função $f(x)$ admite a derivada em um ponto, dizemos que ela é derivável nesse ponto.

Se, por outro lado, a função $f(x)$ admite a derivada em todos os pontos de um intervalo, dizemos que a função é derivável nesse intervalo. Observamos que estamos sempre nos referindo a um **intervalo aberto**. Isso se impõe uma vez que, numa extremidade de um intervalo fechado, não temos como calcular o limite, o qual pressupõe que o acréscimo Δx tenda a zero pelos dois lados: tanto pela esquerda quanto pela direita.

Pode-se obter, a partir da função derivada, o incremento da função quando o incremento na variável x for infinitesimal. De 11.7, resulta que:

$$df = g(x)dx \quad 11.8$$

onde $g(x)$, de 11.1, é a função derivada da função $f(x)$.

11.5 Primeiros exemplos

11.5.1 Função polinomial geral de grau 1

Escrevemos a função polinomial de primeiro grau mais geral possível sob a forma:

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad 11.9$$

onde a_1 e a_0 são dois parâmetros constantes que caracterizam a variável dependente.

A partir de 11.9, temos

$$f(x + \Delta x) = a_1x + a_1\Delta x + a_0 \quad 11.10$$

e, portanto, sua taxa de variação média é constante:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a_1 \quad 11.11$$

Tomando agora o limite da expressão acima, limite definido em 11.6, conclui-se que:

$$\frac{df}{dx} = a_1 \quad 11.12$$

Assim, a função derivada é, nesse caso, uma função constante.

A derivada da função constante, por outro lado, é obtida de 11.9, adotando-se o valor de $a_1 = 0$. Como se pode verificar facilmente, a função constante tem derivada nula.

11.5.2 Função polinomial geral de grau 2

Escrevemos a função polinomial de segundo grau na forma mais geral possível:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad 11.13$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são coeficientes que caracterizam a dependência da variável dependente. De 11.10 temos:

$$f(x + \Delta x) = a_2(x + \Delta x)^2 + a_1(x + \Delta x) + a_0 \quad 11.14$$

Consequentemente, de 11.5, verificamos que, para um valor do comprimento do intervalo Δx **arbitrário**, obtemos o seguinte valor para o quociente entre as variações:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a_2\Delta x + 2a_2x + a_1 \quad 11.15$$

Resulta daí que a derivada de função quadrática é dada por:

$$\frac{df}{dx} = 2a_2x + a_1 \quad 11.16$$

11.5.3 Função polinomial de grau n

Consideremos agora o caso de um polinômio de grau n da forma

$$P_n(x) = a_n x^n \quad 11.17$$

Para determinar a sua derivada, fazemos uso do Teorema Binomial de Newton, obtendo:

$$P_n(x + \Delta x) = a_n (x + \Delta x)^n = a_n (x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^n) \quad 11.18$$

Assim, utilizando a expressão 11.18 e a definição de derivada, obtemos:

$$\frac{dP_n}{dx}(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \quad 11.19$$

Para um polinômio mais geral do que aquele da equação 11.17:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad 11.20$$

podemos verificar que sua derivada é dada como uma soma das derivadas de cada um dos termos. Resulta assim, de 11.19, que a sua derivada será dada pela expressão:

$$\frac{dP(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \quad 11.21$$

Mais adiante, veremos que é sempre verdade que a derivada da soma de duas funções deriváveis num ponto é igual à soma de suas derivadas. A demonstração baseia-se no seguinte fato: uma vez que as funções são deriváveis, os dois limites existem e são finitos e o limite da soma, como vimos no texto anterior em que tratamos sobre **Limites**, nesse caso, é igual à soma dos limites.

11.5.4 Vazão

Numa piscina de profundidade constante, com área da superfície igual a A e a água nela contida atingindo uma altura h , o volume de água da piscina depende apenas de h . Nesse caso, a variável é a altura. Temos assim, para o volume de água contida na piscina:

$$V(h) = Ah \quad 11.22$$

Quer seja por causa da evaporação da água, ou devido a defeitos de fabricação ou à abertura de um ralo para esvaziamento, o fato é que a altura da água é função do tempo. Assim, a variável mais importante, nesse caso, é o tempo. Escrevemos o volume como função do tempo sob a forma:

$$V(t) = Ah(t) \quad 11.23$$

Esse exemplo ilustra o fato de que, muitas vezes, uma função pode ser representada como função de outra função. No caso de abirmos o ralo da piscina, a taxa com que ela se esvazia tem o nome de vazão e é definida como:

$$\frac{dV}{dt}(t) = A \frac{dh}{dt}(t) \quad 11.24$$

Também veremos adiante que é sempre verdade que a derivada do produto de uma constante por uma função derivável é igual ao produto dessa constante pela derivada da função. Tal fato se baseia, evidentemente, no cálculo de um limite e de suas propriedades.

11.6 Interpretação geométrica da derivada

Consideremos o gráfico de uma função arbitrária $f(x)$. Admitamos que ele tenha a forma daquele apresentado na **Figura 11.3**. Consideremos dois pontos sobre essa curva. O primeiro deles é um ponto P_1 associado a um valor arbitrário x , isto é $P_1 = (x, f(x))$. O segundo ponto, P_2 , é associado ao valor $x + \Delta x$, isto é, $P_2 = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Podemos fazer passar por esses dois pontos P_1 e P_2 uma – e apenas uma – reta denominada secante ao gráfico de f . O ângulo de inclinação da reta secante em relação ao eixo x é o ângulo θ_s .

Como se pode ver na **Figura 11.3**, a taxa de variação média da função no intervalo $[x, x + \Delta x]$ pode ser interpretada geometricamente como a tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da secante, isto é, o coeficiente angular da mesma:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \theta_s(x) \quad 11.25$$

A reta que tangencia a curva num determinado ponto é a reta tangente a ela por esse ponto.

A inclinação da reta tangente pode ser obtida fazendo o limite da inclinação da secante quando consideramos intervalos de comprimento Δx cada vez menor.

Pode-se notar que, à medida que o comprimento Δx tende a zero, a reta secante tende à reta tangente e, assim, o coeficiente angular da reta secante tende, no limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, ao coeficiente angular da reta tangente.

Portanto, a derivada da função $f(x)$ no ponto x pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$:

$$\frac{df}{dx}(x) = \operatorname{tg} \theta_t(x) \quad 11.26$$

onde θ_t é o ângulo de inclinação da reta tangente.

Observe que, de acordo com o lado direito da igualdade acima, é de se esperar que a inclinação da tangente à curva dependa de x , o que, de fato, normalmente ocorre.

11.7 Derivadas de ordem superior

A derivada de uma função como definida anteriormente, é a derivada de primeira ordem. Segundo 11.1, indicamos essa primeira derivada por:

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$$

Ao repetirmos o processo de derivação sucessivas vezes, obtemos as derivadas de ordem superior. Por exemplo, podemos definir a função derivada da função derivada, ou seja, definimos a função derivada de segunda ordem a partir do processo limite:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{dg(x)}{dx} \quad 11.27$$

onde $g(x)$ é a derivada de primeira ordem da função $f(x)$.

Analogamente, derivando uma função n vezes, obtemos a derivada de ordem n da mesma.

Utilizamos a notação:

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x) \right] \quad 11.28$$



Exemplos

- EXEMPLO 1:

Se a função quadrática for uma função do tempo $f = f(t)$ dada pela expressão:

$$f(t) = -5t^2 + 10t + 2 \quad 11.29$$

a função derivada primeira é a função afim dada por:

$$\frac{df(t)}{dt} = -10t + 10 \quad 11.30$$

- EXEMPLO 2:

Lembrando que, se

$$P_n(x) = a_n x^n,$$

de 11.19,

$$\frac{dP_n}{dx}(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

para o polinômio dado por

$$P_6(x) = 10x^6 \quad 11.31$$

temos como função derivada a função $P_5(x)$, cuja expressão é:

$$P_5(x) = 10 \cdot 6x^5 = 60x^5 \quad 11.32$$

• EXEMPLO 3:

Considerando o caso de um polinômio da forma:

$$P_5(x) = 5x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 3x^2 + 2x - 8 \quad 11.33$$

temos as derivadas de cada um dos termos:

$$\begin{aligned} \frac{d(5x^5)}{dx} &= 5 \cdot 5x^4 = 25x^4 \\ \frac{d(-2x^4)}{dx} &= -2 \cdot 4x^3 = -8x^3 \\ \frac{d(10x^3)}{dx} &= 10 \cdot 3x^2 = 30x^2 \\ \frac{d(-3x^2)}{dx} &= -3 \cdot 2x = -6x \\ \frac{d(2x)}{dx} &= 2 \\ \frac{d(-8)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad 11.34$$

e, portanto,

$$\frac{dP_5(x)}{dx} = 25x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x + 2 \quad 11.35$$

• EXEMPLO 4:

No caso de uma função polinomial de grau 2, podemos escrever para a sua derivada segunda:

$$\frac{d^2}{dx^2}(ax^2 + bx + c) = \frac{d}{dx}(2ax + b) = 2a \quad 11.36$$

Da expressão acima resulta que a derivada segunda de um polinômio de segundo grau é uma constante. No caso do polinômio 11.29, a derivada segunda é igual a -10 , ou seja,

$$\frac{d^2}{dt^2}(-5t^2 + 10t + 2) = \frac{d}{dt}(-10t + 10) = -10 \quad 11.37$$

• EXEMPLO 5:

Para um polinômio da forma dada pela expressão 11.17, $P_n(x) = a_n x^n$, podemos escrever para a sua derivada segunda:

$$\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} = a_n \frac{d^2 x^n}{dx^2} = a_n \cdot \frac{d(n \cdot x^{n-1})}{dx} = n a_n \frac{dx^{n-1}}{dx} = n(n-1) a_n x^{n-2} \quad 11.38$$

Podemos escrever a derivada terceira do polinômio 11.17, a partir de 11.38,

$$\frac{d^3 P_n(x)}{dx^3} = n(n-1) a_n \frac{dx^{n-2}}{dx} = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \quad 11.39$$

Assim, para o polinômio $P_6(x)$ dado pela expressão 11.31, podemos escrever a seguinte sucessão de derivadas:

$$\begin{aligned} P_6(x) &= 10x^6 \\ \frac{dP_6(x)}{dx} &= 60x^5 \\ \frac{d^2 P_6(x)}{dx^2} &= 300x^4 \\ \frac{d^3 P_6(x)}{dx^3} &= 1200x^3 \end{aligned} \quad 11.40$$

• EXEMPLO 6:

Para um polinômio da forma dada pela expressão 11.20,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a derivada segunda é obtida a partir da derivada primeira dada pela expressão 11.21, isto é,

$$\frac{dP(x)}{dx} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Assim, a derivada segunda de um polinômio geral de grau n é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} (n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1) \\ &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 a_2 \end{aligned} \quad 11.41$$

Consideremos o caso do polinômio dado pela expressão **11.33**. Sua derivada segunda é dada pela derivada da derivada do polinômio. Assim, a partir de **11.41**, obtemos:

$$\frac{d^2 P_5(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} (25x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x + 2) = 100x^3 - 24x^2 + 60x - 6 \quad 11.42$$

○○○○