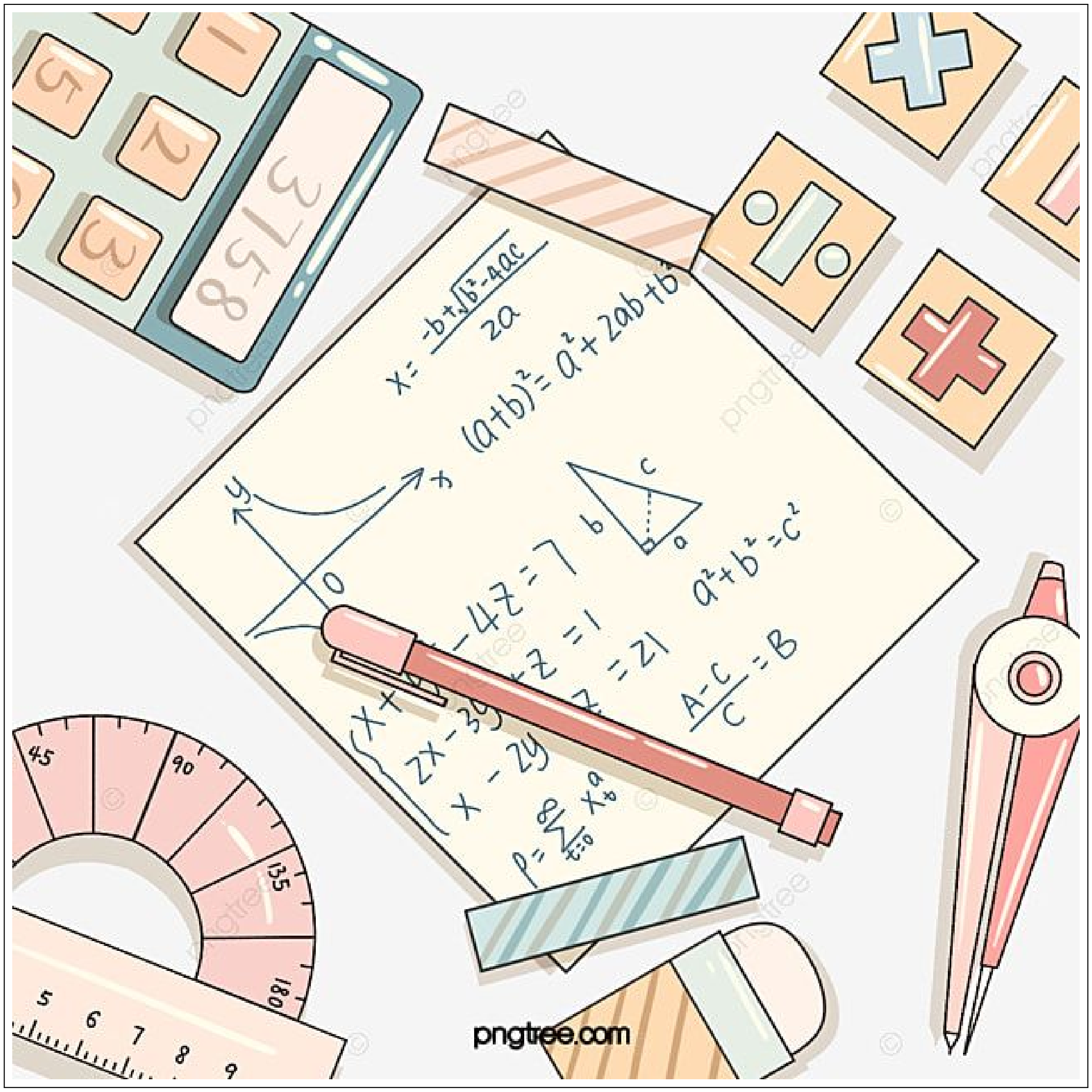


Matemática

Autor:
Vazquez, Leonardo David

Índice

1. Números naturales

Los números naturales son aquellos números exactos y positivos: 1, 2, 3, 4, 5... Y así sucesivamente. Hay varias propiedades para una de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división):

- Propiedad conmutativa (suma):

$$5 + 8 = 13$$
$$8 + 5 = 13$$

- Propiedad conmutativa (multiplicación):

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$3 \cdot 2 = 6$$

- Propiedad asociativa (suma):

$$1 + (4 + 7) = 1 + 11 = 12$$
$$(1 + 4) + 7 = 5 + 7 = 12$$

- Propiedad asociativa (multiplicación):

$$2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$$
$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$$

- Propiedad distributiva (suma):

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16$$
$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$$

- Propiedad distributiva (resta):

$$3 \cdot (8 - 3) = 3 \cdot 5 = 15$$
$$3 \cdot (8 - 3) = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 24 - 9 = 15$$

No te olvides de separar en términos: Separar en términos nos sirve para saber qué cuenta hacer primero sin cometer errores:

$$5 \cdot 3 + 4 = \overbrace{5 \cdot 3} + 4 = 15 + 4 = 19$$

Ejercicios:

1) $10 + 5 - 2 + 1$

2) $15 \cdot 0 + 10 \cdot 3 - 25/5$

3) $(27 + 5) \cdot 6 - 8 \cdot (4 + 3 \cdot 2)$

2. Ecuaciones - Parte I

La manera de resolver una ecuación es despejar. Despejar significa dejar a la incógnita (x o y o cualquier letra) de un lado y pasar todo lo demás para el otro lado.

Resolvamos esta ecuación:

$$2 \cdot x + 5 = 13$$

Acá tenemos que pasar primero el 5 que está sumando. Lo pasamos para el otro lado pero le cambiamos el signo:

$$2 \cdot x = 13 - 5$$

Luego tenemos que pasar el 2 que está multiplicando a la incógnita x. Para eso lo pasamos hacia el otro lado dividiendo:

$$x = (13 - 5)/2$$

De esta forma, resolvemos primero la operación entre paréntesis:

$$x = 8/2$$

Por lo tanto nuestra incógnita está despejada y vale $x = 4$.

Las reglas básicas para pasar de términos son:

- Lo que está sumando pasa restando:

$$x + 2 = 5 \longrightarrow x = 5 - 2$$

- Lo que está restando pasa sumando:

$$x - 3 = 9 \longrightarrow x = 9 + 3$$

- Lo que está multiplicando pasa dividiendo:

$$3 \cdot x = 4 \longrightarrow x = 4/3$$

- Lo que está dividiendo pasa multiplicando:

$$x/2 = 5 \longrightarrow x = 5 \cdot 2$$

Ejercicios:

1) $15 = x + 4$

2) $27 + x = 2$

3) $5 \cdot x + 1 = 15$

4) $52 - 12 = x - 19 + 20$

5) $2 \cdot x + 5 \cdot (25 - 20) = 7 \cdot 7 - 10$

6) $x \cdot 6 - 2 = -2$

7) $2 \cdot (x + 2) = -4$

8) $x + 4 \cdot (x + 3) = 0$

9) $3 \cdot (2 \cdot x + 1) + x = 5 \cdot x$

3. Potencia y Raíz

Las potencias de un número son operaciones que hacen multiplicar dicho número por sí mismo. Dicho número de multiplicaciones se le llama *Potencia* o *exponente*. El número a multiplicar se le dice *base*. Veamos un ejemplo:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

El cual es 5 (base) *al cuadrado* (exponente 2). Si elevamos 5 *a la potencia de* 3, es decir (5^3), se le dice *al cubo*. Si elevamos 5 *a la potencia de* 4, el cual es (5^4), se le dice *a la cuarta* y así sucesivamente.

Veamos algunas de las propiedades básicas:

- Potencia neutra:
$$a^1 = a \longrightarrow 2^1 = 2$$
- Potencia de exponente nulo es una unidad:
$$a^0 = 1 \longrightarrow 2^0 = 1$$
- Producto de igual base se suman exponentes:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \longrightarrow 2^2 \cdot 2^1 = 2^3$$
- Exponente negativa implica división:
$$a^{-n} = 1/a^n \longrightarrow 2^{-1} = 1/2$$
- División de potencias de igual base es resta de exponentes:
$$a^m/a^n = a^{m-n} \longrightarrow 2^3/2^1 = 2^2$$
- Potencia de potencia se multiplican exponentes:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \longrightarrow (2^2)^2 = 2^4$$

- Potencia de distintas bases:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \longrightarrow (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 2^3$$

- Potencia de división:

$$(a/b)^n = a^n/b^n \longrightarrow (2/3)^2 = 2^2/2^3$$

¡Son muchas propiedades! Tranquilo/a, puede que no las utilices todas.

Por otro lado, la Raíz es la operación inversa a la Potencia. La raíz de un número a es un número b que multiplicado tantas veces por sí mismo da el número a. Veamos un ejemplo de la raíz cuadrada (El número se denomina índice y el número dentro de la raíz se llama radicando):

$$\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6 \longrightarrow 6 \cdot 6 = 36$$

Y de la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \longrightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Como era de anticiparse, existe una relación entre la raíz de tal número con la potencia:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \longrightarrow \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2$$

Veamos algunas de las propiedades básicas:

- Raíz de producto:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \longrightarrow \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

- Raíz de división:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \longrightarrow \sqrt{2 : 3} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

- Como caso especial:

$$\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a}^2 = a$$

Ejercicios:

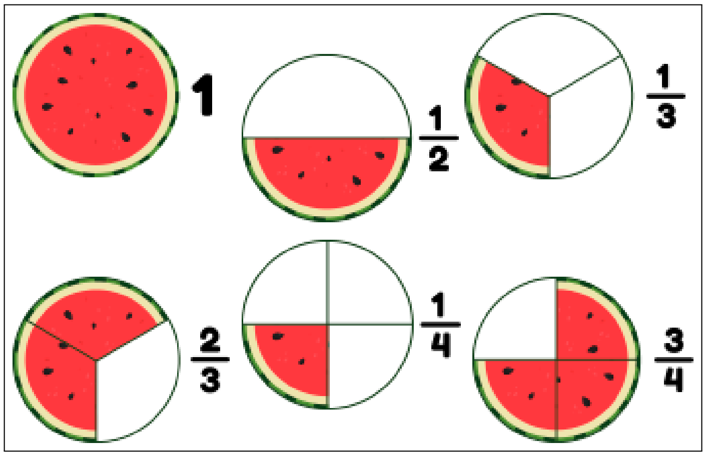
1) 8^2
2) 3^3
3) $\sqrt{9}$
4) $\sqrt{100}$

4. Fracciones

¿Qué es una fracción? Una fracción es una "parte" de un entero. Por ejemplo, si tengo la mitad de un chocolate, esa mitad es una fracción. Las fracciones se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{3}{4} \longrightarrow \frac{Numerador}{Denominador}$$

El Numerador es la cantidad de partes "que tengo" mientras que el Denominador es la cantidad de partes en la cual está partido el entero. En la figura siguiente se ejemplifica visualmente:



Sin entrar en complicaciones, veamos simplemente las operaciones básicas de las fracciones:

- Suma o resta con igual denominador:

$$\frac{a}{B} + \frac{b}{B} = \frac{a+b}{B} \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

- Suma o resta con distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

- Producto de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- División de fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$$

Ejercicios:

1) $\frac{9}{3} - \frac{5}{6}$

2) $\frac{2}{5} \cdot \frac{12}{1}$

3) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{1} : \frac{2}{11}$

5. Números decimales

Una expresión decimal es un número cuya parte ”no entera”se expresa mediante el uso de la coma:

$$1,489$$

Existen 3 tipos de números decimales:

- Decimales finitos: $2,53$
- Periódicos puros: $1,\widehat{43} = 1,43434343...$
- Periódicos Mixtos: $0,4216 = 0,42161616...$

Veamos la forma de escribir un número decimal como una fracción..

- Caso 1: Decimales no periódicos. Se escribe el número completo sin coma en el numerador y luego en el denominador un 1 seguido de tantos ceros como decimales hayan:

$$5,47 = \frac{547}{100}$$

- Caso 2: Decimales periódicos puros. En el numerador se resta el número completo sin coma menos la parte entera. En el denominador se escriben tantos 9 como decimales hayan.

$$5,\widehat{47} = \frac{547 - 5}{99} = \frac{542}{99}$$

- Caso 3: Decimales periódicos Mixtos. En el numerador se resta el número completo sin coma menos los números que no se repiten sin coma. En el denominador se escriben tantos 9 como decimales hayan seguido de tantos 0 como dígitos no periódicos hayan.

$$5,62\widehat{7} = \frac{5627 - 562}{900} = \frac{5065}{900}$$

Ejercicios: Expresar como fracción

1) $0,04$
2) $0,\widehat{44}$
3) $99,9\widehat{999}$

6. Simplificación y Racionalización

Simplificar implica lograr que una expresión matemática esté compuesta por un único término lo más sencillo posible. Veamos un ejemplo:

$$\frac{0.\widehat{2}+1,1\widehat{1}}{0,\widehat{6}}-1=?$$

Desde el capitulo anterior, sabemos que a los números decimales podemos expresarlos como números fraccionarios:

$$\frac{\frac{2}{9}+\frac{100}{90}}{\frac{6}{9}}-1=?$$

Lo próximo a realizar es una suma de fracciones con distinto denominador:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{6}{9}}-1=?$$

División de fracciones y luego una simple resta:

$$2-1=1$$

A pesar de que el proceso sea largo, lo importante aquí a resaltar es la aplicación de los conceptos y propiedades vistas anteriormente

Por otro lado, racionalizar implica modificar una expresión fraccionaria con raíz en el denominador a una expresión fraccionaria sin raíz en el denominador. El truco es bastante sencillo: Hay que observar el índice de la raíz y la potencia del radicando:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^b}}$$

Luego se multiplica por un entero cuyas raíces en numerador y denominador son iguales y posee igual índice pero distinta potencia al que se desea extraer o racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^b}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-b}}}{\sqrt[n]{a^{n-b}}}$$

Haciendo uso de alguna de las propiedades de la potencia y raíz:

$$\sqrt[n]{a^{n-b}}=a^{(n-b)/n}$$

$$\sqrt[n]{a^b}=a^{b/n}$$

De esta forma:

$$\frac{1\cdot\sqrt[n]{a^{n-b}}}{a^{b/n}\cdot a^{(n-b)/n}}$$

Pero exponentes de potencias con igual base se suman por lo que:

$$a^{b/n} \cdot a^{(n-b)/n} = a$$

Por lo que la formula para racionalizar es simplemente:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^b}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-b}}}{a}$$

Veamos un ejemplo sencillo:

$$\frac{4}{\sqrt[5]{7^3}}$$

En este caso solo basta con mirar nuestra formula y darse cuenta que: $n = 5$, $a = 7$ y $b = 3$ por lo que $n - b = 2$. De esta forma:

$$\frac{4}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{7}$$

En muchos casos, puede que te encuentres con expresiones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

La manera de racionalizar esto es multiplicando por un entero que posea en el numerador y denominador el conjugado del denominador de la expresión anterior, es decir, cambiar el signo:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Realizando la multiplicación entre denominadores se obtiene fácilmente:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Observación: En caso de que en el denominador no sean ambos términos con raíz necesariamente, el procedimiento consiste en multiplicar por un entero conjugado.

Veamos un ejemplo sencillo:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Multiplicamos por el entero conjugado:

$$= \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3})}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1}$$

Ejercicios: Simplificar

1) $7 \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{9}$
2) $\frac{3}{5} \cdot \sqrt{7} - \frac{3}{4}$
3) $3 \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27}$
4) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{30}$

Ejercicios: Resolver

1) $(0,1)^{-1} + \frac{1}{2} : \frac{-3}{2} - \sqrt{1/4}$
2) $0,3 \cdot \frac{-1}{2} - (2/5)^{-2}$
3) $(\frac{3}{2} - \frac{5}{3})^{-1} + \sqrt{0,\widehat{1}}$

Ejercicios: Racionalizar

1) $13 : (20 - \sqrt{15})$
2) $-17 : \sqrt{15}$
3) $8 : \sqrt[10]{2^4}$

7. Ecuaciones - Parte II

Dado que hemos visto hasta aquí una amplia variedad de propiedades, intentemos resolver brevemente una ecuación un tanto difícil:

$$\frac{2 - 3 \cdot x}{4} = (-1 + 4)$$

Resolvemos la resta de la derecha y luego lo que esta dividiendo a la izquierda pasa multiplicando hacia la derecha:

$$2 - 3 \cdot x = 3 \cdot 4$$

$$2 - 3 \cdot x = 12$$

El 2 que suma pasa restando:

$$-3 \cdot x = 12 - 2$$

$$-3 \cdot x = 10$$

Finalmente pasamos dividiendo el -3:

$$x = \frac{-10}{3}$$

Veamos otro ejemplo más difícil:

$$(x+5)^2 = 4$$

La potencia la pasamos como raíz cuadrada:

$$x+5 = \sqrt{4}$$

La raíz cuadrada de 4 es 2, de esta forma despejamos fácilmente la incógnita:

$$x = 2 - 5 = -3$$

Ejercicios: Despejar x

1) $1/4 \cdot x - 1/2 \cdot 3/5 = 2/3$

2) $(3/2 \cdot x - 5)^2 = 4/9$

3) $3/2 \cdot (x-3) + 0,5 = 4/5 - 1/3 \cdot x$

8. Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones de dos incógnitas consiste en dos ecuaciones. Lo que debemos hacer es despejar una de ellas en función de la otra de una de las dos ecuaciones. Luego, expresar en la segunda ecuación en función de una sola incógnita para luego hallar la segunda. ¡Qué trabalenguas! Veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2 \cdot x + y = 4 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo primero analíticamente y luego gráficamente. De la primer ecuación vamos a despejar x:

$$x = 3 - y$$

Luego, vamos a la segunda ecuación y donde esté x colocamos$(3+y)$

$$2 \cdot (3-y) + y = 4$$

Una vez que tenemos la ecuación de una sola incógnita, despejamos la y:

$$- \cdot y = 4 - 6 = -2$$

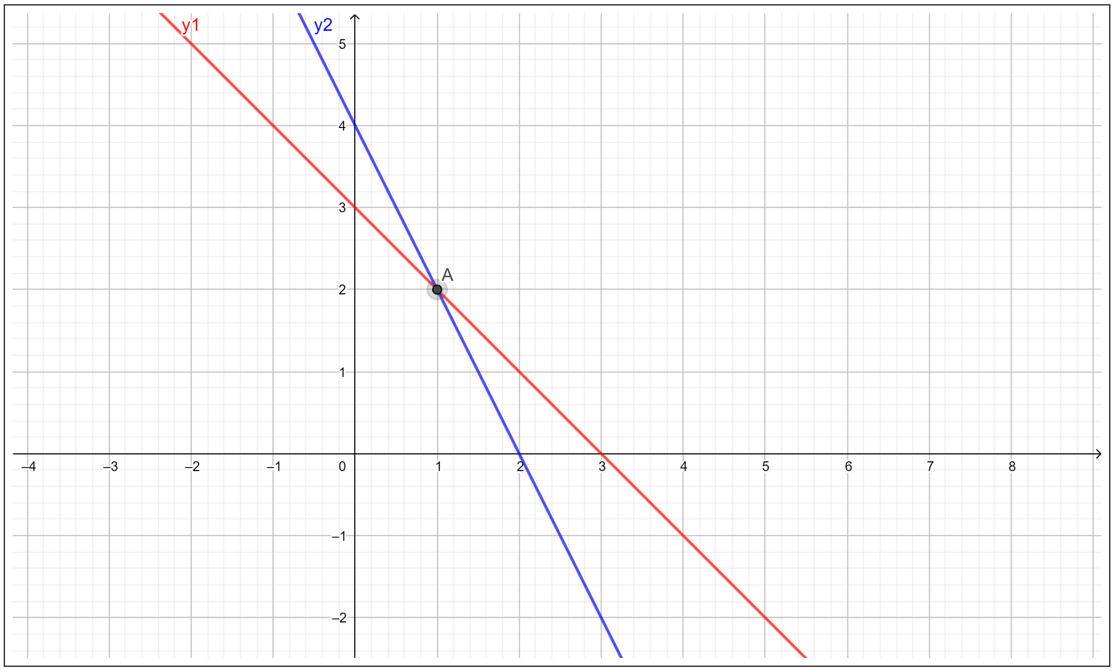
Por lo tanto $y = 2$ y $x = 1$.

Para resolver el sistema de ecuaciones planteado de manera gráfica primero vamos a despejar y en función de x en ambas ecuaciones:

$$y = 3 - x \tag{1}$$

$$y = 4 - 2 \cdot x \tag{2}$$

Luego, con ayuda de un gráfico y/x y una tabla de valores, graficamos ambas rectas lineales, donde $y = 3 - x$ corresponde a la recta y_1 roja y $y = 4 - 2 \cdot x$ corresponde a la recta y_2 azul:



En la figura anterior observamos que el punto donde se encuentran ambas rectas es A y se da para $x = 1$ e $y = 2$. En clase trabajaremos más sobre este método de resolución.

Ejercicios: Encontrar x e y

1)
$$\begin{cases} 4 \cdot x + y = -5 \\ 2 \cdot x + y = 4 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} -5 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \\ 3 \cdot x - 4 \cdot y = 5 \end{cases}$$

Examen Integrador

1) Simplificar:

   a) $5\sqrt{63} + 3\sqrt{28}$

   b) $\frac{3}{2}\sqrt{11} - 5 \cdot \sqrt{11}$

2) Resolver:

   a) $(\frac{8}{2})^{-1} + \frac{2}{3} : \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{9}{2}$

   b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3} + 0,\widehat{2}) - 0,1$

3) Calcular:

$$-\frac{3}{4} \cdot (x - 2) + \frac{3}{2} = \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \cdot x$$

4) Encontrar x e y tanto analíticamente como gráficamente:

$$\begin{cases} 3 \cdot x + y = 0,75 \\ 0,5 \cdot x - 2 \cdot y = 4 \end{cases}$$