

Leonardo Venancio Correia

**O Sistema de Posicionamento Global (GPS) como  
aplicação prática da teoria da Relatividade Geral**

São Luís - MA

2017

Leonardo Venancio Correia

## **O Sistema de Posicionamento Global (GPS) como aplicação prática da teoria da Relatividade Geral**

Trabalho de Conclusão e Integralização Curricular II apresentado ao Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da UFMA como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Maranhão.

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Felipe Peixoto Poulis

São Luís  
2017

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

**O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS) COMO APLICAÇÃO  
PRÁTICA DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL**

LEONARDO VENANCIO CORREIA

Trabalho de Conclusão e Integralização Curricular II  
apresentado ao Bacharelado Interdisciplinar em Ciência  
e Tecnologia da UFMA como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia  
da Universidade Federal do Maranhão.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Felipe Peixoto Poulis (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Karl Marx Silva Garcez  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Paulo Rogério Dias Pinheiro  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos (suplente)  
Universidade Federal do Maranhão

Dedico este trabalho a minha mãe, Telma Venancio, por toda a inspiração dada a minha vida e por toda a força, mesmo não estando mais aqui, ela tornou isso possível.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeira e demasiadamente a todos meus professores, principalmente meu orientador, Felipe Peixoto Poulis, por ser uma fonte de inspiração e dedicação à ciência. Sem ele essa monografia não seria possível.

Os agradecimentos principais são direcionados à minha família, principalmente meu pai, Reginaldo, que sempre me instigou desafios. Minha avó, Josefa, por em momentos de grande necessidade me auxiliar como uma mãe, assim como minha tia, Marinalva Correia, que sempre me apoiaram e me deram força. Meu tio Isisnaldo, uma das pessoas que mais me incentivou a estudar. E em especial à minha irmã, Mariana Venancio por estar sempre ao meu lado dando apoio, compreensão e carinho.

Gostaria de agradecer também aos meus amigos da época do grupo de estudos: Renata Araújo, Ruy Castro, Amanda Laryssa, Amanda Drumont, Amanda Cristina, Rafael Ribeiro, Fabiola Frazão, Jorge Aguiar e todos os outros, tal grupo foi crucial para tudo hoje. Gostaria de agradecer também aos amigos de curso por todas as ajudas e orientações, em especial Leandro Massetti, João Higo Nunes, Thalles dos Anjos, Luan Almeida, Leandro Almeida e Eddy Candido. E por último, mas não menos importantes, aos amigos da vida: Ícaro Agostino, Gabriel Bruno, Plínio Jr e Adriano Talles por momentos inesquecíveis e pelas conversas mais empolgantes da minha vida.

*“A ciência é a aproximação progressiva do  
homem com o mundo real. ” Max Planck*

# Resumo

Este trabalho aborda o estudo de alguns dos aspectos relacionados à determinação de uma dada posição na superfície terrestre por meio do Sistema de Posicionamento Global (GPS, *sigla em inglês*), desde sua ideia básica até os conceitos e teorias modernas, como a Teoria da Relatividade Geral, ponto central da discussão, que não só conferem grande precisão ao sistema de posicionamento global como o tornam possível. Observamos que, devido a fenômenos relativísticos, há um adiantamento do tempo de, aproximadamente,  $3,8315 \cdot 10^{-5}$  segundos por dia em relógios contidos nos satélites de GPS em relação a relógios na superfície da Terra. Salientamos, portanto, que o tempo marcado pelos relógios nos satélites deve ser corrigido levando-se em conta a Relatividade Geral. Por fim, fazemos a implementação de um algoritmo de um protótipo de um GPS em três dimensões, que faz a comparação de resultados obtidos por um GPS com e sem as correções relativísticas.

**Palavras chave:** GPS, Relatividade Geral, Posicionamento Global.

# Abstract

This work covers the study of some aspects related to the determination of a given position on Earth's surface based on the Global Positioning System (GPS), from its basic idea to modern concepts and theories, such as the General Relativity Theory, the focus of the discussion, which not only give great precision to global positioning system but also makes it possible. We note that, due to relativistic phenomena, there is an advance of time of approximately  $3,8315 \cdot 10^{-5}$  seconds per day in clocks on GPS satellites in relation to clocks on the surface of Earth. We highlight, thus, that the time set by the clocks in satellites must be corrected considering General Relativity. We end up with the implementation of a GPS algorithm's prototype in three dimensions, which compares the results obtained by a GPS with and without the relativistic corrections.

**Key words:** GPS, General Relativity, Global Positioning.



# Lista de Figuras

Figura 1: Celular com receptor de GPS. (Fonte: blog valejet) .....	11
Figura 2: Constelação de Satélites do GPS. (Fonte: NASA) .....	12
Figura 3: Interseção de três superfícies esféricas.....	14
Figura 4: Interseção de uma reta e uma superfície cônica. ....	16
Figura 5: Albert Einstein. (Fonte: Pinterest) .....	20
Figura 6: Representação de um relógio de luz.....	22
Figura 7: Interação gravitacional entre duas partículas. ....	23
Figura 8: Max Planck. (Fonte: explicatorium).....	25
Figura 9: Estação de monitoramento de GPS. ....	28
Figura 10: Código-fonte das expressões X, Y e Z. ....	36
Figura 11: Código-fonte referente aos dados utilizados no algoritmo.....	37
Figura 12: Código-fonte referente às distâncias sem correção relativística. ....	37
Figura 13: Código-fonte referente às distâncias com correção relativística. ....	38
Figura 14: Código-fonte referente às coordenadas do satélite 1.....	38
Figura 15: Código-fonte referente ao teste de dependência linear. ....	38
Figura 16: Código-fonte de estrutura condicional de Linearidade. ....	39
Figura 17: Referente a saída dado pelo algoritmo em um dado caso. ....	40

# Sumário

<b>Introdução .....</b>	<b>10</b>
<b>1 Fundamentação Teórica .....</b>	<b>12</b>
1.1 Ideia Básica .....	12
1.2 Corrigindo o tempo.....	15
1.3 Outras correções.....	17
<b>2 Relatividade .....</b>	<b>19</b>
2.1 Teoria da Relatividade Restrita .....	21
2.2 Gravidade Newtoniana.....	23
2.3 Teoria da Relatividade Geral.....	24
<b>3 GPS e Relatividade .....</b>	<b>28</b>
3.1 Cálculo da correção relativística.....	29
<b>Conclusão.....</b>	<b>33</b>
<b>Apêndice A: programando um protótipo de GPS.....</b>	<b>34</b>
<b>Referências.....</b>	<b>41</b>

# Introdução

Com o desenvolvimento do conhecimento científico, houve também o desenvolvimento da tecnologia com utilização de tais conhecimentos. O Sistema de Posicionamento Global (GPS, da sigla em inglês para *Global Positioning System*) não foge a essa regra.

Ele foi criado para fins militares pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos [1], órgão que coordena e supervisiona todas as unidades do governo ligadas à segurança nacional e às forças armadas.

O sistema de GPS foi criado a partir de outro projeto, o NAVSTAR que disponibilizaria várias informações geográficas, como localização, terreno e clima, por exemplo, de qualquer superfície terrestre. Esse projeto foi iniciado em 1960 e só na década de 90 tal projeto tornou-se totalmente funcional, posteriormente tornando-se conhecido como GPS.

De maneira bem prática, utilizamos várias formas de tecnologia bastante complexas sem nos darmos conta. O Sistema de Posicionamento Global (GPS) está entre os que mais congregam as diferentes áreas do conhecimento moderno, em particular, das exatas. O GPS é considerado, atualmente, a mais moderna e precisa forma de determinação da posição de um ponto na superfície terrestre.

Uma das genialidades tecnológicas a que temos acesso no século XXI mudou totalmente o modo como nos orientamos na superfície do planeta. O GPS surgiu modificando os tipos de guerras existentes, também modificando desde como nos locomovemos até o modo como projetamos os mapas de cidades gigantescas e de locais remotos.

O funcionamento de tal proeza científica se deu por uma conjunção de cinco campos distintos da ciência e engenharia modernas [2], que são: Engenharia aeroespacial, responsável pelo sistema de satélites orbitando o planeta; Engenharia de telecomunicações, que é responsável pelo sinal emitido pelos satélites; Mecânica Quântica, responsável por garantir a precisão dos relógios atômicos; Teoria da Relatividade Geral, usada nos cálculos dos tempos de propagação dos sinais enviados pelos satélites; e Engenharia da Computação, usada no desenvolvimento de aparelhos portáteis os quais vão receber o sinal dos satélites e fazer os devidos cálculos.

Atualmente, o uso do GPS está ao alcance dos diversos campos da atividade humana, podendo ser usado em celulares, carros e até mesmo em relógios de pulso, por exemplo. Por uma pequena quantia qualquer um consegue ter acesso a um receptor de GPS (Figura 1), capaz de indicar o local exato de qualquer ponto da superfície terrestre.



*Figura 1: Celular com receptor de GPS.  
(Fonte: blog valejet)*

Além das aplicações do cotidiano e militares, aviação e cartografia, existem também as aplicações muito importantes na área da ciência como, por exemplo, para analisar o momento da ocorrência de uma anomalia elétrica que se propaga através de uma rede de distribuição de energia; medição do movimento de falhas geológicas etc.

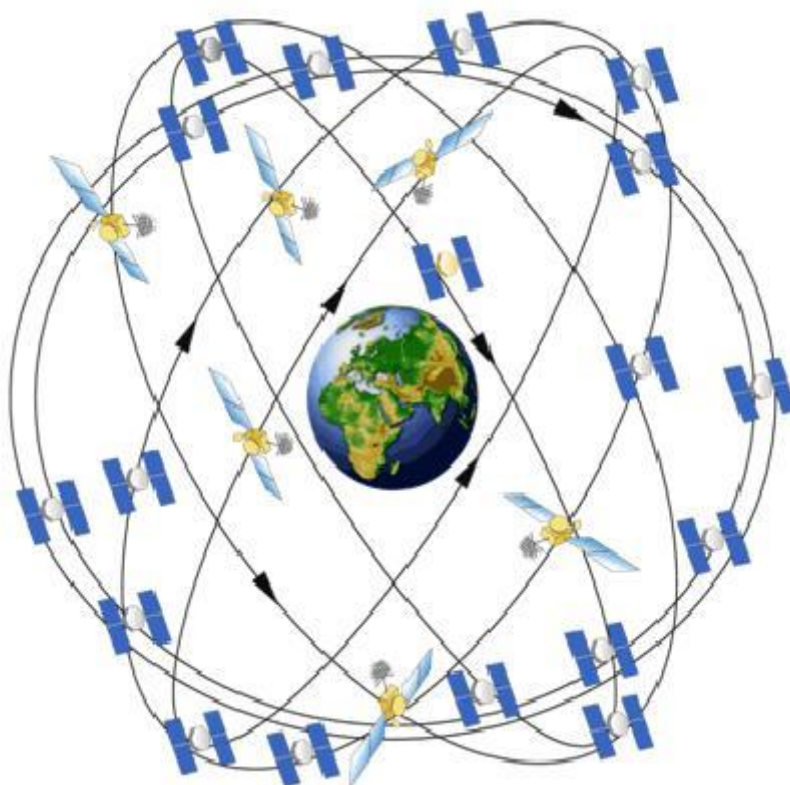
Nos capítulos seguintes, vamos explicar o funcionamento, as características e a ciência necessária para determinar a posição de cada receptor a partir dos sinais emitidos pelos satélites e quais correções são necessárias para que tal feito venha a se tornar possível no dia-a-dia.

Este trabalho será dividido basicamente em três partes, primeiramente iremos analisar os cálculos e correções do ponto de vista matemático, seguindo desde a ideia básica do GPS até algumas correções mais essenciais. Logo após, iremos adentrar às correções relacionadas à Física, provenientes das teorias das Relatividade Restrita e Geral, para, em seguida, executar, de maneira mais fina. Dando ênfase às devidas correções advindas da velocidade e gravidade, respectivamente.

# 1 Fundamentação Teórica

## 1.1 Ideia Básica

Na terminologia do GPS, existe uma “constelação” (frota) de satélites em órbita da Terra. Essa constelação é composta por 24 satélites e mais 4 sobressalentes, cada um conhecendo exatamente sua órbita e também equipado com um relógio atômico muito preciso (Figura 2).



*Figura 2: Constelação de Satélites do GPS.  
(Fonte: NASA)*

Esses satélites, periodicamente, enviam um sinal de rádio para os receptores que são responsáveis por indicar não só sua posição como também a hora exata que marca no relógio do dispositivo (celular, relógio de pulso etc.).

Suponhamos que um receptor, interessado em conhecer sua posição  $(x, y, z)$ , receba, no instante  $t$ , um sinal de um satélite que o informa o instante  $t_1$  em que ele foi emitido, bem como a posição  $(x_1, y_1, z_1)$  de onde o sinal partiu.

Denotando por  $c$  a velocidade da luz, ela terá percorrido a distância total  $c(t - t_1)$  até chegar ao receptor. Com essa única informação, que apenas diz a distância do receptor do ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ , ele apenas saberá que se localiza na superfície esférica de raio  $c(t - t_1)$  em torno daquele ponto. Isto é, devemos ter

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2}$$

Analogamente, um segundo satélite que se comunique com o mesmo receptor e cujo sinal tenha sido recebido no mesmo instante  $t$  irá acrescentar uma segunda equação relacionando os mesmos:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 .$$

A intersecção dessas duas superfícies esféricas gera uma circunferência (um caso especial é ignorado, sendo este aquele em que a intersecção das superfícies gera um ponto, isto é, as esferas são tangentes; essa situação nunca ocorre na prática). De fato, subtraindo as equações obtemos:

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = I_{12} ,$$

onde

$$I_{12} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2(t - t_1)^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + c^2(t - t_2)^2 .$$

Tal equação representa um plano que intersecta as duas superfícies em uma circunferência comum.

Finalmente, no instante  $t_3$  e do ponto  $(x_3, y_3, z_3)$ , um terceiro satélite envia um sinal recebido pelo o receptor no mesmo instante  $t$ , resultando na equação

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 .$$

ou, equivalentemente, no plano de equação

$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z = I_{13} ,$$

com

$$I_{13} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2(t - t_1)^2 - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 + c^2(t - t_3)^2 .$$

Através dessas equações nós chegamos à conclusão que as três superfícies esféricas, ao se intersectarem, geram dois pontos (Figura 3). As duas primeiras esferas, ao se intersectarem, geram uma circunferência. Esta, por sua vez, ao ser interceptada pela terceira esfera, gera dois pontos.

Para tal posicionamento ser calculado o receptor deve resolver o sistema de três equações quadráticas

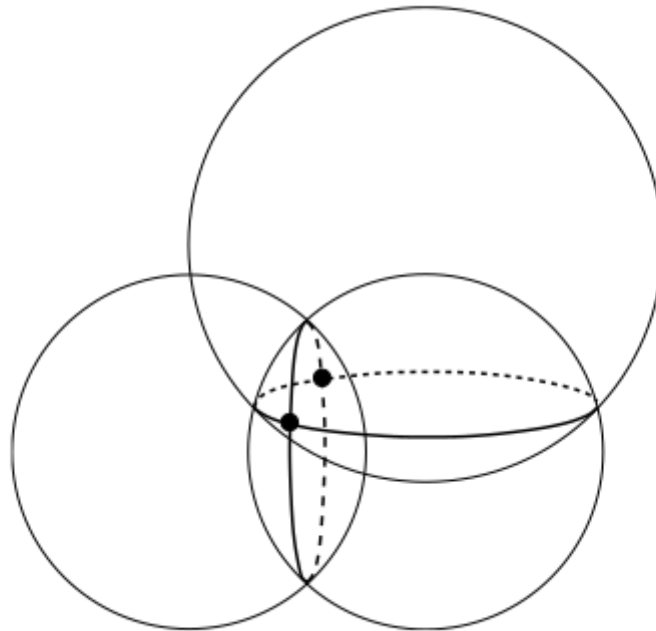
$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \end{cases}$$

que equivale ao sistema de uma equação quadrática e duas equações lineares

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = I_{12} \\ 2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z = I_{13} \end{cases}$$

fornecendo duas soluções possíveis para a posição.

Em geral, apenas uma destas soluções se encontra sobre a superfície da Terra, pois normalmente está sendo em uma posição equivocada, ou muito longe da Terra, ou movendo-se a uma velocidade improvável para um móvel na superfície do planeta. Assim, é fácil descartarmos um dos pontos [3]. Alternativamente, um quarto satélite pode auxiliar com seu envio de sinais para resolver essa ambiguidade.



*Figura 3: Interseção de três superfícies esféricas.*

## 1.2 Corrigindo o tempo

Alguns fatores podem interferir no resultado desejado quando colocamos em prática o processo idealizado descrito na seção anterior.

Como vimos acima, todo o processo é totalmente funcional, porém o receptor GPS presume que o relógio do receptor é suficientemente preciso, contudo os únicos relógios com precisão grande o suficiente para uso no GPS em si são os relógios atômicos, cujo preço é de alguns milhares de reais hoje em dia.

Como a distância do satélite é determinada pela medição do tempo que um sinal de rádio leva para chegar até nós, desde o satélite, a necessidade de tamanha precisão na medição do tempo torna-se crucial para diminuirmos o erro de localização.

Os sinais de rádio enviados viajam na velocidade da luz, cerca de 300.000 km/s ou 30 centímetros por nanosegundo ( $10^{-9}$  s). Assim, para que não haja um erro maior que 5 metros, por exemplo, a precisão na medição do intervalo de tempo deve ter uma precisão de aproximadamente 15 nanosegundos.

O artifício implementado para resolver tal problema é um dos elementos chaves do GPS, trazendo consigo uma grande vantagem para nós: é como se cada GPS fosse um relógio atômico. Para isso ocorrer basta que o receptor use os sinais dos *quatro* satélites, e resolva o correspondente sistema de equações

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t - t_4)^2 \end{cases}$$

para as variáveis  $(x, y, z, t)$ . Assim que tais operações são processadas obtemos a posição  $(x, y, z)$ , cuja precisão é determinada pelos relógios atômicos dos satélites.

O sistema de equações quadráticas acima corresponde a intersecção de quarto hipersuperfícies cônicas em  $\mathbb{R}^4$ , e pode ser substituído pelo sistema de uma equação quadrática e três equações lineares



$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z - 2c^2(t_1 - t_2)t = J_{12} \\ 2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z - 2c^2(t_1 - t_3)t = J_{13} \\ 2(x_1 - x_4)x + 2(y_1 - y_4)y + 2(z_1 - z_4)z - 2c^2(t_1 - t_4)t = J_{14} \end{cases}$$

onde  $J_{12}$  equivale a

$$J_{12} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + c^2 t_2^2$$

e  $J_{13}$  e  $J_{14}$  são análogos a  $J_{12}$ .

O sistema acima corresponde à intersecção de uma hipersuperfície cônica e três hiperplanos. Os hiperplanos intersectam-se em uma reta, que intersecta a hipersuperfície cônica em dois pontos (Figura 4). A partir da análise geométrica do sistema de equações quadráticas o receptor chega a duas possibilidades para definir o posicionamento em que somente uma estará contida na superfície da Terra. Se tal ambiguidade não for possível de ser resolvida, poderíamos nos utilizar de um quinto satélite para tal resolução.

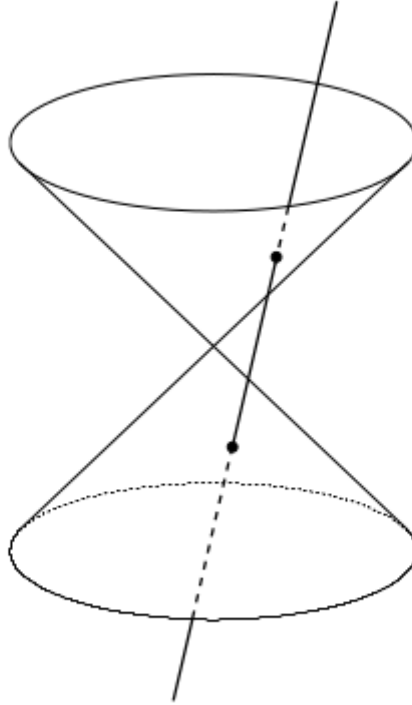


Figura 4: Intersecção de uma reta e uma superfície cônica.

Um último detalhe, porém, não menos importante, é o tratamento do instante em que os sinais dos satélites são recebidos pelo receptor. Logicamente, nem todos os sinais são recebidos no mesmo instante de tempo  $t$ .

Vamos supor que o sinal do primeiro satélite tenha chegado ao receptor no instante  $t'_1$  (instante marcado no relógio de quartzo do receptor, de baixa precisão), enquanto o instante correto seria  $t'_1 + \delta$ , em que  $\delta$  está associado a imprecisão do relógio do receptor e corresponde a diferença entre o instante correto e o medido. Assim, é notável que essa correção do tempo provoque uma mudança na equação do primeiro satélite, por exemplo, que passa a ser, na realidade,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t'_1 + \delta - t_1)^2 ,$$

tal mudança é aplicada no sistema de equações quadráticas que o receptor usa na determinação, mudando-as para

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t'_1 + \delta - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t'_2 + \delta - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t'_3 + \delta - t_3)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t'_4 + \delta - t_4)^2 \end{cases}$$

a ordem de resolução das variáveis é  $(x, y, z, \delta)$ . Apenas com o conhecimento do desvio,  $\delta$ , o receptor pode funcionar realmente com a precisão de um relógio atômico.

Mesmo com a variação, em relação ao tempo, do desvio do receptor em relação aos relógios atômicos dos satélites a precisão continua sendo idêntica à de um relógio atômico.

### 1.3 Outras correções

Outros tipos de correções que são necessários para o funcionamento correto do GPS estão relacionados ao fato de que os sinais dos satélites se propagam na atmosfera. Assim a velocidade desses sinais acaba não sendo, exatamente, a velocidade  $c$  da luz no vácuo.

Existe, ainda, um agravante relacionado a mudança de umidade das diversas camadas da atmosfera e a ionização da mesma, fazendo com que a velocidade varie no espaço e no tempo, *i.e.*, ao longo do percurso do sinal. Porém, para esse caso, existem diversos artifícios para aplicação das devidas correções, como, por exemplo, usar duas frequências distintas para o sinal do GPS que reagem de maneira diferente a estes fenômenos, permitindo, com isso, calcular o atraso gerado e fazer a devida correção.

Também devem haver correções para eliminação dos efeitos de reflexão dos sinais de GPS em edifícios próximo, por exemplo, que podem ser confundidos com sinais reais.

Mais um tipo de correção, extremamente importante, deve ser tomada devido a elevada precisão na medição dos intervalos de tempos. Essa correção nos leva diretamente a um exame da Teoria da Relatividade Geral formulada por Einstein<sup>1</sup>, que trata da própria natureza do espaço e do tempo.

---

<sup>1</sup> Albert Einstein (1879 – 1955), físico alemão, prémio Nobel de Física (1921).

## 2 Relatividade

Certos conceitos da Mecânica, como a velocidade, por exemplo, são relativos, ou seja, sua determinação depende de um referencial em relação ao qual ela será determinada. Como consequência, vão existir outras grandezas dependentes da velocidade que também serão relativas, como, por exemplo, a energia cinética. Quando falamos de grandezas como tempo, comprimento ou massa nós, intuitivamente, pensamo-las como grandezas absolutas, porém esses tipos de grandezas também podem ser relativos. Entretanto, a relatividade de tais grandezas somente ocorre quando as analisamos em velocidades muito altas, próximas à velocidade da luz no vácuo.

No fim do século XIX, ficou evidente que a velocidade da luz se tratava de algo especial, uma vez que diversos experimentos, tais como os de Michelson-Morley,<sup>2</sup> contribuíram para que tal assertiva seja de fato verdadeira. A partir disso, ficou evidente que era conveniente considerar que a sua velocidade sempre permaneceria constante, independentemente das velocidades dos referenciais.

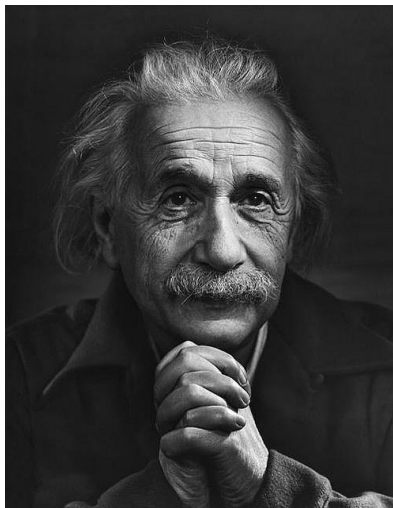
Para entender como isso é altamente contra intuitivo, vamos supor que existam dois carros, andando paralelamente na mesma direção. O primeiro com uma velocidade igual à da luz  $c$  (isso não é possível, serve apenas para ilustrar) e o segundo com metade da velocidade do primeiro, ou seja,  $c/2$ . O que ocorreria em uma situação não relativista seria que o segundo carro, com metade da velocidade do primeiro, observaria o primeiro carro com uma velocidade igual a metade da velocidade da luz, porém na relatividade isso é diferente, o segundo carro sempre veria o primeiro carro com uma velocidade igual a velocidade da luz.

Após algum tempo de “céu nublado”, Einstein (Figura 5) propôs, em 1905, uma teoria que, posteriormente, se tornou conhecida como *Relatividade Restrita* ou *Especial*. Esta revelou que a única forma de observadores diferentes obterem o mesmo valor para a velocidade da luz seria se os intervalos de tempo e espaço entre dois fenômenos quaisquer fossem diferentes para

---

<sup>2</sup> Albert Michelson (1852-1931) e Edward Morley (1838-1923) realizaram experimentos em 1887 com o objetivo de detectar o movimento relativo entre a Terra e o “éter”, suposto meio de propagação da luz, quando se supunha sua existência. Tal fato seria verificado pela mudança na velocidade de propagação dos raios luminosos devido ao seu movimento nesse meio hipotético, algo que nunca foi detectado. Isto é, a luz apresenta sempre a mesma velocidade de propagação  $c$  independentemente do estado de movimento da fonte ou observador.

cada observador. Tal teoria mostrou-se verdadeira, sendo confirmada repetidamente em diversos experimentos científicos, como nos aceleradores de partículas, por exemplo.



*Figura 5: Albert Einstein.*

*(Fonte: Pinterest)*

Esta formulação para o espaço-tempo exigiu, por sua vez, uma modificação na Mecânica Clássica para que esta pudesse se adaptar à noção de espaço-tempo relativo e as consequências que isto implica [4, 5]. Da mesma forma, as leis de força consideradas na segunda lei de Newton, ou suas possíveis descrições alternativas, deveriam estar igualmente de acordo com os princípios da Relatividade Especial.

Na época, das possíveis leis de força conhecidas, apenas duas correspondiam a interações fundamentais: a força da gravidade, descrita pela Gravitação newtoniana; e a força eletromagnética, descrita pelo Eletromagnetismo de Maxwell.<sup>3</sup> Destas, apenas a primeira não se encontrava de acordo com os postulados da Relatividade Especial e motivou, portanto, uma busca por uma formulação relativística da Gravitação.

Dez anos depois da divulgação da teoria da Relatividade Restrita, Einstein, finalmente, apresentou sua teoria relativística da Gravitação, denominada, posteriormente, de *Relatividade Geral* (1915). A nova teoria envolvia as ideias surgidas na Relatividade restrita sobre o tempo e espaço e propôs a generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas incluindo campos gravitacionais.

---

<sup>3</sup> Existia, também, a Eletrodinâmica de Weber (1804–1891). Contudo, esta controversa formulação não passa em certos testes experimentais [8, 9]. Em particular, ela não se obtém como o limite clássico da Eletrodinâmica Quântica [10, 11, 12, 13], fazendo com que seja ignorada na maioria dos textos sobre eletromagnetismo, consagrando-se o de Maxwell para a descrição desta interação.

No contexto do GPS e de acordo com a Relatividade Geral, como os satélites são colocados em órbita da Terra, seus relógios sofrem a ação do campo gravitacional do planeta, de tal modo que eles avançam mais rapidamente do que aqueles em pontos mais baixos de um campo gravitacional, como os dos receptores na superfície.

Dessa forma, a localização por meio do GPS envolve as duas teorias de Einstein, seja pelo fato dos agentes envolvidos (satélite emissor e receptor na Terra) apresentarem velocidade relativa grande o suficiente para que os efeitos cinemáticos da Relatividade Especial sejam relevantes, bem como a diferença na intensidade do campo gravitacional entre os pontos onde eles se localizam também resultar em efeitos mensuráveis. Tudo isso graças à grande sensibilidade dos instrumentos utilizados.

## 2.1 Teoria da Relatividade Restrita

Para aplicarmos os cálculos da correção no atraso do relógio em movimento utilizaremos conceitos da relatividade restrita, baseada nos dois *postulados* [4]

*Postulado 1:* As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

*Postulado 2:* A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor  $c$  para qualquer que seja o movimento da fonte.

Para isso, utilizaremos o conceito do *relógio de luz*, que consiste em uma caixa transparente com dois espelhos idênticos postos frente a frente. De algum modo, é possível fazer com que um pulso de luz percorra continuamente entre os dois espelhos, sendo refletido de um para o outro alternadamente. Quando o pulso de luz bate num deles, ouvimos um "tic", e quando o pulso bate no outro, ouvimos um "tac".

Vamos considerar dois referenciais inerciais, um  $S'$ , que se move com uma velocidade  $v$  ao longo do eixo  $Ox$  do outro referencial inercial,  $S$ . Em  $S'$  foi instalado um relógio de luz, onde  $E$  é um espelho e  $F$  outro, estes foram colocados na origem e em um certo ponto do eixo  $O'y'$  (Figura 6). Nessa situação um “tic-tac” do relógio de luz corresponde a um ciclo completo percorrido pela luz, ou seja, saindo de  $E$ , sendo refletido por  $F$  e retornando para  $E$ , completando assim um intervalo de tempo

$$\Delta t' = \frac{2\Delta y'}{c} ,$$

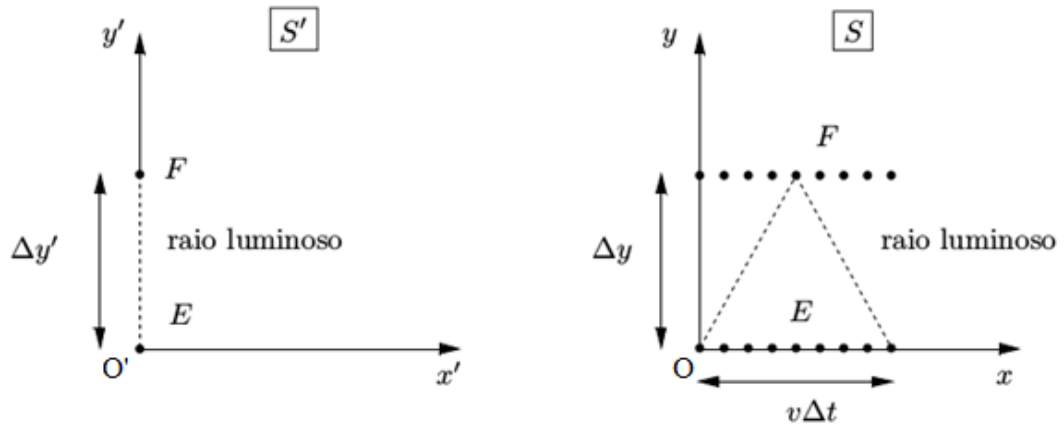


Figura 6: Representação de um relógio de luz.

onde  $\Delta y'$  é a distância entre os dois espelhos em  $S'$  e  $c$  é a velocidade da luz.

Já no referencial  $S$ , os espelhos estão em movimento, assim o sinal luminoso percorre uma distância diferente.

Seguindo o segundo postulando, a luz possui o mesmo valor  $c$  também em  $S$ . Podemos ver na Figura 6 que obtemos um triângulo, onde podemos utilizar o famoso *teorema de Pitágoras*

$$(\Delta y)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2$$

onde  $\Delta t$  é a variação de tempo correspondente ao “tic” do relógio no referencial  $S$  e  $\Delta y$  é a distâncias entre os dois espelhos. Considerando que a distância entre os dois espelhos nos dois referenciais são as mesmas [4], ou seja,  $\Delta y = \Delta y'$ , chegamos a

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2$$

de onde rapidamente chegamos à conclusão que o observador em  $S'$  mede um intervalo de tempo *menor* para um “tic-tac”, já que percorre uma distância menor (caminhos paralelos), do seu relógio de luz, do que um observador em  $S$ :

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

o que nos leva ao fenômeno da dilatação do tempo, ou seja, é como se cada unidade de tempo sofresse uma expansão em relação às unidades do tempo próprio (intervalo de tempo medido pelo observador considerado em repouso). O relógio de um referencial na Terra, em repouso,

seria medido um tempo numericamente maior do que o tempo medido dentro do satélite ( $\Delta t'$  é o intervalo de tempo medido por um observador que se move com velocidade  $v$  em relação a um observador que mede um intervalo de tempo  $\Delta t$ ). Com tais afirmações nós podemos mostrar que o tempo medido por um observador dentro do satélite, por exemplo, é numericamente menor.

Neste caso do GPS em especial, ela não seria uma dilatação muito grande, pois as velocidades dos satélites (3,88 km/s) não são comparáveis à velocidade da luz  $c (\simeq 3,0 \cdot 10^5$  km/s), no entanto tal fator não pode ser desprezado por conta da alta precisão na medida dos intervalos de tempo.

## 2.2 Gravidade Newtoniana

A formulação para a Gravitação dada por Newton<sup>4</sup> no seu famoso *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, em 1687, estabelece que uma partícula de massa  $m_1$  exerce uma força numa outra de massa  $m_2$  dada por

$$\vec{F}_{2(1)} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} ,$$

em que  $\hat{r}_{12}$  é o vetor unitário que liga a partícula de massa  $m_1$  a de massa  $m_2$ ,  $r$  é a separação entre elas (Figura 7) e  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  é a *constante universal da gravitação*.

Analogamente, a força  $\vec{F}_{1(2)}$  exercida pela de massa  $m_2$  na de massa  $m_1$  se dá pela troca entre os índices 1 e 2 na expressão acima. Uma vez que  $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$ , vemos que a lei de força está de acordo com a terceira lei de Newton.

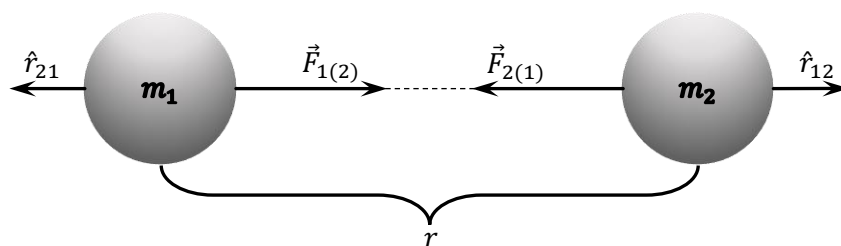


Figura 7: Interação gravitacional entre duas partículas.

<sup>4</sup> Sir Isaac Newton (1643-1727), matemático, físico e astrônomo inglês amplamente reconhecido como um dos mais influentes cientistas todos os tempos.



Tratando apenas de  $m \equiv m_2$  no campo gravitacional de  $m_1$  e tendo implícito que  $\hat{r} \equiv \hat{r}_{12}$ , com a partícula de massa  $m_1$  localizada na origem do sistema de coordenadas, podemos reescrever a força acima como

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_{2(1)} = m \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m}{r^2} \hat{r} . \quad \left( \vec{g}(\vec{r}) \equiv -\frac{G m_1}{r^2} \hat{r} \right)$$

Uma vez que o rotacional de  $\vec{g}(\vec{r})$  é nulo, temos que ele está associado a um potencial  $\Phi$  obtido por meio de

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -G m_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

em que apenas é levado em conta as distâncias radiais  $r$  e  $r_0$  a partir da origem, onde se localiza  $m_1$ , associadas aos pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_0$ , sendo este um ponto arbitrário onde o potencial se anula. Considerando este ponto como infinitamente afastado da origem, temos que  $r_0 \rightarrow \infty$  e

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(r) = -\frac{G m_1}{r} .$$

Analogamente, podemos definir uma *energia potencial*  $U_g(r) = m\Phi(r)$  associada a  $\vec{F}$ .

## 2.3 Teoria da Relatividade Geral

Publicada em 1915, a Relatividade Geral é muito mais elaborada que a Relatividade Restrita sendo melhor apresentada e compreendida com a utilização da Geometria Diferencial (ramo da Matemática que estuda geometria em espaços curvos), porém, como iremos tratar de campos gravitacionais relativamente fracos, é possível, através de métodos elementares, chegarmos a uma fórmula aproximada da dilatação do tempo para o relógio nesse campo.

Para chegar no resultado o qual almejamos, iremos manipular duas fórmulas que lidam com argumentos diferentes, ambos essencialmente devidos a Einstein.

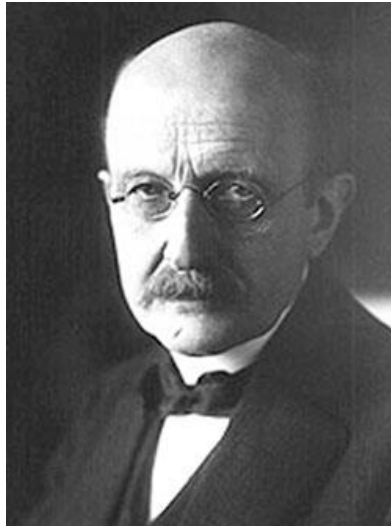


Figura 8: Max Planck.  
(Fonte: explicatorium)

No primeiro momento, iremos utilizar uma combinação da Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica. Desta, sabemos que a luz é formada por partículas, ou fótons, com energia dada pela relação de *Planck*<sup>5</sup> [4]

$$E = hf = \frac{h}{T} ,$$

em que  $h$  é a constante de Planck,  $f$  é a frequência da radiação e, conseqüentemente,  $T$  é o período da radiação.

Da *relação de equivalência massa-energia* deduzida por Einstein como consequência da Relatividade Restrita [4],

$$E = mc^2 ,$$

tratamos o fóton como se possuísse uma massa  $E/c^2$ .<sup>6</sup> Então, se um fóton se desloca em um campo gravitacional de um objeto de massa  $m_1$ , ele poderá perder energia. Sejam  $E$  e  $T$  a energia e o período de um fóton, respectivamente, num dado ponto  $\vec{r}$  de um campo gravitacional, enquanto  $E'$  e  $T'$  são as mesmas quantidades num outro ponto  $\vec{r}'$ . A relação de Planck-Einstein implica que

$$ET = h = E'T' .$$

Se  $\Delta\Phi = \Phi(\vec{r}') - \Phi(\vec{r})$  for a diferença de potencial entre  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}$ , é de esperar que

<sup>5</sup> Max Planck (1858–1947), físico alemão, prémio Nobel de Física (1918).

<sup>6</sup> Muito embora os fótons não tenham massa.

$$E' \simeq E - m\Delta\Phi \simeq E - \frac{E}{c^2} \Delta\Phi = \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) E .$$

Portanto,

$$T \simeq \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) T' .$$

Em campos gravitacionais fracos, onde  $\Delta\Phi$  é consideravelmente pequeno comparado ao quadrado da velocidade da luz, a quantidade  $\left|\frac{\Delta\Phi}{c^2}\right|$  é muito inferior a 1. Usando a aproximação de Taylor de primeira ordem, temos que

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1+x$$

válida para  $|x|$  muito menor que 1, temos então:

$$T' \simeq \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) T .$$

A partir daí, podemos perceber que o período da radiação aumenta à medida que a mesma sobe em um campo gravitacional, *i.e.*, desloca-se no sentido decrescente do campo.

Adotando o período do raio luminoso como unidade de tempo, a expressão acima indica que um intervalo de tempo  $\Delta t'$  medido por um observador em repouso em  $\vec{r}'$  relaciona-se com o intervalo  $\Delta t$  de um observador, também em repouso, em  $\vec{r}$  através de

$$\Delta t' \simeq \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \Delta t .$$

No limite em que o ponto  $\vec{r}$  está “no infinito”, onde o potencial é zero, obtém-se  $\Delta\Phi = \Phi(\vec{r}') = -\frac{G m_1}{r'}$  e, portanto,

$$\boxed{\Delta t' \simeq \left(1 - \frac{G m_1}{c^2 r'}\right) \Delta t}$$

sendo  $\Delta t'$  o intervalo de tempo entre dois eventos medido em  $\vec{r}'$ , onde o potencial gravitacional é  $\Phi$ , enquanto o mesmo intervalo de tempo medido por um observador no infinito é  $\Delta t$ . Essa é a famosa equação da dilatação gravitacional do tempo, que afirma que relógios em um ponto mais baixo de um campo gravitacional acabam funcionando em um ritmo mais lento do que relógios “no infinito”.

Em situações do cotidiano, o valor absoluto do potencial gravitacional  $\Phi$  é muito inferior a velocidade da luz ao quadrado, portanto  $\Delta t'$  e  $\Delta t$  possuem quase o mesmo valor.

Todavia, podem existir situações em que se deseje uma elevada precisão na medição dos intervalos de tempo, como no caso do próprio GPS, ou em situações que possam envolver campos gravitacionais muito fortes, como nas proximidades de buracos negros. Nessas situações, a dilatação gravitacional do tempo deve ser levada em conta.

Uma observação que deve ser feita é sobre o uso da gravitação newtoniana na obtenção desta dilatação temporal. Como ela não é relativística, o mais correto seria adotarmos a Relatividade Geral para obter o resultado. Porém, considerando a validade daquela em situações de campo fraco, como no sistema solar, por exemplo, esperamos que a formulação de Einstein ofereça a de Newton como um caso limite nesses regimes. De fato, isso se verifica e o tratamento feito aqui pode ser considerado como uma correção de primeira ordem à Gravitação newtoniana, em que a dilatação temporal se escreve em termos do potencial  $\Phi$ .

Curiosamente, apesar disto sugerir uma validade restrita ao resultado, aplicando-se somente às situações de campo gravitacional fraco, de fato, este é justamente o que se obtém válido para qualquer regime a partir da Relatividade Geral. Isto é, de acordo com esta formulação, a relação entre os intervalos de tempo entre um observador com coordenada radial  $r'$  (em que o valor zero corresponde ao centro do objeto que gera o campo) e aquele no infinito é exatamente dada pela expressão acima, independentemente do valor de  $r'$ , ou da intensidade do campo gravitacional.

### 3 GPS e Relatividade

Agora, depois de termos visto características tanto em relação ao GPS quanto à Relatividade, podemos seguir para as aplicações de correções relativísticas no tempo medido pelos relógios atômicos a bordo dos satélites. Tais correções são necessárias devido às diferenças de potencial gravitacional e velocidades referentes tanto às órbitas dos satélites quanto aos usuários em Terra.

Como já foi visto, cada satélite emite regularmente tanto sua hora exata marcada no seu relógio quanto sua posição no mesmo instante e que as posições dos receptores são determinadas a partir destas informações. Estas são conhecidas com uma precisão enorme, uma vez que as órbitas são monitoradas constantemente por estações de rastreamento na superfície da Terra (Figura 9). Os dados obtidos pelas estações de monitoramento são transmitidos para uma estação central, em Colorado Springs, nos Estados Unidos para serem processados com o objetivo de calcular os dados referentes às orbitas, *efemérides*, de cada satélite e as correções dos seus respectivos relógios, assim, atualizando os dados de navegação [6]. Os novos dados de navegação, depois de corrigidos pela estação central, são transmitidos para os satélites a partir de antenas em terra, as *Ground Antenas*. Isso ocorre quando os satélites passam no campo de visão de cada uma destas. Como elas estão localizadas estrategicamente, cada satélite é atualizado pelo menos a cada duas horas.



Figura 9: Estação de monitoramento de GPS.  
(Fonte: Wikimedia Commons).

### 3.1 Cálculo da correção relativística

Admitindo que a Terra seja aproximadamente uma esfera, seu potencial gravitacional a uma distância  $r$  do seu centro é dado por

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r},$$

onde  $M$  é a massa da Terra.

Se um observador inercial “no infinito” mede um intervalo de tempo  $\Delta t$ , um satélite que se move com velocidade  $v$  em um ponto a distância  $r$  do centro da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{SAT} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \Delta t \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \Delta t,$$

onde usamos aproximação de Taylor de primeira ordem, já que a velocidade da luz é muito maior que a velocidade de um satélite. Utilizando também  $(1+x)(1+y) \cong 1+x+y$ , válido para  $|x|$  e  $|y|$  muito menores que 1, temos que

$$\Delta t_{SAT} \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{rc^2}\right) \Delta t.$$

De maneira análoga, um observador na superfície da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{Terra} \cong \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{GM}{Rc^2}\right) \Delta t,$$

onde  $V$  é a velocidade de rotação da Terra no local onde se encontra o observador.

Fazendo a razão entre  $\Delta t_{SAT}$  e  $\Delta t_{Terra}$  temos, usando novamente a aproximação de Taylor de primeira ordem, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} &\cong \frac{1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{rc^2}}{1 - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{GM}{Rc^2}} \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{Rc^2}\right) \\ &\cong 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{rc^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{Rc^2}.\end{aligned}$$

Admitindo que as órbitas dos satélites sejam circulares, temos que

$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Substituindo tal resultado no resultado final de  $\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}}$  temos, finalmente, que

$$\boxed{\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} \simeq 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{Rc^2}}$$

Nesta expressão,  $\Delta t_{SAT}$  é a variação de tempo medido em cada satélite,  $\Delta t_{Terra}$  é a variação de tempo medida na superfície da Terra,  $v$  é a velocidade orbital dos satélites,  $V$  é a velocidade de rotação da Terra no ponto considerado de sua superfície,  $M \cong 5,9722 \times 10^{24}$  kg e  $R \cong 6,371 \times 10^6$  m são a massa e o raio da Terra, respectivamente.

Usando também, além das medidas dadas,  $G = 6,67408 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$  e  $c = 2,99792458 \times 10^8$  m/s, podemos ter uma prévia de qual seria, aproximadamente, o nosso atraso ou adiantamento de tempo. Para o cálculo de  $\frac{3v^2}{2c^2}$ , como as órbitas dos satélites do GPS tem um período de 12 horas, ou seja, em um dia cada um deles dá duas voltas na Terra, chegamos a  $v \cong 3900 \frac{m}{s}$ , assim temos que

$$\frac{3v^2}{2c^2} \cong 2,539 \cdot 10^{-10}.$$

Para  $\frac{V^2}{2c^2}$ , com um período de rotação de 24 horas, a velocidade de rotação da Terra no equador é  $V \cong 465 \frac{m}{s}$ , assim temos que

$$\frac{V^2}{2c^2} \cong 1,203 \cdot 10^{-12}.$$

Para  $\frac{GM}{Rc^2}$ , temos

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{gR^2}{Rc^2} = \frac{gR}{c^2} \cong 6,958 \cdot 10^{-10}.$$

Assim,

$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} \cong 1 + 4,4346 \cdot 10^{-10},$$

(tal valor pode se reduzir até  $\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} \cong 1 + 4,42257 \cdot 10^{-10}$ , como ocorre nos polos do planeta, onde  $V = 0$ ) ou seja, o relógio no satélite adianta-se, por dia, cerca de

$$4,4346 \cdot 10^{-10} \cdot 86.400 \text{ s} \cong 3,8315 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

em relação a um relógio na superfície do Planeta.

Como a distância até um dado satélite é determinada pelo intervalo de tempo que o sinal leva para chegar ao receptor multiplicado pela velocidade da luz, muitos consideram que a correção obtida, caso ausente, resultaria num erro na determinação dessa distância<sup>7</sup> de  $3,8315 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot c \cong 11,5 \text{ km}$  diários, *i.e.*, a cada dia o erro na determinação da posição seria acrescido dessa quantidade. De fato, existiria um erro acumulado caso as correções relativísticas não fossem implementadas, porém, menos drástico do que esse.

Como o tempo de recepção do sinal é determinado pelos próprios satélites a cada medida feita, com base em seus relógios atômicos, este erro devido a uma suposta ausência de correção relativística não seria cumulativo ao longo do tempo. Ele existiria e, realmente, seria indesejado, mas não iria aumentar progressivamente.

O que provocaria um erro cumulativo seria a ausência desta correção no rastreamento das posições dos satélites pelas estações em terra. Estas, monitoram constantemente as posições daqueles para atualizá-los, de modo que os mesmos forneçam sempre suas posições mais precisas. Como esse monitoramento é feito, justamente, com base no tempo de percurso de um sinal eletromagnético, caso as correções não fossem consideradas, os satélites poderiam ter suas posições determinadas equivocadamente por uma distância de  $3,8315 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot v \cong 15 \text{ cm}$  por dia, que é a distância que o satélite percorre durante a correção relativística de um dia inteiro. Ainda que ordens de grandeza menor do que os 11,5 km diários usualmente atribuídos (erroneamente), não deixa de ser igualmente comprometedor para a boa

---

<sup>7</sup> Consequentemente, na própria determinação da posição do receptor também.



determinação da posição do receptor. Afinal, sendo cumulativo, chegaria a cerca de 1,05 m em uma semana, 4,5 m em um mês, 54,75 m em um ano e daí por diante.

Para termos uma ideia da contribuição devida a Relatividade Geral, iremos admitir  $M = 0$ . Assim, obtemos a razão

$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} \cong 1 - 2,5265 \cdot 10^{-10}.$$

Ou seja, o relógio no satélite atrasar-se-ia, por dia, cerca de

$$2,5265 \cdot 10^{-10} \cdot 86400 \cong 2,1829 \cdot 10^{-5} \text{ s},$$

em relação a um relógio na superfície do Planeta. Uma diferença considerável em relação ao tratamento utilizando a Relatividade Geral.

Contudo, para utilizarmos tais resultados em um algoritmo, por exemplo, nós precisamos tratar  $\Delta t_{SAT}$  e  $\Delta t_{Terra}$  ( $\Delta t_{SAT} = T - T_0$  e  $\Delta t_{Terra} = t - t_0$ ). Assume-se que  $t_0 = T_0 = 0$ , ou seja, as duas escalas de tempo estão alinhadas [7], sincronizadas no momento de início do processo de correção, de tal forma que

$$\Delta t_{SAT} = T \simeq (1 - \varepsilon)\Delta t_{Terra} = (1 - \varepsilon)t \Rightarrow t \simeq \frac{T}{(1 - \varepsilon)} \simeq (1 + \varepsilon)T$$

$$\text{com } \varepsilon = \frac{3v^2}{2c^2} - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{GM}{Rc^2}.$$

Com isso, podemos converter o instante  $T_E$  em que o sinal do satélite foi emitido, de acordo com o relógio atômico deste, no instante  $t_E \simeq (1 + \varepsilon)T_E$  correspondente ao relógio do receptor na Terra. O tempo de percurso do sinal, medido pelo receptor, seria, então  $\Delta t = t_R - (1 + \varepsilon)T_E$  e a distância até o satélite seria, então:

$$d = c\Delta t = c[t_R - (1 + \varepsilon)T_E].$$

## Conclusão

Diante do que foi apresentado, é possível observar como tal aparato tecnológico é completo, fazendo com que pensemos sobre a importância da ciência que o envolve e o torna possível. No seu funcionamento geral, nós mostramos como a Matemática é aplicada ao GPS, fazendo algumas correções mais finas quando necessário. Nas correções onde fazemos uso da Física Moderna, vimos que alguns métodos são necessários para o bom funcionamento deste equipamento, especialmente a Teoria da Relatividade (Restrita e Geral), nesse caso o alvo central da discussão. Este trabalho obteve o êxito a partir da junção das teorias referentes à matemática do GPS e à Relatividade, a partir disso conseguimos chegar a duas expressões. Tais expressões foram cruciais para o funcionamento de tal tecnologia. A primeira expressão,  $\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{Terra}} \simeq 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{Rc^2}$ , acabou nos fornecendo o tempo em que os relógios nos satélites adiantam-se por dia, cerca de  $3,8315 \cdot 10^{-5}$  segundos e, a partir desse tempo, o erro acumulado da posição dos satélites do GPS, que é  $3,8315 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot v \cong 15 \text{ cm}$  por dia. Nos mostrando que, mesmo não sendo um erro grande, é essencial a correção de tal medida. Já a segunda expressão obtida é referente a distância percorrida pelo sinal, onde o tempo corrigido a partir da relatividade foi substituindo pelo tempo sem correção. Assim, chegamos a uma distância  $d = c[t_R - (1 + \varepsilon)T_E]$ .

## Apêndice A: programando um protótipo de GPS

Para nos utilizarmos dos conhecimentos obtidos neste trabalho construímos uma pequena aplicação: um algoritmo referente a um protótipo de GPS em três dimensões. Para tal, utilizamos a linguagem de programação *Python 2.7* no ambiente de desenvolvimento integrado *Spyder 2*.

Como protótipo, iremos considerar, por simplicidade, que o tempo de recepção do sinal já é dado, *i.e.*, não será determinado pelas equações. Muito embora seja possível, neste caso, determinar a posição fazendo-se uso de apenas três satélites, isso envolveria a eliminação de uma das duas posições que o sistema de equações fornece como solução, sendo a posição correta determinada por argumentos de proximidade à superfície terrestre (a outra solução localiza-se além da altura dos satélites, em geral). Além disso, as soluções, neste caso, fornecem expressões consideravelmente extensas em termos dos dados fornecidos. Portanto, para tornar o problema mais apresentável e tratável, iremos considerar informações dadas a respeito de quatro satélites (suas posições e instantes de emissão do sinal, de acordo com seus próprios relógios) e os instantes de recepção de cada sinal pelo receptor.

Na obtenção das expressões matemáticas, primeiramente definimos alguns vetores, começando pelo vetor  $\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$ , referente a posição que procuramos (posição na superfície da Terra), em que  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  é a base cartesiana de vetores ortonormais. Analogamente, definimos os vetores  $\vec{S}_i = X_i\hat{x} + Y_i\hat{y} + Z_i\hat{z}$ , com  $i = 1, \dots, 4$ , denotando as posições (conhecidas) de cada um dos quatro satélites considerados.

Em seguida, para estes 4 satélites, sincronizados, assumindo que os mesmos transmitem pulsos eletromagnéticos identificados individualmente e bem definidos, a partir de  $\vec{S}_i$ , supondo que esses sinais sejam recebidos simultaneamente na posição  $\vec{R}$ , temos, pelo princípio da constância da velocidade da luz [7], onde  $D_i = c\Delta t$  representa a distância percorrida por esses sinais, que:

$$(\vec{S}_i - \vec{R})^2 = \vec{S}_i^2 + \vec{R}^2 - 2\vec{S}_i \cdot \vec{R} = D_i^2 \Rightarrow \vec{S}_i \cdot \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{S}_i^2 + \vec{R}^2 - D_i^2).$$

Do lado direito, a única quantidade desconhecida é  $\vec{R}^2$ . Porém, seja qual for o valor de  $i$ , é sempre essa mesma quantidade incógnita que aparece do lado direito. Podemos nos livrar dela tomando a diferença entre duas equações com índices  $i$  e  $j$  diferentes:

$$(\vec{S}_i - \vec{S}_j) \cdot \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{S}_i^2 - D_i^2 - \vec{S}_j^2 + D_j^2)$$

Denotando  $\vec{V}_j = V_{jx}\hat{x} + V_{jy}\hat{y} + V_{jz}\hat{z} \equiv \vec{S}_1 - \vec{S}_j$  e  $k_j \equiv \frac{1}{2}(\vec{S}_1^2 - D_1^2 - \vec{S}_j^2 + D_j^2)$ , com  $j \neq 1$ , podemos obter as três equações responsáveis pelas relações entre os satélites e o receptor:

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{R} = k_2;$$

$$\vec{V}_3 \cdot \vec{R} = k_3;$$

$$\vec{V}_4 \cdot \vec{R} = k_4.$$

Este sistema pode ser reescrito de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \\ V_{4x} & V_{4y} & V_{4z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

e terá solução sempre que a matriz  $3 \times 3$  formada pelos vetores  $\vec{V}_j$  tiver inversa, que é garantido quando seu determinante é diferente de zero. Este, por sua vez, pode-se obter como sendo dado por  $Ve = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \times \vec{V}_4)$ , que representa o volume do paralelepípedo de arestas dadas pelos três vetores que compõe a expressão. Para que seja diferente de zero, basta que os vetores sejam linearmente independentes.

Possivelmente, a combinação específica escolhida para os  $\vec{V}_j$  pode resultar em  $Ve = 0$ . Contudo, a menos que dois ou mais satélites se encontrem na mesma posição, sempre será possível obter outra combinação<sup>8</sup> que forneça um valor não nulo.

A solução para  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , já escrita em termos das coordenadas de cada satélite e da expressão para os  $k_i$ , são dadas, em linguagem *Python*, como:

---

<sup>8</sup> Trocando 1 por outro índice na definição de  $\vec{V}_j$ . Por exemplo,  $\vec{V}_j \equiv \vec{S}_i - \vec{S}_j$ , com  $i = 2, 3$  ou  $4$  e  $j \neq i$ , procedendo, então, de forma análoga.

```

X = (-0.5*(D1**2*V2y*V3z-D1**2*V2y*V4z-D1**2*V2z*V3y+D1**2*V2z*V4y
+D1**2*V3y*V4z-D1**2*V3z*V4y-D2**2*V3y*V4z+D2**2*V3z*V4y
+D3**2*V2y*V4z-D3**2*V2z*V4y-D4**2*V2y*V3z+D4**2*V2z*V3y
-V2y*V3z*X1**2+V2y*V3z*X4**2-V2y*V3z*Y1**2+V2y*V3z*Y4**2
-V2y*V3z*Z1**2+V2y*V3z*Z4**2+V2y*V4z*X1**2-V2y*V4z*X3**2
+V2y*V4z*Y1**2-V2y*V4z*Y3**2+V2y*V4z*Z1**2-V2y*V4z*Z3**2
+V2z*V3y*X1**2-V2z*V3y*X4**2+V2z*V3y*Y1**2-V2z*V3y*Y4**2
+V2z*V3y*Z1**2-V2z*V3y*Z4**2-V2z*V4y*X1**2+V2z*V4y*X3**2
-V2z*V4y*Y1**2+V2z*V4y*Y3**2-V2z*V4y*Z1**2+V2z*V4y*Z3**2
-V3y*V4z*X1**2+V3y*V4z*X2**2-V3y*V4z*Y1**2+V3y*V4z*Y2**2
-V3y*V4z*Z1**2+V3y*V4z*Z2**2+V3z*V4y*X1**2-V3z*V4y*X2**2
+V3z*V4y*Y1**2-V3z*V4y*Y2**2+V3z*V4y*Z1**2-V3z*V4y*Z2**2)/
float(V2x*V3y*V4z-V2x*V3z*V4y-
V2y*V3x*V4z+V2y*V3z*V4x+V2z*V3x*V4y-V2z*V3y*V4x))
Y = (0.5*(D1**2*V2x*V3z-D1**2*V2x*V4z-D1**2*V2z*V3x+D1**2*V2z*V4x
+D1**2*V3x*V4z-D1**2*V3z*V4x-D2**2*V3x*V4z+D2**2*V3z*V4x
+D3**2*V2x*V4z-D3**2*V2z*V4x-D4**2*V2x*V3z+D4**2*V2z*V3x
-V2x*V3z*X1**2+V2x*V3z*X4**2-V2x*V3z*Y1**2+V2x*V3z*Y4**2
-V2x*V3z*Z1**2+V2x*V3z*Z4**2+V2x*V4z*X1**2-V2x*V4z*X3**2
+V2x*V4z*Y1**2-V2x*V4z*Y3**2+V2x*V4z*Z1**2-V2x*V4z*Z3**2
+V2z*V3x*X1**2-V2z*V3x*X4**2+V2z*V3x*Y1**2-V2z*V3x*Y4**2
+V2z*V3x*Z1**2-V2z*V3x*Z4**2-V2z*V4x*X1**2+V2z*V4x*X3**2
-V2z*V4x*Y1**2+V2z*V4x*Y3**2-V2z*V4x*Z1**2+V2z*V4x*Z3**2
-V3x*V4z*X1**2+V3x*V4z*X2**2-V3x*V4z*Y1**2+V3x*V4z*Y2**2
-V3x*V4z*Z1**2+V3x*V4z*Z2**2+V3z*V4x*X1**2-V3z*V4x*X2**2
+V3z*V4x*Y1**2-V3z*V4x*Y2**2+V3z*V4x*Z1**2-V3z*V4x*Z2**2)/
float(V2x*V3y*V4z-V2x*V3z*V4y-
V2y*V3x*V4z+V2y*V3z*V4x +V2z*V3x*V4y-V2z*V3y*V4x))
Z = (-0.5*(D1**2*V2x*V3y-D1**2*V2x*V4y-D1**2*V2y*V3x+D1**2*V2y*V4x
+D1**2*V3x*V4y-D1**2*V3y*V4x-D2**2*V3x*V4y+D2**2*V3y*V4x
+D3**2*V2x*V4y-D3**2*V2y*V4x-D4**2*V2x*V3y+D4**2*V2y*V3x
-V2x*V3y*X1**2+V2x*V3y*X4**2-V2x*V3y*Y1**2+V2x*V3y*Y4**2
-V2x*V3y*Z1**2+V2x*V3y*Z4**2+V2x*V4y*X1**2-V2x*V4y*X3**2
+V2x*V4y*Y1**2-V2x*V4y*Y3**2+V2x*V4y*Z1**2-V2x*V4y*Z3**2
+V2y*V3x*X1**2-V2y*V3x*X4**2+V2y*V3x*Y1**2-V2y*V3x*Y4**2
+V2y*V3x*Z1**2-V2y*V3x*Z4**2-V2y*V4x*X1**2+V2y*V4x*X3**2
-V2y*V4x*Y1**2+V2y*V4x*Y3**2-V2y*V4x*Z1**2+V2y*V4x*Z3**2
-V3x*V4y*X1**2+V3x*V4y*X2**2-V3x*V4y*Y1**2+V3x*V4y*Y2**2
-V3x*V4y*Z1**2+V3x*V4y*Z2**2+V3y*V4x*X1**2-V3y*V4x*X2**2
+V3y*V4x*Y1**2-V3y*V4x*Y2**2+V3y*V4x*Z1**2-V3y*V4x*Z2**2)/
float(V2x*V3y*V4z-V2x*V3z*V4y-
V2y*V3x*V4z+V2y*V3z*V4x+V2z*V3x*V4y-V2z*V3y*V4x))

```

Figura 10: Código-fonte das expressões X, Y e Z.

Sabendo que foram definidos os seguintes valores de acordo com a literatura:

```
#dados
c = 299792458 #velocidade da Luz (m/s)
v = 3900 # velocidade orbital dos satélites (m/s)
V = 465 # velocidade de rotação da Terra (m/s)
M = 5972e24 # Massa da Terra (kg)
R = 6371000 # Raio da Terra (m)
G = 6.67408e-11 # Constante Gravitacional Universal (m^3 kg^-1 s^-2)
#tempos - tais valores não são únicos, são apenas exemplos
#para facilitar...
tr1 = 0.00505783 #tempo de recepção R
tr2 = 0.00923206
tr3 = 0.00836090
tr4 = 0.00712225

Te1 = 0.00390733 #tempo de emissão satélites
Te2 = 0.00813098
Te3 = 0.00574326
Te4 = 0.00416411
```

Figura 11: Código-fonte referente aos dados utilizados no algoritmo.

Seguimos para a determinação da posição  $\vec{R}$ . Para obtermos X, Y e Z (Figura 10), utilizamos dois tipos de distâncias ( $D_1, D_2, D_3$  e  $D_4$ ) para fazer uma comparação de resultados sem as correções relativísticas e com as correções relativísticas. No cálculo da distância sem correção, considera-se apenas o tempo de recepção do sinal, ou seja,  $d = c(t_{recepção} - T_{emissão})$ . Assim, ficamos com:

```
#Distancia sem correção
D1 = c*(tr1-Te1)
D2 = c*(tr2-Te2)
D3 = c*(tr3-Te3)
D4 = c*(tr4-Te4)
```

Figura 12: Código-fonte referente às distâncias sem correção relativística.

Já para as distâncias com as devidas correções relativísticas usamos as mesmas expressões advindas deste trabalho. Assim, utilizamos:

```
#Correção
e = ((3*v**2)/float((2*c**2)) - (v**2/float((2*c**2)))) -
(G*M)/float((R*c**2)))
#Distancia com correção
D1 = c*(tr1-Te1/(1-e))
D2 = c*(tr2-Te2/(1-e))
D3 = c*(tr3-Te3/(1-e))
```

Figura 13: Código-fonte referente às distâncias com correção relativística.

Através dessas expressões apresentadas, foi possível calcular a posição  $\vec{R}$  fazendo a comparação da mesma sem as correções e com as correções relativísticas, apenas pedindo as posições dos satélites no algoritmo da seguinte forma:

```
#1
#####
X1 = float(raw_input('Digite a posicao X do primeiro satelite: '))
Y1 = float(raw_input('Digite a posicao Y do primeiro satelite: '))
Z1 = float(raw_input('Digite a posicao Z do primeiro satelite: '))
```

Figura 14: Código-fonte referente às coordenadas do satélite 1.

De forma análoga, foram definidos os demais 3 satélites, sabendo que os mesmos não estão nas mesmas coordenadas, pois tais satélites estão sempre em movimento e com determinada distância de órbitas um do outro. Assim, fizemos um teste para determinar se os vetores  $\vec{V}_j$  formados a partir das posições dos satélites são linearmente independentes e, portanto, fornecem  $Ve \neq 0$ .

```
V4x = X1 - X4
V2y = Y1 - Y2
V3y = Y1 - Y3
V4y = Y1 - Y4
V2z = Z1 - Z2
V3z = Z1 - Z3
V4z = Z1 - Z4
#tais vetores não podem ser coplanares ou colineares
V2 = [V2x, V2y, V2z]
V3 = [V3x, V3y, V3z]
V4 = [V4x, V4y, V4z]
Ve = np.dot(V2, (np.cross(V3, V4)))
```

Figura 15: Código-fonte referente ao teste de dependência linear.

A partir desse teste, fizemos algumas estruturas de condições para o caso de  $Ve$  ser igual a zero. Tal resultado representa a situação de o usuário admitir, pelo menos, dois satélites na mesma posição, por exemplo, o que não ocorre na realidade. Para isso, fizemos outras possíveis combinações de vetores das posições dos satélites para então, em último caso, se  $Ve$  continuar sendo igual a 0, o algoritmo parar.

```

if(Ve==0):
    V2x = X2 - X1
    V3x = X2 - X3
    V4x = X2 - X4
    V2y = Y2 - Y1
    V3y = Y2 - Y3
    V4y = Y2 - Y4
    V2z = Z2 - Z1
    V3z = Z2 - Z3
    V4z = Z2 - Z4
    V2 = [V2x, V2y, V2z]
    V3 = [V3x, V3y, V3z]
    V4 = [V4x, V4y, V4z]
    Ve = np.dot(V2, (np.cross(V3, V4)))
    .
    .
    .
if(Ve==0):
    V2x = X4 - X1
    V3x = X4 - X3
    V4x = X4 - X2
    V2y = Y4 - Y1
    V3y = Y4 - Y3
    V4y = Y4 - Y2
    V2z = Z4 - Z1
    V3z = Z4 - Z3
    V4z = Z4 - Z2
    V2 = [V2x, V2y, V2z]
    V3 = [V3x, V3y, V3z]
    V4 = [V4x, V4y, V4z]
    Ve = np.dot(V2, (np.cross(V3, V4)))
if(Ve==0):
    print "\nValores inválidos\nTente Novamente!\n"
    sys.exit()

```

Figura 16: Código-fonte de estrutura condicional de Linearidade.



A partir disso, fazendo a diferença entre duas coordenadas, obtemos a saída a seguir:

```
Teste Satélite 3D
Tais valores NÃO podem ser COLINEARRES ou COPLANARES
Sabendo que os satélites não estão no mesmo lugar, digite suas
posicoes.

Digite a posicao X do primeiro satelite: 10000
Digite a posicao Y do primeiro satelite: 15000
Digite a posicao Z do primeiro satelite: 20200000
Digite a posicao X do segundo satelite: 11045
Digite a posicao Y do segundo satelite: 17050
Digite a posicao Z do segundo satelite: 20350000
Digite a posicao X do terceiro satelite: 12540
Digite a posicao Y do terceiro satelite: 14561
Digite a posicao Z do terceiro satelite: 21033000
Digite a posicao X do quarto satelite: 11011
Digite a posicao Y do quarto satelite: 13030
Digite a posicao Z do quarto satelite: 22023000

Valores sem correção

X = -260372007.47
Y = 71182004.4791
Z = 21149732.326

Valores com correção

X = -260372212.948
Y = 71181985.9993
Z = 21149732.1516

A diferença de pontos sem e com a correção é = 206.307343193 metros
```

Figura 17: Referente a saída dado pelo algoritmo em um dado caso.

## Referências

- [1] Autor desconhecido, "GPS foi criado para uso militar nos anos 60," 23 nov. 2009. [Online]. Available: <http://noticias.r7.com/tecnologia-e-ciencia/noticias/gps-foi-criado-para-uso-militar-nos-anos-60-20091122.html>. [Acesso em 13 ago. 2017].
- [2] NATÁRIO, J. "O GPS e a Teoria da Relatividade".
- [3] RIBEIRO, D. C. "Como funciona o Sistema GPS?," fev. 2008. [Online]. Available: [http://www.popa.com.br/\\_2008/cronicas/gps/funcionamento\\_do\\_gps.htm](http://www.popa.com.br/_2008/cronicas/gps/funcionamento_do_gps.htm). [Acesso em 14 dez. 2016].
- [4] NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica, vol. 4, São Paulo: Edgard Blücher, 1997.
- [5] TIPLER, P. A. e LLEWELLYN, R. A. Física Moderna, Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [6] TIMBÓ, M. A. Levantamentos Através do Sistema GPS, UFMG: Departamento de Cartografia, 2000.
- [7] CARARO, A. C.; FERREIRA, L. D.; AFONSO, G. B. CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS MEDIDAS DE TEMPO GPS, Bol. Ciênc. Geod., sec. Artigos, Curitiba, v. 16, no 1, p.156-176, jan-mar, 2010.
- [8] LEMON, D. K.; EDWARDS, W. F.; KENYON, C. S. "Electric potentials associated with steady currents in superconducting coils," *Physics Letters A*, vol. 162, nº 2, pp. 105-114, 3 fev. 1992.
- [9] JUNGINGER, J. E.; POPOVIC, Z. D. "An experimental investigation of the influence of an electrostatic potential on electron mass as predicted by Weber's force law," *Canadian Journal of Physics*, vol. 82, nº 9, pp. 731-735, set. 2004.
- [10] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. "Interacting Fields and Feynman Diagrams," em *An Introduction to Quantum Field Theory*, Massachusetts, Perseus Books Publishing, 1995, pp. 77-130.
- [11] ASSIS, A. K. T.; SILVA, H. T. "Comparison between Weber's electrodynamics and classical electrodynamics," *Pramana - Journal of Physics*, vol. 3, nº 55, pp. 393-404, set. 2000.
- [12] WESLEY, J. P. "Weber electrodynamics, part I. general theory, steady current effects," *Foundations of Physics Letters*, vol. 5, nº 3, pp. 443-469, out. 1990.
- [13] ASSIS, A. K. T.; CALUZI, J. J. "A limitation of Weber's law," *Physics Letters A*, vol. 1, nº 160, pp. 25-30, 4 nov. 1991.