3

3.1 Talföljdsbevis med induktion

> Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4$ och $a_n = 4n-6+a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}$, för $n \geq 3$. Visa med induktion eller stark induktion att $a_n = n^2$ för alla $n \geq 0$.

...

3.2 Kardinalitetsekvivalensbevis i $\mathbb{R}$

Varje reellt tal $x \in [0,1]$ kan skrivas på decimalform

$$x = (0, x_1 x_2 x_3 \cdots)_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k},$$

där $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ för alla i. För unikhet förbjuder utvecklingar som slutar med en oändlig följd av 9or. Låt A vara mängden av all $x \in [0,1]$ vars decimalutveckling endast innehåller jämna tal. Visa att A och $\mathbb{R}$ har samma kardinalitet, d.v.s. $|A| = |\mathbb{R}|$.

Bonus. Visa att det inte finns reella tal $0 \le a < b < 1$ sådant att $(a,b) \subseteq A$.

...

3.3 Lösning av linjär ekvation med modulär aritmetik

Finn alla lösningar till $343x = 77$ i $\mathbb{Z}_{805}$.

...

3.4 Rest vid division av stora tal med hjälp av Fermats lilla sats

Bestäm resten av 2771^{3546} vid division med 887. *Tips.* Använd Fermats lilla sats.

...