Protokoll PAP2 Versuch 243: Thermisches Rauschen

Leonard Scheuer

Motivation

In diesem Versuch soll das thermische Rauschen eines ohmschen Widerstandes vermessen und damit die Bolzmannkonstante über die Nyquist-Formel bestimmt werden.

Grundlagen

Thermisches Spannungsrauschen

In jedem Leiter, von nicht verschwindener Temperatur, tritt ein Spanunnungsrauschen auf. Dieses entsteht durch die thermische (und damit ungerichtete) Bewegung der Ladungsträger. Der Zeitliche Mittelwert verschwindet daher. Um die Stärke des Rauschen zu Quantifizieren nutzen wir daher den Effektivwert der Spannung, der sich zu

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U_r^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U_r^2 \mathrm{d}t} \tag{1}$$

ergibt. Man findet, dass das Thermische Rauschen ein weißes Rauschen ist für Frequenzen bis in den THz-Bereich, alle Frequenzanteile sind also in gleichem Maße vorhanden. Der quadratische Effektivwert ergibt sich dann (**Nyquist-Beziehung**) zu

$$\left\langle U_r^2 \right\rangle = 4kTR\Delta f \tag{2}$$

wobei k die Boltzmankonstante ist und Δf die Bandbreite des Messgeräts.

Messprinzip

Wir messen den Effektivwert nach der Nyquist-Formel. Wir stellen zunächst fest, dass bei einer Messbandbreite von 50kHz und bei Zimmertemperatur, ein Effektivwert von etwa 2μV R, Rauschspannung vorliegt. Wir müssen also das Signal noch verstärken um auf den für das Multimeter angemessenen Millivoltbereich zu kommmen. Dies tun wir mit dem in der nachfolgenden Abb. dargestellten Aufbau.

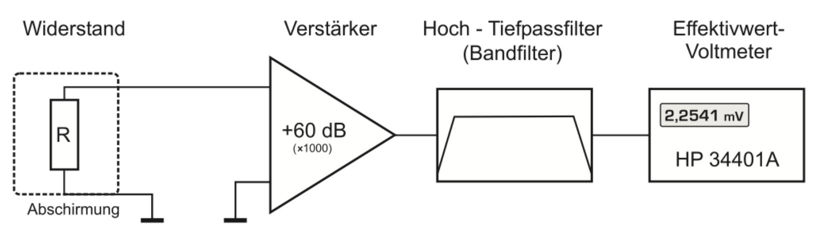


Abb.1: Messaufbau (Quelle:Script)

Wir nutzen den Bandfilter um ein möglichst definiertes Frequenzband zu erhalten und Störsignale zu entfernen. Da der Verstärker auch ein Rauschen aufweißt, muss dieses bei der Messung abgezogen werden. Der Frequenzgang der Messelektronik ist als

$$g(f) = \left.\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right|_f \tag{3}$$

definiert. Wir schreiben die Nyquist-Beziehung entsprechend in Integralform um:

$$\left\langle U_{aus}^2 \right\rangle = 4kTR\int_0^\infty g(f)^2 df \equiv 4kTRB \tag{4}$$

Wobei

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df \tag{5}$$

die sogenannte äquivalente Rauschbandbreite ist. Ziehen wir das Rauschen des Verstärkers ab und stellen zu Boltzmankonstante um, so erhalten wir:

$$k = \frac{\left\langle U_{aus}^2 \right\rangle - \left\langle U_V^2 \right\rangle}{4TRB} \tag{6}$$

Wollen wir nun B bestimmen, so müssen wir dafür den Frequenzgang messen. Dafür wird ein Funktionengenerator mit Dämpfungsglied der Dämpfung D an den Messapperat angeschlossen, sodass die Signale etwa im gleichen Spannungsbereich wie die gemessenen Rauschsignale sind. Der Aufbau ist in der Abbildung 2 dargestellt.

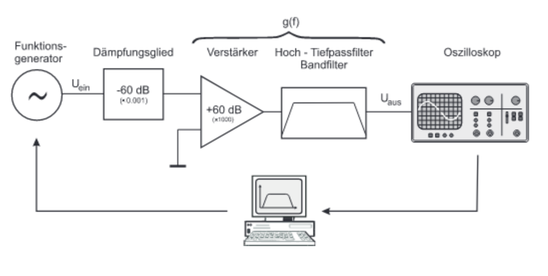


Abb.2: Aufbau zur Messung des Frequenzganges (Quelle:Script)

Wir erhalten daraus dann den Frequenzgang mit

$$g(f) = \frac{1}{D}\frac{\sqrt{\left\langle U_{aus}^2 \right\rangle}}{\sqrt{\left\langle U_{ein}^2 \right\rangle}} \tag{7}$$

Material

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert (Fehler <0,5%)
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A (Fehler 0,3%)
- PC

Versuche/Durchführung

1. Vorversuch: Qualitative Untersuchung des Rauschspektrums

Mit verschiedenen Widerständen wird das Rauschsignal im Spektrumsanalysator des Oszilloskopes betrachtet, verifiziert, dass es sich um ein weißes Rauschen handelt. Dabei werden verschiedene Frequenzbereiche betrachtet, wobei zunachst der durch den Verstärker verursachten Abfall bei höheren Frequenzen sichtbar wird. Anschließend wird der Bandfilter zugeschaltet und der Effekt betrachtet.

2. Messung der Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

- Mit dem Programm "Effektivwert" wird der Effektivwert der direkt am Verstärker befestigten Wiederstände im Bereich von 5 kΩ bis 30 kΩ in Schritten von 5 kΩ gemessen. Es werden über je über 100 Messungen die Mittelwerte mit Fehler notiert.
- Das Eigenrauschen des Verstärkers wird mit dem Kurzschlussstecker auf gleiche Art gemessen.

3. Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Die Schaltung gem. Abb. 4 wird mit möglichst wenig Kabel aufgebaut und der Frequenzgang mit dem "Circuit-Analyzer" des Oszilloskops aufgenommen.

Messprotokoll

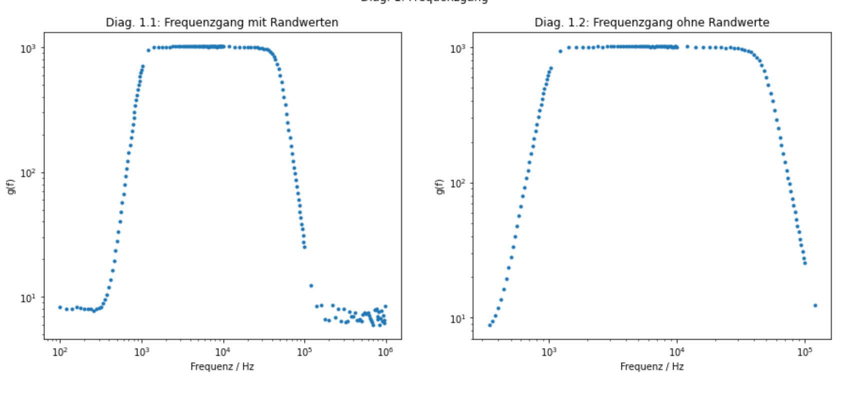
siehe Anhang (inklusive Bilder)

Auswertung

Graphische Darstellung der Messdaten

Wir importieren den gemessenen Frequenzgang und stellen ihn graphisch dar. Wir benutzen Gl. (7) um $g(f)$ zu erhalten. Wir schneiden die Randbereiche ab, da dort die Auflösungsgrenze des Oszilloskops erreicht ist.

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
from matplotlib.pyplot import figure
import numpy as np
from IPython.display import Markdown, Latex, display
import pandas as pd
from scipy.optimize import curve_fit
import uncertainties
from uncertainties import ufloat as uf
from uncertainties.umath import *
from uncertainties import unumpy as unp
from uncertainties.unumpy import (nominal_values as noms,
                                  std_devs as stds)


def out(name,c,unit="",zp=0,decimals=2):
    if isinstance(c, uncertainties.UFloat):
        display(Markdown("$"+name+" = " +'({:L})'.format(c)+" \   \mathrm{"+unit+"}$"))
    elif type(c) in [float,int,np.float64]:
        display(Markdown("$"+name+" = " +"{:.{}f}".format(round(c*10**(-zp),decimals),decimals)+unit+"$"))
    else:
        print(c)

def fit_line(x, m, n):
    return m * x + n
def fit_propline(x, m):
    return m * x

def quad_add(arr):
    quad_sum=0
    for i in arr:
        quad_sum+=i**2
    return (quad_sum**0.5)/len(arr)

f, U_aus =np.loadtxt("frequenzgang.txt", skiprows=1, usecols=(0,1), unpack=True)
D=uf(1e-3,1e-3*0.002)
U_ein=200 #[mV]
g=U_aus/(U_ein * D)

fig, (plt1, plt2) = plt.subplots(1, 2)
fig.set_size_inches(15,6)
fig.suptitle("Diag. 1: Frequenzgang")

plt1.loglog(f,noms(g), linestyle="None", marker=".")
plt1.set_xlabel("Frequenz / Hz")
plt1.set_ylabel("g(f)")
plt1.set_title("Diag. 1.1: Frequenzgang mit Randwerten")

plt2.loglog(f[12:-43],noms(g)[12:-43], linestyle="None", marker=".")
plt2.set_xlabel("Frequenz / Hz")
plt2.set_ylabel("g(f)")
_=plt2.set_title("Diag. 1.2: Frequenzgang ohne Randwerte")
```



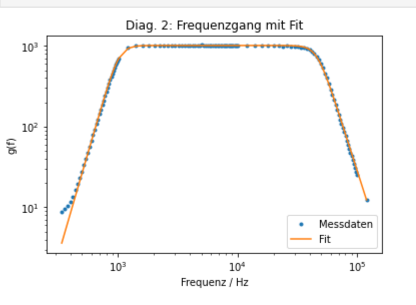
Funktion anpassen

Wir fitten nun eine Funktion der Form

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}}\sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \tag{8}$$

Wobei V die Verstärkung, Ω_1, Ω_2 die Grenzfrequenzen des Bandfilters und n_1, n_2 die Filterordnungen sind.

In [2]:
```
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 4 ,4]
popt_g, pcov_g = curve_fit(fit_func, f[12:-43],noms(g)[12:-43],p0)

fig, ( plt2) = plt.subplots(1, 1)
plt2.loglog(f[12:-43],noms(g)[12:-43], linestyle="None", marker=".", label="Messdaten")
plt2.loglog(f[12:-43], fit_func(f[12:-43], *popt_g), label="Fit")
plt2.set_xlabel("Frequenz / Hz")
plt2.set_ylabel("g(f)")
plt2.legend()
_=plt2.set_title("Diag. 2: Frequenzgang mit Fit")
```



Numerische Integration

Wir wollen nun das B aus Gleichung (5) numerisch berechen:

In [3]:
```
import scipy.integrate as integrate

def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2

Bn , Bs =integrate.quad(fit_func_square, f[12], f[-43], args=tuple(popt_g))
B=uf(Bn, np.sqrt(Bs))
out("B",B,"Hz")
```

$B = (47363308601.28 \pm 0.32)\ \mathrm{Hz}$

Berechnung der Boltzmann-Konstanten

Wir berechen die Boltzmannkonstante indem wir zunächst die Differenz

$$\begin{aligned} D &= \left(U_{aus}^2 - U_V^2\right) \\ \Delta D &= \sqrt{\left(2U_{aus}\Delta U_{aus}\right)^2 + \left(2U_V\Delta U_V\right)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

gegen den Widerstand auftragen. Wir fitten eine Gerade um die Stiegung c zu erhalten, welche nach der Nyquist-Beziehung gerade

$$c = 4kTB \tag{10}$$

ist. Dann ist

$$k = \frac{c}{4TB} \tag{11}$$

Wobei sich die Fehler zu

$$\begin{aligned} \Delta k_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \\ \Delta k_{sys} &= k \cdot \frac{\Delta B}{B} \end{aligned} \tag{12}$$

ergibt. Vereinfachend durften wir für B einen relativen Fehler von 2% annehmen.

Wir beurteilen die Güte des Fits anhand der χ^2-Summe

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_i^N \left(\frac{y_i - x_i}{\Delta y_i}\right)^2 = \sum_i^N \left(\frac{y_i - x_i}{\sqrt{(\Delta f_i)^2 + (b\cdot\Delta x_i)^2}}\right)^2 \\ \chi^2_{\text{red}} &= \chi^2/dof \end{aligned} \tag{13}$$

wobei die y_i die Funktionswerte und die x_i die Messwerte sind. Schließlich berechnen wir die Fitwahrscheinlichkeit, also dass bei einer Wiederholungsmessung ein größerer oder gleicher χ^2-Wert erhalten wird. Zum Schluss bestimmen wir noch die Abweichung vom Lieraturwert.

In [5]:
```
df=pd.read_csv("rauschen.csv")
U_v=float(df.loc[df["R"]==0,"μ [mV]"])
D_U_v=float(df.loc[df["R"]==0,"Δμ [mV]"])
df["D [mV]"]=df["μ [mV]"]**2-U_v
df["ΔD [mV]"]=np.sqrt((2*df["μ [mV]"]* df["Δμ [mV]"])**2+(2*U_v*D_U_v)**2)

popt, pcov = curve_fit(fit_propline, df["R"],df["D [mV]"], sigma = np.sqrt(quad_add([df["ΔR"],df["ΔD [mV]"]

chisquare=np.sum(((fit_propline(df["R"],*popt)-df["D [mV]"])**2/df["D [mV]"]**2))
dof=5 #degrees of freedom, Freiheitsgrad
chisquare_red=chisquare/dof
out("\\chi^2",chisquare,"")

out("\\chi^2_{red}",chisquare_red,"")

from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
#print("Wahrscheinlichkeit="+prob+"%")


fig, (plt1) = plt.subplots(1, 1)
plt1.errorbar(df["R"], df["D [mV]"], yerr=df["ΔD [mV]"], xerr=df["ΔR"],  fmt=".")

fig.suptitle('Diag. 3: $D$ in Abhängigkeit des Widerstandes')
fig.set_size_inches(15,6)
#fig.set_dpi(diag_dpi)
plt1.grid(ls='dotted')
plt1.plot(df["R"], fit_propline(df["R"], *popt),label="gefittete Ausgleichsgerade")

plt1.errorbar(df["R"], df["D [mV]"], yerr=df["ΔD [mV]"], xerr=df["ΔR"], fmt = '.b',markersize=4, capsize =
_=plt1.set(ylabel='D [mV²]', xlabel='R [Ω]')
_=plt1.legend()


out("\\text{Fitwahrscheinlichkeit}",prob,"\\%")

T=uf(273.15+22.4,0.2)
m=uf(popt[0],np.sqrt(pcov[0][0]))
k_wstat=(m*10**-9)/(4*T*B.n)
k=[k_wstat.n,k_wstat.n*(0.02),k_wstat.s]

def round_up(n, decimals = 0):
    multiplier = 10 ** decimals
    return np.ceil(n * multiplier) / multiplier

def out_sys_std(name,c,zp=0,decimals=0,unit=""):
    if zp==0:
        pass
        display(Markdown( "$ "+name+" = ( " +"{:.{}f}".format(round(c[0]*10**(-zp),decimals), decimals)+" \
    else:
        display(Markdown( "$ "+name+" = ( " + "{:.{}f}".format(round(c[0]*10**(-zp),decimals),decimals)+" \

out_sys_std("k",k,-23,3,"J/K")

k_lit=1.380649e-23
sig=(k[0]-k_lit)/np.sqrt(k[1]**2+k[2]**2)
out("\\sigma_{k,lit}",sig)
```

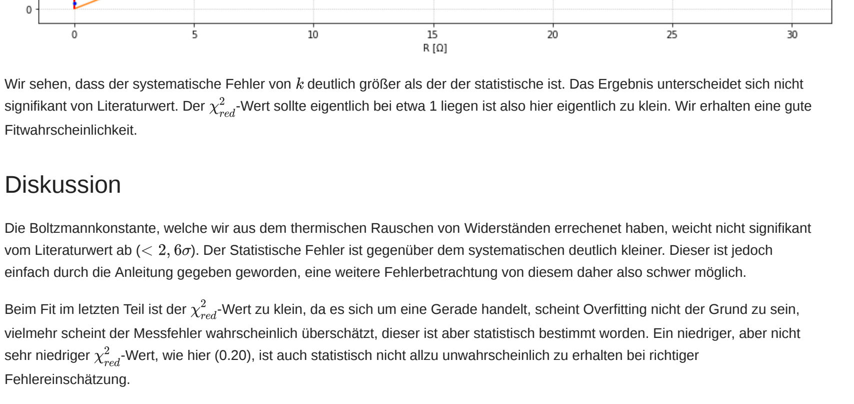
$\chi^2 = 1.01$

$\chi^2_{red} = 0.20$

$\text{Fitwahrscheinlichkeit} = 96.00\%$

$k = (1.459 \pm 0.030\,\text{syst.} \pm 0.011\,\text{stat.})10^{-23} J/K$

$\sigma_{k,lit} = 2.53$



Wir sehen, dass der systematische Fehler von k deutlich größer als der der statistische ist. Das Ergebnis unterscheidet sich nicht signifikant von Literaturwert. Der χ^2_{red}-Wert sollte eigentlich bei etwa 1 liegen ist also hier eigentlich zu klein. Wir erhalten eine gute Fitwahrscheinlichkeit.

Diskussion

Die Boltzmannkonstante, welche wir aus dem thermischen Rauschen von Widerständen errechenet haben, weicht nicht signifikant vom Literaturwert ab ($< 2,6\sigma$). Der Statistische Fehler ist gegenüber dem systematischen deutlich kleiner. Dieser ist jedoch einfach durch die Anleitung gegeben geworden, eine weitere Fehlerbetrachtung von diesem daher also schwer möglich.

Beim Fit im letzten Teil ist der χ^2_{red}-Wert zu klein, da es sich um eine Gerade handelt, scheint Overfitting nicht der Grund zu sein, vielmehr scheint der Messfehler wahrscheinlich überschätzt, dieser ist aber statistisch bestimmt worden. Ein niedriger, aber nicht sehr niedriger χ^2_{red}-Wert, wie hier (0.20), ist auch statistisch nicht allzu unwahrscheinlich zu erhalten bei richtiger Fehlereinschätzung.

Zusammenfassend konnten wir in diesem Versuch gut das Phänomen des thermischen Rauschens beobachten und daraus die Boltzmannkonstante bestimmen.

Vorversuch:
Je größer der Widerstand ist, desto größer ist auch die Mittlere quadratische Spannung, alle Frequenzen bis über 6 MHz sind zu gleichen Anteilen vertreten, danach fällt die Kurve ab. Wird ein Filter verwendet, geschieht dies schon unter 0,6 MHz

Mittelwert μ und Standardabweichung des Effektivwerts der Spannung über n Messungen bei einem Widerstand von R

R	ΔR	n	Std.abw. [mV]	μ [mV]	Δμ [mV]
5	0,025	126	0,00943	2,4166	0,000840091170411387
10	0,05	137	0,0115	3,125	0,000982511306374275
15	0,075	106	0,0140	3,7016	0,0014
20	0,1	105	0,0143	4,2082	0,0013955371043164
25	0,125	118	0,0146	4,663	0,00134403894213155
30	0,15	111	0,0170	5,078	0,0016
0	0	107	0,00576	1,3877	0,134154022584867

Zimmertemperatur: (22,4±0,2)°C
Fehler durch Schwankung geschätzt

Fehler Voltmeter: 0,3%

Einstellungen zum Messen des Frequenzgangs:
- Dämpfung: $D = 0{,}001 \pm 0{,}2\,\%$
- Anfangsfrequenz: 100Hz
- Amplitude: $0{,}2V_{rms}$
- Vertical Scale: 5dB/div
- V-Range: 1MHz
- Frequenzschritte: 20 %
- Automatic Voltage Scale