Protokoll PAP2 Versuch 221: Adiabatenkoeffizient

Leonard Scheuer

Motivation/Versuchsziel

Der Adiabatenkoeffizient beschreibt das Verhältnis der Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen und konstantem Druck in Gasen und ist damit eine wichtige Größe zur Charakterisierung von ebensolchen. Dieser soll in diesem Versuch auf zwei verschiedene Arten gemessen werden.

Grundlagen

Der Adiabatenkoeffizient ist das Verhältnis zwischen den spezifischen Wärmekapazitäten eines Gases bei isochorer- bzw. isobarer Zustandsänderung. Er ergibt sich zu:

$$\kappa = \frac{c_v}{c_p} = \frac{c_v}{c_v + R} \tag{1}$$

wobei R die universelle Gaskonstante ist. Thermodynamische Prozesse nennt man adiabatisch, wenn kein Wärmeaustausch stattfindet. Für diese gilt die Poissongleichung:

$$p \cdot V^\kappa = p_0 \cdot V_0^\kappa = const \tag{2}$$

Adiabatenkoeffizient nach Clément und Desormes

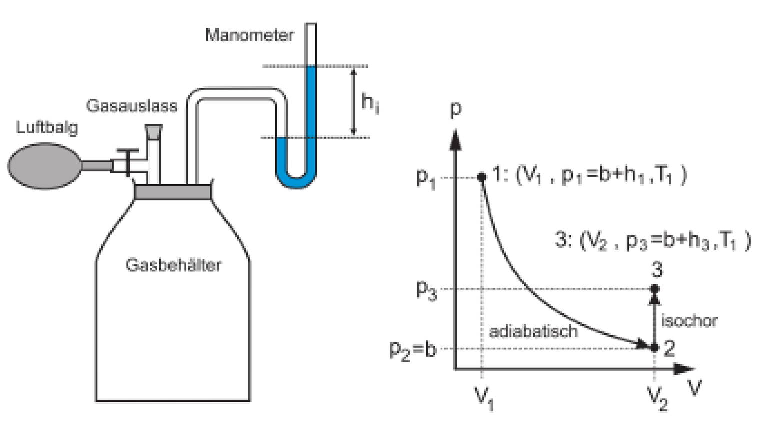

Abbildung 1: Versuchsaufbau und pV-Diagramm des Versuches zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes (Quelle: Script)

Im Behälter (siehe Abb. 1) befindet sich zu Beginn Luft im Umgebungszustand. Um zu Zustand 1 zu kommen, wird nun mit dem Luftbalg der Druck erhöht und gewartet bis das Gas wieder die Raumtemperatur angenommen hat. Ist b der Umgebungsluftdruck und h_1 die Höhendifferenz des Manometers, so ist:

$$p_1 = b + h_1 \tag{3}$$

Wird nun der Behälter für eine kurze Zeit geöffnet, sodass Gas ausströmen kann, jedoch noch kein Wärmeaustausch stattfinden kann, findet eine Volumenvergrößerung und eine Drucksenkung auf Umgebungsdruck entlang der in Abb. 1 gezeigten Adiabaten statt. Man befindet sich nun im Zustand 2. Ist ΔV die Volumenänderung und ΔT die Temperaturänderung, so erhält man für den 2. Zustand:

$$V_2 = V_1 + \Delta V \tag{4}$$
$$p_2 = b \tag{5}$$
$$T_2 = T_1 - \Delta T \tag{6}$$

Da das Gas abgekühlt worden ist, findet nun ein isochorer Aufwärmprozess zurück auf Raumtemperatur zu Zustand 3 statt. Hier gilt:

$$V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V \tag{7}$$
$$p_3 = b + h_3 \tag{8}$$
$$T_3 = T_1 \tag{9}$$

Es gilt die Poissongleichung:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \tag{10}$$
$$\therefore (b + h_1)\, V_1^\kappa = b(V_1 + \Delta V)^\kappa \tag{11}$$

Wir machen die (experimentell begründbare) Annahme, dass $\Delta V << V_1$ und erhalten:

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1} \tag{12}$$

Da $T_1 = T_3$, ist dort das Gesetz von Boyle-Mariotte anwendbar, und man erhält:

$$(b + h_1)\, V_1 = (b + h_3)\, (V_1 + \Delta V) \tag{13}$$

Da auch $h_3 << b$ ist, ist der Therm $\Delta V p_3$ vernachlässigbar. Wir erhalten schließlich:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{14}$$

also für den Adiabatenkoeffizient:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{15}$$

Adiabatenkoeffizient nach Rüchardt

In diesem Versuchsaufbau wird der Adiabatenkoeffizient durch die Schwingung eines Schwingkörpers ermittelt. Der Versuchsaufbau ist wie in Abb. 2 dargestellt. Hier schwingt ein Schwingkörper, getrieben durch ein Gas aus einer Druckflasche, in einer Röhre auf und ab, wobei er im Nulldurchgang ein Loch in ebendieser passiert. Das Gas kann also ausströmen, wenn sich der Körper darüber befindet, sonst aber nicht. Im Gleichgewicht ist die Kraft auf den Schwingkörper durch das Gas im Behälter gleich der Kraft durch äußeren Druck und Schwerkraft. Also gilt damit insbesondere:

$$p = p_0 + p_s = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{16}$$

wobei p der Druck im Behälter und A der Querschnitt des Schwingkörpers ist.

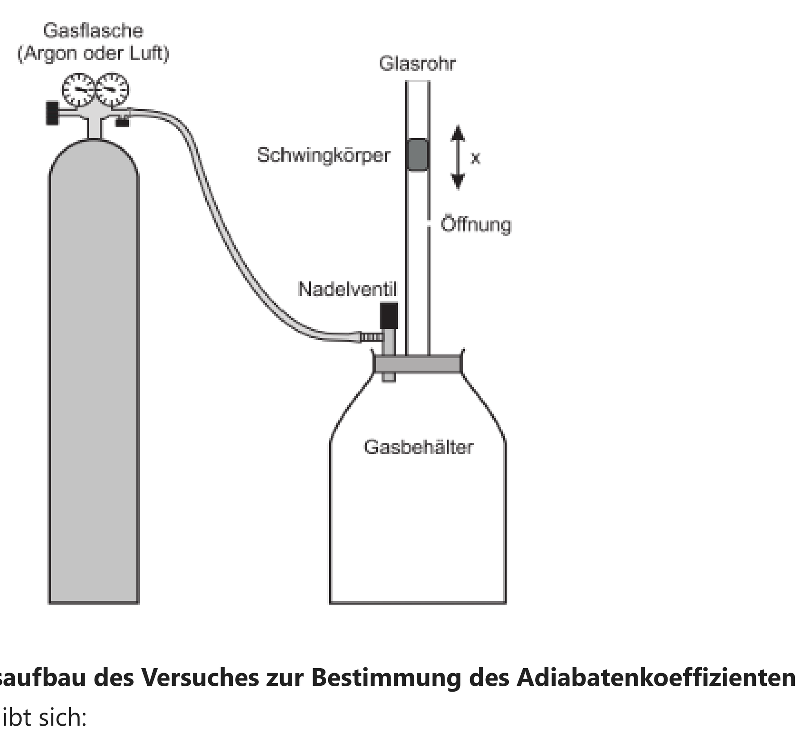

Abbildung 2: Versuchsaufbau des Versuches zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt (Quelle: Script)

Aus der Possiongleichung ergibt sich:

$$\mathrm{d}p = \kappa \frac{p}{V} \mathrm{d}V \tag{17}$$

Mit Newton

$$A \cdot \mathrm{d}p = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{18}$$

ergibt sich eingesetzt:

$$\kappa \frac{A^2}{m} \cdot \frac{p}{V} x = \kappa \frac{\pi^2 r^4}{m} \cdot \frac{p}{V} x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{19}$$

Wobei A bereits eingesetzt wurde. r beschreibt nun den Zylinderradius. Setzen wir aus (16) ein, so erhalten wir einen harmonischen Oszillator mit Schwingungszeit

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}}. \tag{20}$$

Und daraus schließlich:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} = \frac{4mV}{r^4 T^2 (p_L + \frac{mg}{A})} = \frac{4mV}{r^2 T^2 (r^2 p_L + \frac{mg}{\pi})} \tag{21}$$

Durchführung

Material

- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg
- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

Adiabatenkoeffizient nach Clément und Desormes

Wie oben beschrieben erhöht man zunächst den Luftdruck und wartet, bis sich im Gasbehälter wieder Raumtemperatur einstellt. Die Höhe des Wasserstandes wird aufgenommen. Durch kurzes (etwa 2 Sekunden) Öffnen des Stopfens wird der Überdruck abgelassen. Wieder wird Temperaturausgleich abgewartet und Wasserhöhe protokolliert. Der Versuch wird fünf Mal wiederholt.

Adiabatenkoeffizient nach Rüchardt

Das Reduzierventil der Gasflasche wir auf etwa 0,4 Bar eingestellt. Das Nadelventil wird jetzt so eingestellt, dass sich eine Schwingung um die Mitte des Rohres einstellt. Die Messung wird erst gestartet, sobald sich der Behälter vollständig mit dem jeweiligen Gas gefüllt hat. Die Zeit für etwa 50 Schwingungen wird gemessen. Weitere Parameter sind am Aufbau notiert. Die Messung wird einmal mit Luft und einmal mit Argon durchgeführt.

Messdaten

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Clement und Desormes

#	Obere Säule h_1/cm	Untere Säule h_1/cm	Obere Säule h_3/cm	Untere Säule h_3/cm	h_1/cm	h_3/cm
1	62.0 ± 0.2	41.7 ± 0.2	49.4 ± 0.2	44.5 ± 0.2	20.30 ± 0.28	4.90 ± 0.28
2	49.4 ± 0.2	44.5 ± 0.2	62.6 ± 0.2	61.2 ± 0.2	4.90 ± 0.28	1.40 ± 0.28
3	61.3 ± 0.2	42.5 ± 0.2	54.2 ± 0.2	49.6 ± 0.2	18.80 ± 0.28	4.60 ± 0.28
4	54.2 ± 0.2	49.6 ± 0.2	52.5 ± 0.2	51.3 ± 0.2	4.60 ± 0.28	1.20 ± 0.28
5	61.7 ± 0.2	42.0 ± 0.2	54.3 ± 0.2	49.5 ± 0.2	19.70 ± 0.28	4.80 ± 0.28

Fehler Höhe Säule geschätzt durch Ablesegenauigkeit

Fehler Differenz: Quadratische Summe der Säulenhöhenfehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$p_{\text{Luft}} = (1011.4 \pm 0.2) mbar$ (Fehler geschätzt durch Schwankung)

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchhardt

Druckluft:

$m = (26.116 \pm 0.002) g$

$V = (5370 \pm 5) cm^3$

$2r = (15.95 \pm 0.02) mm$

$p_{\text{Luft}} = (1011.1 \pm 0.2) mbar$ Fehler geschätzt durch Schwankung

Argon:

$m = (26.006 \pm 0.002) g$

$V = (5460 \pm 5) cm^3$

$2r = (15.97 \pm 0.05) mm$

$p_{\text{Luft}} = (1011.3 \pm 0.2) mbar$ Fehler geschätzt durch Schwankung

Gas	$50T$/s	T/s
Luft	49.5 ± 0.5	0.99 ± 0.01
Argon	46.4 ± 0.5	0.95 ± 0.01

Fehler $50T$ geschätzt durch Reaktionszeit

Fehler $\Delta T = \frac{1}{50} \Delta 50T$ nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

Auswertung

Adiabatenkoeffizient nach Clément und Desormes

Aus (15) können wir den Adiabatenkoeffizienten bestimmen. Für den Fehler ergibt sich:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{2h_1 - h_3}{(h_1 - h_3)^2} \Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{h_1}{(h_1 - h_3)^2} \Delta h_3\right)^2} \tag{22}$$

Anschließend wird gemittelt.

In [13]:
```
import numpy as np
from IPython.display import Markdown, display, Latex

def round_up(n, decimals = 0):
    multiplier = 10 ** decimals
    return np.ceil(n * multiplier) / multiplier

def outwstd(name,c,Dc,zp=0,decimals=2,unit=""):
    if zp==0:
        display(Markdown("$"+name+" = (" +"{:.{}f}".format(round(c*10**(-zp),decimals),decimals)+" \pm "+"{:.{}
    else:
        display(Markdown( "$ "+name+" = ( " +"{:.{}f}".format(round(c*10**(-zp),decimals),decimals)+" \pm "+"{:

def out_no_error(name,c,zp=0,decimals=0,unit=""):
    if zp==0:
        display(Markdown("$"+name+" = " +"{:.{}f}".format(round(c*10**(-zp),decimals),decimals)+unit+"$"))
    else:
        display(Markdown( "$ "+name+" = " +"{:.{}f}".format(round(c*10**(-zp),decimals),decimals)+" \cdot 10^{

def sigma(g1,Dg1,g2,Dg2):
    return abs((g1-g2)/np.sqrt(Dg1**2+Dg2**2))

cd = np.loadtxt('clementDesormes.txt', unpack = True)
kappa = cd[0]/(cd[0]-cd[2])
kappa_err = np.sqrt((((2*cd[0]-cd[2])/(cd[0]-cd[2])**2)*cd[1])**2 + (cd[0]/(cd[0]-cd[2])**2*cd[3])**2)
kappa_bar = np.mean(kappa)
kappa_bar_err = np.sum(kappa_err**2)/len(kappa)
outwstd("\kappa_{L1}",kappa_bar,kappa_bar_err,0,3)
```

$\kappa_{L1} = (1.343 \pm 0.022)$

Adiabatenkoeffizient nach Rüchardt

Mit (21) ergibt sich hier der Fehler

$$\Delta\kappa = \kappa \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \frac{r^4 b^2 \left(\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right) + \frac{g^2}{\pi^2}\Delta m^2}{\left(r^2 b + \frac{mg}{\pi}\right)^2}} \tag{23}$$

In [14]:
```
r = np.loadtxt('ruechardt.txt', unpack = True)

r[0:2] *= 10**(-3)
r[2:4] *= 10**(-6)
r[4:6] *= 10**(-3)
r[6:8] *= 10**2

kappa2 = 4*r[0]*r[2]/(r[4]**2*r[8]**2*(r[4]**2*r[6]+r[0]*9.80984/np.pi))
kappa2_err = kappa2 * np.sqrt((r[1]/r[0])**2 + (r[3]/r[2])**2 + (2*r[9]/r[8])**2 + (2*r[5]/r[4])**2 + (r[4]**4*

outwstd("\kappa_{L2}",kappa2[0], kappa2_err[0],0,3)
outwstd("\kappa_{Ar}",kappa2[1], kappa2_err[1],0,3)
```

$\kappa_{L2} = (1.382 \pm 0.029)$

$\kappa_{Ar} = (1.512 \pm 0.035)$

Wir wollen nun die Werte untereinander und mit den Literaturwerten (Script, engineeringtoolbox.com/specific-heat-ratio-d_602.html) vergleichen:

In [17]:
```
out_no_error("\sigma_{L1,2}",sigma(kappa_bar,kappa_bar_err,kappa2[0],kappa2_err[0]),zp=0,decimals=2,unit="")
out_no_error("\sigma_{L1,Lit}",sigma(kappa_bar,kappa_bar_err,1.401,0.001),zp=0,decimals=2,unit="")
out_no_error("\sigma_{L2,Lit}",sigma(kappa2[0],kappa2_err[0],1.401,0.001),zp=0,decimals=2,unit="")
out_no_error("\sigma_{Ar,Lit}",sigma(kappa2[1],kappa2_err[1],1.648,0.001),zp=0,decimals=2,unit="")
```

$\sigma_{L1,2} = 1.08$

$\sigma_{L1,Lit} = 2.69$

$\sigma_{L2,Lit} = 0.67$

$\sigma_{Ar,Lit} = 3.95$

Diskussion

In diesem Versuch haben wir erfolgreich den Adiabatenkoeffizient von Luft zunächst über die Methode von Clément und Desormes und dann über jene von Rückhardt bestimmt. Erstere weist eine deutlich größere Abweichung vom Literaturwert auf, die sich aber noch nicht Signifikant davon unterscheidet (2.69σ). Letztere steht in sehr guter Übereinstimmung zum Literaturwert (0.67σ). Beide Messungen unterscheiden sich nicht signifikant (1.08σ). Der Fehler ersterer Methode ist etwas kleiner, angesichts der höheren Abweichung zum Literaturwert ist es aber schwierig eine Aussage dazu zu treffen, welche Methode hier zu bevorzugen wäre.

Die Messung des Argon-Adiabatenkoeffizienten nach Rückhardt weicht signifikant vom Literaturwert ab (3.95σ). Hier scheint also ein unbeachteter systematischer Fehler vorzuliegen. Die wahrscheinlichste Möglichkeit scheint zu sein, dass die Schwingung nicht symmetrisch um den Luftauslass stattfand, da dies im Experiment äußerst schwierig durch das Nadelventil einzustellen und auch aufgrund der ständigen Bewegung schwer abzuschätzen war, ob die Schwingung nach den Einstellen wirklich dort verharrt oder noch (langsam) "driftet". Auch schien das Zählen der Schwingungen und Zeitstoppen allein schon durch die Reaktionszeit, und die Gefahr sich zu verzählen, etwas ungenau. Dies könnte jedoch leicht durch eine elektronische Messung ersetzt werden (z.B. Lichtschranke). Der Fehler würde zwar auch durch das Zählen von mehr Schwingungen anteilig kleiner werden, jedoch steigt dann vermutlich durch die Repetitivität des Zählvorgangs die Wahrscheinlichkeit des Verzählens.

Beiden Methoden ist gemein, dass sie perfekt adiabatische Prozesse annehmen, wenngleich diese praktisch anders aussehen dürften. Während ersterer Aufbau zumindest über eine Dämmung gegen größeren Wärmeaustausch zu verfügen scheint, ist letzterem so etwas nicht gegeben. Der Fehler ist hier (in beiden Fällen) sehr schwer abzuschätzen, da praktisch keine weiteren Informationen über den tatsächlichen Prozess vorliegen. Eine kontinuierliche Druck/- Volumen-/Temperatumessung könnte hier näheren Aufschluss liefern.