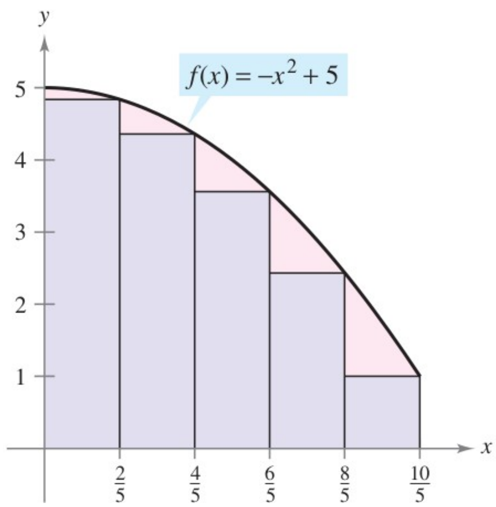
1.3 Sumas de Riemann.

El problema principal del Cálculo Integral, es hallar el área bajo la curva, para eso se pueden dibujar rectángulos en la función, por ejemplo:



Con lo cual se puede aproximar al área bajo la curva en un intervalo $[a,b]$, pero no es tan exacta; por lo tanto la formula que general con la cual se puede aproximar de una forma más precisa es:

$$A_T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{donde} \quad xi = a + (\Delta x) i \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

La formula anterior se le conoce como área bajo la curva utilizando sumas de Riemann

Ejemplo

Dada la función y el intervalo, hallar el área bajo la curva.

$f(x) = 6x - 4$ en $[2,4]$

SOLUCIÓN:

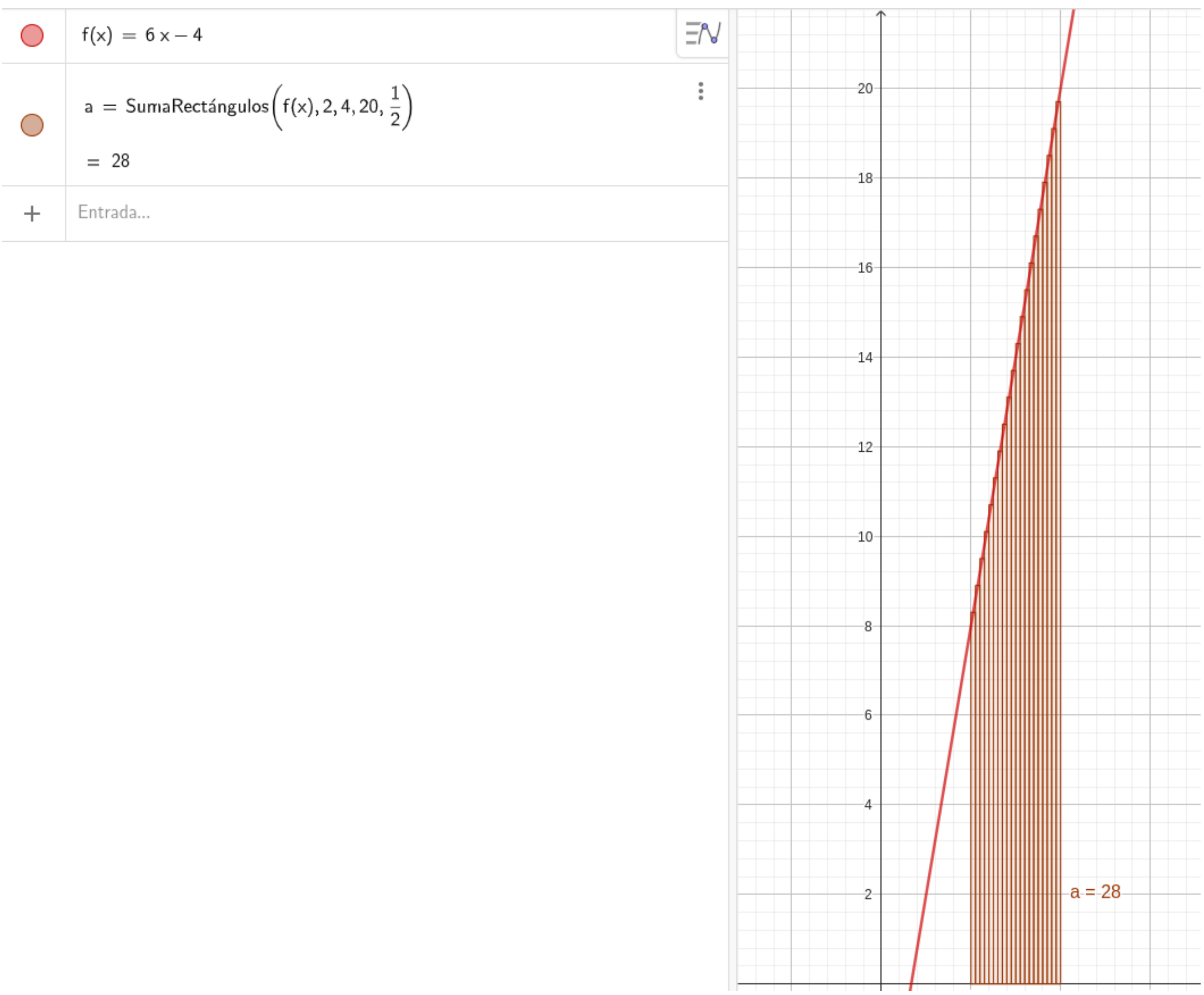
Se desarrollará paso a paso

$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$	Hallar Δx
$xi = 2 + \frac{2}{n} i$	Hallar xi
$f(xi) = f\left(2 + \frac{2}{n} i\right) = 6\left(2 + \frac{2}{n} i\right) - 4$ $= 12 + \frac{12}{n} i - 4 = 8 + \frac{12}{n} i$	Hallar $f(xi)$

$f(xi)\Delta x=\left(8+\frac{12}{n}i\right)\frac{2}{n}=\frac{16}{n}+\frac{24}{n^2}i$	Calcular $f(xi)\Delta x$
$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16}{n}+\frac{24}{n^2}i\right)=\frac{16}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{24}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$ $=\frac{16}{n}(1)(n)+\frac{24}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{16n}{n}+\frac{24n(n+1)}{2n^2}$ $=16+\frac{12(n+1)}{n}=16+\frac{12n}{n}+\frac{12}{n}=16+12+\frac{12}{n}$ $=28+\frac{12}{n}$	Calcular $\sum_{i=1}^{n}f(xi)\Delta x$, para esto se deben aplicar las propiedades de la notación sigma antes vistas y las fórmulas.
$\lim_{n\to\infty}\left(28+\frac{12}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}28+\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}=28+0=28$	Hallar $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(xi)\Delta x$

El área buscada es 28 unidades cuadradas.

En **Geogebra** queda de la siguiente forma:



Docente de CB: Jesús Hernández León.

Ejemplo

Dada la función y el intervalo, hallar el área bajo la curva.

$f(x)=x^2-4x$ en $[1,4]$

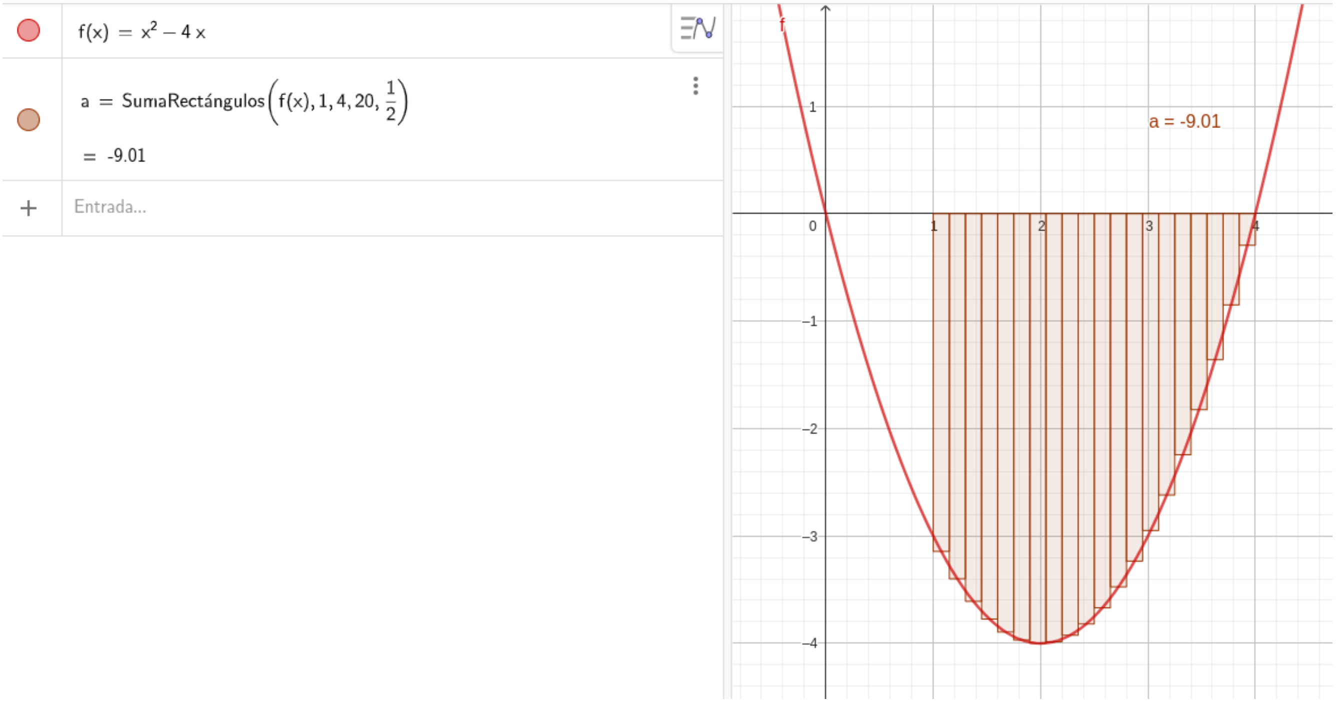
SOLUCIÓN:

Se desarrollará paso a paso

$\Delta x=\frac{4-1}{n}=\frac{3}{n}$	Hallar Δx
$xi=1+\frac{3}{n}i$	Hallar xi
$f(xi)=f\left(1+\frac{3}{n}i\right)=\left(1+\frac{3}{n}i\right)^2-4\left(1+\frac{3}{n}i\right)$ $=1+\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2-4-\frac{12}{n}i=-3-\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2$	Hallar $f(xi)$
$f(xi)\Delta x=\left(-3-\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\right)\frac{3}{n}=-\frac{9}{n}-\frac{18}{n^2}i+\frac{27}{n^3}i^2$	Calcular $f(xi)\Delta x$
$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{9}{n}-\frac{18}{n^2}i+\frac{27}{n^3}i^2\right)=-\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$ $=-\frac{9}{n}(1)(n)-\frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $=-9-\frac{9}{n}(n+1)+\frac{9}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{2}$ $=-9-9-\frac{9}{n}+\frac{9}{n^2}\frac{2n^2+3n+1}{2}$ $=-18-\frac{9}{n}+9+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}=-9-\frac{9}{n}+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}$	Calcular $\sum_{i=1}^{n}f(xi)\Delta x$, para esto se deben aplicar las propiedades de la notación sigma antes vistas y las fórmulas.
$\lim_{n\to\infty}\left(-9-\frac{9}{n}+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right)$ $=\lim_{n\to\infty}(-9)-\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{27}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2n^2}$ $=-9-0+0+0=-9$	Hallar $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(xi)\Delta x$

El área buscada es 9 unidades cuadradas, el signo negativo indica que el área está por debajo del eje x.

En Geogebra con 20 rectángulos queda



Ejercicios

Dada la función y el intervalo, hallar el área bajo la curva, utilizando Sumas de Riemann.

57. $y = -4x + 5, \quad [0, 1]$

59. $y = x^2 + 2, \quad [0, 1]$

61. $y = 25 - x^2, \quad [1, 4]$

63. $y = 27 - x^3, \quad [1, 3]$