1.2 Notación sumatoria.

La **notación sigma** es una notación concisa para sumas. Ésta notación recibe el nombre debido a que utiliza la letra griega en mayúscula sigma (Σ).

NOTACIÓN SIGMA
La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como $$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ donde i es el **índice de suma**, a_i es el **i-ésimo término** de la suma y los **límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

Ejemplos utilizando la notación sigma

$$a)\sum_{i=1}^{6} i=1+2+3+4+5+6=21$$

$$b)\sum_{i=0}^{5} (i+1)=1+2+3+4+5+6=21$$

$$c)\sum_{j=3}^{7} j^2=3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=135$$

$$d)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2+1)=\frac{1}{n}(1^2+1)+\frac{1}{n}(2^2+1)+\ldots+\frac{1}{n}(n^2+1)$$

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i, j y k.

Propiedades de linealidad de la notación sigma

1. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

La propiedad 1 se le conoce como el producto de una función con una constante k. La propiedad 2 se le conoce como la suma o resta de dos funciones.

Ejemplo

Hallar el resultado de:

$$\sum_{k=1}^{4} (2k+3)$$

SOLUCIÓN:

$\sum_{k=1}^{4} 2k + \sum_{k=1}^{4} 3$ utilizar propiedad 2

$2\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 3$ utilizar propiedad 1

$2(1+2+3+4)+3+3+3+3=32$ resolver

Fórmulas de suma empleando la notación sigma

Para hallar el resultado de la notación sigma con un límite superior demasiado grande, es difícil desarrollar toda la suma; para esto existen algunas fórmulas, las cuales se enuncian a continuación.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ **2.** $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **4.** $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Ejemplo

Hallar el resultado de

$$\sum_{i=1}^{20} (i+1)^2$$

SOLUCIÓN:

No existe propiedad de linealidad para aplicar a un binomio al cuadrado, por lo tanto se desarrolla.

$$\sum_{i=1}^{20} (i^2+2i+1)$$

Se aplican las propiedades de linealidad

$$=\sum_{i=1}^{20} i^2+\sum_{i=1}^{20} 2i+\sum_{i=1}^{20} 1=\sum_{i=1}^{20} i^2+2\sum_{i=1}^{20} i+\sum_{i=1}^{20} 1=$$

Se aplican las fórmulas 1, 2 y 3, respectivamente

$$\frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}+2\frac{20(20+1)}{2}+1(20)=\frac{17220}{6}+2\left(\frac{420}{2}\right)+20=2870+420+20=3310$$

Ejemplo

Hallar el resultado de

$$\sum_{i=1}^{50}(6i^2-25)$$

SOLUCIÓN:

Se aplican las propiedades de la notación sigma

$$6\sum_{i=1}^{50} i^2-\sum_{i=1}^{50} 25$$

Se aplican las formulas 3 y 1, respectivamente

$$6\frac{50(50+1)(2(50)+1)}{6}-25(50)$$

Simplificar y hallar el resultado

$$\frac{1545300}{6}-1250=256300$$

Ejercicios

Realizar las siguientes sumas sin utilizar propiedades o formulas

1. $\sum_{i=1}^{6}(3i+2)$

2. $\sum_{k=5}^{8}k(k-4)$

3. $\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k^2+1}$

4. $\sum_{j=4}^{7}\frac{2}{j}$

5. $\sum_{k=1}^{4}c$

6. $\sum_{i=1}^{4}[(i-1)^2+(i+1)^3]$

Realizar las siguientes sumas utilizando propiedades y formulas

15. $\sum_{i=1}^{12}7$

17. $\sum_{i=1}^{24}4i$

19. $\sum_{i=1}^{20}(i-1)^2$

21. $\sum_{i=1}^{15} i(i-1)^2$