Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной интегральной внутренней связью

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$$u_0 = u_1,\ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N^2} \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{2}$$

где $u_j = u_j(t)$ гладкие функции при $t \geqslant 0$, а параметры α, γ – действительные числа. Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см. например [1], [2]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренними элементами цепочки.

Система (1), (2) очевидным образом имеет однородное нулевое решение $u_j(t) \equiv 0$. Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения при переходе через мнимую ось нулевого собственного числа. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров и асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

1 Спектральные свойства линеаризованной системы

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (1), (2):

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{3}$$

$$u_0 = u_1,\ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N^2} \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N. \tag{4}$$

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним замену

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j \tag{5}$$

где $x_j = -\dfrac{1}{2N} + \dfrac{j}{N}$, λ — собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент δ определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (3) с условиями (4). При подстановке замены (5) можно получить формулы для коэффициента δ и параметра α

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma+\lambda}\,\mathrm{sh}\,\delta}{\mathrm{ch}\,\delta x_k}, \tag{6}$$

где $x_k = \dfrac{1}{N}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$.

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим при каких критических значениях параметра α нулевое собственное значение переходит через мнимую ось. Подстановка $\lambda = 0$ в выражение (6) приводит к зависимости

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \mathrm{sh}\,\delta_u}{\mathrm{ch}\,\delta_u x_k}, \tag{7}$$

где $\delta_u = 2N\,\mathrm{arsh}\,\dfrac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$. Исходя из полученной формулы, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений* (1), (2) *нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость для значений, параметров α и γ, связанных формулой* (7).

Для системы (3), (4) изучим динамику поведения критической зависимости $\alpha_u(\gamma)$. В нашем случае количество уравнений считалось $N = 50$. Отметим, что увеличение N слабо сказывается на поведении функции $\alpha_u(\gamma)$. Как видно из рис. 1, график $\alpha_u(\gamma)$ близок к линейной функции $\alpha = -\gamma$. Построенная критическая зависимость позволяет получить области значений параметров, определяющих устойчивость нулевого решения. Так область S соответствует случаю устойчивого нулевого решения, U – случаю появления двух симметричных состояний равновесия. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

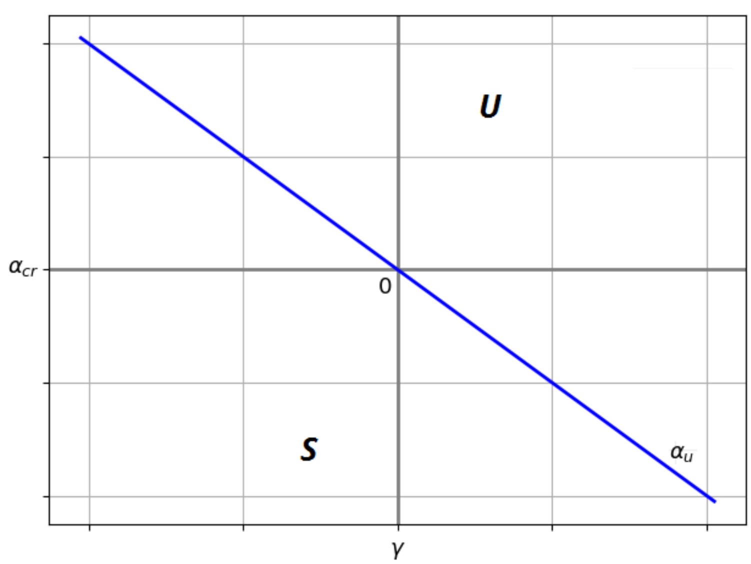

Рис. 1: Схематическая визуализация критической завивимости α_u

2 Локальный анализ поведения системы в окрестности нулевого решения

Методами малых возмущений (см. [3], [4]) построим режим, ответвляющийся от нулевого состояния равновесия системы (1), (2) для нулевого собственного значения λ матрицы соответствующей линеаризованной системы. Для этого введем в рассмотрение малый параметр ε, который косвенно характеризует собой отклонение от нуля. В нашем случае он обозначает переход из области S в область U по параметру α для фиксированного значения γ и принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u, \tag{8}$$

где α_u вычисляется по формуле (7).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (1), (2) по степеням малого параметра

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Здесь функции $u_j = u_j(s)$ зависят от медленного времени $s = \varepsilon t$, а $u_{j,0} = \rho(s) \operatorname{ch} \delta_u x_j$, где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \dfrac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$, $x_j = -\dfrac{1}{2N} + \dfrac{j}{N}$. Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (9) с учетом (8) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов $u_{j,0}$, $u_{j,1}$ и $u_{j,2}$:

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \le k < N,$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2(u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,0} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3, \tag{10}$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,2} + u_{k,0}. \tag{11}$$

Учитывая, что уравнение (1) содержит кубическое вычитаемое, и, тем самым, для функций $u_{j,1}$ система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (10), (11), можно получить укороченное уравнение на величину ρ

$$\rho' = \rho + d_0 \rho^3, \tag{12}$$

где коэффициент d_0 вычисляется по формуле:

$$d_0 = \frac{5\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u}{48 \operatorname{sh} \delta_u} - \frac{3}{4}. \tag{13}$$

Согласно численным результатам, для значений параметра $\gamma \geqslant 0$ удавалось выделить и промежутки, где значение d_0 оказывалось отрицательным, и где эта величина была положительной. Это говорит о том, что для $\gamma \geqslant 0$ имело место быть как дивергентная потеря устойчивости, в случае $d_0 < 0$, так и грубая, в случае $d_0 > 0$. В том случае, если значение параметра γ было отрицательным, величина d_0 всегда оказывалось положительной, т.е. происходила только грубая потеря устойчивости нулевого решения. График функции $d_0(\gamma)$ показан на рис. 2.

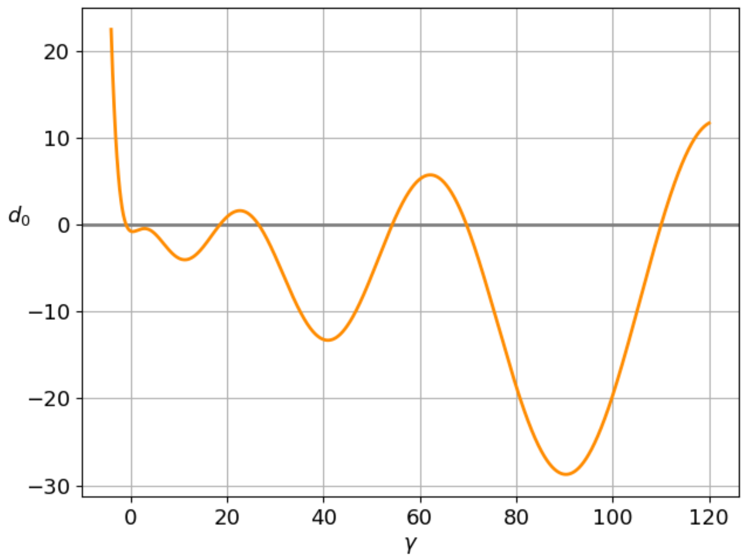

Рис. 2: График функции $d_0(\gamma)$

При условии, что $d_0 < 0$ уравнение (12) имеет ненулевое состояние равновесия $\phi_* = \sqrt{-\frac{1}{d_0}}$, причем ρ стремится к этому состоянию равновесия при $s \to +\infty$. Подставляя в нормальную форму (9) полученное значение ρ получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (1), (2) (см. также [3], [7]):

$$u_j = \pm\sqrt{-\varepsilon \frac{\phi_0}{d_0}} \operatorname{ch} \delta_u x_j + O(\varepsilon). \tag{14}$$

При условии, что $d_0 > 0$ происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (12) имеет ненулевое состояние равновесия $\rho = \rho_*$, где $\phi_* = d_0^{-\frac{1}{2}}$. При подстановке полученного значения ρ в нормальную форму (9), получаем асимптотическое приближение (14) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающиеся к нулевому решению системы (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ и отбирающие у него устойчивость (см. также [6], [8]).

Выводы

Для цепочки дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной интегральной внутренней связью были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят бифуркации нулевого состояния равновесия. Для значений параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см. например [10], [9]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см. например [5]).

Список литературы

[1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики. – ТМФ, 2020, т. 203 (1), с. 10—25.

[2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, т. 51 (8), с. 1400–1418.

[3] Глызин С. Д. Локальные методы анализа динамических систем. — Ярославль: ЯрГУ им. П.Г Демидова, 2006 – 91 с.

[4] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002 – 560 с.

[5] Кащенко С. А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием. – Моделирование и анализ информационных систем, 2017, т. 24 (2), с. 168–185.

[6] Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. – Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2012 – 196 с.

[7] Марсден Дж. Е., Мак-Кракен Д. Бифуркация рождения цикла и ее приложения – М.: Мир, 1980 — 368 с.

[8] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла – М.: Мир, 1985 — 280 с.

[9] Britton N. F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology. – New York: Academic Press, 1986. — 277 p.

[10] Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics – Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 4 (4), pp. 5119–5153.