Потеря устойчивости нулевого решения одного класса краевых задач со специальными краевыми условиями

Леонид Ивановский

$$\dot{T} = T'',$$

$$T(0,t) = 0, \quad T'(1,t) = f(1 - T(x_0,t))\sigma(1 - T(x_0,t)),$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1), \quad b > 0, \quad \alpha, \in \mathbb{R}.$$

$$f \equiv \left(1 - T\left(\frac{1}{2}, t\right)\right)^2.$$

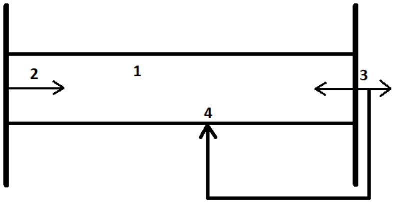
Rudyi A.S. Theoretical Fundamentals of the Method for Thermal Diffusivity Measurements from Auto-Oscillation Parameter in a System with a Thermal Feedback // International Journal of Thermophysics, Vol. 14, No. 1, 1993, pp. 159 –172.

Система регулирования температуры

$$\dot{T} = bT'' + f(T),$$

$$T'(0,t) = 0, \qquad T'(1,t) = \alpha T(x_0,t).$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1), \quad b > 0, \quad \alpha, \in \mathbb{R}.$$



Модель изменения численности популяции животных

$$\dot{N} = \beta\, N'' + r(1 - N^2)N,$$
$$N'(0,t) \,= 0, \qquad N'(1,t) \,= \alpha\, N(x_0, t - \tilde{T}),$$

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - \delta u^3,$$

$$u'(0,t) \ = 0, \qquad u'(1,t) \ = \alpha\, u(x_0,t) + (1-\delta)\beta u^3(x_0,t),$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1), \quad \delta \in \{0,1\}, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

- $\delta = 1:$

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) \ = 0, \qquad u'(1,t) \ = \alpha\, u(x_0,t). \tag{2}$$

- $\delta = 0:$

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) \ = 0, \qquad u'(1,t) \ = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t). \tag{4}$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{5}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t). \tag{6}$$

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0,$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha\, v(x_0).$$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \qquad c \in \mathbb{R}, \quad \mu = \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0: \ \mu = \sqrt{-\gamma}$,

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{sh}\sqrt{-\gamma}}{\mathrm{ch}\sqrt{-\gamma}x_0}, \qquad (7)$$

- $\lambda = i\omega: \ \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega}$,

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\mathrm{sh}\sqrt{-\gamma + i\omega}}{\mathrm{ch}\sqrt{-\gamma + i\omega}x_0}. \qquad (8)$$

Лемма

Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (5), (6) *нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость дивергентным способом для значений параметров* α_u *и* γ, *связанных между собой формулой* (7) *и колебательным, для значений параметров* α_c *и* γ, *связанных между собой уравнением* (8).

Система ДУ с диффузионным взаимодействием

$$j = \overline{1, N} \qquad k \in [1, N].$$

- $\delta = 1:$

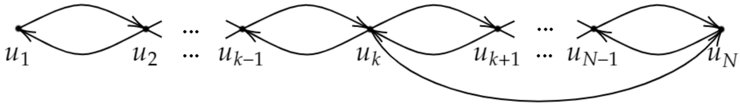
$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3,$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}\, u_k.$$

- $\delta = 0:$

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j,$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}\, u_k + \frac{\beta}{N}\, u_k^3.$$



Моделирование линейной краевой задачи

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N},$$
$$u_0 = u_1, \qquad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}\, u_k, \quad k \in [1, N].$$

$$u_j = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j, \qquad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

- $j \leqslant N - 1$:

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N}.$$

- $j = N$:

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}\, \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}.$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0:$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_k}, \qquad \delta_u = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}.$$

- $\lambda = \pm i\omega:$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \qquad \delta_c = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}.$$

$$N = 50.$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y). \end{cases}$$

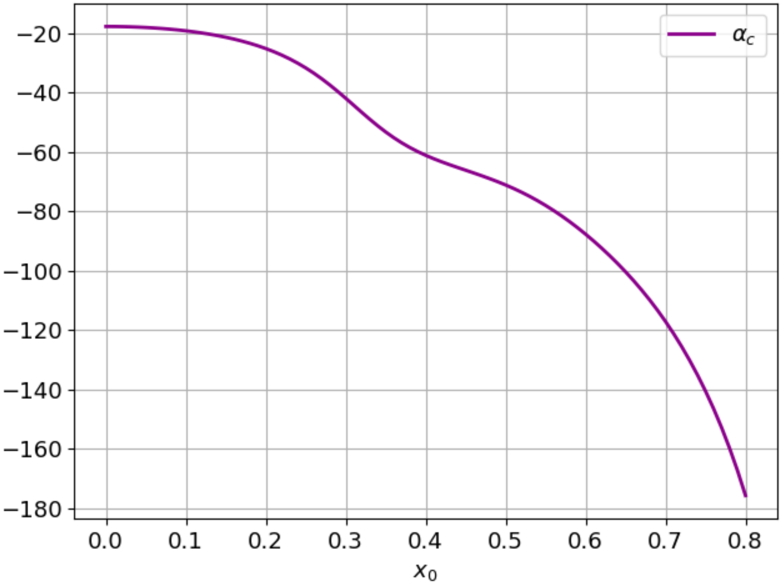
$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

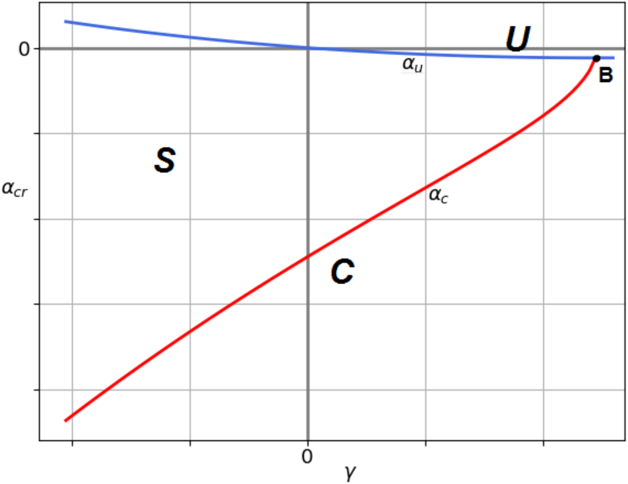
$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} y \cos y + \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y} - \operatorname{tg} y x_0 \operatorname{th} y x_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y \operatorname{sh} y \cos y - y \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{ch} y x_0 \cos y x_0}. \end{cases}$$

- $\gamma \neq 0,\ x_0 \neq 0.$

Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$

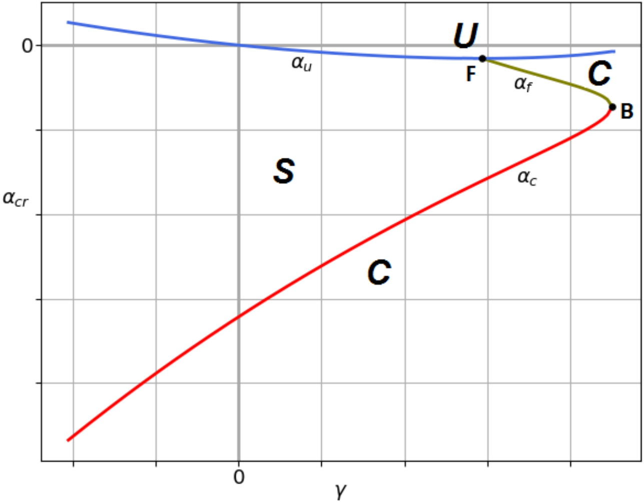


Схематическая визуализация $\alpha(\gamma)$ для $1 \leqslant k \leqslant 17$



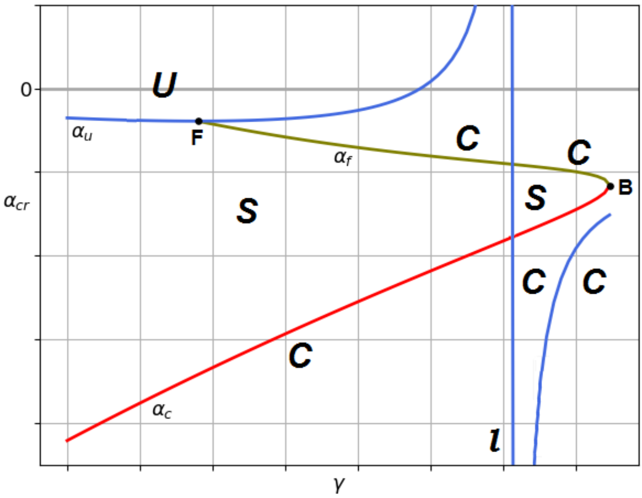
$$k = 1 \quad (x_0 = 0.01)$$

Схематическая визуализация $\alpha(\gamma)$ для $18 \leqslant k \leqslant 23$

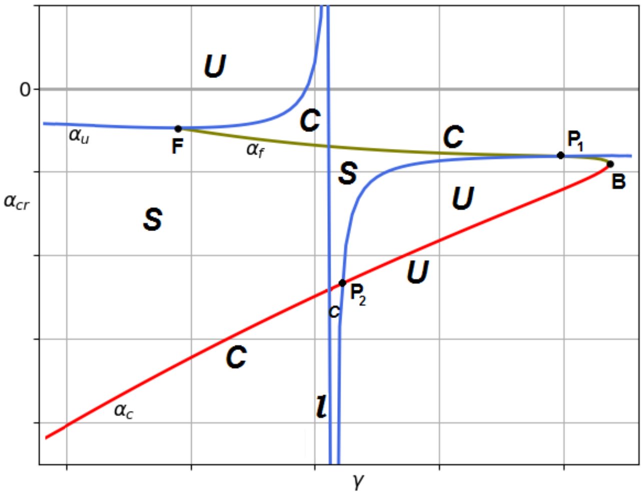


$$k = 22 \quad (x_0 = 0.43)$$

Схематическая визуализация $\alpha(\gamma)$ для $k = 24$

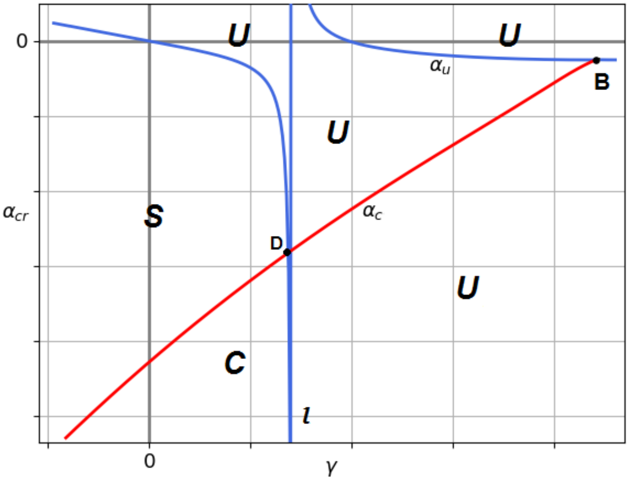


$$k = 24 \quad (x_0 = 0.47)$$



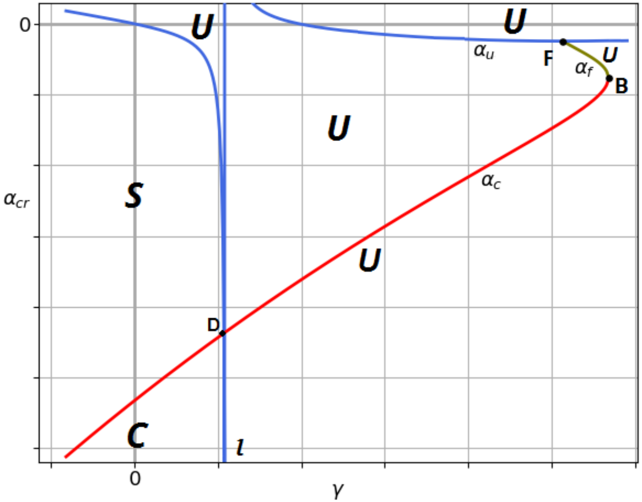
$$k = 25 \quad (x_0 = 0.49)$$

Схематическая визуализация $\alpha(\gamma)$ для $26 \leqslant k \leqslant 32$



$$k = 26 \quad (x_0 = 0.51)$$

Схематическая визуализация $\alpha(\gamma)$ для $33 \leqslant k \leqslant 38$



$$k = 34 \quad (x_0 = 0.67)$$

$$\Gamma_u = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leqslant k \leqslant 17, \\ \overline{\gamma}, & 18 \leqslant k \leqslant 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leqslant k \leqslant 50. \end{cases} \tag{9}$$

$$\Gamma_f = \begin{cases} \gamma_*, & 18 \leqslant k \leqslant 24, \\ \gamma_1, & k = 25. \end{cases} \tag{10}$$

$$\Gamma_c = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leqslant k \leqslant 24, \\ \gamma_2, & k = 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leqslant k \leqslant 50. \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_{25}} - \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\ \operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_{25}} = 0, \tag{12}$$

$$\gamma_* > \gamma_1 > \gamma_2 > l. \tag{13}$$

$$x_{25} = 0.49.$$

Лемма

Для всех значений $\gamma \leqslant \Gamma_u$, где Γ_u определяется выражением (9) и $\gamma_1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_2$, где γ_1, γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения (12), удовлетворяющими условию (13), критическая зависимость $\alpha_u(\gamma)$, рассчитываемая по формуле (7), позволяет выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением систем (1), (2) и (3), (4) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Лемма

Для всех значений $\overline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \Gamma_f$, где Γ_f определяется выражением (10), и $\gamma \leqslant \Gamma_c$, где Γ_c определяется выражением (11), критические зависимости $\alpha_f(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$, рассчитываемые по формуле (8), позволяют выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением систем (1), (2) и (3), (4) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2).$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Краевая задача с лин. отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3,$$
$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t).$$

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1,N},$$
$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}\, u_k.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0,$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t).$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3,$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t).$$

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x).$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3.$$

$$\phi_0 = \frac{2\sqrt{-\gamma}\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma}x_0}{\sqrt{-\gamma}\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh}\sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \operatorname{sh}\sqrt{-\gamma}x_0},$$

$$d_0 = -\frac{3\gamma\operatorname{sh}3\sqrt{-\gamma} + \alpha_u\sqrt{-\gamma}\operatorname{ch}3\sqrt{-\gamma}x_0}{16(\sqrt{-\gamma}\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh}\sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \operatorname{sh}\sqrt{-\gamma}x_0)} - \frac{3}{4}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,0} = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\delta_u x_j.$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3,$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,2} = \mathrm{ch}\,\delta_u x_j.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

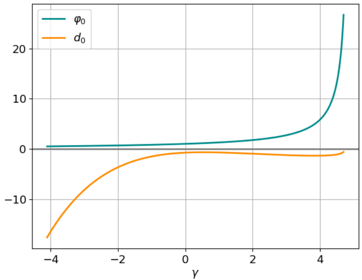
$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3.$$

$$\phi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch} \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k},$$

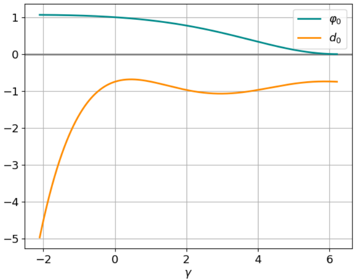
$$d_0 = -\frac{3\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u + \alpha_u \delta_u \operatorname{ch} 3\delta_u x_k}{16(\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k)} - \frac{3}{4}.$$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \qquad \delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$k = 17\ (x_0 = 0.33)$



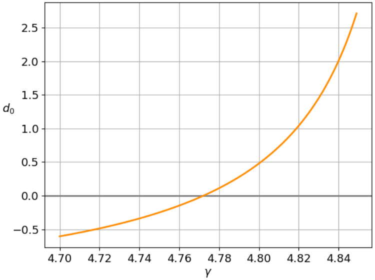
$k = 32\ (x_0 = 0.63)$

$$\gamma < \Gamma_0,$$

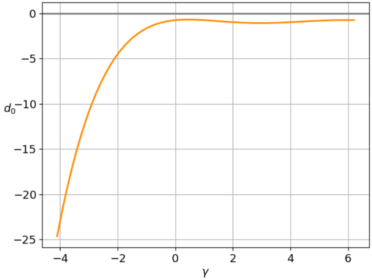
$$\Gamma_0 = \begin{cases} \tilde{\gamma}, & 1 \leqslant k \leqslant 25, \\ \Gamma_u, & 25 \leqslant k \leqslant 50, \end{cases} \tag{14}$$

$$-\frac{3\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u + \alpha_u \delta_u \operatorname{ch} 3\delta_u x_k}{16(\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k)} - \frac{3}{4} = 0.$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



$k = 17$ $(x_0 = 0.33)$



$k = 32$ $(x_0 = 0.63)$

$$\gamma < \gamma_*,$$

$$u_j = \pm\sqrt{-\varepsilon\,\frac{\phi_0}{d_0}}\,\mathrm{ch}\,\delta_u x_j + O(\varepsilon). \tag{15}$$

Теорема

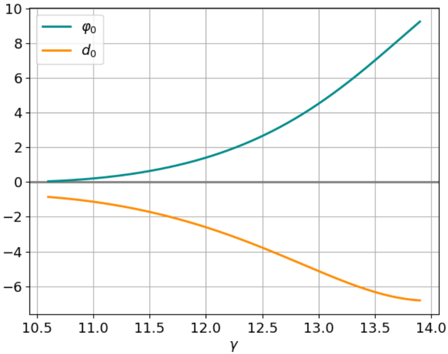
Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$, *для* $\gamma \leqslant \Gamma_0$, *где* Γ_0 *вычисляется по формуле* (14). *Тогда для любого* $\gamma \leqslant \Gamma_0$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (1), (2) *имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Теорема

Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$, *для* $\Gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \Gamma_u$, *где* Γ_0 *и* Γ_u *вычисляются по формулам* (14) *и* (9) *соответственно. Тогда для любого* $\Gamma_0 < \gamma \leqslant \Gamma_u$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (1), (2) *имеет неустойчивое нулевое решение, которое грубо теряет свою устойчивость в результате приближения к нему двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $k = 25$

$$\varepsilon = \alpha_u - \alpha : \qquad \phi_0 \longmapsto -\phi_0.$$



$$k = 25 \ (x_0 = 0.49)$$

$$\gamma_1 > \gamma > \gamma_2.$$

Теорема

Пусть $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$ *для* $\gamma_1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_2$*, где* γ_1 *и* γ_2 *являются корнями трансцендентного уравнения* (12)*, удовлетворяющими условию* (13)*. Тогда для любого* $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (1), (2) *имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0,$$
$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t).$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3,$$
$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t).$$

$$u_2(x) = \operatorname{ch}\sqrt{-\gamma + i\omega}\, x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2.$$

$$\phi_0 = -\operatorname{Re}\left(\frac{2\mu \operatorname{ch}\mu x_0}{\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0}\right),$$

$$d_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{3\mu(G(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu) + G(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu) + 2G(\overline{\mu}))}{2(\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0)}\right).$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$G(y) = \frac{\alpha_c - y\ \operatorname{sh} y}{y^2 + \gamma - i\omega}.$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,0} = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\delta_c x_j + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\delta_c x_j}.$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3,$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,2} = e^{i\omega t}\operatorname{ch}\delta_c x_j.$$

Случай колебательной потери устойчивости

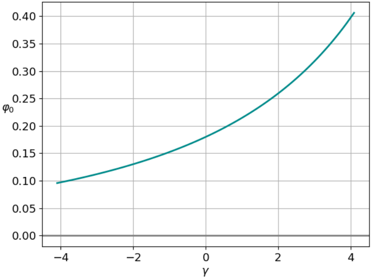
$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{16}$$

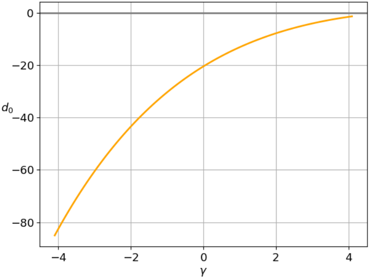
$$\phi_0 = \mathsf{Re}\left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch}\delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k}\right),$$

$$d_0 = \mathsf{Re}\left(\frac{3\delta_c(G(\delta_c + 2\mathsf{Re}\,\delta) + G(\delta_c + 2\mathsf{Im}\,\delta_c) + 2G(\overline{\delta_c}))}{2(\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k)}\right).$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \quad \delta_c = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$





$$k = 1 \; (x_0 = 0.01)$$

$$\gamma < \Gamma_c$$

$$z = \varrho e^{i\nu}.$$

$$\varrho' = \phi_0 \varrho + d_0 \varrho^3,$$
$$\nu' = \psi_0 + c_0 \nu^2.$$

$$\lim_{s\to+\infty} \varrho = \sqrt{-\frac{\phi_0}{d_0}}.$$

$$\nu(s) = \sigma s + \gamma, \qquad \sigma = \frac{\psi_0 d_0 - c_0 \phi_0}{d_0}.$$

$$u_j = \sqrt{-\varepsilon \frac{\phi_0}{d_0}} \left(e^{iAt} \operatorname{ch} \delta_c x_j + e^{-iAt} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j}\right) + O(\varepsilon). \qquad (17)$$

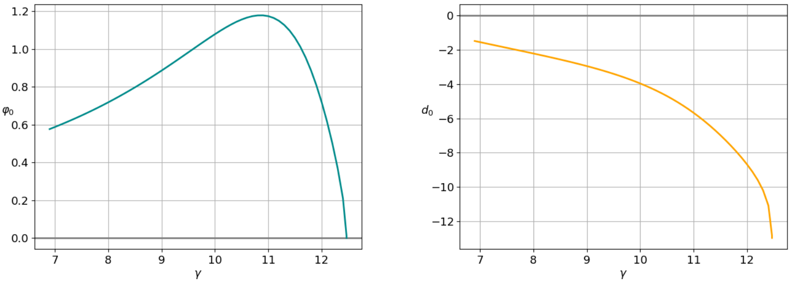
$$A = \omega + \varepsilon\sigma$$

Теорема

Пусть $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ *для* $\gamma \leqslant \Gamma_c$, *где* Γ_c *вычисляется с помощью* (11). *Тогда для любого* $\gamma < \Gamma_c$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (1), (2) *имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой* (17).

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

$$\varepsilon = \alpha_f - \alpha : \qquad a_c \longmapsto a_f,\ \phi_0 \longmapsto -\phi_0.$$



$$k = 24\ (x_0 = 0.47)$$

$$\overline{\gamma} < \gamma < \Gamma_f.$$

Теорема

Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$ *для* $\overline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \Gamma_f$, *где* Γ_f *вычисляется с помощью* (10). *Тогда для любого* $\overline{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (1), (2) *имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой* (17).

Краевая задача с куб. отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u,$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t).$$

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1,N},$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}\, u_k + \frac{\beta}{N}\, u_k^3.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0,$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t).$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2,$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t).$$

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x).$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3.$$

$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0, \qquad d_0 = \beta Q \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0.$$

$$Q = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$
$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,0} = \rho(s) \operatorname{ch} \delta_u x_j,$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2},$$
$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,2} = \operatorname{ch} \delta_u x_j.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

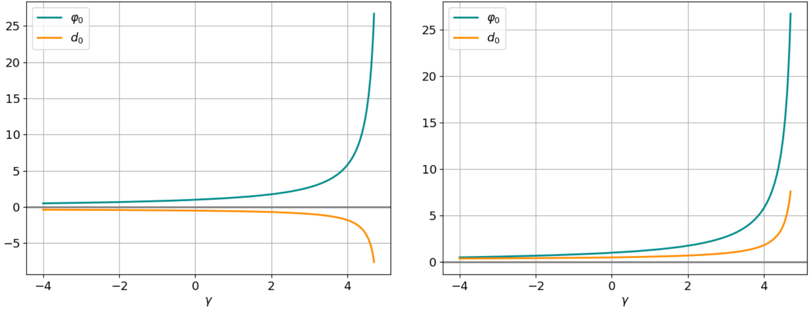
$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3.$$

$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \delta_u x_k, \qquad d_0 = \beta Q \operatorname{ch}^3 \delta_u x_k.$$

$$Q = \frac{2\delta_u}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}.$$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \qquad \delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -0.5$ b) $\beta = 0.5$

$$k = 17 \; (x_0 = 0.33)$$

$$\gamma < \Gamma_u$$

Теорема

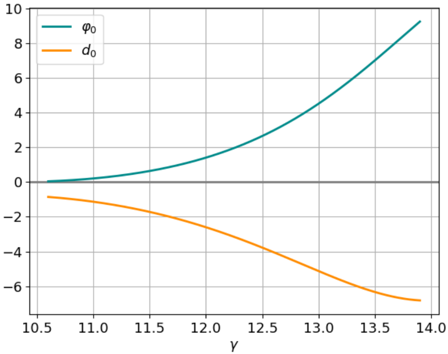
Пусть $\beta < 0$, а $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$, для $\gamma \leqslant \Gamma_u$, где Γ_u вычисляется по формуле (9). *Тогда для любого $\gamma < \Gamma_u$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система* (3), (4) *имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Теорема

Пусть $\beta > 0$, а $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$, для $\gamma \leqslant \Gamma_u$, где Γ_u вычисляется по формуле (9). *Тогда для любого $\gamma < \Gamma_u$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система* (3), (4) *имеет неустойчивое нулевое решение, которое грубо теряет свою устойчивость в результате приближения к нему двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

$$\varepsilon = \alpha_u - \alpha : \qquad \phi_0 \longmapsto -\phi_0.$$



$$k = 25 \; (x_0 = 0.49)$$

$$\gamma_1 > \gamma > \gamma_2.$$

Теорема

Пусть $\beta < 0$, *а* $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$ *для* $\gamma_1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_2$, *где* γ_1 *и* γ_2 *являются корнями трансцендентного уравнения* (12), *удовлетворяющими условию* (13). *Тогда для любого* $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (3), (4) *имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Теорема

Пусть $\beta > 0$, *а* $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$ *для* $\gamma_1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_2$, *где* γ_1 *и* γ_2 *являются корнями трансцендентного уравнения* (12), *удовлетворяющими условию* (13). *Тогда для любого* $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (3), (4) *имеет неустойчивое нулевое решение, которое грубо теряет свою устойчивость в результате приближения к нему двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия, асимптотика которых определяется формулой* (15).

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0,$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t).$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2,$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) - u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t).$$

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x).$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2.$$

$$\phi_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{2\mu\,\mathrm{ch}\,\mu x_0}{\mu\,\mathrm{ch}\,\mu + \mathrm{sh}\,\mu - \alpha_f x_0\,\mathrm{sh}\,\mu x_0}\right),$$

$$d_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{3\beta\mu(\mathrm{ch}(\mu + 2\operatorname{Re}\mu)x_0 + \mathrm{ch}(\mu + 2\operatorname{Im}\mu)x_0 + 2\,\mathrm{ch}\,\overline{\mu}x_0)}{2(\mu\,\mathrm{ch}\,\mu + \mathrm{sh}\,\mu - \alpha_f x_0\,\mathrm{sh}\,\mu x_0)}\right).$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega}.$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$\dot u_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,0} = z(s) e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j}.$$

$$\dot u_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2},$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha}{N} u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}.$$

$$u_{j,2} = e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j.$$

Случай колебательной потери устойчивости

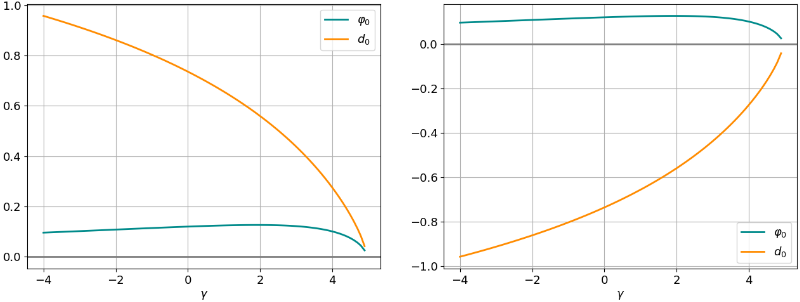
$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{18}$$

$$\phi_0 = -\mathsf{Re}\left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch}\delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k}\right),$$

$$d_0 = \mathsf{Re}\left(\frac{3\beta\delta_c(\operatorname{ch}(\delta_c + 2\mathsf{Re}\,\delta_c)x_k + \operatorname{ch}(\delta_c + 2i\,\mathsf{Im}\,\delta_c)x_k + 2\operatorname{ch}\overline{\delta_c}x_k)}{2(\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k)}\right).$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \quad \delta_c = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -1.0$ b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.33$$

Теорема

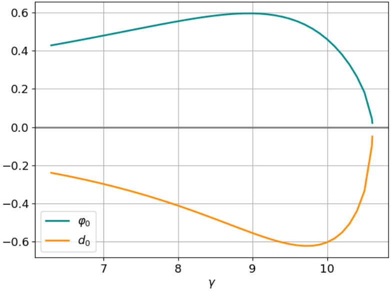
Пусть $\beta < 0$, *а* $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ *для* $\gamma \geqslant \Gamma_c$, *где* Γ_c *вычисляется по формуле* (11). *Тогда для любого* $\gamma < \Gamma_c$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (3), (4) *имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой* (17).

Теорема

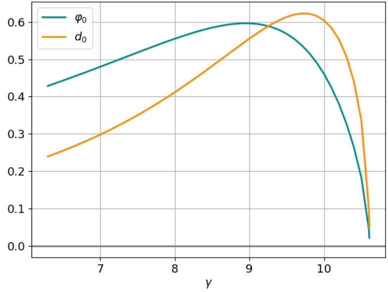
Пусть $\beta > 0$, *а* $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ *для* $\gamma \geqslant \Gamma_c$, *где* Γ_c *вычисляется по формуле* (11). *Тогда для любого* $\gamma < \Gamma_c$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (3), (4) *имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный неустойчивый цикл с асимптотикой* (17).

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

$$\varepsilon = \alpha_f - \alpha : \qquad a_c \longmapsto a_f,\ \phi_0 \longmapsto -\phi_0.$$



a) $\beta = -1.0$



b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.45$$

$$\overline{\gamma} < \gamma < \Gamma_f.$$

Теорема

Пусть $\beta < 0$*, а* $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$ *для* $\overline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \Gamma_f$*, где* Γ_f *вычисляется с помощью* (10)*. Тогда для любого* $\overline{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$ *существует* ε_0 *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система дифференциальных уравнений* (3), (4) *имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой* (17)*.*