

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Анализ одной математической модели экологии, *Докл. АН СССР*, 1991, том 316, номер 3, 577–580

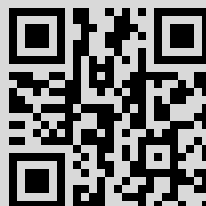
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 46.237.31.37

14 февраля 2022 г., 14:40:02



УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© Ю.С. КОЛЕСОВ

АНАЛИЗ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОЛОГИИ

(Представлено академиком Е.Ф. Мищенко 20 VI 1990)

1. Для математической экологии представляет значительный интерес вопрос об аттракторе положительных решений системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \frac{\lambda}{1+a} [1+a(1-N_2) - N_1(t-1)] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r [N_1 - N_2(t-h)] N_2, \end{aligned} \quad (1)$$

моделирующей задачу хищник—жертва [1]. В (1) N_1 и N_2 — соответственно плотности популяций жертвы и хищника; параметр a характеризует давление хищника на жертву; h — время, за которое происходит смена поколений в популяции хищника (за единицу времени взята соответствующая характеристика жертвы), а r — его коэффициент линейного роста; λ — мальтузианский коэффициент линейного роста жертвы, который в дальнейшем считается большим параметром. Биологически последнее означает, что жертва сильно плодовита.

Полагая в первом уравнении системы (1) $N_2 = 0$, $N_1 = (1+a)N$, приходим к классическому уравнению Хатчинсона [2]

$$(2) \quad \dot{N} = \lambda [1 - N(t-1)] N.$$

При больших значениях λ единственный аттрактор положительных решений уравнения (2) — своеобразный релаксационный цикл. Его основные характеристики: $\lambda^{-1} \exp \lambda$ — порядок периода; на нем единственный всплеск, когда $N(t) \geq 1$, с близкой к единице продолжительностью и высотой порядка $\exp \lambda$; минимум примерно равен $\exp(-\exp \lambda)$.

Введем следующее понятие.

Определение. Периодический режим системы (1) назовем k -циклом, $k = 0, 1, \dots$, если его компонента $N_1(t)$ меняется по хатчинсоновскому закону в том смысле, что имеет аналогичные порядки упомянутых выше числовых характеристик цикла уравнения (2). Относительно его компоненты $N_2(t)$ предполагаем, что на промежутках времени ровно в $k+1$ раз больше периода имеется один всплеск, когда $N_2(t) \geq 1$, продолжительность которого близка к h , а высота по порядку равна $\lambda^{-1} \exp \lambda$. Квалифицированно между всплесками значения $N_2(t)$ считаем сверхэкспоненциально малыми.

На первый взгляд представляется, что k -циклы — естественные аттракторы системы (1). Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема. При $a < 1$ по каждому целому числу $m \geq 0$ можно выбрать такое достаточно большое положительное число λ_m , что при $\lambda \geq \lambda_m$ система (1) имеет k -циклы с номерами $0, 1, \dots, m$, но все они дихотомичны.

Доказательство базируется на вспомогательном утверждении, справедливом при любых фиксированных параметрах системы (1) и всех достаточно больших λ .

Л е м м а. Пусть $N_1(t)$ и $N_2(t)$ – компоненты такого решения системы (1), что на отрезке $-1 \leq t \leq 0$ функция $N_2(t)$ сверхэкспоненциально мала, а функция $N_1(t)$, $N_1(-1) = 1$, с точностью до $O(\exp(-\lambda))$ возрастает по хатчинсоновскому закону. Тогда с точностью до $O(\exp(-\lambda))$ выполнены неравенства

$$\underline{N}_1(t) \leq N_1(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1 + \ln(1+a)\lambda}{\lambda - 1/(1+a)} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^3}\right),$$

$$\bar{N}_1(t) \geq N_1(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1 + \ln(1+a)\lambda}{\lambda - 1} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^3}\right),$$

где

$$\underline{N}_1(t) = [1 + (1+a)^{-1}(1 - \frac{1}{2}(1+a)^{-2})(\exp \lambda(t-1) + a \exp(-\lambda))] \times \\ \times \exp [\lambda + (1+a)^{-1}(\lambda t - \exp \lambda t)],$$

$$\bar{N}_1(t) = [1 + (1 - \frac{1}{2}(1+a)^{-2}) \exp(-\lambda)] \exp [\lambda(t+1) - (1+a)^{-1} \exp \lambda t].$$

Несколько упрощая, опишем способ использования леммы. Для простоты предположим, что речь идет о 0-цикле. Возьмем в качестве начальных условий системы (1), задаваемых при $s \leq -1$, такие пары функций, что компонента $N_1(s)$, $N_1(-1) = 1$, возрастает примерно по экспоненциальному закону с показателем экспоненты порядка λ , а возрастающая компонента $N_2(s)$ сверхэкспоненциально мала и

$$N_2(-1) = z \lambda^{-1} \exp \lambda \cdot \exp [-\lambda^{-1}(A + \gamma(z)) \exp \lambda],$$

где $A = r(1+a)[1 - \exp(-1/(1+a))]$, z – положительный параметр, $\gamma(z)$ – гладкая монотонно убывающая положительная функция, способ выбора которой укажем ниже. Асимптотически интегрируя систему (1), убеждаемся, что с высокой точностью

$$N_2(0) = z \lambda^{-1} \exp \lambda \cdot \exp [-\lambda^{-1} \gamma(z) \exp \lambda].$$

Отсюда и из леммы вытекает, что при $a < 1$ и при $0 < z_1 \leq z \leq z_2$, где z_1 и z_2 можно взять любыми, функция

$$\gamma(z) > r(1-a^2) \exp(-1/(1+a))$$

определяется из условия: всплеск $N_2(t)$ равен $z \lambda^{-1} \exp \lambda$. Затем на описанном выше множестве начальных условий вводим оператор последования Пуанкаре, который, что просто проверяется, по всем направлениям сжимает, а по "направлению" z происходит растяжение, характер которого в интересующем нас диапазоне изменения этого параметра описывается одномерным отображением

$$z \rightarrow z \exp [\lambda^{-1}(A + \gamma(z) - r h z) \exp \lambda],$$

рассматриваемым в окрестности ненулевой неподвижной точки.

Представляет интерес сопоставление нашей теоремы с классической теоремой Понтрягина–Мищенко релаксационных вкладов в системах обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Сначала о сходстве: и там, и здесь быстрая и медленная переменные (в нашем случае с некоторой долей условности N_1 и N_2) сильно взаимодействуют асимптотически короткое время. Различие же не столько в том,

что построенные нами циклы дихотомичны, а главным образом в следующем.* Благодаря лемме мы смогли только косвенно оценить сильное взаимодействие быстрой и медленной переменных.

2. Опишем на качественном уровне результаты численного исследования системы (1) (в процессе вычислений параметры a и h различным образом фиксировались, после чего для серии достаточно больших λ параметр r постепенно увеличивался). Выяснилось, что при относительно малых r аттрактор — это 0-цикл, т.е. хищник реагирует на каждый всплеск плотности жертвы. При прохождении r через определенное значение $R_0(\lambda, a, h)$ происходит его бифуркация удвоения периода, выражающаяся в том, что начинают несколько различаться по высоте соседние пики плотности хищника. При незначительном дальнейшем увеличении r происходит бифуркация учетверения периода и т.д. В итоге устанавливаются стохастические колебания, которые при дальнейшем увеличении r трансформируются в периодические, затем снова наступает хаос и т.д. Это явление, называемое перемежаемостью, хорошо известно в теории одномерных отображений. Впрочем, с ростом λ ширина (по r) зон, когда устойчивый цикл рождается из хаоса, резко убывает.

Оказалось также, что с ростом λ из уплотнения траекторий рождаются устойчивые 1-цикл, 2-цикл и т.д. С каждым из них при прохождении r через некоторые значения $R_k(\lambda, a, h)$, где

$$R_0(\lambda, a, h) < R_1(\lambda, a, h) < R_2(\lambda, a, h) < \dots,$$

происходит бифуркация удвоения периода и т.д. Еще одно свойство: функции $R_k(\lambda, a, h)$ по λ и h монотонно убывают, а по a монотонно возрастают. Далее при небольших значениях a функции $R_k(\lambda, a, h)$ с небольшими номерами по мере увеличения λ заметно приближаются к нулю. Однако с возрастанием a их убывание становится незначительным. Наконец, при увеличении λ становится труднее отлавливать устойчивые k -циклы с большими номерами, что свидетельствует об уменьшении их области притяжения.

3. Проведенное аналитическое и численное исследование системы (1) позволяет сформулировать следующие выводы.

При $a < 1$ хищник не может эффективно контролировать ситуацию. Это приводит к тому, что на значительных временных промежутках плотность жертвы меняется в хорошем соответствии с хатчинсоновским законом. Отсюда вытекает, что между пиками плотности жертвы не только мала плотность хищника, но и мал его реальный коэффициент линейного роста $rN_1(t)$. Поэтому уместно говорить, что в соответствующие временные промежутки в популяции хищника наблюдается стресс — в течение многих генераций низка его продуктивная способность. На высокие всплески плотности жертвы хищник реагирует популяционными взрывами самой разной интенсивности, что служит главной причиной беспорядочного поведения решений. Важно также, что иногда плотность хищника становится высокой до начала падения плотности жертвы. С математической точки зрения эти промежутки времени — ключевые: именно за счет них происходит временное разрушение хатчинсоновского характера изменения плотности жертвы, а как следствие — значительные аналитические трудности в анализе системы (1).

Если же $a > 1$, а числовые значения параметров r и h не велики, в системе (1) возможны устойчивые периодические колебания. Однако быстрая и медленная переменные сильно взаимодействуют конечное время, когда высоки пики плотности как жертвы, так и хищника. Это принципиально новое обстоятельство, которому нет аналога в классической теории релаксационных циклов систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3], существенно затрудняет их аналитическое построение.

4. Итак, при $a < 1$ аналитическими средствами большего, чем наша теорема, достичь затруднительно. При $a > 1$ и подходящем выборе r, h (на них должна быть некоторая оценка сверху) остается со многих точек зрения интересная задача о построении устойчивых циклов системы (1).

Ярославский государственный университет

Поступило
2 VII 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесов Ю.С. В сб.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979, с. 3–40. 2. Hutchinson G.E. — Ann. N.Y. Acad. Sci., 1948, vol. 50, p. 221–246. 3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.

УДК 517.968

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© С.И. СМАГИН

О НОВОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОНИЖАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЬ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

(Представлено академиком А.С. Алексеевым 3 V 1990)

При решении различных задач дифракции широкое распространение получили методы теории потенциала [1–3]. Они позволяют сводить исходные дифференциальные задачи к системам интегральных уравнений меньшей размерности по границам дифрагирующих объектов и на их основе строить эффективные численные алгоритмы решения таких задач. Свойства входящих в системы уравнений зависят от вида контактных условий на границах раздела сред и используемых потенциалов. Количество уравнений в таких системах совпадает обычно с числом условий сопряжения.

В работе рассматриваются трехмерные стационарные задачи дифракции акустических, упругих и электромагнитных колебаний. Методами теории потенциала для них были получены системы из двух граничных уравнений относительно двух неизвестных функций в [3–6]. Применяемый ниже подход позволяет уменьшать число неизвестных функций и сводить каждую из этих задач к одному интегральному уравнению.

1. Задача дифракции акустических колебаний. Пусть в ограниченной замкнутой поверхностью F области Ω_i трехмерного евклидова пространства \mathbf{R}^3 и в неограниченной области $\Omega_e = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_i$ требуется найти решения уравнений

$$(1) \quad \Delta \varphi_{i(e)} + k_{i(e)}^2 \varphi_{i(e)} = 0, \quad x \in \Omega_{i(e)},$$

с условиями сопряжения

$$(2) \quad \rho_i \varphi_i^- - \rho_e \varphi_e^+ = \rho_e \varphi_0, \quad \partial \varphi_i^- / \partial n - \partial \varphi_e^+ / \partial n = \psi_0, \quad x \in F,$$

и условием излучения на бесконечности для φ_e

$$(3) \quad \partial \varphi_e / \partial |x| - ik_e \varphi_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$