Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одного класса краевых задач со специальными краевыми условиями

Леонид Ивановский

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - \delta u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = F(u), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad \delta \in \{0,1\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - \delta u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = F(u), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad \delta \in \{0,1\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- $F(u) = \alpha\, u(x_0,t), \quad \delta = 1; \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ x_0 \in [0,1).$
- $F(u) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t), \quad \delta = 0; \qquad \beta \in \mathbb{R}.$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t). \tag{4}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha\, v(x_0). \tag{6}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) \ = 0, \qquad v'(1) \ = \alpha\, v(x_0). \tag{6}$$

$$v(x) = c\,\mathrm{ch}\,\mu x, \quad c \in \mathbb{R},\ \mu = \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

- $\lambda = 0: \; \mu = \sqrt{-\gamma}$,

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\operatorname{sh}\sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma}x_0}, \tag{7}$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

- $\lambda = 0: \ \mu = \sqrt{-\gamma}$,

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma}}{\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma} x_0}, \tag{7}$$

- $\lambda = i\omega: \ \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega}$,

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma + i\omega}}{\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}. \tag{8}$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y), \end{cases} \tag{9}$$

$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\mathrm{sh}\, y \cos y - \mathrm{ch}\, y \sin y), \end{cases} \qquad (9)$$

$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\, y \cos y + \mathrm{ch}\, y \sin y}{\mathrm{sh}\, y \cos y - \mathrm{ch}\, y \sin y} - \mathrm{tg}\, yx_0\, \mathrm{th}\, yx_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y\, \mathrm{sh}\, y \cos y - y\, \mathrm{ch}\, y \sin y}{\mathrm{ch}\, yx_0 \cos yx_0}. \end{cases} \qquad (10)$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y), \end{cases} \tag{9}$$

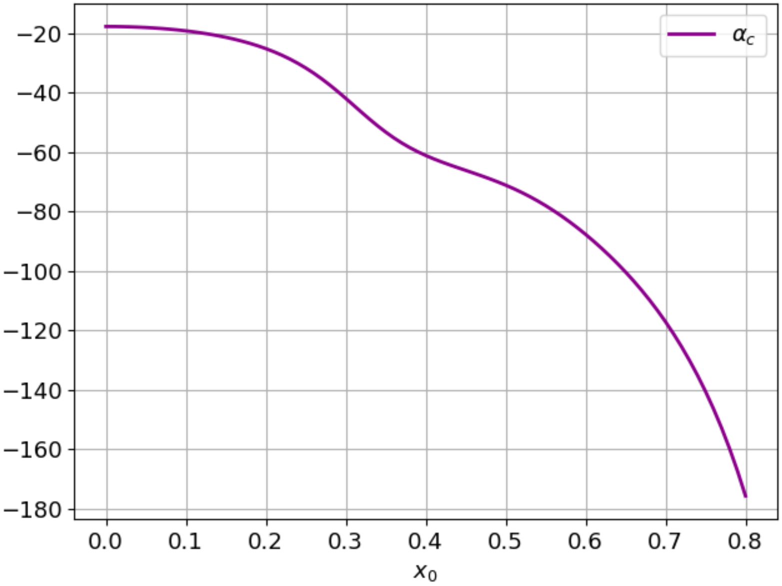
$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

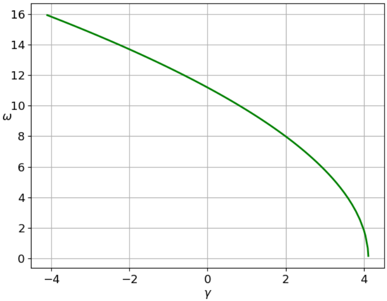
$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} y \cos y + \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y} - \mathrm{tg}\, y x_0 \,\mathrm{th}\, y x_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y \operatorname{sh} y \cos y - y \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{ch} y x_0 \cos y x_0}. \end{cases} \tag{10}$$

- $\gamma \neq 0,\ x_0 \neq 0.$

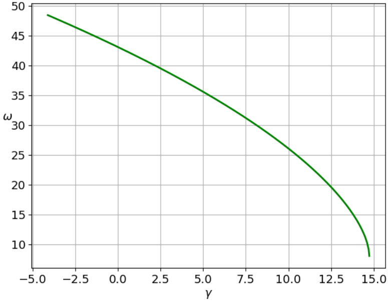
Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$



Численные результаты: $\omega(\gamma)$



a) $x_0 = 0.0$



b) $x_0 = 0.5$

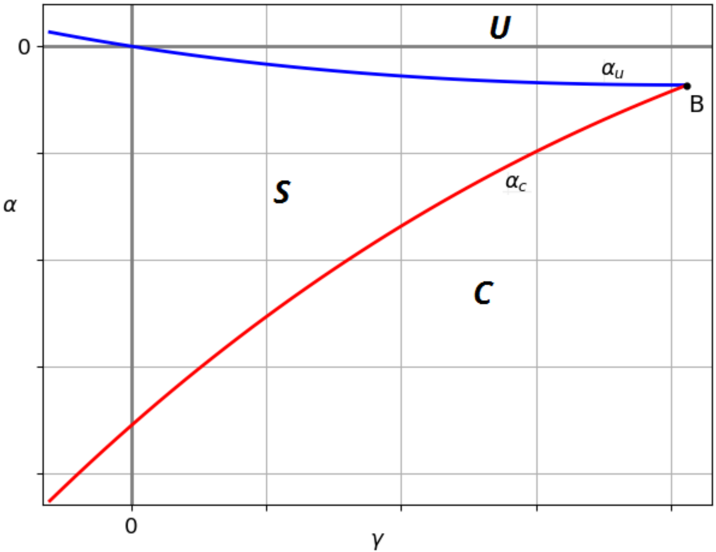
Моделирование линейной краевой задачи

$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

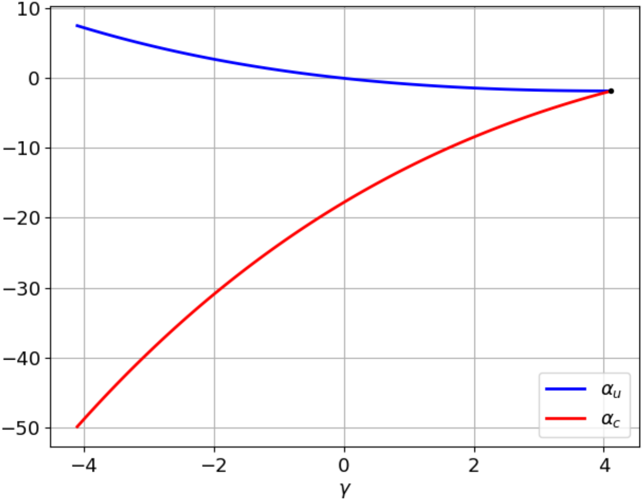
$$u_0 = u_1,$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n} u_k, \quad k \in [1, n].$$

Схематическая визуализация кривых α_u и α_c

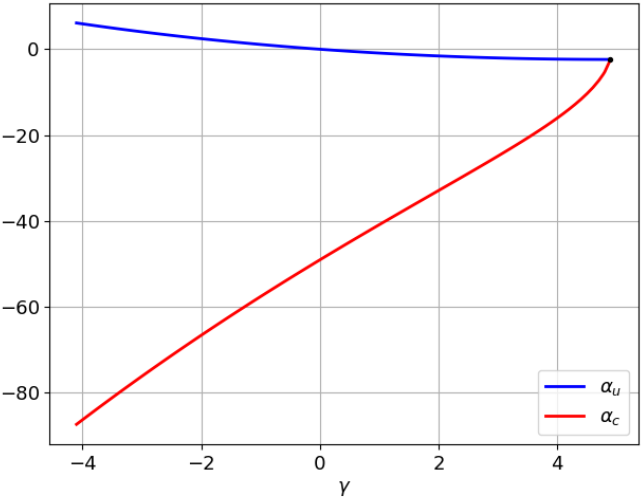


Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



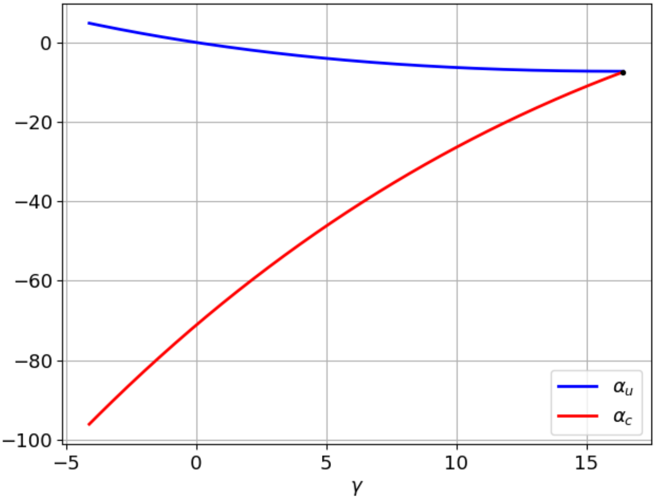
$$x_0 = 0: \quad \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



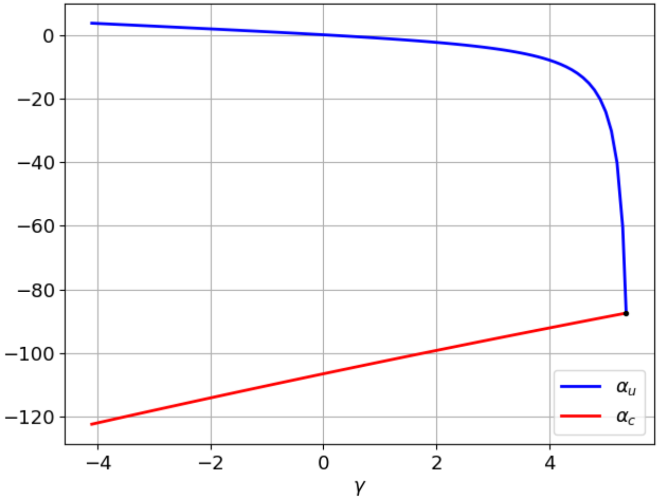
$$x_0 = 0.33: \quad \gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.5: \quad \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.67: \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \qquad (12)$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Нелинейная краевая задача с линейным отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{13}$$

$$u'(0,t) \; = 0, \qquad u'(1,t) \; = \alpha \, u(x_0, t), \tag{14}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0 : \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{15}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t), \tag{16}$$

$$u_0 = \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{17}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t), \tag{18}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{19}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{20}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{19}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{20}$$

$$v_2 = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{\rho^3}{32} \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x + \frac{3\rho^3 + 4\rho'}{8\sqrt{-\gamma}} x \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x,$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{21}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

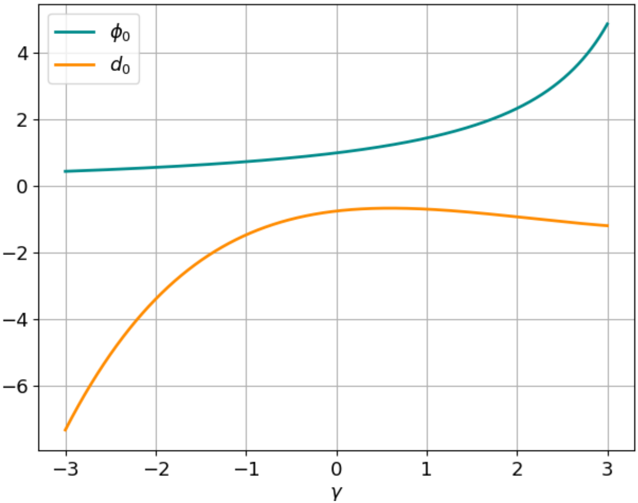
$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{21}$$

$$\phi_0 = \frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0},$$

$$d_0 = \frac{-3\gamma \operatorname{sh} 3\mu - 12 \operatorname{sh} \mu - 12\mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u \mu \operatorname{ch} 3\mu x_0 + 12\alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0}{16(\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)},$$

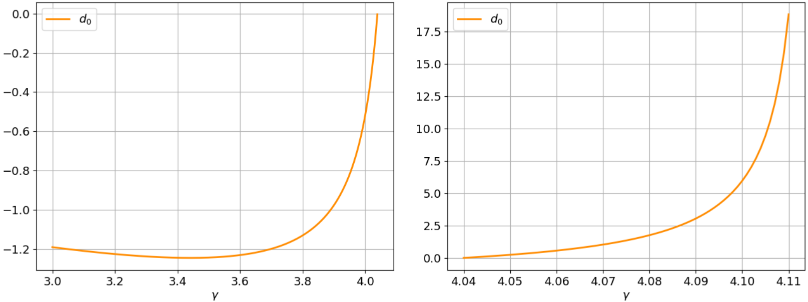
$$\mu = \sqrt{-\gamma}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



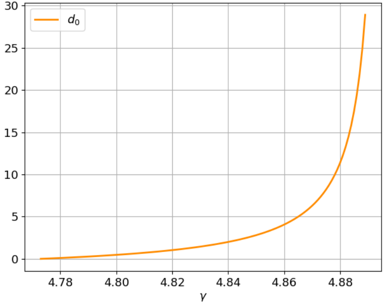
$$x_0 = 0$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



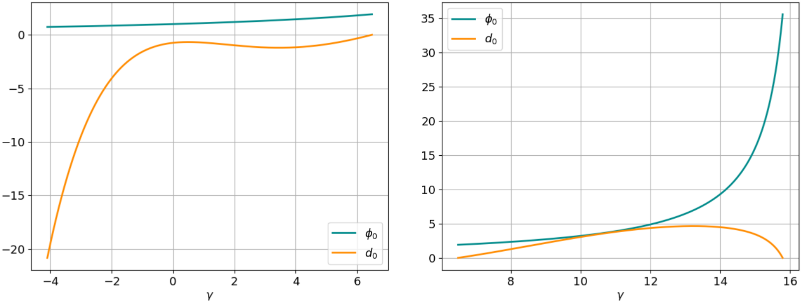
$$x_0 = 0 : \quad \tilde{\gamma} \approx 4.039, \ \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



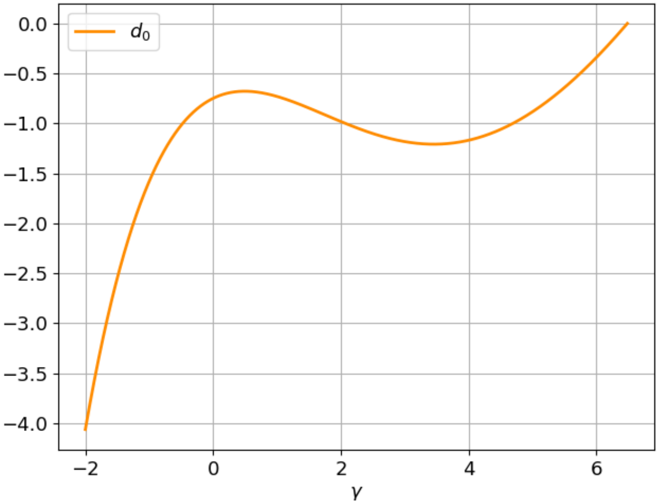
$$x_0 = 0.33 : \quad \tilde{\gamma} \approx 4.773, \;\gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



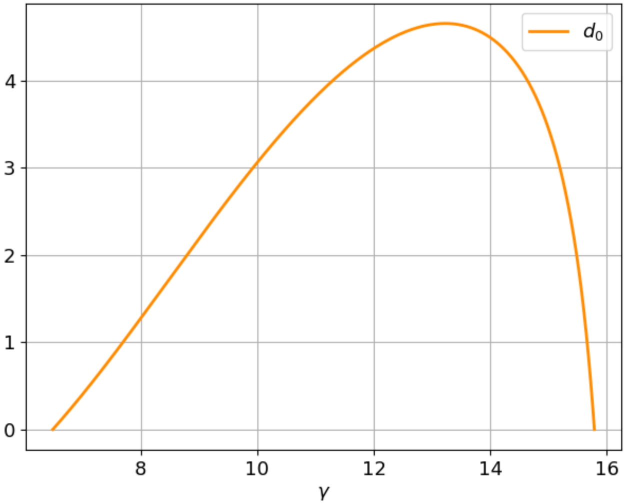
$$x_0 = 0.5: \quad \tilde{\gamma}_1 \approx 6.485, \; \tilde{\gamma}_2 \approx 15.792, \; \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



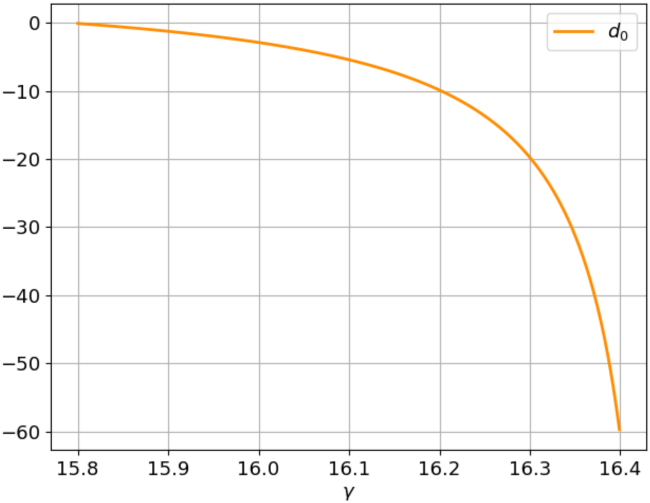
$$x_0 = 0.5: \quad \tilde{\gamma}_1 \approx 6.485,\ \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



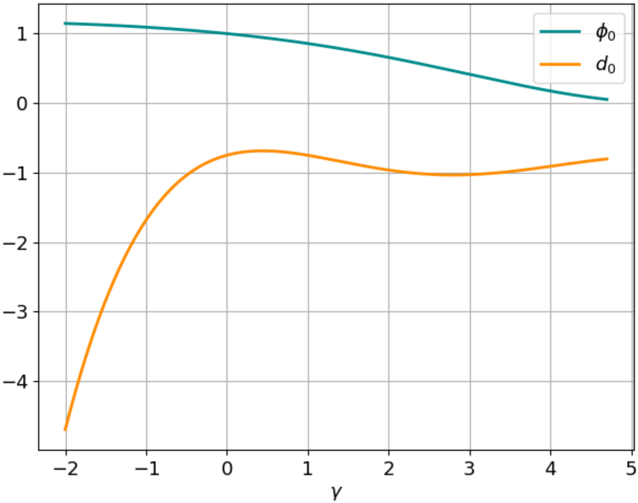
$$x_0 = 0.5: \quad \tilde{\gamma}_1 \approx 6.485,\ \tilde{\gamma}_2 \approx 15.792,\ \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



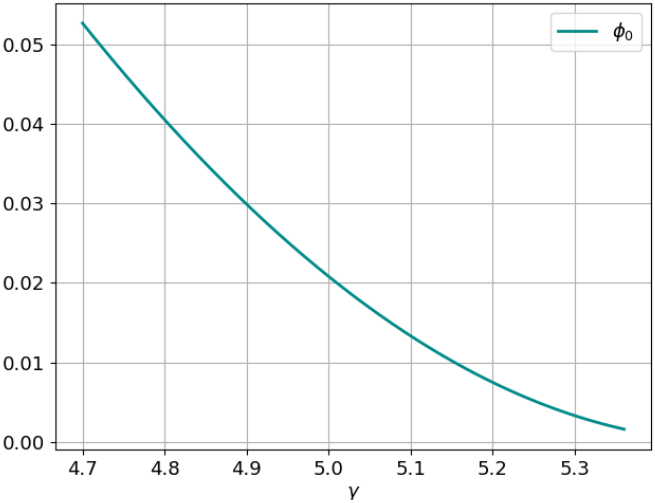
$$x_0 = 0.5: \quad \tilde{\gamma}_2 \approx 15.792,\ \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.67 : \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.67: \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \qquad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{22}$$

$$u_0'(0,t) \ = 0, \qquad u_0'(1,t) \ = \alpha_c u_0(x_0,t), \tag{23}$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{24}$$

$$u_2'(0,t) \ = 0, \qquad u_2'(1,t) \ = \alpha_c u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t), \tag{25}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega) v_2 - z' w(x) - 3z|z|^2 w|w|^2 = 0, \tag{26}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + z(s) w(x_0), \tag{27}$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega}\, x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{28}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{28}$$

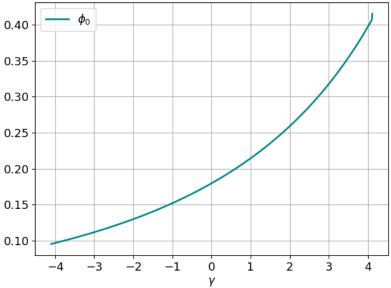
$$\phi_0 = -\operatorname{Re}\left(\frac{2\mu \operatorname{ch}\mu x_0}{\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0}\right),$$

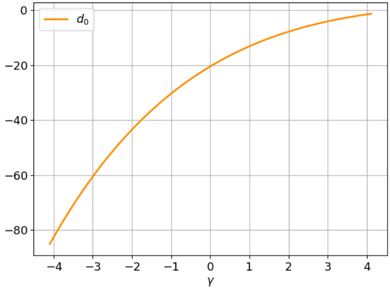
$$d_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{3\mu(G(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu) + G(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu) + 2G(\overline{\mu}))}{2(\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0)}\right),$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$G(y) = \frac{\alpha_c - y \operatorname{sh} y}{y^2 + \gamma - i\omega}.$$

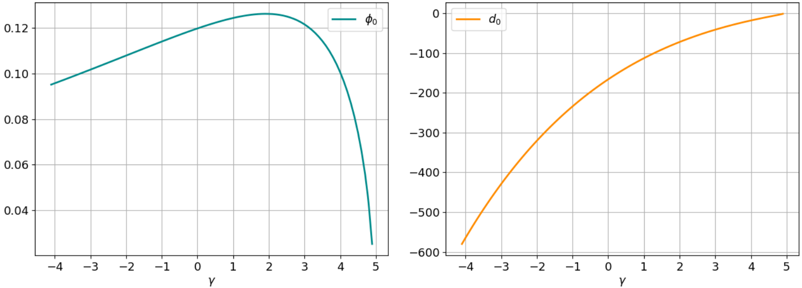
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$





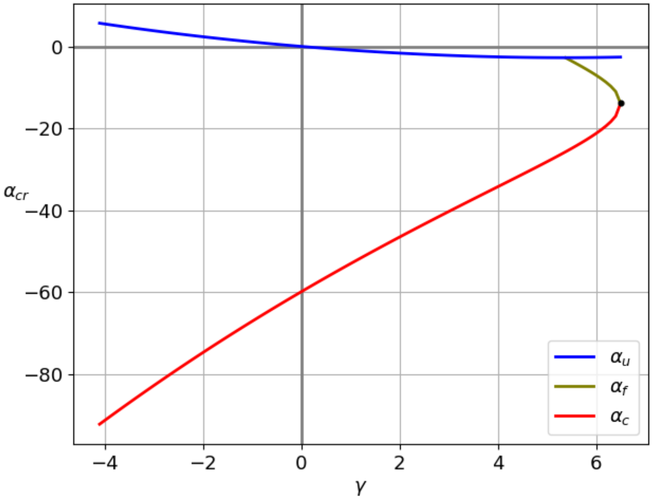
$$x_0 = 0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



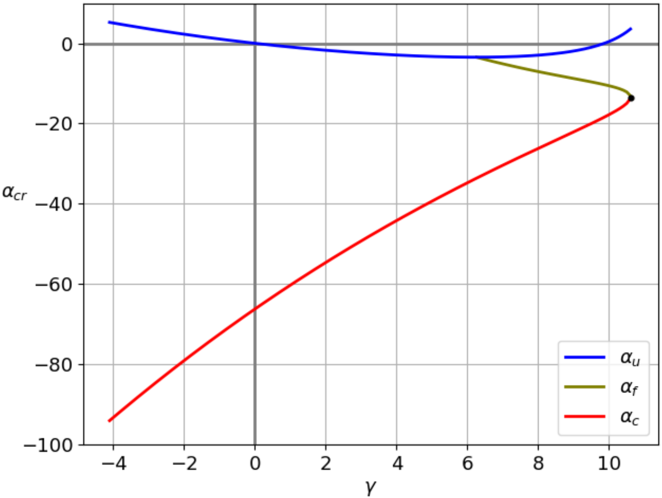
$$x_0 = 0.33$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$ для $x_0 \in (0.33, 0.5)$



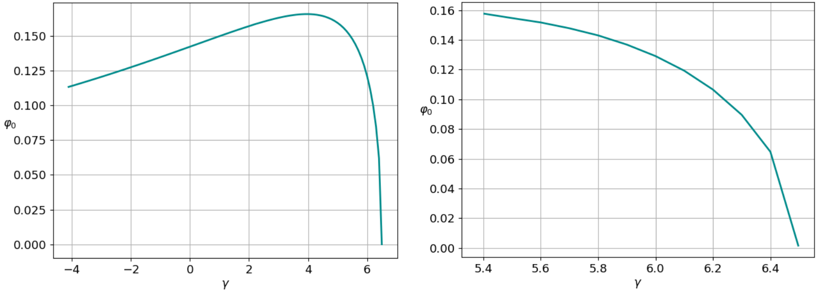
$$x_0 = 0.39 : \quad \overline{\gamma} \approx 5.375, \ \gamma_* \approx 6.497$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$ для $x_0 \in (0.33, 0.5)$



$$x_0 = 0.45: \quad \overline{\gamma} \approx 6.258, \ \gamma_* \approx 10.606$$

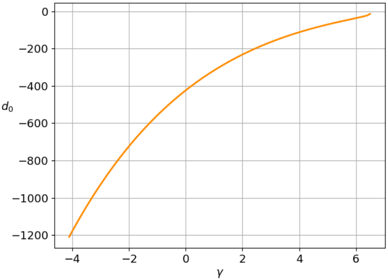
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$



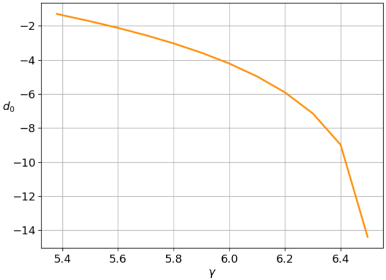
a) $\alpha = \alpha_c$ b) $\alpha = \alpha_f$

$$x_0 = 0.39$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



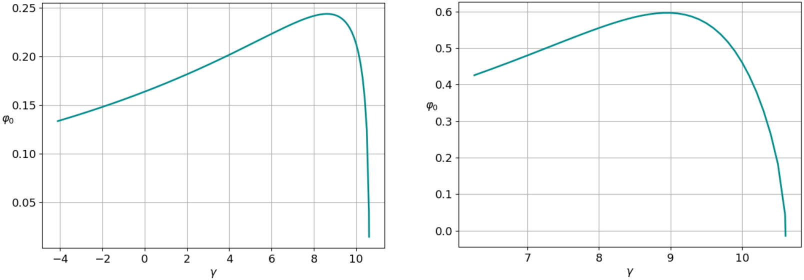
a) $\alpha = \alpha_c$



b) $\alpha = \alpha_f$

$$x_0 = 0.39$$

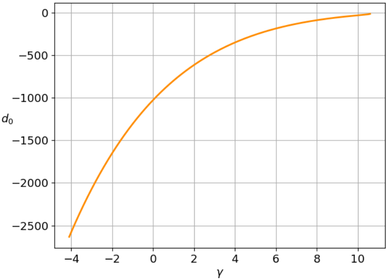
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$



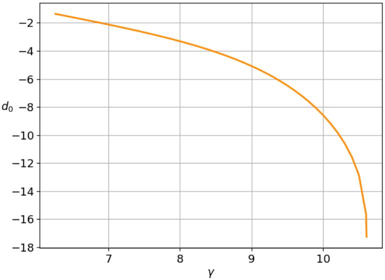
a) $\alpha = \alpha_c$ b) $\alpha = \alpha_f$

$$x_0 = 0.45$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



a) $\alpha = \alpha_c$



b) $\alpha = \alpha_f$

$$x_0 = 0.45$$

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{29}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t), \tag{30}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{31}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t), \tag{32}$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{33}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t), \tag{34}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{35}$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0 + \beta \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{36}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{35}$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0 + \beta \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{36}$$

$$v_2(x) = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho'}{2\sqrt{-\gamma}} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho' x}{2} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x.$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0\rho + d_0\rho^3, \tag{37}$$

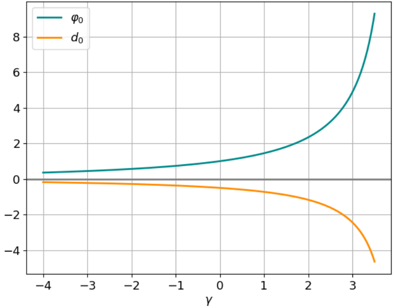
Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{37}$$

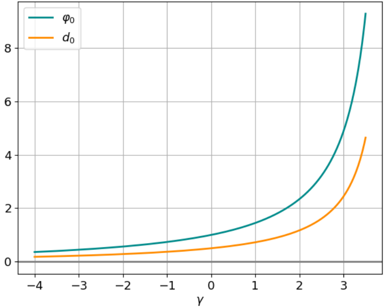
$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0,$$
$$d_0 = \beta Q \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0,$$

$$Q = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



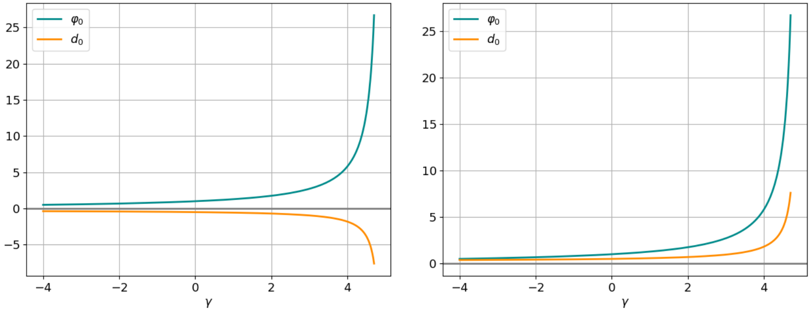
a) $\beta = -0.5$



b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.0$$

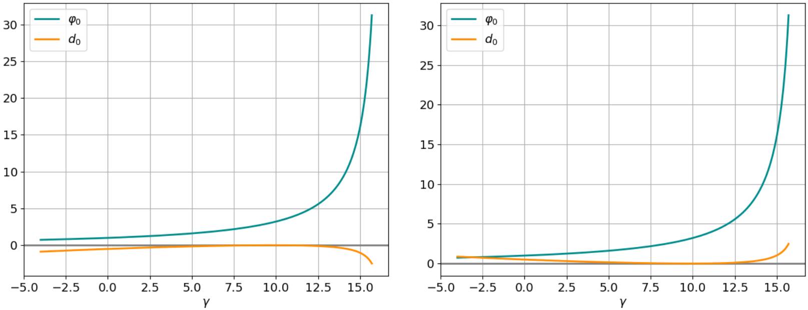
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -0.5$ b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.33$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

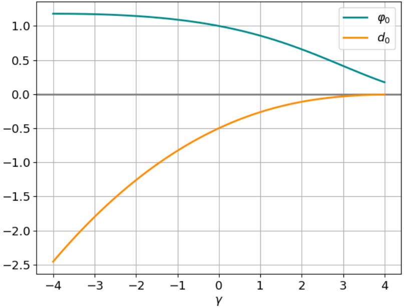


a) $\beta = -0.5$

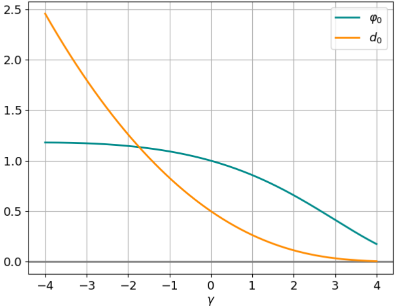
b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.5$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -0.5$



b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.67$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{38}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t), \tag{39}$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{40}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) - u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t). \tag{41}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega) v_2 - z' w(x) = 0, \tag{42}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) - z w(x_0) + 3\beta z|z|^2 w|w|^2. \tag{43}$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega}\, x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{44}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{44}$$

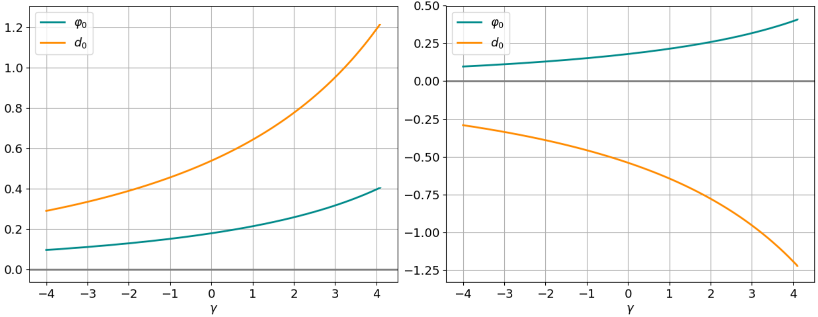
$$\phi_0 = -2\,\mathrm{Re}(Q\,\mathrm{ch}\,\mu x_0),$$

$$d_0 = 1.5\beta\,\mathrm{Re}(Q(\mathrm{ch}(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu)x_0 + \mathrm{ch}(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu)x_0 + 2\,\mathrm{ch}\,\overline{\mu}x_0)),$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$Q = \frac{\mu}{\mu\,\mathrm{ch}\,\mu + \mathrm{sh}\,\mu - \alpha_c x_0\,\mathrm{sh}\,\mu x_0}.$$

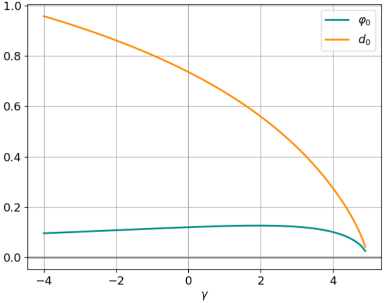
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



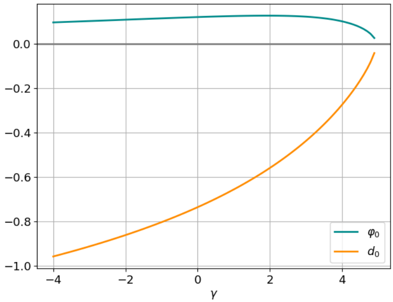
a) $\beta = -1.0$ b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



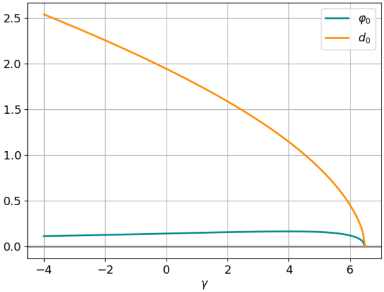
a) $\beta = -1.0$



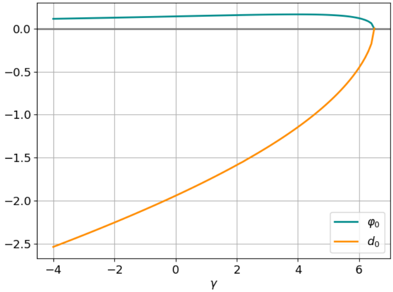
b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.33$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ при $\alpha = \alpha_c$



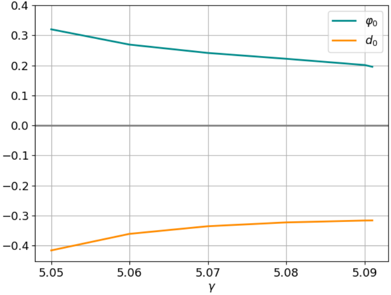
a) $\beta = -1.0$



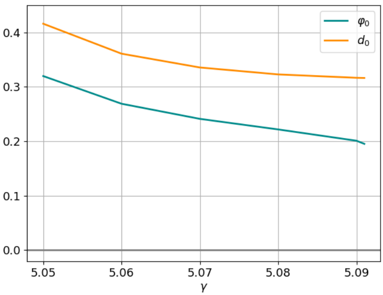
b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.39$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ при $\alpha = \alpha_f$



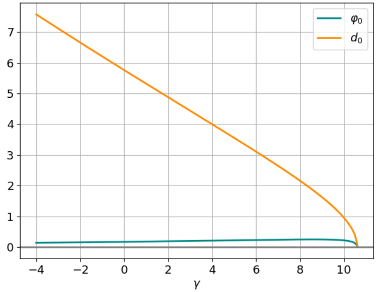
a) $\beta = -1.0$



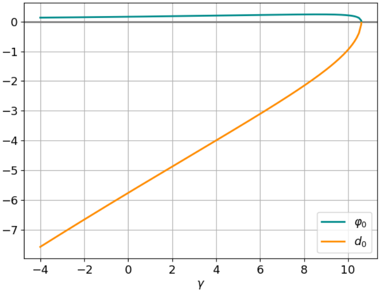
b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.39$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ при $\alpha = \alpha_c$



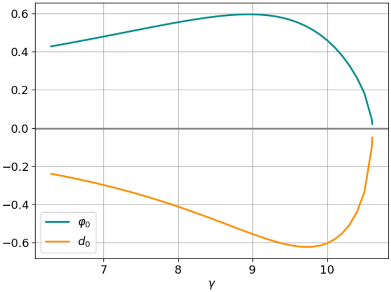
a) $\beta = -1.0$



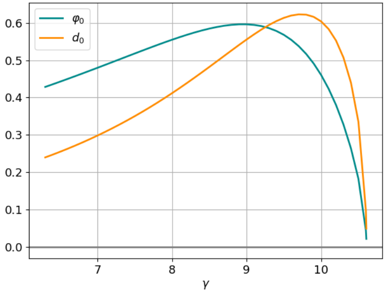
b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.45$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ при $\alpha = \alpha_f$



a) $\beta = -1.0$



b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.45$$

Краевая задача с интегральным отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{45}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha \int\limits_0^1 u(t,y)dy, \tag{46}$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{47}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha_{cr} \int_0^1 u(t,y)dy. \tag{48}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{49}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha_{cr} \int\limits_0^1 v(y)dy. \tag{50}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{49}$$

$$v'(0) \;= 0, \qquad v'(1) \;= \alpha_{cr} \int\limits_0^1 v(y)dy. \tag{50}$$

$$v(x) = c\,\mathrm{ch}\,\mu x, \quad c \in \mathbb{R},\, \mu = \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\alpha_{cr} = \mu^2 = -\gamma + \lambda, \tag{51}$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\alpha_{cr} = \mu^2 = -\gamma + \lambda, \tag{51}$$

- $\lambda = 0: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = -\gamma. \tag{52}$$

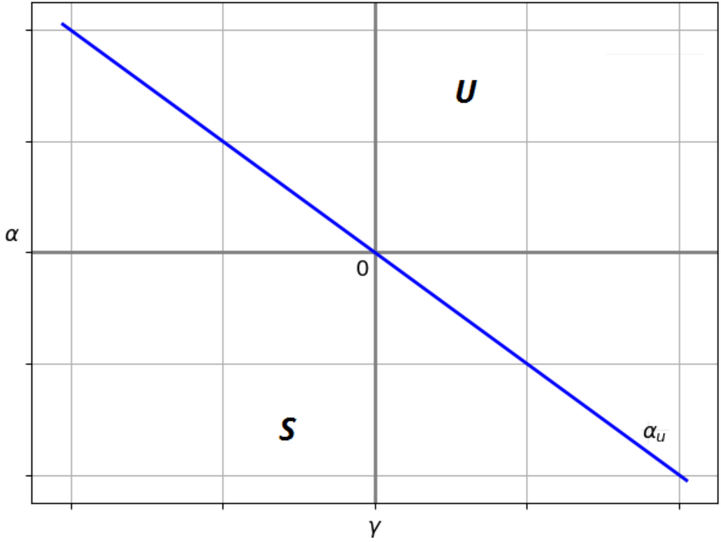
Моделирование линейной краевой задачи

$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{53}$$

$$u_0 = u_1,$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n^2}\sum_{k=1}^{n} u_k, \quad k \in [1, n].$$

График кривой $\alpha_u(\gamma)$



Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \tag{54}$$

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\dot{u}_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{55}$$

$$u_0'(0,t) \;= 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u \int\limits_0^1 u_0(s,y)dy, \tag{56}$$

$$u_0 = \rho(s)\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{57}$$

$$u_2'(0,t) \;= 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u \int\limits_0^1 u_2(t,y)dy \;+ \int\limits_0^1 u_0(s,y)dy, \tag{58}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{3\rho^3 \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x}{4} - \frac{\rho^3 \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x}{4} = 0, \quad (59)$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u \int\limits_0^1 v_2(y) dy + \frac{z \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}}. \quad (60)$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{3\rho^3 \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x}{4} - \frac{\rho^3 \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x}{4} = 0, \quad (59)$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u \int_0^1 v_2(y) dy + \frac{z \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}}. \quad (60)$$

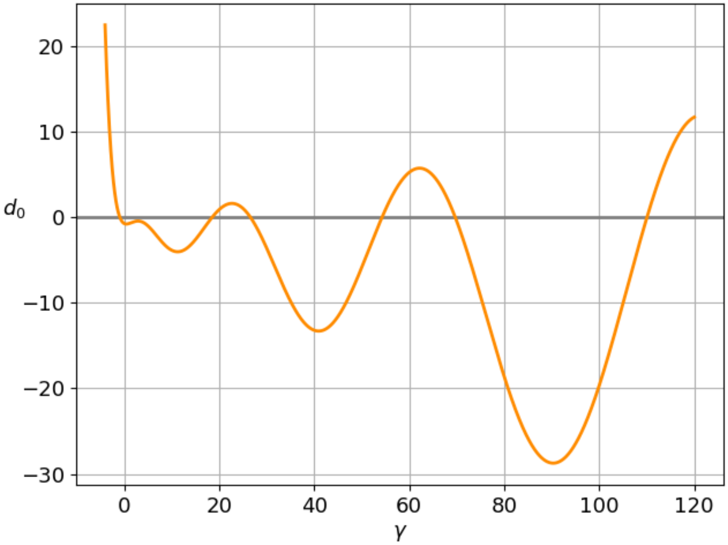
$$v_2 = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + -\frac{z^3}{32} \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x + \frac{3z^3 + 4z'}{8\sqrt{-\gamma}} x \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \rho + d_0\rho^3, \tag{61}$$

$$d_0 = -\frac{5\gamma\,\mathrm{sh}\,3\sqrt{-\gamma}}{48\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma}} - \frac{3}{4},$$



20
10
0
−10
−20
−30
d_0
0
20
40
60
80
100
120
γ

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одного класса краевых задач со специальными краевыми условиями

Леонид Ивановский