Бифуркационные особенности одной нелинейной краевой задачи с интегральным отклонением в краевом условии

Краевая задача с интегральным отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha \int\limits_0^1 u(t,y)dy, \tag{2}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0, \qquad x \in [0,1].$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha_{cr} \int\limits_0^1 u(t,y)dy. \tag{4}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha_{cr} \int\limits_0^1 v(y)dy. \tag{6}$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + \lambda},$$

$$v(x) = c\,\mathrm{ch}\,\mu x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\alpha_{cr} = \mu^2 = -\gamma + \lambda, \tag{7}$$

- $\lambda = 0: \ \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = -\gamma. \tag{8}$$

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\dot{u}_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{10}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u \int\limits_0^1 u_0(s,y)dy, \tag{11}$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{12}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u \int\limits_0^1 u_2(t,y)dy + \int\limits_0^1 u_0(s,y)dy, \tag{13}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{3\rho^3 \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x}{4} - \frac{\rho^3 \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x}{4} = 0, \tag{14}$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u \int\limits_0^1 v_2(y) dy + \frac{z \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma}}. \tag{15}$$

$$v_2 = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + -\frac{z^3}{32} \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x + \frac{3z^3 + 4z'}{8\sqrt{-\gamma}} x \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1, \\ d_0 &= -\frac{5\gamma \operatorname{sh} 3\sqrt{-\gamma}}{48 \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}} - \frac{3}{4}, \end{aligned}$$