ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 355, № 6, с. 744–746

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.926

О ЯВЛЕНИИ БУФЕРНОСТИ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ С ТУННЕЛЬНЫМ ДИОДОМ

© 1997 г. В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов

Представлено академиком О.А. Олейник 16.05.95 г.

Поступило 02.06.95 г.

1. В настоящее время в связи с развитием микроэлектроники становится актуальным исследование автогенераторов на распределенных структурах. Ниже рассматривается один из таких генераторов, содержащий отрезок длинной линии с туннельным диодом. Из результатов [1, 2] следует, что в предположениях о малости сопротивления и энергии его математической моделью служит уравнение

$$\dot{x}(t) - (1-\alpha\varepsilon)\dot{x}(t-h) + (1-\varepsilon)x(t) + (1-\alpha\varepsilon)\times$$
$$\times(1+\varepsilon)x(t-h) = \beta[x(t)-(1-\alpha\varepsilon)x(t-h)]^2 -$$
$$-[x(t)-(1-\alpha\varepsilon)x(t-h)]^3, \qquad (1)$$

где $0<\varepsilon\ll 1$, положительные параметры α, h имеют порядок единицы, а знак β произволен. Поставим вопрос о реализации в этой модели явления буферности, т.е. о возможности существования при подходящем выборе параметров любого фиксированного числа устойчивых циклов.

Рассмотрим квазиполином

$$P(\lambda,\varepsilon) = \lambda[1-(1-\alpha\varepsilon)\exp(-\lambda h)] + 1 - \varepsilon +$$
$$+(1-\alpha\varepsilon)(1+\varepsilon)\exp(-\lambda h), \qquad (2)$$

отвечающий нулевому состоянию равновесия уравнения (1). Несложный анализ показывает, что, во-первых, при $\varepsilon = 0$ все его корни простые, чисто мнимые и определяются равенствами

$$\lambda = \pm i\omega_n, \quad 0<\omega_1<\omega_2<\ldots,$$
$$\omega_n = 2\pi(n-1)/h + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty, \qquad (3)$$

где ω_n, $n\geq 1$, – положительные корни уравнения

$$\omega\,\mathrm{tg}(\omega h/2) = 1; \qquad (4)$$

во-вторых, при $0<\varepsilon\ll 1$ и $\alpha > \dfrac{2}{1+\omega_1^2}$ они лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$, а при уменьшении параметра α и прохождении его через значения $\dfrac{2}{1+\omega_n^2}$, $n\geq 1$, последовательно переходят в полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Таким образом, речь пойдет о бифурцирующих из нуля при

$$0<\alpha<\frac{2}{1+\omega_n^2}, \quad n\geq 1, \qquad (5)$$

периодических решениях с близкими к ω_n частотами, алгоритм построения которых приводится ниже.

2. Фиксируем натуральное n и подставим в (1) ряды

$$x = \sqrt{\varepsilon}x_1(\tau) + \varepsilon x_2(\tau) + \varepsilon^{3/2}x_3(\tau) + \ldots,$$
$$\tau = (1+\sigma_1\varepsilon + \sigma_2\varepsilon^2 + \ldots)t, \qquad (6)$$

$$x_1(\tau) = \xi[\exp(i\omega_n\tau) + \exp(-i\omega_n\tau)]. \qquad (7)$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях ε, для нахождения $2\pi/\omega_n$-периодических функций $x_k(\tau)$, $k\geq 2$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений вида

$$Lx_k = f_k(\tau), \quad Lx = \dot{x} - \dot{x}(\tau-h) + x + x(\tau-h), \qquad (8)$$

из условий разрешимости которых (при нечетных k) в нужном классе функций определяем неизвестные постоянные ξ, σ_k, $k\geq 1$.

При $k = 2$ описанный алгоритм приводит к формуле

$$x_2(\tau) = 4\beta\xi^2[1/(1+\omega_n^2) + \cos 2\omega_n\tau/(1+3\omega_n^2)].$$

Приравнивая далее к нулю коэффициент при $\exp(i\omega_n\tau)$ в правой части уравнения для x_3, находим

$$\xi = \frac{1+\omega_n^2}{2\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{1+\omega_n^2} - \alpha},$$

$$\sigma_1 = -\frac{32\beta^2\xi^2}{(1+\omega_n^2)(1+3\omega_n^2)(2+h+h\omega_n^2)},$$

Ярославский государственный университет

а затем и саму функцию x_3, определяемую с точностью до слагаемого $\eta\cos\omega_n\tau$. Произвольная же постоянная η обеспечивает вместе с очередной поправкой к частоте σ_2 разрешимость в классе тригонометрических полиномов уравнения (8) при $k = 5$ и т.д. Добавим еще, что для продолжения алгоритма до шага с номером k необходимы и достаточны условия

$$|P(im\omega_n, 0)| \neq 0, \quad m = 2, \ldots, k, \tag{9}$$

выполняющиеся при $k = 2, 3$ автоматически. Однако уже при $k = 4$ они приводят к неравенству

$$1 + 10\omega_n^2 - 15\omega_n^4 \neq 0, \tag{10}$$

справедливости которого добиваемся за счет выбора h.

Положим

$$R_{n,m} = \alpha(1 + 2\omega_n^2 - \omega_m^2) - 2, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Теорема. *Пусть при некотором $n \geq 1$ выполняются неравенства* (5), (10), *отличны от нуля числа* (11) *и количество положительных среди них равно m_0. Тогда найдется такое $\varepsilon_n > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ уравнение* (1) *имеет периодическое решение с асимптотикой* (6), (7), *экспоненциально орбитально устойчивое (в метрике фазового пространства $W_2^1(-h, 0)$) при $m_0 = 0$ и дихотомичное при $m_0 > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия $2m_0 + 1$.*

3. Оригинальная часть доказательства состоит в применении алгоритма исследования устойчивости из [3] к уравнению

$$\begin{aligned}\Pi(\varepsilon)x &= \dot{x}(\tau) - (1 - \alpha\varepsilon)\dot{x}(\tau - \tilde{h}) + \\ &+ a(\tau, \varepsilon)x(\tau) + b(\tau, \varepsilon)x(\tau - \tilde{h}) = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\tilde{h} = (1 + \varepsilon\sigma_1)h$, получающемуся из (1) после замены $\tau = (1 + \varepsilon\sigma_1)t$ и линеаризации на построенном выше отрезке ряда (6). Суть данного алгоритма в следующем. При $m \neq n$ положим в (12)

$$\begin{aligned}x &= [\exp(i\tilde{\omega}_m\tau) + \sqrt{\varepsilon}v_{1,m}(\tau) + \varepsilon v_{2,m}(\tau)] \times \\ &\times \exp(\varepsilon\mu_m\tau),\end{aligned} \tag{13}$$

где $\tilde{\omega}_m$ – корни уравнения (4) при $h = \tilde{h}$, а $v_{1,m}$, $v_{2,m}$ – тригонометрические полиномы переменных $\tilde{\omega}_m\tau$, $\omega_n\tau$, подлежащие определению вместе с постоянной μ_m. Приравнивая затем коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$ и ε, получаем уравнения

$$Lv_{j,m} = f_j(\tau), \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

где L – дифференциальный оператор (8) при $h = \tilde{h}$, решения которых ищем в виде тригонометрических многочленов той же структуры, что и правые части. На этом пути сначала находим

$$\begin{aligned}v_{1,m} &= A_+\exp(i(\tilde{\omega}_m + \omega_n)\tau) + \\ &+ A_-\exp(i(\tilde{\omega}_m - \omega_n)\tau),\end{aligned} \tag{15}$$

$$A_\pm = 8\beta\xi/(1 \mp i\omega_n)(1 - i\tilde{\omega}_m)P_0(i(\tilde{\omega}_m \pm \omega_n)), \tag{16}$$

где $P_0(\lambda)$ – квазимногочлен (2) при $\varepsilon = 0$, $h = \tilde{h}$. Приравнивая далее к нулю коэффициент при $\exp(i\tilde{\omega}_m\tau)$ в правой части второго уравнения (14), определяем

$$\begin{aligned}[2 + \tilde{h} + \tilde{h}\tilde{\omega}_m^2]\mu_m &= 2 - \alpha(1 + \tilde{\omega}_m^2) - 2i\tilde{\omega}_m\sigma_1 + \\ &+ 4\beta\xi(1 - i\tilde{\omega}_m)(\gamma_-A_- + \gamma_+A_+) - \frac{48\xi^2}{1 + \omega_n^2},\end{aligned} \tag{17}$$

$$\gamma_\pm = \frac{[1 - \exp(-i(\tilde{\omega}_m \pm \omega_n)\tilde{h})]}{1 \pm i\omega_n},$$

а затем и функцию $v_{2,m}$, содержащую только гармоники

$$\exp i(\tilde{\omega}_m \pm 2\omega_n)\tau.$$

При $m = n$, т.е. на собственной частоте автоколебаний, способ действий несколько отличается от предыдущего. В этом случае, полагая в (12)

$$x = [V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2]\exp\varepsilon D\tau,$$
$$V_j = [v_{j,n}, \bar{v}_{j,n}], \quad j = 0, 1, 2,$$
$$v_{0,n} = \exp(i\omega_n\tau), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ \bar{d}_2 & \bar{d}_1 \end{pmatrix}$$

и действуя указанным выше образом, приходим к равенствам

$$d_1 = i\omega_n\sigma_1 - \frac{24\xi^2}{1 + \omega_n^2}, \quad d_2 = d_1.$$

Структура матрицы D и вытекающие из (17) равномерные по m асимптотические представления

$$\operatorname{Re}\mu_m = \frac{R_{n,m}}{2 + h + h\omega_m^2} + O(\varepsilon), \quad \lim_{m\to\infty}\mu_m = -\frac{\alpha}{\tilde{h}}$$

показывают, что формальные свойства устойчивости уравнения (12) совпадают с теми, о которых говорится в теореме. Их строгое обоснование, а также необходимая для доказательства существования цикла оценка

$$\|\Pi^{-1}(\varepsilon)\|_{C\to C^1} \leq \frac{N}{\varepsilon}, \quad N > 0,$$

где C^1, C – подходящие пространства $\frac{2\pi}{\omega_n}$-периодических функций, непосредственно следуют из содержащихся в [4] результатов. Само же доказательство существования у уравнения (1) периодического решения с нужной асимптотикой проводится по стандартной схеме (см., например, [5]).

4. Из утверждений теоремы вытекает следующая динамика уравнения (1) при уменьшении α. При $\alpha > \frac{2}{1+\omega_1^2}$ нулевое состояние равновесия экспоненциально устойчиво, а при $\alpha < \frac{2}{1+\omega_1^2}$ от него ответвляется устойчивый цикл – происходит обычная бифуркация Андронова–Хопфа. Далее, при прохождении α через значения $\frac{2}{1+\omega_n^2}$, $n \geq 2$, в результате вторичных бифуркаций Андронова–Хопфа возникают неустойчивые циклы, которые, подрастая по амплитуде, становятся устойчивыми при $\alpha < \frac{2}{1+2\omega_n^2-\omega_1^2}$. Таким образом, при подходящем уменьшении параметров α, ε можно гарантировать существование у уравнения (1) любого наперед заданного количества устойчивых циклов. Добавим еще, что методами работы [6] можно проследить за возникновением в уравнении (1) при уменьшении α также и торов все более высоких размерностей. Все они, однако, неустойчивы. В частности, неустойчивые двумерные торы последовательно ответвляются от цикла с номером $n \geq 2$ при прохождении α через значения

$$\frac{2}{1+2\omega_n^2-\omega_m^2},\quad m = n-1, \ldots, 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brayton R.R.* // Quart. Appl. Math. 1967. V. 24. № 4.
2. *Колесов Ю.С., Швитра Д.И.* В сб.: Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1977. В. 18. С. 27–48.
3. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1787.
4. *Бирган С.Е.* В сб.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1983. С. 3–15.
5. *Колесов А.Ю.* // Мат. заметки. 1991. Т. 49. В. 5. С. 62–69.
6. *Колесов А.Ю.* // Там же. 1992. Т. 51. В. 2. С. 59–65.