

Общероссийский математический портал

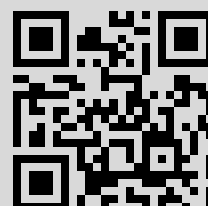
В. Ф. Камбулов, Резонансность как источник релаксационных колебаний в системах телеграфных уравнений, *Докл. РАН*, 1994, том 334, номер 5, 569–570

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.86.251.76

14 августа 2021 г., 23:01:14



УДК 517.9

РЕЗОНАНСНОСТЬ КАК ИСТОЧНИК РЕЛАКСАЦИОННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 1994 г. В. Ф. Камбулов

Представлено академиком Е.Ф. Мищенко 12.05.93 г.

Поступило 18.05.93 г.

1. В связи с развитием микроэлектроники в последние годы стали широко использоваться автогенераторы на распределенных структурах, в частности на полосковых линиях [1]. Ниже рассматривается математическая модель одного автогенератора такого класса. Она обладает выраженными резонансными свойствами, что влечет возникновение автоколебаний релаксационного типа. Перейдем к соответствующему анализу. Можно показать [1], что автогенератор на полосковой линии, нагруженной на активное сопротивление, описывается краевой задачей

$$u_x = \frac{d}{dt}(k_0 u|_{x=1} - u^3|_{x=1}) - \rho i, \quad (1)$$

$$\rho i_x = -u, \quad (2)$$

$$i|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} - R_0 i|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u, i$  – переменные составляющие напряжения и тока в линии,  $k_0, \rho$  и  $R_0$  – положительные параметры. Подчеркнем различие между этими параметрами. Постоянную  $k_0$  будем называть бифуркационным параметром, так как обычно за счет его увеличения возникают автоколебания. Параметры  $\rho$  и  $R_0$  носят фоновый характер.

Отметим ряд свойств линеаризованной краевой задачи. Символом  $k_{\min}$  обозначим такое значение бифуркационного параметра  $k_0$ , при котором какие-то корни ее характеристического уравнения

$$(1 - k_0 R_0 / \rho) \operatorname{ch} \lambda + R_0 (k_0 + \operatorname{sh} \lambda) / \rho = 0 \quad (4)$$

находятся на мнимой оси, а остальные принадлежат левой открытой комплексной полуплоскости. Из (4) без труда следует, что при  $k_{\min} = \rho / 2R_0$  счетное число корней

$$\pm j(2n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

расположено на мнимой оси. Остальные же корни уравнения (4) при этом находятся в левой открытой комплексной полуплоскости, причем их

мнимые части совпадают с (5), а для реальных частей справедлива формула

$$\operatorname{Re} \lambda = \ln \left| \frac{1 - k_{\min}}{1 + k_{\min}} \right|, \quad k_{\min} \neq 1.$$

Отметим еще, что при переходе от  $k_0 = k_{\min}$  к  $k_0 = k_{\min} + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , корни (5), которые теперь обозначим  $\lambda_{2n+1}(\varepsilon)$ , переходят в правую комплексную полуплоскость, причем

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda_{2n+1}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 2.$$

2. Вернемся к исходной задаче (1) - (3). Полагая

$$f(t) = k_0 u|_{x=1} - u^3|_{x=1}, \quad v = f(t) - \rho i, \quad (6)$$

перейдем от (1) - (3) к новой краевой задаче

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_x, \quad (7)$$

$$v|_{x=0} = f(t), \quad (8)$$

$$u|_{x=1} + (R_0 / \rho) v|_{x=1} = (R_0 / \rho) f(t).$$

В нашем случае общее решение системы телеграфных уравнений (7) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(t+x) + \psi(t-x+1), \\ v(x, t) &= \varphi(t+x) - \psi(t-x+1), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varphi, \psi$  – пока произвольные гладкие функции, способ выбора которых уточним ниже. Подставляя (9) в граничные условия (8), получаем

$$\varphi(t) - \psi(t+1) = F[\varphi(t+1) + \psi(t)], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t+1) + \psi(t) + R_0 [\varphi(t+1) - \psi(t)] / \rho = \\ = R_0 F[\varphi(t+1) + \psi(t)] / \rho, \end{aligned} \quad (11)$$

где для краткости положено  $F(z) = k_0 z - z^3$ . Соотношения (9) и (10), (11) позволяют разобраться с вопросом о разрешимости системы (7), (8), дополненной начальными условиями

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x) + \psi(1-x), \\ v|_{t=0} &= \varphi(x) - \psi(1-x). \end{aligned} \quad (12)$$

Относительно гладких функций  $\varphi, \psi$  дополнительно требуется, чтобы функции (12) удовлетворяли

граничным условиям (8). Из (10), (11) выводим, что при подходящей малости указанных выше функций  $\varphi, \psi$  в  $C$ -метрике система (10), (11) разрешима при  $t > 0$ . Отсюда следует существование и единственность классических решений. Однако нас будет интересовать вопрос об аттракторах смешанной краевой задачи для системы (7), (8). В силу сказанного решающее значение здесь должны сыграть отображения (10), (11). Их удобно преобразовать следующим образом. Пусть  $\varphi(t+1) = \varphi, \psi(t) = \psi$ . Из (11) выводим, что с точностью до  $O(\psi^5)$

$$\varphi = \alpha\psi + \beta\psi^3, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{1 - k_{\min}}{1 + k_{\min}} \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - k_{\min}^2} \right) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\beta = -\frac{8}{(1 + k_{\min})^4} + O(\varepsilon).$$

Теперь из (10) с учетом (11), (13) получаем одномерное отображение

$$\psi(t+1) = \Phi(\psi(t), \psi(t-1)), \quad (14)$$

где значения коэффициентов кубического многочлена  $\Phi$  получаем в соответствии с (10) и (13). Отображение (14) содержит запаздывание, поэтому его удобно записать сначала в виде системы

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \Phi(y, w), \\ w &\rightarrow y, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $y = \psi(t), w = \psi(t-1)$ , а затем в векторной форме

$$u \rightarrow \Pi(u); \quad (16)$$

здесь  $u = \text{colon}(y, w)$ .

Положим в (16)  $k_0 = k_{\min} + \varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  обозначим  $A = \Pi'(0)$ . Из соотношений (13), (14), (15) вытекает, что

$$A = \begin{pmatrix} -2k_{\min}/(1+k_{\min}) & (1-k_{\min})/(1+k_{\min}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что собственные числа матрицы  $A$  соответственно равны  $\rho_1 = (1 - k_{\min})/(1 + k_{\min})$ ,  $\rho_2 = -1$ . Заметим, что собственному числу  $\rho_2 = -1$  (именно оно для нас интересно) отвечает собственный вектор  $a = \text{colon}(1, -1)$ .

Напомним, что о цикле  $u_1, u_2, u_1 \neq u_2$ , периода 2 отображения (16) говорят, если  $u_2 = \Pi(u_1), u_1 = \Pi(u_2)$ .

Проведенный выше анализ убеждает, что при  $\varepsilon > 0$  из нулевого состояния равновесия отображением (16) вероятнее всего бифурцирует экспонен-

циально устойчивый цикл периода 2. В силу нечетности  $\Pi(u)$  ищем  $u_1, u_2$  в виде

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon} \xi a + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (18)$$

Учитывая (18) в (16), убеждаемся, что  $\xi = \frac{1}{2}(1 + k_{\min})$ .

Остановимся на вопросе об устойчивости этого цикла. Обозначим через  $\mu = 1 + \mu_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$  близкие к 1 собственные числа матрицы

$$B = \Pi'(u_2) \cdot \Pi'(u_1).$$

Тем самым при  $\mu_1 < 0$  цикл  $u_1, u_2$  отображения (16) экспоненциально устойчив. Оказывается,  $\mu_1 = -8$ , т.е. выполнено требуемое неравенство.

Подытожим сказанное в виде следующего предложения.

**Теорема.** *Найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и  $k_0 = k_{\min} + \varepsilon$  аттрактор решений краевой задачи (7), (8) с гладкими начальными условиями, удовлетворяющими граничным условиям (8) и достаточно малыми по  $C$ -норме, есть разрывный цикл, очевидным образом строящийся по циклу периода 2 отображения (16). Подчеркнем, что при  $t \rightarrow \infty$  сходимость решений к разрывному циклу поточечная почти при всех  $x$ .*

Итак, в рассмотренной математической модели распределенного аналога автогенератора Ван-дер-Поля колебания неограниченно приближаются к разрывным. Следует, однако, отметить, что в реальных физических системах малые активные потери в  $LC$ -линии и реактивные импедансы на ее концах сглаживают колебания, которые по-прежнему продолжают иметь релаксационный вид.

Отметим, что выявленный феномен имеет общий характер: у многих других краевых задач для систем уравнений телеграфного типа наличие счетного числа резонансов также влечет релаксационность колебаний.

Автор выражает благодарность Ю.С. Колесову, обратившему внимание автора на зависимость релаксационных колебаний от резонансов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16282).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 391 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
3. Колесов Ю.С. В сб.: Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1971. В. 2. С. 1 - 67.