

## ДИНАМИКА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФУЗИОННО СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Работа посвящена динамике системы дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью. Актуальность исследований такой системы обусловлена тем, что незначительное изменение коэффициента дополнительной связи позволяет получить сложные сценарии поведения устойчивых состояний равновесия. Для рассматриваемой системы были найдены критические зависимости, при которых нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость с появлением двух пространственно неоднородных состояний в одном случае и цикла в другом. При значениях параметров, близких к критическим, были получены асимптотические формулы для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.

*Материалы и методы.* Для задачи в комплексе применялись аналитические и численные методы решения. При численном исследовании особое внимание уделялось значениям параметров, при которых нулевое решение системы дифференциальных уравнений теряет свою устойчивость.

*Результаты.* Были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят бифуркации нулевого состояния равновесия. При значениях параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления неоднородных состояний равновесия в одном случае и цикла – в другом.

*Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов. Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие системы дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, кубическая нелинейность, нулевое состояние равновесия, потеря устойчивости.

L. I. Ivanovskiy

## DYNAMICS OF ONE SYSTEM OF DIFFUSIONALLY COUPLED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AUXILIARY INTERNAL CONNECTION

### Abstract.

*Background.* The work is devoted to the dynamics of a system of differential equations with diffusion interaction and additional internal constraint with cubic nonlinearity. The relevance of studies of such a system is due to the fact that a slight

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-29-10055).

© Ивановский Л. И., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

change in the additional coupling coefficient allows one to obtain complex scenarios of the behavior of stable equilibrium states. For the system under consideration, critical dependences were found at which the zero equilibrium state loses its stability with the appearance of two spatially inhomogeneous states in one case and a cycle in the other. For the values of the parameters close to the critical ones, asymptotic formulas were obtained for the modes branching from the zero solution.

*Materials and methods.* For the problem in the complex, analytical and numerical solution methods were used. In the numerical study, special attention was paid to the values of the parameters at which the zero solution of the system of differential equations loses its stability.

*Results.* Critical dependences of the parameters at which bifurcations of the zero equilibrium state occur. At the values of the parameters close to critical, a normal form was constructed and on its basis the conditions for the appearance of inhomogeneous equilibrium states in one case and a cycle in the other were determined.

*Conclusions.* The results obtained can be used to solve problems of numerical modeling of some biophysical processes. It is also interesting to extend these results to other systems of differential equations with additional internal connection.

**Keywords:** system of differential equations, cubic nonlinearity, zero equilibrium, loss of stability.

### Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

которую дополним следующими нелинейными условиями на границах:

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k + \frac{\beta}{N} u_k^3, \quad 1 \leq k < N, \quad (2)$$

дающими дополнительную внутреннюю связь с кубической нелинейностью. Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см., например, [1–4]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренним элементом цепочки. Для системы (1), (2)  $u_j = u_j(t)$  – гладкие функции при  $t \geq 0$ , параметры  $\alpha$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma$  – действительные числа, а индекс  $k \in N$  определяет дополнительную внутреннюю связь между элементами  $u_N$  и  $u_k$ . На рис. 1 дана иллюстрация взаимодействия функций  $u_j$ .

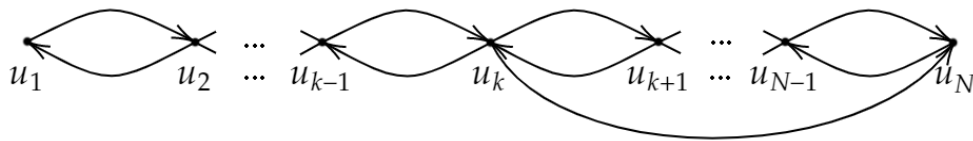


Рис 1. Взаимодействия функций  $u_j$  в системе (1), (2)

Система (1), (2) очевидным образом имеет однородное нулевое решение  $u_j(t) \equiv 0$ . Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения и

режимов, ответвляющихся от него при критических значениях параметров. Можно выделить два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1), (2). В первом случае через мнимую ось переходит нулевое собственное число, а во втором – пара комплексно сопряженных собственных чисел. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров и асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

### 1. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (1), (2):

$$\dot{u}_j = N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (4)$$

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним замену

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j, \quad (5)$$

где  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$ ,  $\lambda$  – собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент  $\delta$  определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (3) с условиями (4). При подстановке замены (5) можно получить формулы для коэффициента  $\delta$  и параметра  $\alpha$ :

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}, \quad (6)$$

где  $x_k = \frac{1}{N} \left( k - \frac{1}{2} \right)$ .

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим, при каких критических значениях параметра  $\alpha$  собственные значения выходят на мнимую ось. Рассмотрим случаи нулевого и чисто мнимого значения  $\lambda$ . Подстановка  $\lambda = 0$  в выражение (6) приводит к зависимости

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \quad (7)$$

где  $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$ .

Подстановка  $\lambda = i\omega$ , где  $\omega \in \mathbb{R}$ , позволяет перейти от выражения (6) при фиксированном  $\gamma$  и  $x_k = \frac{1}{N} \left( k - \frac{1}{2} \right)$  к уравнению относительно  $\alpha_c$  и  $\omega$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega \operatorname{sh} \delta_c}}{\operatorname{ch} \delta_c x_k}, \quad (8)$$

где  $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$ . Выделяя вещественную и мнимую части в выражении (8) и численно решая полученную систему, находим значения  $\omega$  и  $\alpha_c$  такие, чтобы  $\alpha_c$  было минимальным по модулю.

Согласно ранее полученным формулам справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (1), (2) нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанных формулами (7) или (8).

Для системы (3), (4) изучим динамику поведения критических зависимостей  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$  для различных значений  $k$ , где  $k$  – номер узла, с которым дополнительно связано последнее уравнение. В нашем случае количество уравнений считалось  $N = 50$ . Отметим, что увеличение  $N$  слабо сказывается на поведении функций  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ .

На рис. 2 приведена схематическая визуализация критических зависимостей  $\alpha_u(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ , рассчитываемых по формулам (7) и (8) соответственно, для значений индекса  $k = 1$  и  $k = 26$ . Здесь кривая  $\alpha_u$  показана синим цветом, а кривая  $\alpha_c$  – красным цветом. Как показано на рис. 2, кривые  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$  пересекаются в точке  $B$  с координатами  $(\gamma_*, \alpha_*)$ , где  $\gamma_* > 0$  и  $\alpha_* < 0$ . Отметим, что с увеличением индекса  $k$  значение  $\alpha_*$  будет уменьшаться, а  $\gamma_*$  – увеличиваться.

Как показано на рис. 3, для некоторых значений индекса  $k$  появляется дополнительная критическая зависимость  $\alpha_f(\gamma)$ , рассчитываемая по формуле (8). Кривая  $\alpha_f$  показана зеленым цветом. Она берет свое начало в точке  $F$  локального минимума функции  $\alpha_u(\gamma)$  с координатами  $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$  и сливается с кривой  $\alpha_c$  в точке  $B$  с координатами  $(\gamma_*, \alpha_*)$ , где  $0 < \bar{\gamma} < \gamma_*$ , а  $0 < \bar{\alpha} < \alpha_*$ . Отметим, что с увеличением индекса  $k$  значение  $\bar{\alpha}$  будет уменьшаться, а  $\bar{\gamma}$  – увеличиваться.

Кривые  $\alpha_u$ ,  $\alpha_c$  и  $\alpha_f$  являются важнейшими элементами построения областей параметров  $(\gamma, \alpha)$ , определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия. Так, область  $S$  соответствует случаю устойчивого нулевого решения,  $U$  – случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в области  $C$  наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

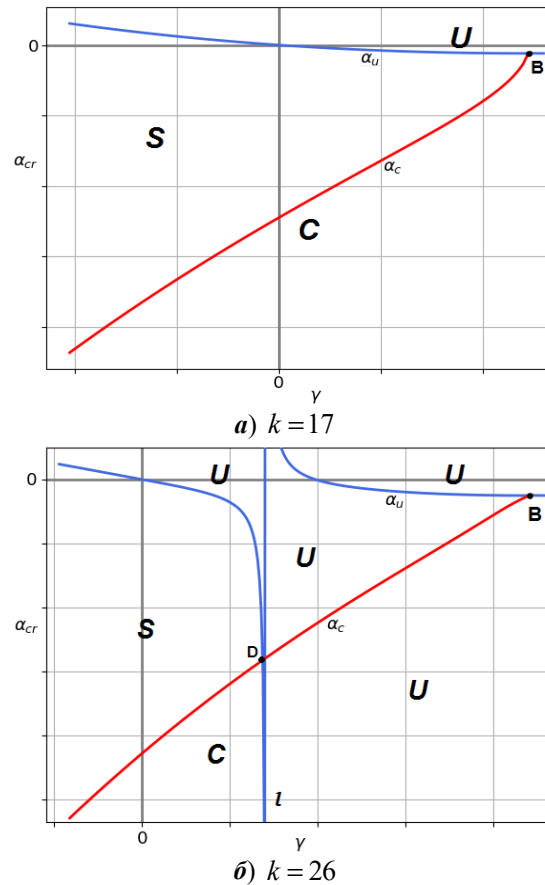


Рис. 2. Схематическая визуализация кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$

Кривая  $\alpha_u$  определяет верхнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $U$ , для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_u$ . Здесь  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_u = \begin{cases} \gamma^*, & 1 \leq k \leq 17, \\ \bar{\gamma}, & 18 \leq k \leq 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50. \end{cases} \quad (9)$$

Величина  $\hat{\gamma}$  является абсциссой точки  $D$  пересечения кривых  $\alpha_c$  и  $\alpha_u$ ,  $0 < \hat{\gamma} < l$ , где  $l > 0$  – абсцисса точек вертикальной асимптоты  $\gamma = l$  для функции  $\alpha_u(\gamma)$  (рис. 2,б, 3,з). Для некоторых значений индекса  $k$  верхнюю границу области  $S$  определяет также и кривая  $\alpha_f$ , для всех  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ . Здесь  $\Gamma_f$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_f = \begin{cases} \gamma^*, & 18 \leq k \leq 24, \\ \gamma_1, & k = 25, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\gamma_1$  – абсцисса точки  $P_1$  пересечения кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_f$  такая, что  $l < \gamma_1 < \gamma^*$  (рис. 3,б).

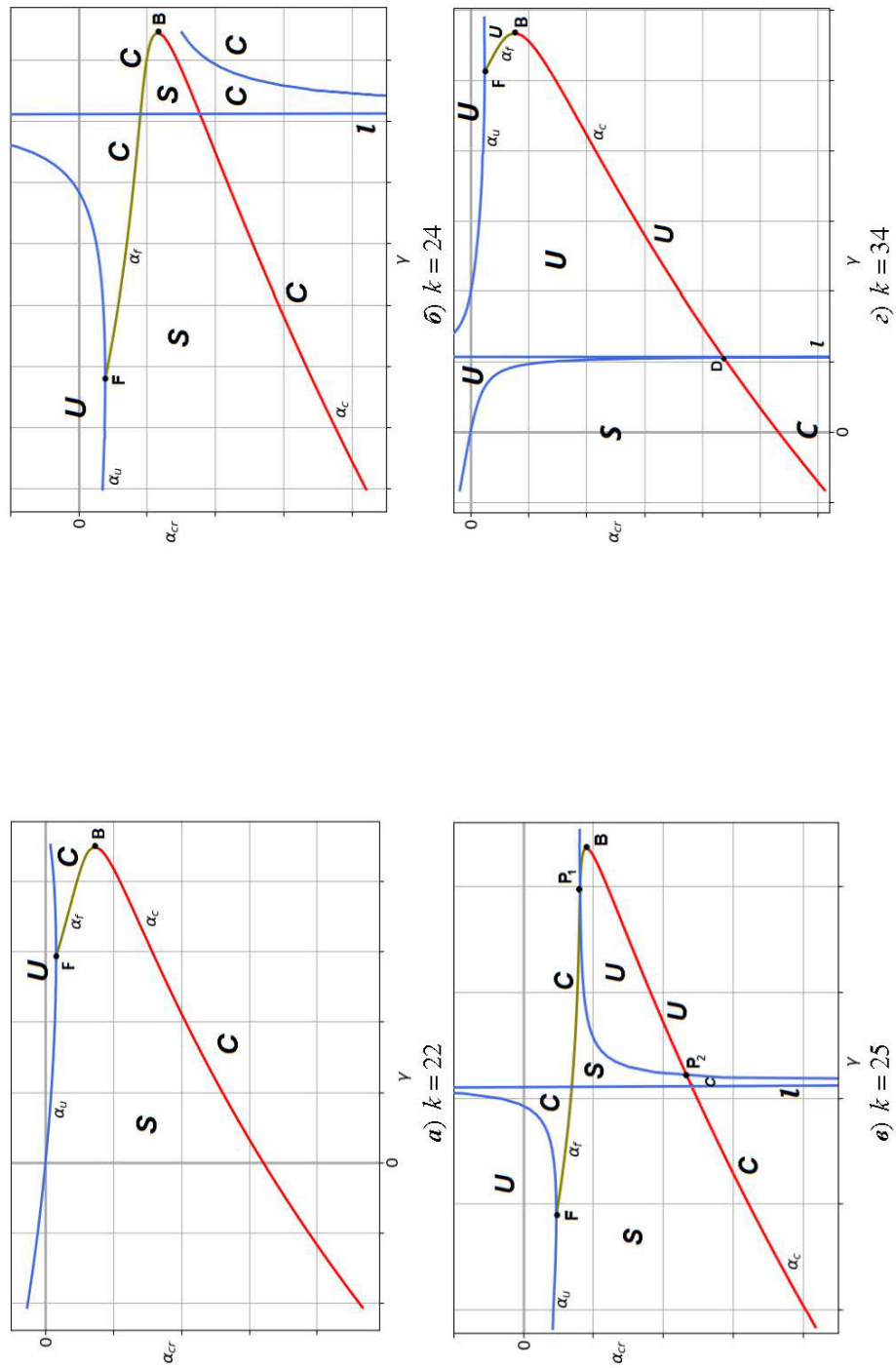


Рис. 3. Схематическая визуализация кривых  $\alpha_u$ ,  $\alpha_f$  и  $\alpha_c$

Для случая  $k = 25$  кривая  $\alpha_u$  определяет также и нижнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $U$ , для всех значений  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_2$  – абсцисса точки  $P_2$  пересечения кривых  $\alpha_u$  и  $\alpha_c$  такая, что  $l < \gamma_2 < \gamma_*$  (см. рис. 3,б). Отметим, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения

$$\frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_{25}} - \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_{25}} = 0, \quad (11)$$

удовлетворяющими условию вида

$$\gamma_* > \gamma_1 > \gamma_2 > l. \quad (12)$$

Кривая  $\alpha_c$  определяет нижнюю границу области  $S$ , отделяющую ее от области  $C$ , для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_c$ . Здесь  $\Gamma_c$  вычисляется по формуле

$$\Gamma_c = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leq k \leq 24, \\ \gamma_2, & k = 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50. \end{cases} \quad (13)$$

Исходя из описанных результатов, можно сформулировать две леммы.

**Лемма 2.** Для всех значений  $\gamma \leq \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  определяется выражением (9) и  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), критическая зависимость  $\alpha_u(\gamma)$ , рассчитываемая по формуле (7), позволяет выделить область параметров  $(\gamma, \alpha)$  с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

**Лемма 3.** Для всех значений  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  определяется выражением (10), и  $\gamma \leq \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  определяется выражением (13), критические зависимости  $\alpha_f(\gamma)$  и  $\alpha_c(\gamma)$ , рассчитываемые по формуле (8), позволяют выделить область параметров  $(\gamma, \alpha)$  с устойчивым нулевым решением системы (3), (4) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Леммы доказываются на основе приведенного выше численного анализа линеаризованной в нуле системы (1), (2).

## 2. Локальный анализ поведения системы в окрестности нулевого состояния равновесия

Методами малых возмущений [5, 6] построим режим, отвечающий от нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Для этого введем в рассмотрение малый параметр  $\varepsilon$ , который косвенно характеризует собой отклонение от нуля.

В случае нулевого собственного значения  $\lambda$  матрицы линеаризованной системы (3), (4) малый параметр  $\varepsilon$  обозначает переход из области  $S$  в область  $U$  по параметру  $\alpha$  для фиксированного значения  $\gamma$ . Здесь параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u, \quad (14)$$

где  $\alpha_u$  вычисляется по формуле (7).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (1), (2) по степеням малого параметра

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Здесь функции  $u_j = u_j(s)$  зависят от медленного времени  $s = \varepsilon t$ ,

а  $u_{j,0} = \rho(s) \cosh \delta_u x_j$ , где  $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$ ,  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$ . Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (14) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов  $u_{j,0}$ ,  $u_{j,1}$ ,  $u_{j,2}$ :

$$\dot{u}_{j,0} = N^2 (u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0},$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2 (u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2 (u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2}, \quad (16)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,2} + u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}^3. \quad (17)$$

Учитывая, что у системы (16) краевое условие (17) содержит кубическую нелинейность, и, тем самым, для функций  $u_{j,1}$  система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (16), (17) можно получить укороченное уравнение на величину  $\rho$ :

$$\rho' = \varphi_0 \rho + d_0 \rho^3. \quad (18)$$

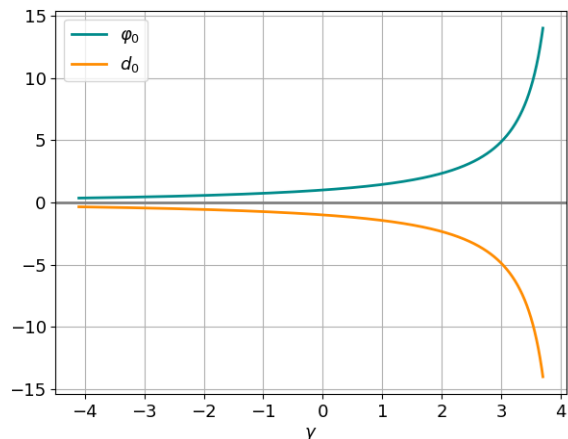
Для уравнения (18) коэффициенты  $\varphi_0, d_0$  выглядят следующим образом:

$$\varphi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch} \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}, \quad (19)$$

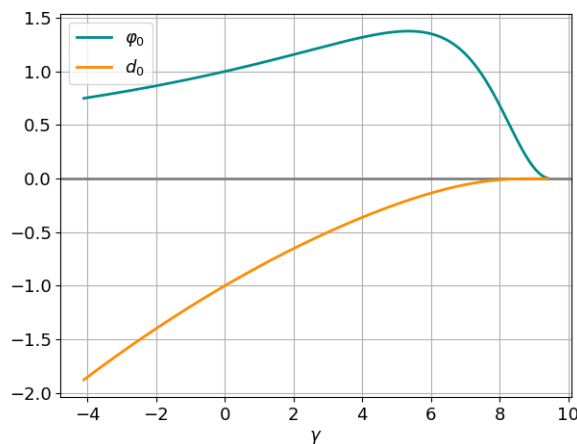
$$d_0 = \frac{2\beta \delta_u \operatorname{ch}^3 \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}. \quad (20)$$



Для коэффициентов  $\varphi_0, d_0$  при различных значениях индекса  $k$  были построены зависимости от параметра  $\gamma$ . Согласно численным результатам для  $\beta < 0$  и  $\gamma < \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле (9),  $\varphi_0$  оказывался положительным, а  $d_0$  – отрицательным. Другими словами, пара неустойчивых состояний равновесия сливалась с устойчивым нулевым решением системы (1), (2) и в результате дивергентной потери устойчивости образовывалась пара устойчивых состояний равновесия в окрестности неустойчивого нулевого решения. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  для значений индекса  $k=17$  и  $k=26$  при  $\beta=-1$  показаны на рис. 4.



а)  $k=17$



б)  $k=26$

Рис. 4. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  при  $\beta=-1$

В случае  $k=25$  для всех  $\gamma$  таких, что  $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12), малый параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha_u - \alpha.$$

Здесь коэффициент  $\varphi_0$  рассчитывается по формуле (19), но имеет противоположный знак, а коэффициент  $d_0$  вычисляется по формуле (20). Для данного случая  $\varphi_0$  и  $d_0$  оказывались положительными, что говорит о грубой потере устойчивости нулевого решения системы (1), (2).

При условии, что  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ , уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho_* = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}}$ , причем  $\rho$  стремится к этому состоянию равновесия при  $s \rightarrow +\infty$ . Подставляя в нормальную форму (15) значение  $\rho$ , получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (1), (2) (см. также [6]):

$$u_j = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\varphi_0}{d_0}} \operatorname{ch} \delta_u x_j + O(\varepsilon). \quad (21)$$

При условии, что  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 > 0$ , происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (18) имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho = \rho_*$ , где  $\rho_* = \sqrt{\frac{\varphi_0}{d_0}}$ . При подстановке полученного значения  $\rho$  в нормальную форму (15) получаем асимптотическое приближение (21) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающихся к нулевому решению системы (1), (2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и отбирающих у него устойчивость (см. также [7–10]).

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2) это позволяет доказать следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ , для  $\gamma \leq \Gamma_u$ , где  $\Gamma_u$  вычисляется по формуле (9). Тогда для любого  $\gamma < \Gamma_u$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности неустойчивого нулевого решения два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

**Теорема 2.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$  для  $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями трансцендентного уравнения (11), удовлетворяющими условию (12). Тогда для любого  $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (21).

В случае чисто мнимого собственного значения  $\lambda$  матрицы линеаризованной системы (3), (4) малый параметр  $\varepsilon$  обозначает переход из области  $S$  в область  $C$  по параметру  $\alpha$  для фиксированного значения  $\gamma$ . Здесь  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_f, \quad (22)$$

где  $\alpha_f$  вычисляется по формуле (8). Так же как и в случае дивергентной потери устойчивости, воспользуемся нормальной формой (15), для которой

$$u_{j,0} = z(s) e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j},$$

где  $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$ , а  $x_j = \frac{j}{N} - \frac{1}{2N}$  (см. также [11]). Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (15) с учетом (22) приводит к последовательно разрешимым системам для собственных векторов  $u_{j,0}, u_{j,1}, u_{j,2}$ :

$$\dot{u}_{j,0} = N^2 (u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,0},$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2 (u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2 (u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2}, \quad (23)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_f}{N} u_{k,2} + u_{k,0} + \frac{\beta}{N} u_{k,0}^3. \quad (24)$$

Учитывая, что у системы (23) краевое условие (24) содержит кубическую нелинейность и, тем самым, для функций  $u_{j,1}$  система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (23), (24) можно получить укороченное уравнение на амплитуду колебаний нулевого решения:

$$z' = (\varphi_0 + i\psi_0)z + (d_0 + ic_0)z|z|^2. \quad (25)$$

Для уравнения (25) коэффициенты  $\varphi_0$ ,  $d_0$  рассчитываются по формулам

$$\varphi_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{2\delta_c \operatorname{ch} \delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_f x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k} \right), \quad (26)$$

$$d_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{3\beta \delta_c (\operatorname{ch}((\delta_c + 2\operatorname{Re} \delta_c) x_k) + \operatorname{ch}((\delta_c + 2i \operatorname{Im} \delta_c) x_k) + 2\operatorname{ch} \overline{\delta_c} x_k)}{2(\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_f x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k)} \right). \quad (27)$$

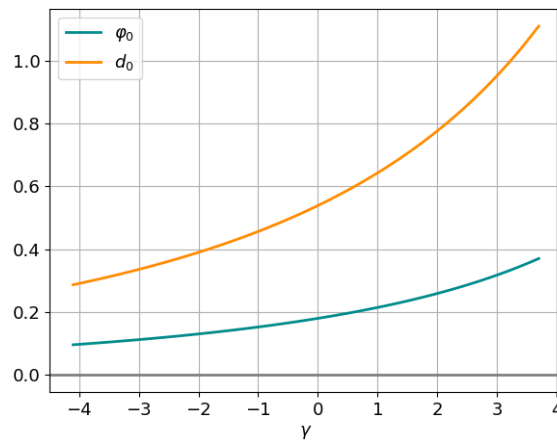
Для коэффициентов  $\varphi_0, d_0$  при различных значениях индекса  $k$  были построены зависимости от параметра  $\gamma$ . Согласно численным результатам для  $\beta < 0$  и  $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  вычисляется по формуле (10),  $\varphi_0$  оказывался положительным, а  $d_0$  оказывался отрицательным. Другими словами, нулевое

решение системы (1), (2) теряло свою устойчивость колебательным способом (см. также [12]): оно становилось неустойчивым, а вокруг него образовывался устойчивый цикл порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

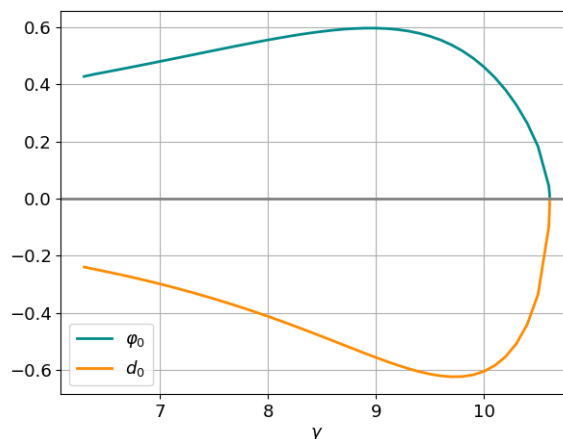
В том случае, когда малый параметр  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \alpha_c - \alpha,$$

коэффициент  $\varphi_0$  рассчитывается по формуле (26), но имеет противоположный знак, а коэффициент  $d_0$  считается по формуле (27). Согласно численным результатам для всех  $\gamma < \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  вычисляется по формуле (13), оба коэффициента  $\varphi_0$  и  $d_0$  оказывались положительными, что говорит о наличии неустойчивого цикла порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , окружающего нулевое решение системы (1), (2). Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  для  $k=1$  и  $k=23$  при  $\beta=-1$  и различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  показаны на рис. 5.



а)  $k=1, \varepsilon = \alpha_c - \alpha$



б)  $k=23, \varepsilon = \alpha - \alpha_f$

Рис. 5. Графики функций  $\varphi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$  при  $\beta=-1$

Осуществляя переход к полярной системе координат для  $z = \rho e^{i\nu}$ , уравнение (25) сводится укороченной системе (см., например, [6, 13]) вида

$$\rho' = \Phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \quad (28)$$

$$\nu' = \Psi_0 + c_0 \rho^2. \quad (29)$$

В системе (28), (29) первое уравнение не зависит от второго, в связи с этим его можно решать отдельно. В частности, при условии, что  $\Phi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ , уравнение (28) имеет ненулевое состояние равновесия

$\rho_* = \sqrt{-\frac{\Phi_0}{d_0}}$ , причем  $\rho$  стремится к этому состоянию равновесия при  $s \rightarrow +\infty$ .

В этом случае из второго уравнения заключаем, что  $\nu(s) = \sigma s + \gamma$ , где  $\gamma$  – произвольное действительное число, а коэффициент  $\sigma$  вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \frac{\Psi_0 d_0 - c_0 \Phi_0}{d_0}.$$

Подставляя в нормальную форму (15) полученные значения  $\rho$  и  $\nu$ , получаем асимптотическое приближение для пространственно неоднородного цикла исходной системы (1), (2):

$$u_j = \sqrt{-\varepsilon \frac{\Phi_0}{d_0}} \left( e^{i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \text{ch} \delta_c x_j + e^{-i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \overline{\text{ch} \delta_c x_j} \right) + O(\varepsilon). \quad (30)$$

При условии, что  $\Phi_0 > 0$  и  $d_0 > 0$ , происходит обратная бифуркация Андронова – Хопфа (см., например, [5, 12]). В этом случае уравнение (28)

имеет ненулевое состояние равновесия  $\rho = \rho_*$ , где  $\rho_* = \sqrt{\frac{\Phi_0}{d_0}}$ , которому соот-

ветствует неустойчивый цикл с асимптотикой (30), стягивающийся при  $\varepsilon = 0$  к нулевому состоянию равновесия системы (1), (2) и забирающий у него устойчивость.

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяют доказать следующие теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$  для  $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$ , где  $\Gamma_f$  вычисляется с помощью (10). Тогда для любого  $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой (30).

**Теорема 4.** Пусть  $\beta < 0$ , а  $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$  для  $\gamma \leq \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  вычисляется с помощью (13). Тогда для любого  $\gamma < \Gamma_c$  существует  $\varepsilon_0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) имеет в окрестности нуля орбитально инвариантный неустойчивый цикл с асимптотикой (30).

### Заключение

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. Для значений параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия в одном случае и цикла – в другом.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см., например, [14, 15]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см., например, [11]).

*Автор благодарит С. Д. Глызина за постановку задачи и обсуждение результатов.*

### Библиографический список

1. **Глызин, С. Д.** Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. – 2020. – Т. 203, № 1. – С. 10–25.
2. **Glyzin, S. D.** Difference Approximations of a Reaction–Diffusion Equation on Segments / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2018. – Vol. 52, № 7. – P. 762–776.
3. **Glyzin, S. D.** Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / S. D. Glyzin // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. – Vol. 47, № 7. – P. 452–469.
4. **Глызин, С. Д.** Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1400–1418.
5. **Гукенхеймер, Дж.** Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
6. **Глызин, С. Д.** Локальные методы анализа динамических систем / С. Д. Глызин. – Ярославль : ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2006. – 91 с.
7. **Марсден, Дж. Е.** Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, Д. Мак-Кракен. – Москва : Мир, 1980. – 368 с.
8. **Хэссард, Б.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – Москва : Мир, 1985. – 280 с.
9. **Wiggins, S.** Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods / S. Wiggins. – New York : Springer, 1989. – 672 p.
10. **Wiggins, S.** Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. – New York : Springer, 2003. – 882 p.
11. **Кашенко, С. А.** О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием / С. А. Кашенко // Моделирование и анализ информационных систем. – 2017. – Т. 24, № 2. – С. 168–185.
12. **Анищенко, В. С.** Лекции по нелинейной динамике : учеб. пособие для вузов / В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова. – Москва ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.
13. **Митропольский, Ю. А.** Интегральные многообразия в нелинейной динамике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – Москва : Наука, 1973. – 512 с.

14. Гурли, С. А. Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика / С. А. Гурли, Дж. В.-Х. Соу, Дж. Х. Ву // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 84–120.
15. Britton, N. F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology / N. F. Britton. – New York : Academic Press, 1986. – 277 p.

### References

1. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2020, vol. 203, no. 1, pp. 10–25. [In Russian]
2. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2018, vol. 52, no. 7, pp. 762–776.
3. Glyzin S. D. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013, vol. 47, no. 7, pp. 452–469.
4. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1400–1418. [In Russian]
5. Gukenkheymer Dzh., Kholms F. *Nelineynye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkatsii vektornykh poley* [Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields]. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002, 560 p. [In Russian]
6. Glyzin S. D. *Lokal'nye metody analiza dinamicheskikh sistem* [Local methods for analysis of dynamical systems]. Yaroslavl: YarGU im. P. G Demidova, 2006, 91 p. [In Russian]
7. Marsden Dzh. E., Mak-Kraken D. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [Cycle birth bifurcation and its applications]. Moscow: Mir, 1980, 368 p. [In Russian]
8. Khessard B., Kazarinov N., Ven I. *Teoriya i prilozheniya bifurkatsii rozhdeniya tsikla* [Theory and applications of cycle birth bifurcation]. Moscow: Mir, 1985, 280 p. [In Russian]
9. Wiggins S. *Global bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. New York: Springer, 1989, 672 p.
10. Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer, 2003, 882 p.
11. Kashchenko S. A. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem* [Modeling and analysis of information systems]. 2017, vol. 24, no. 2, pp. 168–185. [In Russian]
12. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. *Lektsii po nelineynoy dinamike: ucheb. posobie dlya vuzov* [Lectures on nonlinear dynamics: teaching aid for universities]. Moscow; Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2011, 516 p. [In Russian]
13. Mitropol'skiy Yu. A., Lykova O. B. *Integral'nye mnogoobraziya v nelineynoy dinamike* [Integral manifolds in nonlinear dynamics]. Moscow: Nauka, 1973, 512 p. [In Russian]
14. Gurli S. A., Sou Dzh. V.-Kh., Vu Dzh. Kh. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary mathematics. Fundamental directions]. 2003, vol. 1, pp. 84–120. [In Russian]
15. Britton N. F. *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*. New York: Academic Press, 1986, 277 p.

**Ивановский Леонид Игоревич**

аспирант, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14)

E-mail: leon19unknown@gmail.com

**Ivanovskiy Leonid Igorevich**

Postgraduate student, P. G. Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya street, Yaroslavl, Russia)

**Образец цитирования:**

Ивановский, Л. И. Динамика одной системы диффузионно связанных дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью / Л. И. Ивановский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 15–30. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-2.