Бифуркационные особенности линейной краевой задачи с кубическим отклонением в краевом условии

Краевая задача с кубическим отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x_0 \in [0,1).$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha_{cr}\, u(x_0,t). \tag{4}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda) v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha_{cr}\, v(x_0). \tag{6}$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + \lambda},$$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\mu \operatorname{sh} \mu \; = \; \alpha \operatorname{ch} \mu x_0, \tag{7}$$

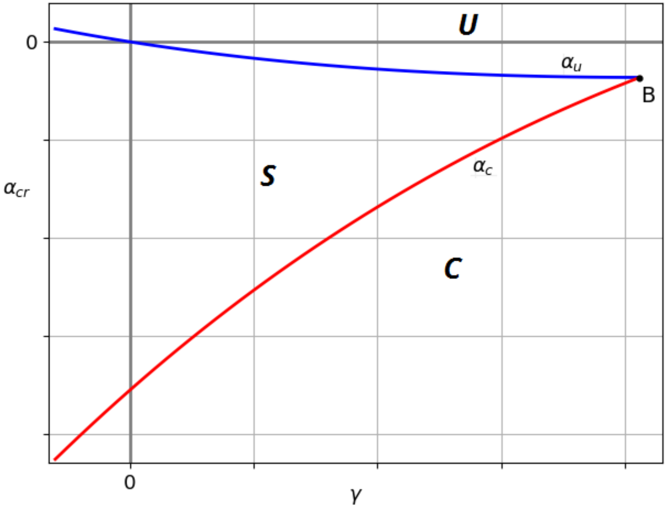
- $\lambda = 0: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}. \tag{8}$$

- $\lambda = \pm i\omega: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$

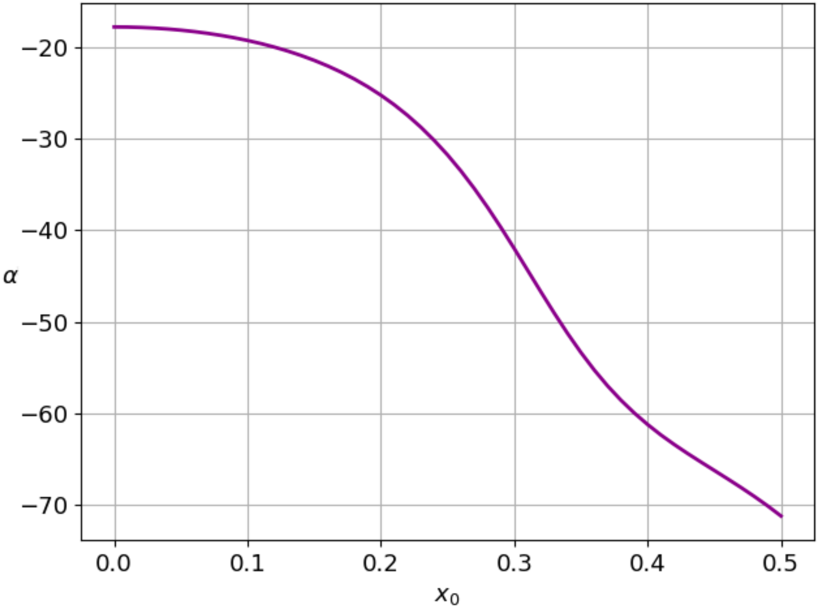
$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}. \tag{9}$$

Схематическая визуализация критической зависимости

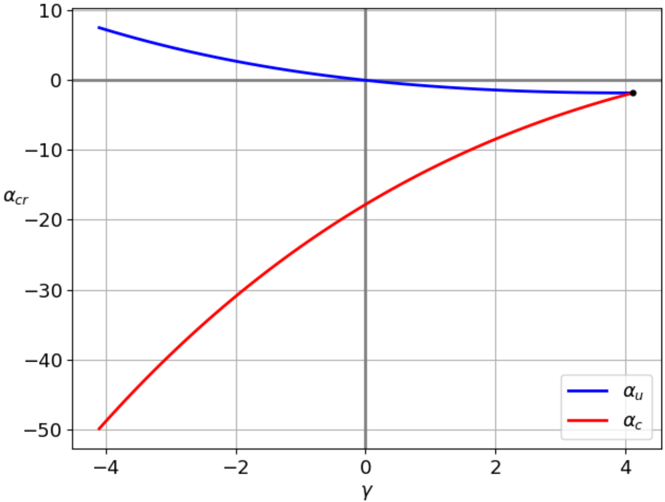


$$B = (\gamma_*, \alpha_*)$$

Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$

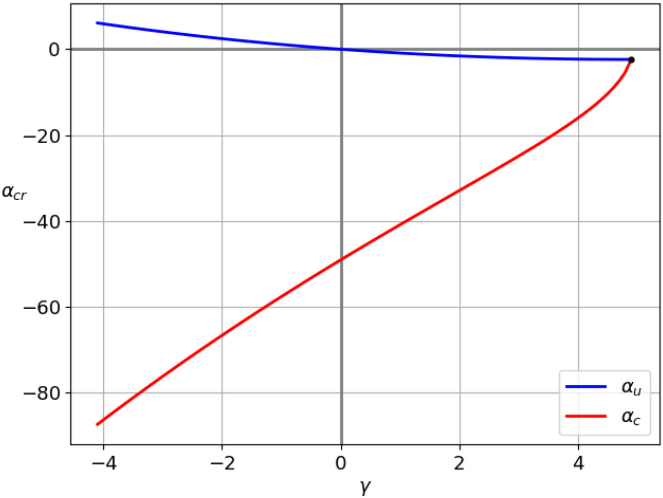


Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



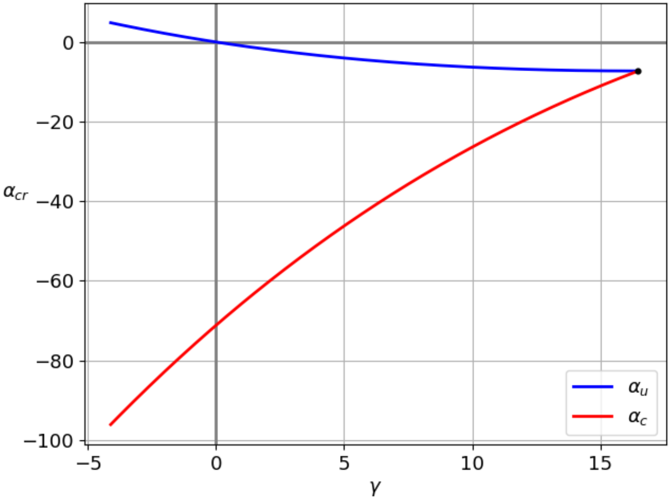
$$x_0 = 0 : \quad \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



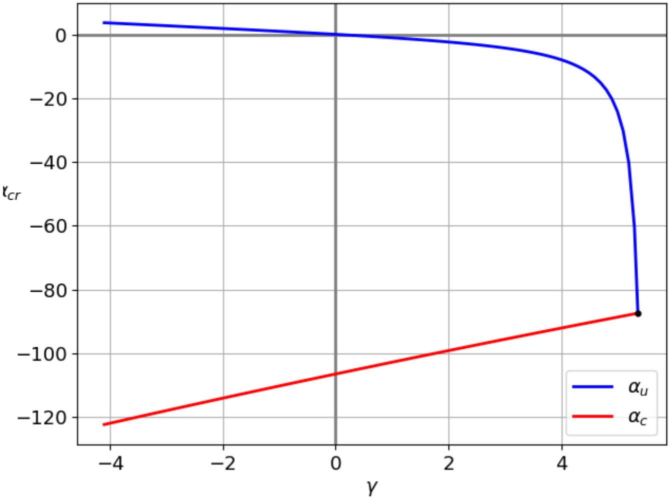
$$x_0 = 0.33 : \quad \gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.5: \quad \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.67: \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$\dot{u}_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{11}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t), \tag{12}$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{13}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t), \tag{14}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{15}$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0 + \beta \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{16}$$

$$v_2 = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho'}{2\sqrt{-\gamma}} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho' x}{2} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x,$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{17}$$

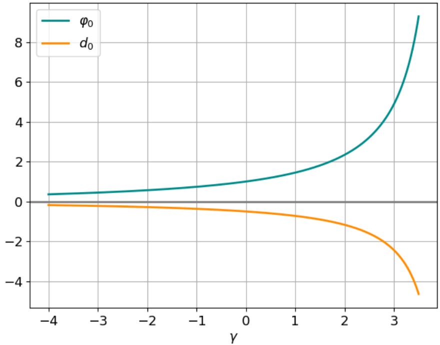
$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0,$$

$$d_0 = \beta Q \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0,$$

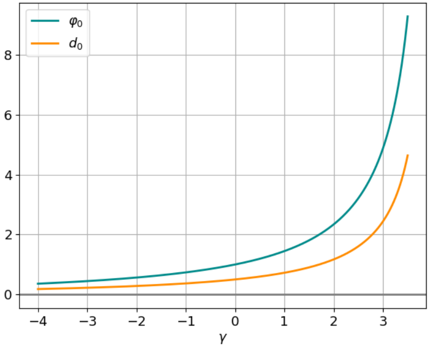
$$Q = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{|\beta| \operatorname{ch}^2 \sqrt{-\gamma} x_0}}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



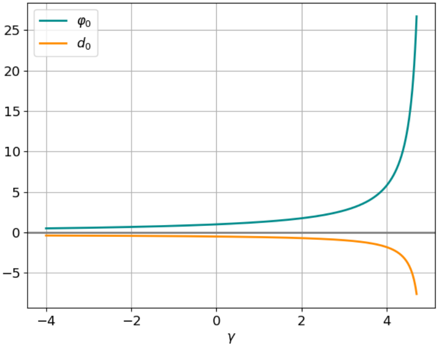
a) $\beta = -0.5$



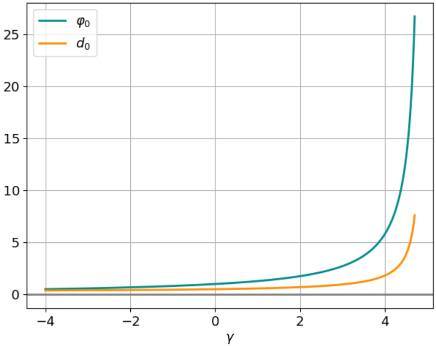
b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



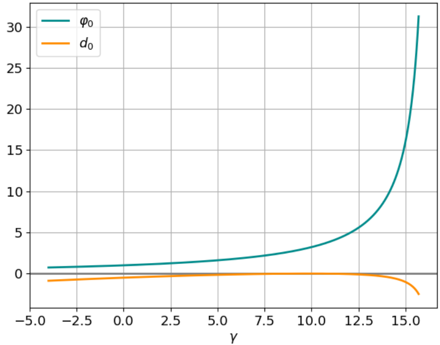
a) $\beta = -0.5$



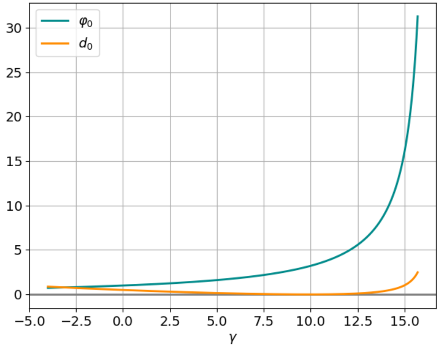
b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.33$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



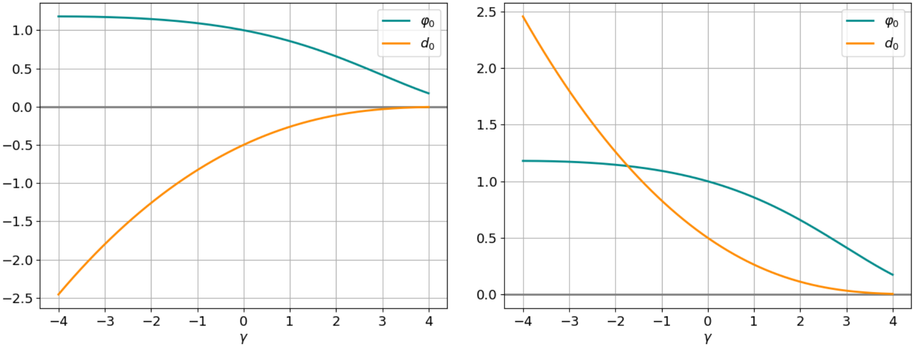
a) $\beta = -0.5$



b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.5$$

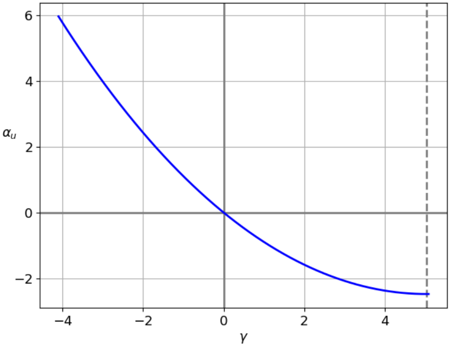
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



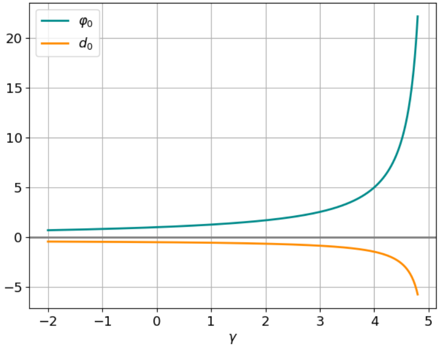
a) $\beta = -0.5$ b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.67$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



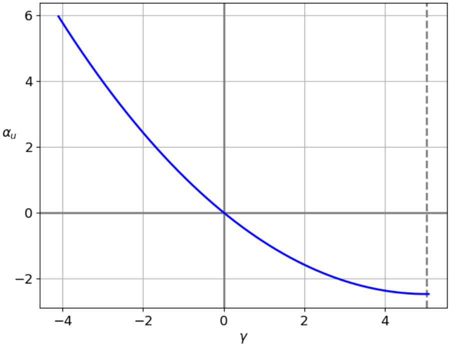
a) $\widetilde{\gamma} \approx 5.0$



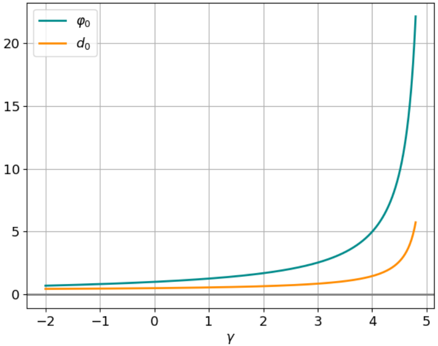
b) $\gamma < \widetilde{\gamma},\ \beta = -0.5$

$$x_0 = 0.35$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



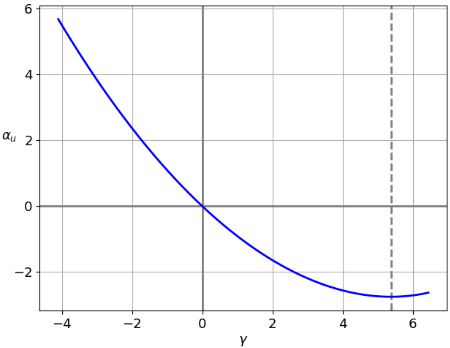
a) $\widetilde{\gamma} \approx 5.0$



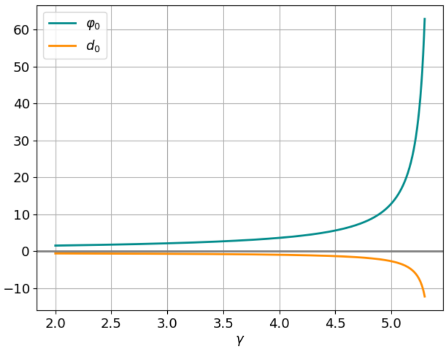
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.35$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



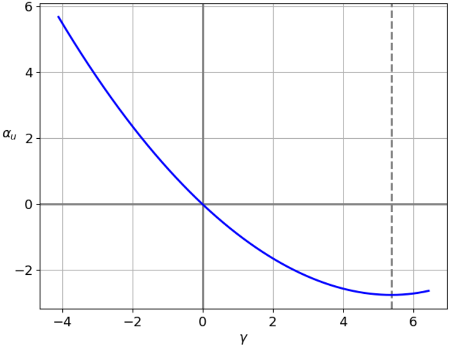
a) $\widetilde{\gamma} \approx 5.37$



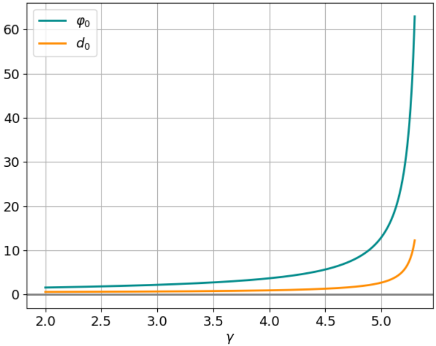
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.39$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



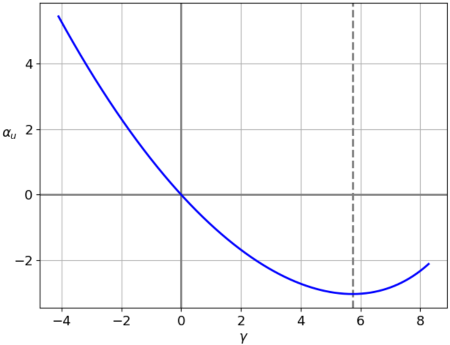
а) $\widetilde{\gamma} \approx 5.37$



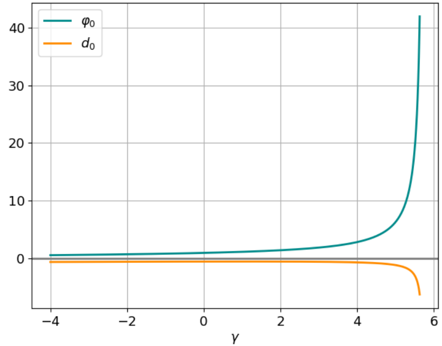
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.39$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



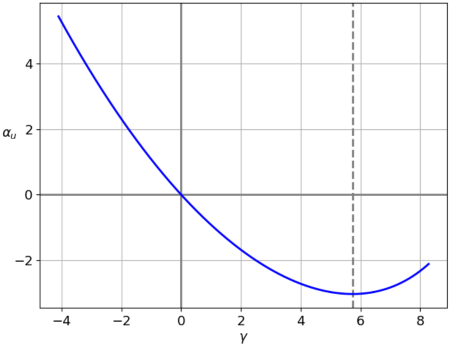
a) $\widetilde{\gamma} \approx 5.73$



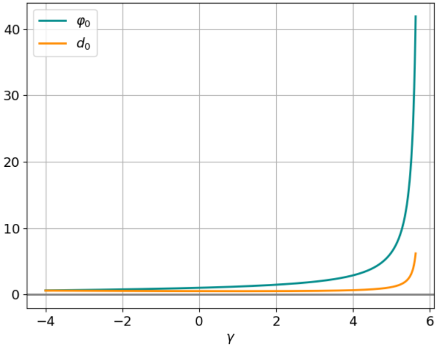
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.42$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



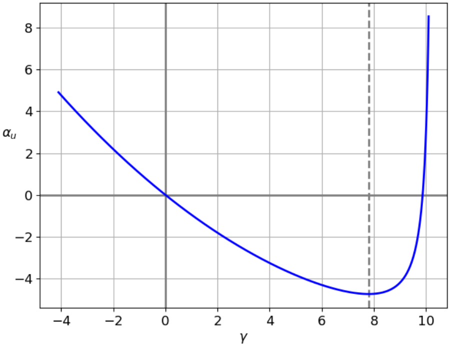
a) $\widetilde{\gamma} \approx 5.73$



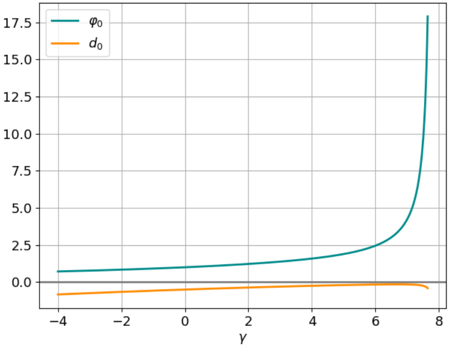
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.42$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



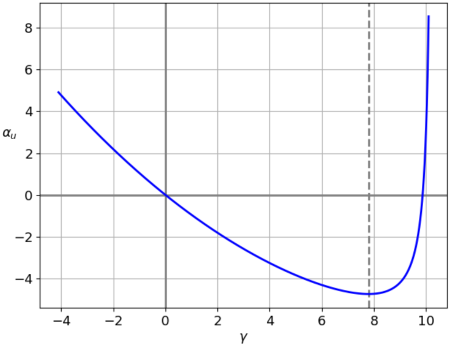
a) $\widetilde{\gamma} \approx 7.79$



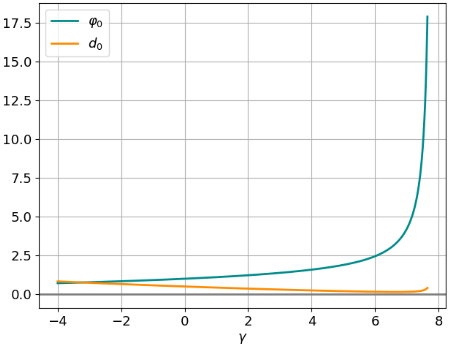
b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.49$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



a) $\widetilde{\gamma} \approx 7.79$



b) $\beta = -0.5$

$$x_0 = 0.49$$

Случай дивергентной потери устойчивости

Утверждение

В краевой задаче (1), (2) для собственного значения $\lambda = 0$ *и* $\alpha = \alpha_u + \varepsilon$, *где* α_u *вычисляется по формуле (8), а* $\varepsilon \ll 1$, $\forall \beta > 0$ *имеет место быть грубая потеря устойчивости нулевого состояния равновесия. При этом* $\forall \beta < 0$ *и* $\gamma < \widetilde{\gamma}$, *где*

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma_0 : \; F(\gamma_0, \alpha, x_0) = 0, & \text{если } x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \\ \gamma_*, & \text{иначе, }, \end{cases}$$

а $F(\gamma, \alpha, x_0) = \alpha\, x_0 \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x_0 - \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma}$, *нулевое решение краевой задачи (1), (2) дивергентно теряет свою устойчивость.*

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega: \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$\dot{u}_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{18}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t), \tag{19}$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x},$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega}.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{20}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) - u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t), \tag{21}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega) v_2 - z' w(x) = 0, \tag{22}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) - z w(x_0) + 3\beta z|z|^2 w|w|^2, \tag{23}$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \mu x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi z + dz|z|^2, \tag{24}$$

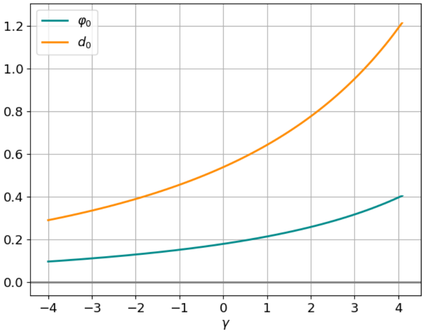
$$\phi_0 = \mathsf{Re}\phi, \quad d_0 = \mathsf{Re}d,$$

$$\phi = -2Q\operatorname{ch}\mu x_0,$$

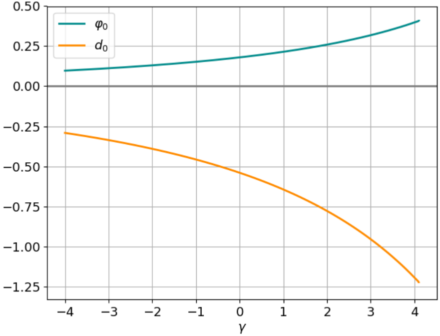
$$d = 1.5\beta Q(\operatorname{ch}(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu)x_0 + \operatorname{ch}(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu)x_0 + 2\operatorname{ch}\overline{\mu}x_0),$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$
$$Q = \frac{\mu}{\mu\operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0}$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



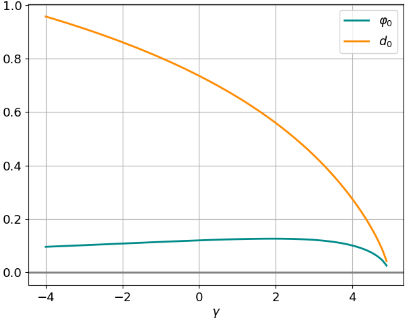
a) $\beta = -1.0$



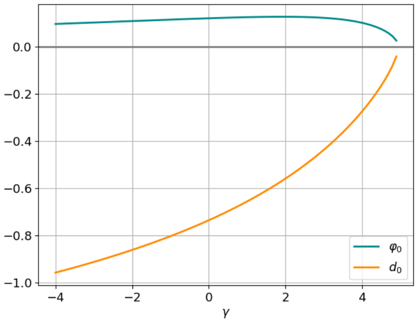
b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



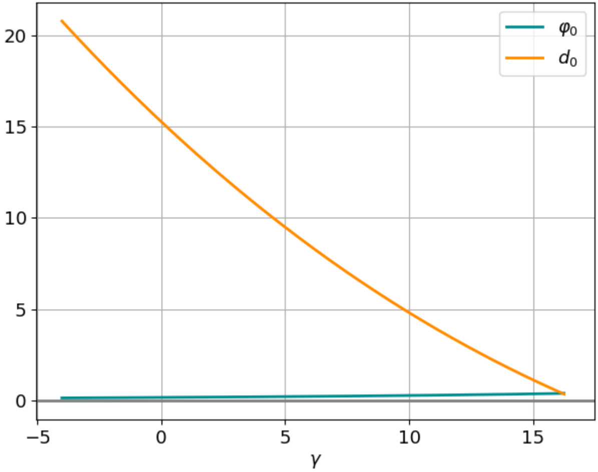
a) $\beta = -1.0$



b) $\beta = 1.0$

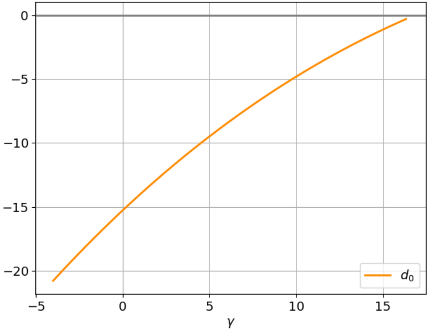
$$x_0 = 0.33$$

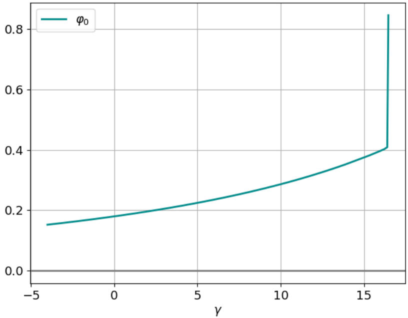
Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$



$$x_0 = 0.5, \quad \beta = -1.0$$

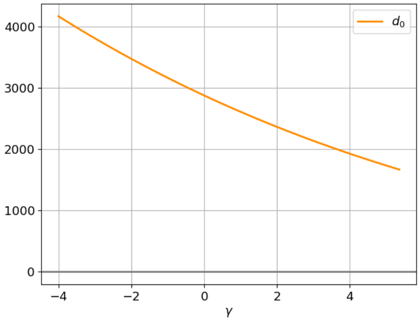
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

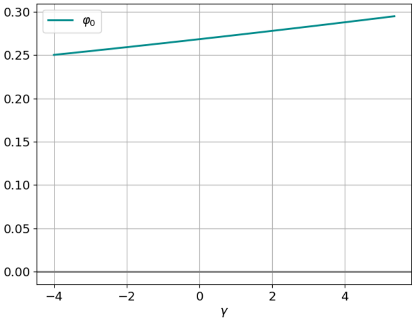




$$x_0 = 0.5, \quad \beta = 1.0$$

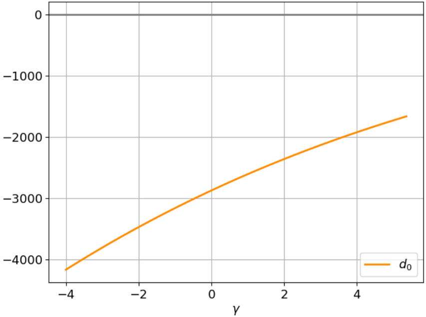
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

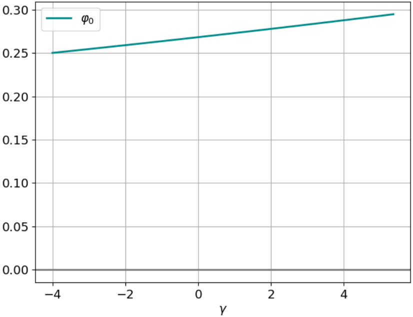




$$x_0 = 0.67, \quad \beta = -1.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$





$$x_0 = 0.67, \quad \beta = 1.0$$

Случай колебательной потери устойчивости

Утверждение

В краевой задаче (1), (2) для собственного значения $\lambda = \pm i\omega$ *и* $\alpha = \alpha_c - \varepsilon$, *где* α_c *вычисляется по формуле (9), а* $\varepsilon \ll 1$, $\forall \beta < 0$ *имеет место быть грубая потеря устойчивости нулевого состояния равновесия. При этом* $\forall \beta > 0$ *нулевое решение краевой задачи (1), (2) колебательно теряет свою устойчивость.*