АНАЛИЗ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Леонид Ивановский, Илья Куксёнок

Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t-\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t-\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Кащенко С.А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием // Модел. и. анализ информ. систем, №24(2), с. 168–185 (2017).

Нелинейная краевая задача без запаздывания

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u' \mid_{x=0} = 0, \\ u' \mid_{x=1} = \alpha\, u \mid_{x=x_0} . \end{gathered} \tag{4}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0, 1].$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Нелинейная краевая задача с запаздыванием в граничном условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u' \,|_{x=0} = 0, \\ u' \,|_{x=1} = \alpha\, u(1, t - \tau). \end{gathered} \tag{6}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0.$$

Исследование выполнено при поддержке Центра Интегрируемых Систем ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Упрощенная краевая задача

$$u(x,t) = w(x)\,\mathsf{exp}\left(\lambda - \gamma t\right)$$

Упрощенная краевая задача

$$u(x,t) = w(x)\,\mathsf{exp}\,(\lambda - \gamma t)$$

$$w'' - \lambda w = 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} w'(0) = 0, \\ w'(1) = \alpha\, w(x_0) e^{i\omega\tau}. \end{gathered} \tag{8}$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathsf{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathsf{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

$$x = 1:$$

$$\mu \operatorname{sh} \mu = \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0), \tag{9}$$
$$\mu \operatorname{sh} \mu = \alpha \operatorname{ch} \mu \; e^{i\omega\tau}.$$

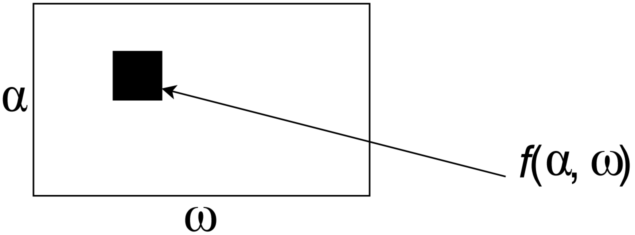
Колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

Теорема

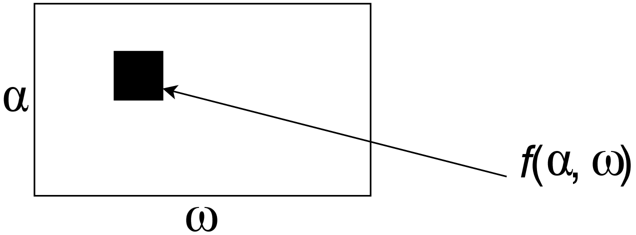
Существует такое $\alpha = \alpha_{cr}$*, для которого* $Re(\lambda_*) = \gamma$ *и для всех остальных собственных значений задачи (7), (8)* $Re(\lambda) < \gamma$.

Численное исследование

Алгоритм

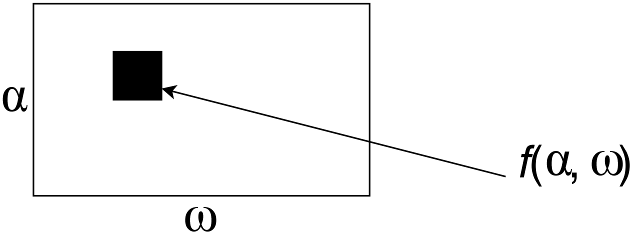


Алгоритм



$$f(\omega, \alpha) = \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0), \tag{10}$$
$$f(\omega, \alpha) = \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch} \mu \, e^{i\omega\tau}.$$

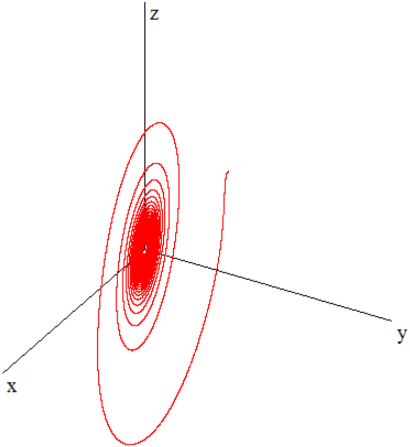
Алгоритм



$$\begin{aligned} f(\omega,\alpha) &= \mu \,\mathrm{sh}\, \mu - \alpha\, \mathrm{ch}(\mu x_0), \\ f(\omega,\alpha) &= \mu \,\mathrm{sh}\, \mu - \alpha\, \mathrm{ch}\, \mu \; e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{10}$$

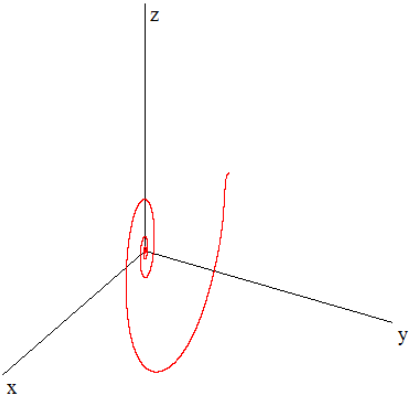
$$\alpha_{cr}: \;\; f(\omega, \alpha_{cr}) = 0.$$

Результаты



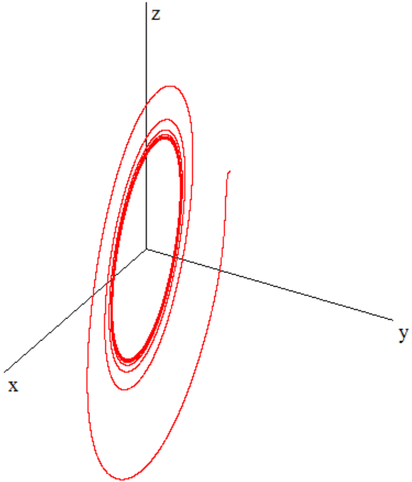
$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -4.0, \quad x_0 = 0$$

Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -2.5, \quad x_0 = 0$$

Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -5.0, \quad x_0 = 0$$

Нормальная форма

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j+1}{2}} u_j(t,s,x), \quad s = \varepsilon t \tag{11}$$

$$u_0(x,t) = z(s)e^{i\omega t}w(x) + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{w(x)} \tag{12}$$

Система последовательно разрешимых краевых задач

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\varepsilon}: &\quad \dot{u}_0 = u_0'' + u_0 \\
\varepsilon: &\quad \dot{u}_1 = u_1'' + u_1 + f(u_0) \\
\varepsilon^{3/2}: &\quad \dot{u}_2 = u_2'' + u_2 + g(u_0, u_1)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$u_0'(0) = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} u_0'(1) =& \alpha_{cr} u_0(x_0) \\ u_0'(1) =& \alpha_{cr} u_0(1) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \tag{15}$$

$$u_2'(0) = 0 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_2'(1) =& \alpha_{cr} u_2(x_0) + u_0(x_0) \\ u_2'(1) =& \alpha_{cr} u_2(1) e^{-i\omega\tau} - \alpha_{cr} \tau u_0(1) \end{aligned} \tag{17}$$

$$u_2 = e^{i\omega t} v(x) \tag{18}$$

$$v(x) = c_1(x) ch(\mu x) + c_2(x) sh(\mu x) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= I_1(x) + q_1 \\ c_2 &= I_2(x) + q_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Нормальная форма

$$\dot{z} = \phi z + dz|z|^2 \tag{21}$$

Теорема

При $Re(\phi) > 0,\ Re(d) < 0\ \ \exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *наблюдается экспоненциально-орбитально устойчивый цикл, асимптотика которого описывается формулой (14), в которой*
$z(s) = \sqrt{-\frac{Re(\phi)}{Re(d)}} \exp\left(i\left(Im(\phi) - \frac{Im(d)Re(\phi)}{Re(d)}\right)s + i\gamma\right)$

Квазианалитическое решение

Положим

$$\mu = -\gamma + i\omega, \tag{22}$$

Тогда

$$(7, 8) \quad \to \quad \begin{cases} \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \exp(-i\omega\tau) \operatorname{ch} \mu = 0 & \text{при } \tau \neq 0 \\ \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch} \mu = 0 & \text{при } \tau = 0 \end{cases} \tag{23}$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

Квазианалитическое решение

Получим спектр собственных чисел

$$\omega = -i(\gamma + \mu), \tag{24}$$

Где μ может быть найдено численно из (23)