

УСТОЙЧИВЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЦЕПОЧКАХ С ДИФФУЗИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗЬЮ

© 2020 г. Л. И. ИВАНОВСКИЙ

Аннотация. Работа посвящена динамике цепочки дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной линейной внутренней связью. Актуальность исследований такой системы обусловлена тем, что незначительное изменение коэффициента дополнительной связи позволяет получить сложные сценарии поведения устойчивых состояний равновесия. Для рассматриваемой системы были найдены критические зависимости, при которых нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость с появлением двух пространственно неоднородных состояний в одном случае и цикла в другом. При значениях параметров близких к критическим были получены асимптотические формулы для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.

Ключевые слова: цепочка дифференциальных уравнений, нулевое состояние равновесия, потеря устойчивости, бифуркации.

AMS Subject Classification: 00X00, 11Y11

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	1
2. Спектральные свойства линеаризованной системы	2
2.1. Построение характеристического уравнения	2
2.2. Нахождение чисто мнимого собственного числа	4
2.3. Численный анализ критических зависимостей	5
3. Локальный анализ поведения системы в окрестности нулевого решения	8
4. Выводы	13
Список литературы	14

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

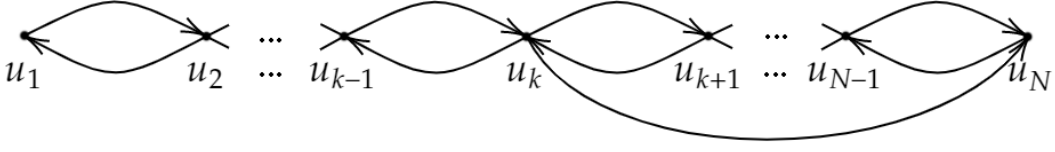
Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

которую дополним следующими условиями на границах:

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (2)$$

дающими дополнительную линейную внутреннюю связь. Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см. например [4], [5]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренним элементом цепочки. Для системы (1), (2) $u_j = u_j(t)$ гладкие функции при $t \geq 0$, параметры α, γ – действительные числа, а индекс $k \in \mathbb{N}$ определяет дополнительную внутреннюю связь между элементами u_N и u_k . На рис. 1 дана иллюстрация взаимодействия функций u_j .

Рис. 1: Схематическая визуализация взаимодействия между собой функций u_j

Система (1), (2) очевидным образом имеет однородное нулевое решение $u_j(t) \equiv 0$. Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения и режимов, ответвляющихся от него при критических значениях параметров. Можно выделить два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1), (2). В первом случае через мнимую ось переходит нулевое собственное число, а во втором – пара комплексных собственных чисел.

Предельный переход $N \rightarrow \infty$ для системы (1), (2) позволяет перейти от точечных функций $u_j(t)$ к непрерывной гладкой функции $u(x, t)$ при $t \geq 0$ и $x \in [0, 1]$, моделирующей краевую задачу

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (3)$$

с условиями на границах вида

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(x_0, t). \quad (4)$$

Величина $x_0 \in [0, 1)$ определяет линейное отклонение во втором краевом условии. При достаточно большом количестве уравнений N поведение режимов краевой задачи (3), (4) совпадает с поведением состояний равновесия цепочки уравнений (1), (2).

Краевая задача (3), (4), как и соответствующая ей система (1), (2), имеет однородное нулевое решение $u(t, x) \equiv 0$. В отличие от приведенной ранее цепочки уравнений, нельзя утверждать, что функция u и \dot{u} , результат применения оператора уравнения (3) с условиями (4), принадлежат одному функциональному пространству. В связи с этим, задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров и асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Построение характеристического уравнения. Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (1), (2):

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (6)$$

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним замену

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j \quad (7)$$

где $x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}$, λ – собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент δ определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (5) с условиями (6). При подстановке замены (7) в первое уравнение, для $j = 1$

$$\lambda \operatorname{ch} \frac{\delta}{2N} = (-N^2 + \gamma) \operatorname{ch} \frac{\delta}{2N} + N^2 \operatorname{ch} \frac{3\delta}{2N}$$

и решении этого уравнения, можно вывести следующую формулу для коэффициента δ :

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N}.$$

Такой же результат можно получить и для всех уравнений системы (5), (6) кроме последнего. При подстановке замены (7) в последнее уравнение, для $j = N$

$$(\lambda - \gamma) \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{1}{2} \right) = N^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{3}{2} \right) - \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{1}{2} \right) \right) + \alpha N \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right),$$

можно получить выражение для параметра α :

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}, \quad (8)$$

где $x_k = \frac{1}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right)$.

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим при каких критических значениях параметра α собственные значения выходят на мнимую ось. Рассмотрим случаи нулевого и чисто мнимого значения λ . Подстановка $\lambda = 0$ в выражение (8) приводит к зависимости

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \quad (9)$$

где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$. Подстановка $\lambda = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, позволяет перейти от выражения (8) при фиксированном γ и $x_k = \frac{1}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right)$ к уравнению относительно α_c и ω

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_k}, \quad (10)$$

где $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$. Выделяя вещественную и мнимую части в выражении (10) и численно решая полученную систему, находим значения ω и α_c такие, чтобы α_c было минимальным по модулю. Исходя из ранее полученных формул, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (3), (4) нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость для значений, параметров α и γ , связанных формулами (9) или (10).*

Отметим, что для линеаризованной краевой задачи (3), (4)

$$\dot{u} = u'' + \gamma u,$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(0, t)$$

при подстановке замены

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + \lambda} x$$

можно получить формулу для параметра α :

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + \lambda}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + \lambda} x_0}. \quad (11)$$

Тогда подстановка $\lambda = 0$ и $\lambda = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, позволяет получить следующие критические зависимости:

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}, \\ \alpha_c &= \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для выражения (12) значения ω и α_c таковы, что α_c минимально по модулю.

2.2. Нахождение чисто мнимого собственного числа. В случае чисто мнимого собственного значения $\lambda = i\omega$, критические значения параметра α_c , рассчитываемые по формуле (10), зависят от мнимой части ω , которая изначально неизвестна. Другими словами, для вычисления α_c , требуется предварительно определить конкретный вид собственных значений λ .

В связи с упрощенным видом формулы (12) для критической зависимости α_c , подсчет значений ω осуществлялся для линейризованной краевой задачи (3), (4). Расчет мнимых частей $\omega \in \mathbb{R}$ осуществлялся численно, в три этапа:

- 1) Вычисление $\omega = \omega_{0,0}$ для $\gamma = 0$ и $x_0 = 0$.
- 2) Расчет значений функции $\omega_0(x_0)$, величин ω для $\gamma = 0$ и $x_0 \in [0, 1)$.
- 3) Построение функции $\omega(\gamma, x_0)$ для произвольных значений γ и x_0 .

Разберем каждый из этапов алгоритма более детально.

Для фиксированных значений параметров $\gamma = 0$ и $x_0 = 0$, подстановка $\lambda = i\omega_{0,0}$ в выражение (12) приводит к зависимости

$$\sqrt{i\omega_{0,0}} \operatorname{sh} \sqrt{i\omega_{0,0}} = \alpha_c \quad (13)$$

Поочередно выделяя из (13) действительную и мнимую части, можно получить систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} + \operatorname{th} \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} = 0 \\ \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} \cos \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} \sin \sqrt{\frac{\omega_{0,0}}{2}} \right) = \alpha_c \end{cases},$$

однозначно определяющую параметр α_c и значение $\omega_{0,0}$ мнимой части собственного значения λ , для $\gamma = 0$ и $x_0 = 0$.

Величина $\omega_{0,0}$ используется в качестве ординаты начальной точки для построения функции $\omega_0(x_0)$, зависимости мнимой части ω от различных значений отклонения $x_0 \in [0, 1)$ для $\gamma = 0$. Подстановка $\lambda = i\omega_0$ в выражение (12) приводит к зависимости

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{i\omega} x_0}. \quad (14)$$

Поочередно выделяя из (14) действительную и мнимую части, можно получить систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{sh} y \cos y + \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y} - \operatorname{tg} y x_0 \operatorname{th} y x_0 = 0 \\ y \operatorname{sh} y \cos y - y \operatorname{ch} y \sin y - \alpha_c \operatorname{ch} y x_0 \cos y x_0 = 0 \end{cases},$$

для которой $y = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}$. Численно решая данную систему методом дихотомии (см. [1], [3]), с пошаговым смещением на величину $\Delta x_0 \ll 1$ в сторону увеличения параметра x_0 , можно получить значения функции $\omega_0(x_0)$, величины ω для $\gamma = 0$ и $x_0 \in [0, 1)$.

Процесс построения функции $\omega(\gamma, x_0)$ для произвольных γ и x_0 схож с выполнением предыдущего этапа алгоритма. Осуществляя переход к полярной системе координат, выражение (12) сводится к системе трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} \chi \operatorname{sh} \chi \cos \theta - \theta \operatorname{ch} \chi \sin \theta = \alpha_c \operatorname{ch} \chi x_0 \cos \theta x_0 \\ \theta \operatorname{sh} \chi \cos \theta + \chi \operatorname{ch} \chi \sin \theta = \alpha_c \operatorname{sh} \chi x_0 \sin \theta x_0 \end{cases},$$

для которой коэффициенты χ и θ принимают вид

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt[4]{\gamma^2 + \omega^2} \cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\omega}{\gamma} \right) \right), \\ \theta &= \sqrt[4]{\gamma^2 + \omega^2} \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\omega}{\gamma} \right) \right). \end{aligned}$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получаем выражение, не зависящее от α_c :

$$\frac{\theta \operatorname{sh} \chi \cos \theta + \chi \operatorname{ch} \chi \sin \theta}{\chi \operatorname{sh} \chi \cos \theta - \theta \operatorname{ch} \chi \sin \theta} - \operatorname{th} \chi x_0 \operatorname{tg} \theta x_0 = 0.$$

Численно решая его методом дихотомии (см. [1], [3]) с пошаговым смещением на величину $\Delta\gamma \ll 1$ для фиксированного x_0 , можно построить зависимость $\omega(\gamma, x_0)$ для произвольно заданного $x_0 \in [0, 1)$. График функции $\omega(\gamma, x_0)$ для $x_0 = 0.33$, показан на рис. 2.

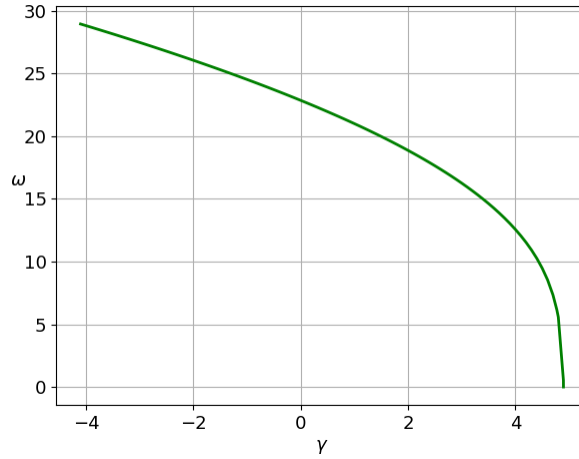


Рис. 2: График функции $\omega(\gamma)$ для $x_0 = 0.33$

2.3. Численный анализ критических зависимостей. Для системы (5), (6) изучим динамику поведения критических зависимостей $\alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$ для различных значений k , где k — номер узла, с которым дополнительно связано последнее уравнение. В нашем случае количество уравнений считалось $N = 50$. Отметим, что увеличение N слабо сказывается на поведении функций $\alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$.

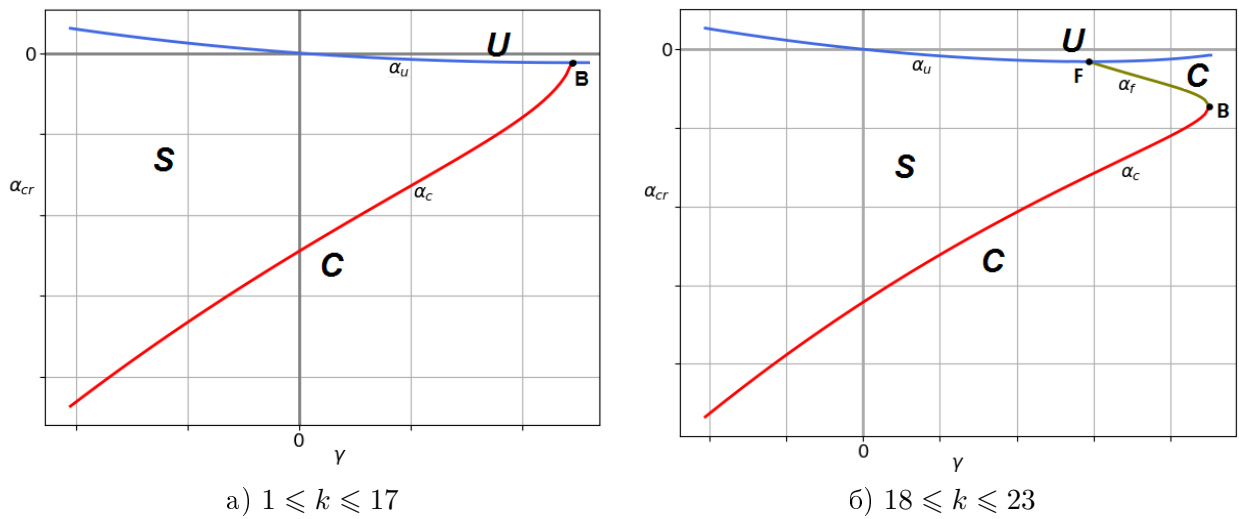


Рис. 3: Схематическая визуализация критических зависимостей

На рис. 3а приведена схематическая визуализация критических зависимостей $\alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$, рассчитываемых по формулам (9) и (10) соответственно, для индекса $1 \leq k \leq 17$. Здесь кривая α_u

показана синим цветом, а кривая α_c изображена красным цветом. Как показано на рис. 3а, кривые α_u и α_c пересекаются в точке B с координатами (γ_*, α_*) , где $\gamma_* > 0$ и $\alpha_* < 0$. Согласно численным результатам, с увеличением индекса k значение α_* будет уменьшаться, а γ_* — увеличиваться.

Начиная с индекса $k = 18$, появляется дополнительная критическая зависимость $\alpha_f(\gamma)$, рассчитываемая по формуле (10). На рис. 3б показана схематическая визуализация критических зависимостей $\alpha_u(\gamma)$, $\alpha_f(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$, рассчитываемых по формулам (9) и (10) соответственно, для индекса $18 \leq k \leq 23$. Здесь кривая α_f показана зеленым цветом. Она берет свое начало в точке F , локального минимума функции $\alpha_u(\gamma)$ с координатами $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} < 0$ и $0 < \bar{\gamma} < \gamma_*$ и сливается с кривой α_c в точке B . Согласно численным результатам, с увеличением индекса k значение $\bar{\alpha}$ будет уменьшаться, а $\bar{\gamma}$ — увеличиваться.

Кривые α_u , α_c и α_f являются важнейшими элементами построения областей значений параметров (α, γ) , определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия. Так область S соответствует случаю устойчивого нулевого решения, U — случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в области C наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

Вертикальная асимптота $\gamma = l$, для функции $\alpha_u(\gamma)$, располагающаяся правее точки B для $1 \leq k \leq 23$, начиная с индекса $k = 24$ будет пересекаться с кривой α_c . Отметим, что для функции $\alpha_u(\gamma)$ и асимптоты $\gamma = l$, где $l > 0$ и минимально по модулю, будут справедливы следующие предельные равенства:

$$\lim_{\gamma \rightarrow l-0} \alpha_u(\gamma) = +\infty, \quad \lim_{\gamma \rightarrow l+0} \alpha_u(\gamma) = -\infty. \quad (15)$$

Согласно численным результатам, с увеличением индекса k значение l будет приближаться к нулю справа.

Начиная с индекса $k = 25$, помимо вертикальной асимптоты $\gamma = l$ кривую α_c будет также пересекать и ветвь гиперболической функции $\alpha_u(\gamma)$. Отметим, что для функции $\alpha_u(\gamma)$ и асимптоты $\gamma = l$ также будут справедливы предельные равенства (15). Критические зависимости $\alpha_u(\gamma)$, $\alpha_c(\gamma)$ и $\alpha_f(\gamma)$ для значений индекса $k = 24$ и $k = 25$ схематично отображены на рис. 4.

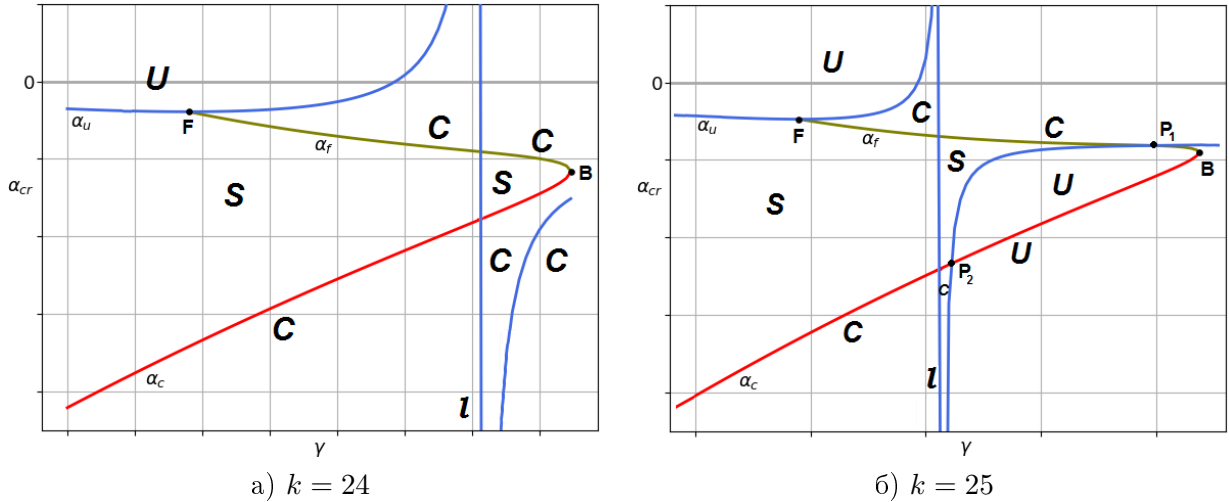


Рис. 4: Схематическая визуализация кривых α_u , α_f и α_c

Схематическая визуализация критических зависимостей параметров $\alpha_u(\gamma)$, $\alpha_c(\gamma)$ для индекса $26 \leq k \leq 32$ показана на рис. 5а. Здесь, как и для случая $1 \leq k \leq 17$, кривая α_f отсутствует. Начиная с $k = 26$ и вплоть до $k = 50$, для функции $\alpha_u(\gamma)$ и асимптоты $\gamma = l$ будут справедливы следующие предельные равенства:

$$\lim_{\gamma \rightarrow l-0} \alpha_u(\gamma) = -\infty, \quad \lim_{\gamma \rightarrow l+0} \alpha_u(\gamma) = +\infty. \quad (16)$$

Схематическая визуализация критических зависимостей параметров $\alpha_u(\gamma)$, $\alpha_c(\gamma)$ и $\alpha_f(\gamma)$ для индекса $33 \leq k \leq 38$ показана на рис. 56. Отметим, что начиная с $k = 33$ и вплоть до $k = 50$ вновь наблюдается наличие кривой $\alpha_f(\gamma)$.

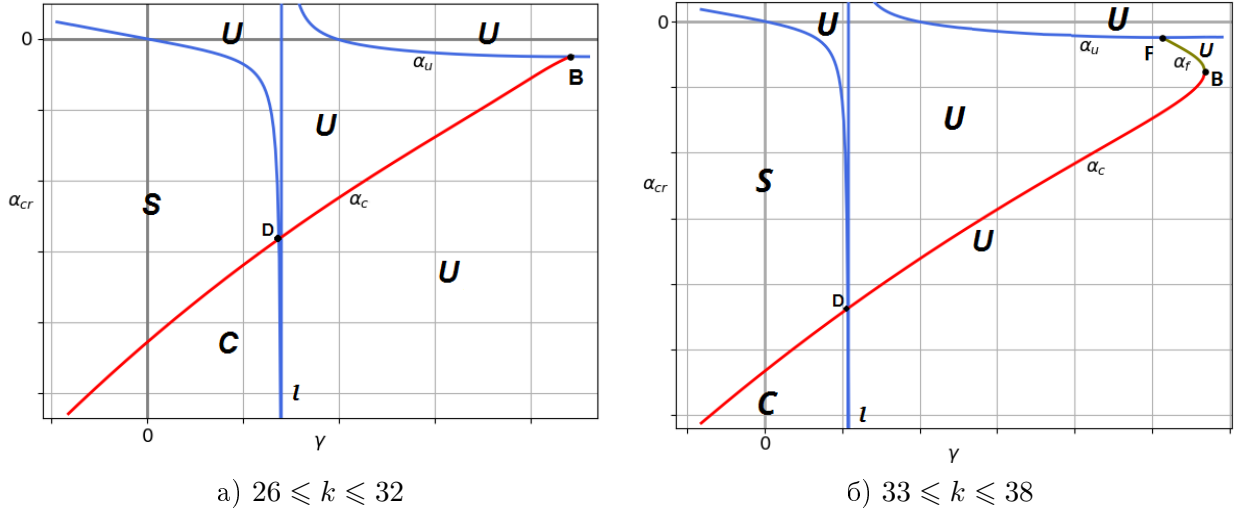


Рис. 5: Схематическая визуализация критических зависимостей

Начиная с индекса $k = 39$, кривая α_c будет пересекаться более, чем с одной вертикальной асимптотой для функции $\alpha_u(\gamma)$. Устойчивость нулевого состояния равновесия для выделенных областей, располагающихся левее ближайшей к нулю вертикальной асимптоты, определяется по аналогии с уже разобранными случаями. Отметим также, что для всех остальных выделенных областей, нулевое состояние равновесия оказывалось неустойчивым. Графики функций $\alpha_u(\gamma)$, $\alpha_c(\gamma)$ и $\alpha_f(\gamma)$ для значений индекса $k = 40$ и $k = 42$ показаны на рис. 6.

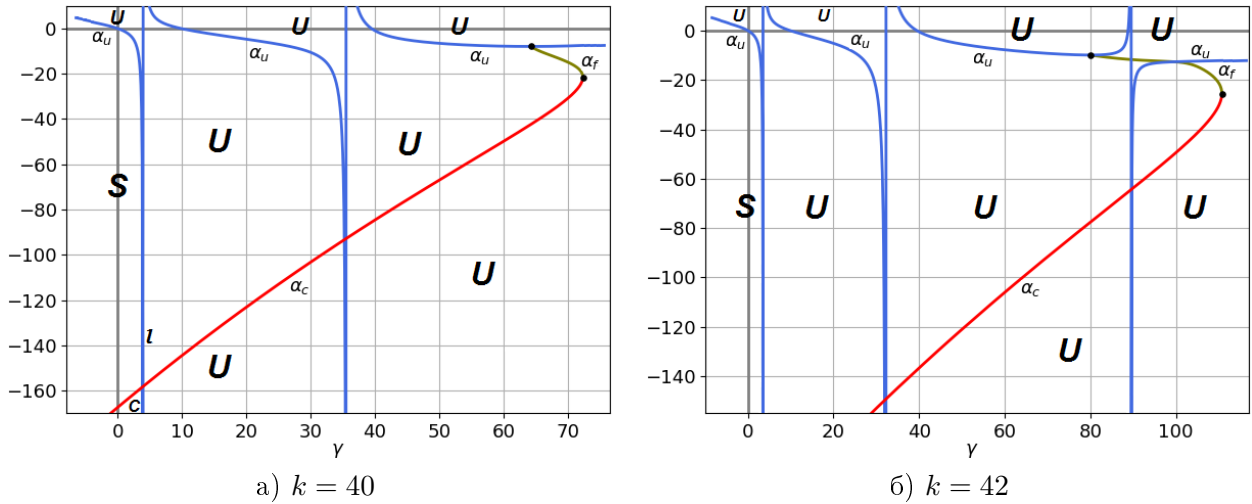


Рис. 6: Графики функций $\alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$

Кривая α_u определяет верхнюю границу области S , отделяющую ее от области U , для всех значений $\gamma < \Gamma_u$. Здесь Γ_u вычисляется по формуле

$$\Gamma_u = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leq k \leq 17 \\ \bar{\gamma}, & 18 \leq k \leq 25 \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50 \end{cases} \quad (17)$$

Величина $\hat{\gamma}$ является абсциссой точки D пересечения кривых α_c и α_u такая, что $0 < \hat{\gamma} < l$, где $l > 0$ — абсцисса точек вертикальной асимптоты $\gamma = l$ для функции $\alpha_u(\gamma)$ (см. рис. 5).

Для некоторых значений индекса k верхнюю границу области S определяет также и кривая α_f , для всех $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$. Здесь Γ_f вычисляется по формуле

$$\Gamma_f = \begin{cases} \gamma_*, & 18 \leq k \leq 24 \\ \gamma_1, & k = 25 \end{cases}, \quad (18)$$

где γ_1 — абсцисса точки P_1 пересечения кривых α_u и α_f такая, что $l < \gamma_1 < \gamma_*$ (см. рис. 4б).

Для случая $k = 25$ кривая α_u определяет также и нижнюю границу области S , отделяющую ее от области U , для всех значений $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$, где γ_2 — абсцисса точки P_2 пересечения кривых α_u и α_c такая, что $l < \gamma_2 < \gamma_*$ (см. рис. 4б). Следует отметить, что γ_1 и γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения

$$\frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_{25}} - \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_{25}} = 0, \quad (19)$$

удовлетворяющими условию вида

$$\gamma_* > \gamma_1 > \gamma_2 > l. \quad (20)$$

Кривая α_c определяет нижнюю границу области S , отделяющую ее от области C , для всех значений $\gamma \leq \Gamma_c$. Здесь Γ_c вычисляется по формуле

$$\Gamma_c = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leq k \leq 24 \\ \gamma_2, & k = 25 \\ \hat{\gamma}, & 26 \leq k \leq 50 \end{cases}. \quad (21)$$

Исходя из описанных результатов, можно сформулировать две леммы.

Лемма 2.2. Для всех значений $\gamma \leq \Gamma_u$, где Γ_u определяется выражением (17) и $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$, где γ_1, γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения (19), удовлетворяющими условию (20), критическая зависимость $\alpha_u(\gamma)$, рассчитываемая по формуле (9), позволяет выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением системы (5), (6) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Лемма 2.3. Для всех значений $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$, где Γ_f определяется выражением (18), и $\gamma \leq \Gamma_c$, где Γ_c определяется выражением (21), критические зависимости $\alpha_f(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$, рассчитываемые по формуле (10), позволяют выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением системы (5), (6) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Леммы доказываются на основе приведенного выше численного анализа линеаризованной в нуле системы (1), (2).

3. ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ

Методами малых возмущений (см. [6], [7]) построим режим, ответвляющийся от нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Для этого введем в рассмотрение малый параметр ε , который косвенно характеризует собой отклонение от нуля.

В случае нулевого собственного значения λ матрицы линеаризованной системы (1), (2), малый параметр ε обозначает переход из области S в область U по параметру α для фиксированного значения γ . Здесь параметр ε принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u, \quad (22)$$

где α_u вычисляется по формуле (9).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (1), (2) по степеням малого параметра

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Здесь функции $u_j = u_j(s)$ зависят от медленного времени $s = \varepsilon t$, а $u_{j,0} = \rho(s) \operatorname{ch} \delta_u x_j$, где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$, $x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}$. Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (23) с учетом (22) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов $u_{j,0}$, $u_{j,1}$ и $u_{j,2}$:

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \quad 1 \leq k < N,$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2(u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1},$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,1},$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3, \quad (24)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,2} + u_{k,0}. \quad (25)$$

Учитывая, что уравнение (1) содержит кубическое вычитаемое, и, тем самым, для функций $u_{j,1}$ система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (24), (25), можно получить укороченное уравнение на величину ρ

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3. \quad (26)$$

Для уравнения (26) коэффициенты ϕ_0 , d_0 выглядят следующим образом:

$$\phi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch} \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}, \quad (27)$$

$$d_0 = \frac{3\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u - \alpha_u \delta_u \operatorname{ch} 3\delta_u x_k}{16(\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k)} - \frac{3}{4}. \quad (28)$$

Для коэффициентов ϕ_0 , d_0 , при различных индексах k были построены зависимости от параметра γ . Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для значений индекса $k = 17$ и $k = 32$ проиллюстрированы на рис. 7.

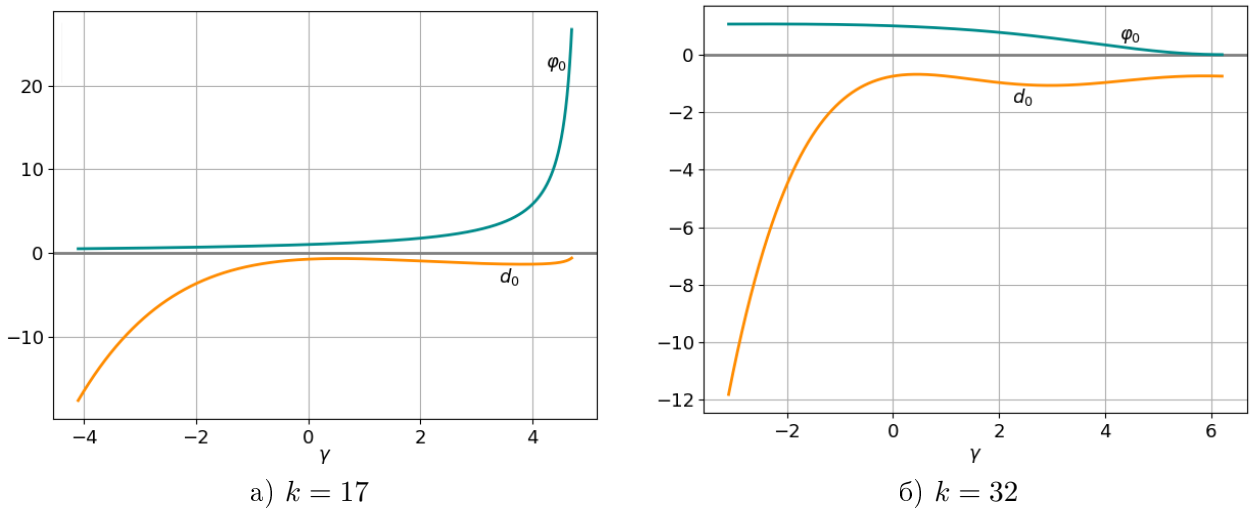


Рис. 7: Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

Согласно численным результатам, для всех $\gamma < \tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma_u$, коэффициент ϕ_0 оказывался положительным, а d_0 – отрицательным. Другими словами, пара неустойчивых состояний равновесия сливалась с устойчивым нулевым решением системы (1), (2) и в результате дивергентной потери устойчивости образовывалась пара устойчивых состояний равновесия в окрестности неустойчивого нулевого решения. Следует отметить, что $\tilde{\Gamma}$ вычисляется по формуле

$$\tilde{\Gamma} = \begin{cases} \tilde{\gamma}, & 1 \leq k \leq 25 \\ \Gamma_u, & 26 \leq k \leq 50 \end{cases}, \quad (29)$$

где $\tilde{\gamma} > 0$ является корнем трансцендентного уравнения

$$\frac{12\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u - 4\alpha_u \delta_u \operatorname{ch} 3\delta_u x_k}{48(\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k)} = 0.$$

В случае $\tilde{\Gamma} < \gamma < \Gamma_u$ для индекса $1 \leq k \leq 25$, оба коэффициента ϕ_0, d_0 оказывались положительными, что говорит о грубой потере устойчивости нулевого решения системы (1), (2). График функции $d_0(\gamma)$ для значений индекса $k = 1$ показан на рис. 8.

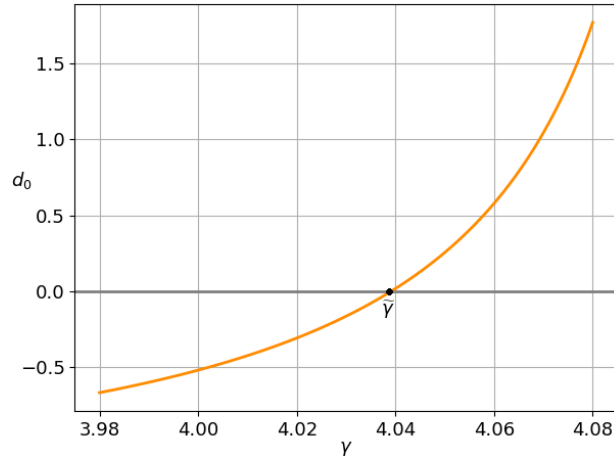


Рис. 8: График функции $d_0(\gamma)$ для $k = 1$

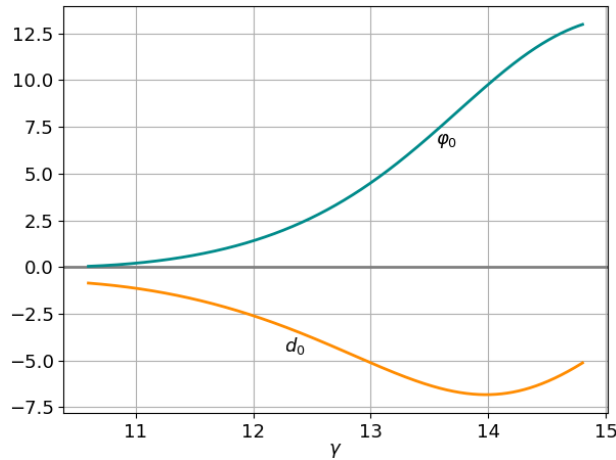


Рис. 9: Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $k = 24$

В случае $k = 25$, для всех γ таких, что $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$, где γ_1 и γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения (19), удовлетворяющими условию (20), малый параметр считался равным

$\varepsilon = \alpha_u - \alpha$. Здесь коэффициент ϕ_0 рассчитывается по формуле (27), но имеет противоположный знак, а коэффициент d_0 считается по формуле (28). Для данного случая ϕ_0 оказывался положительным, а d_0 — отрицательным. Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для индекса $k = 24$ показаны на рис. 9.

При условии, что $\phi_0 > 0$ и $d_0 < 0$ уравнение (26) имеет ненулевое состояние равновесия $\phi_* = \sqrt{-\frac{\phi_0}{d_0}}$, причем ρ стремится к этому состоянию равновесия при $s \rightarrow +\infty$. Подставляя в нормальную форму (23) полученное значение ρ получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (1), (2) (см. также [6], [10]):

$$u_j = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\phi_0}{d_0}} \operatorname{ch} \delta_u x_j + O(\varepsilon). \quad (30)$$

При условии, что $\phi_0 > 0$ и $d_0 > 0$ происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (26) имеет ненулевое состояние равновесия $\rho = \rho_*$, где $\phi_* = \sqrt{\frac{\phi_0}{d_0}}$. При подстановке полученного значения ρ в нормальную форму (23), получаем асимптотическое приближение (30) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающиеся к нулевому решению системы (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и отбирающие у него устойчивость (см. также [9], [12]).

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ для $\gamma \leq \tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}$ вычисляется по формуле (29) и $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$ для $\gamma_1 \geq \gamma \geq \gamma_2$, где γ_1 и γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения (19), удовлетворяющими условию (20). Тогда для любого $\gamma < \tilde{\Gamma}$ в случае $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ и любого $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$ в случае $\varepsilon = \alpha_u - \alpha$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных устойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (30).

Теорема 3.2. Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ для $\tilde{\Gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_u$, где $\tilde{\Gamma}$ и Γ_u вычисляются по формулам (29) и (17) соответственно. Тогда для любого $\tilde{\Gamma} < \gamma < \Gamma_u$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима, асимптотика которых определяется формулой (30).

В случае чисто мнимого собственного значения λ матрицы линеаризованной системы (1), (2), малый параметр ε обозначает переход из области S в область C по параметру α для фиксированного значения γ . Здесь параметр ε принимает вид

$$\varepsilon = \alpha_c - \alpha, \quad (31)$$

где α_c вычисляется по формуле (10). Также как и в случае дивергентной потери устойчивости, воспользуемся нормальной формой (23), для которой

$$u_{j,0} = z(s)e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)}e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j},$$

где $\delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}$, а $x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}$ (см. также [8]). Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (1), (2) разложения (23) с учетом (31) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов $u_{j,0}$, $u_{j,1}$ и $u_{j,2}$:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{j,0} &= N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \quad j = \overline{1, N}, \\ u_{0,0} &= u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,0}, \quad 1 \leq k < N, \\ \dot{u}_{j,1} &= N^2(u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1}, \\ u_{0,1} &= u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,1}, \\ \dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} &= N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3, \end{aligned} \quad (32)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,2} - u_{k,0}. \quad (33)$$

Учитывая, что уравнение (1) содержит кубическое вычитаемое, и, тем самым, для функций $u_{j,1}$ система получается однородной, примем их значения нулевыми. Из условий разрешимости системы (24), (25) можно получить укороченное уравнение на амплитуду колебаний нулевого решения:

$$z' = (\phi_0 + i\psi_0)z + (d_0 + ic_0)z|z|^2. \quad (34)$$

Для уравнения (34) коэффициенты ϕ_0 , d_0 выглядят следующим образом

$$\phi_0 = -\operatorname{Re} \left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch} \delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k} \right), \quad (35)$$

$$d_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{3\delta_c (G(\chi) + G(\eta) + 2G(\bar{\delta}_c))}{2(\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k)} \right). \quad (36)$$

Функция $G(a)$ вычисляется по формуле, приведенной ниже

$$G(a) = \frac{\alpha_c \operatorname{ch} a x_k - a \operatorname{sh} a}{a^2 - \delta_c^2}.$$

Для коэффициентов ϕ_0 , d_0 , при различных значениях индекса k были построены зависимости от параметра γ . Согласно численным результатам для всех $\gamma < \Gamma_c$, где Γ_c вычисляется по формуле (21), ϕ_0 оказывался положительным, а d_0 — отрицательным. Другими словами, нулевое решение системы (1), (2) теряло свою устойчивость колебательным способом (см. также [2]): оно становилось неустойчивым, а вокруг него образовывался устойчивый цикл порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для индекса $k = 1$ и критического значения параметра $\alpha = \alpha_c$ показаны на рис. 10.

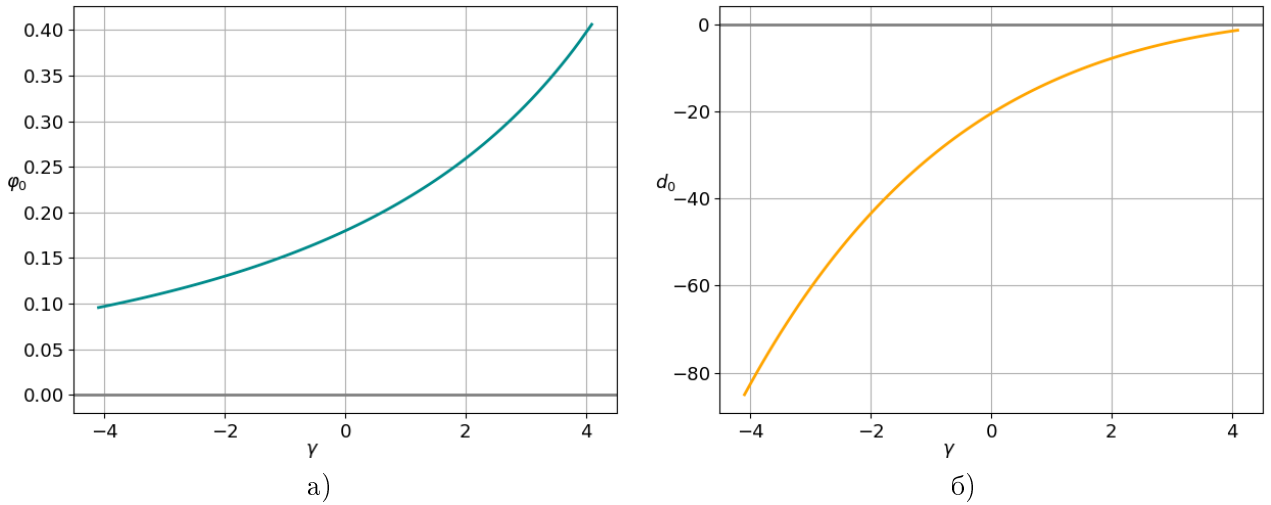


Рис. 10: Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $k = 1$ и $\alpha = \alpha_c$

В случае если $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$, коэффициент ϕ_0 рассчитывается по формуле (35), но имеет противоположный знак, а коэффициент d_0 считается также, по формуле (36). Согласно численным результатам для всех $\bar{\gamma} < \gamma < \Gamma_f$, где Γ_f вычисляется по формуле (18), коэффициент ϕ_0 также оказывался положительным, а d_0 — отрицательным. Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для индекса $k = 24$ и критического значения параметра $\alpha = \alpha_f$ показаны на рис. 11.

Осуществляя переход к полярной системе координат для $z = \rho e^{i\nu}$ уравнение (34) сводится укороченной системе (см. например [6], [11]) вида

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3. \quad (37)$$

$$\nu' = \psi_0 + c_0 \rho^2 \quad (38)$$

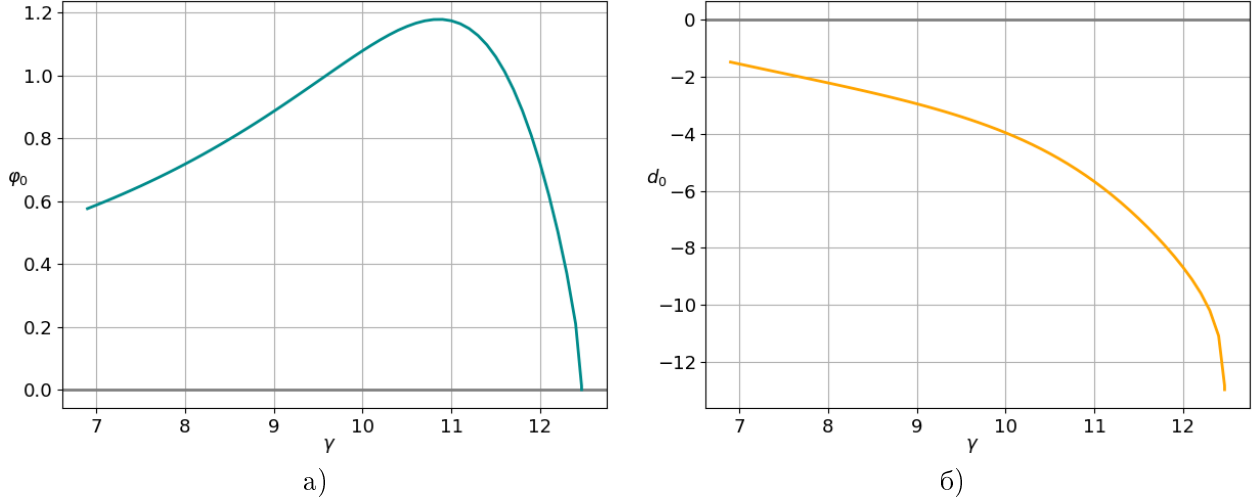


Рис. 11: Графики функций $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$ для $k = 24$ и $\alpha = \alpha_f$

В системе (37), (38) первое уравнение не зависит от второго, в связи с этим его можно решать отдельно. При условии, что $\phi_0 > 0$ и $d_0 < 0$ уравнение (37) имеет ненулевое состояние равновесия $\phi_* = \sqrt{-\frac{\phi_0}{d_0}}$, причем ρ стремится к этому состоянию равновесия при $s \rightarrow +\infty$. В этом случае из второго уравнения заключаем, что $\nu(s) = \sigma s + \gamma$, где γ – произвольное действительное число, а коэффициент σ вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \frac{\psi_0 d_0 - c_0 \phi_0}{d_0}.$$

Подставляя в нормальную форму (23) полученные значения ρ и ν получаем асимптотическое приближение для пространственно неоднородного цикла исходной системы (1), (2):

$$u_j = \sqrt{-\varepsilon \frac{\phi_0}{d_0}} \left(e^{i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + e^{-i(\omega + \varepsilon \sigma)t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j} \right) + O(\varepsilon). \quad (39)$$

Вместе с приведенным выше локальным анализом системы (1), (2), это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.3. Пусть $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ для $\gamma \leq \Gamma_c$, где Γ_c вычисляется с помощью (21) и $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$ для $\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \Gamma_f$, где Γ_f вычисляется с помощью (18). Тогда для любого $\gamma < \Gamma_c$ в случае $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ и любого $\bar{\gamma} < \gamma < t\Gamma_f$ в случае $\varepsilon = \alpha - \alpha_f$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности неустойчивого нулевого состояния равновесия орбитально инвариантный устойчивый цикл с асимптотикой (39).

4. ВЫВОДЫ

Для цепочки дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью с кубической нелинейностью были выявлены критические зависимости параметров, при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. Для значений параметров, близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия в одном случае и цикла в другом.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см. например [14], [13]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см. например [8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. П. Вычислительные методы для инженеров. — М.: Мир, 1998 — 544 с.
2. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике: учебное пособие для вузов. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011 — 516 с.
3. Волков Е. А. Численные методы. — М.: Наука, 1987 — 248 с.
4. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики. — ТМФ, 2020, т. 203 (1), с. 10—25.
5. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, т. 51 (8), с. 1400—1418.
6. Глызин С. Д. Локальные методы анализа динамических систем. — Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2006 — 91 с.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002 — 560 с.
8. Кащенко С. А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием. — Моделирование и анализ информационных систем, 2017, т. 24 (2), с. 168—185.
9. Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. — Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2012 — 196 с.
10. Марсден Дж. Е., Мак-Кракен Д. Бифуркация рождения цикла и ее приложения — М.: Мир, 1980 — 368 с.
11. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной динамике. — М.: Наука, 1973 — 512 с.
12. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла — М.: Мир, 1985 — 280 с.
13. Britton N. F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology. — New York: Academic Press, 1986. — 277 p.
14. Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics — Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 4 (4), pp. 5119–5153.

Ивановский Леонид Игоревич

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

E-mail: leon19unknown@gmail.com