

# Бифуркационные особенности одной нелинейной краевой задачи с отклонением в краевом условии

С.Д. Глызин, Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова

# Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(x_0, t), \quad (2)$$

$$t \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0, 1).$$

# Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(x_0, t). \tag{4}$$

## Задача на собственные значения

$$u(x, t) = e^{\lambda t} v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) = 0, \quad v'(1) = \alpha v(x_0). \tag{6}$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + \lambda},$$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

# Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\mu \operatorname{sh} \mu = \alpha \operatorname{ch} \mu x_0, \quad (7)$$

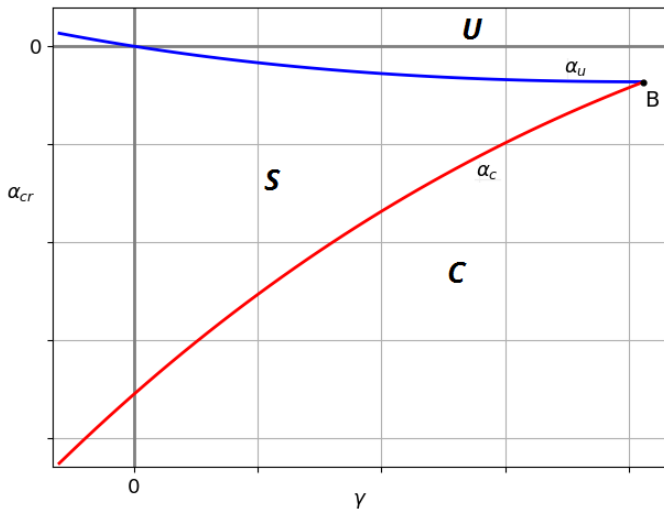
- $\lambda = 0 : \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

- $\lambda = \pm i\omega : \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$

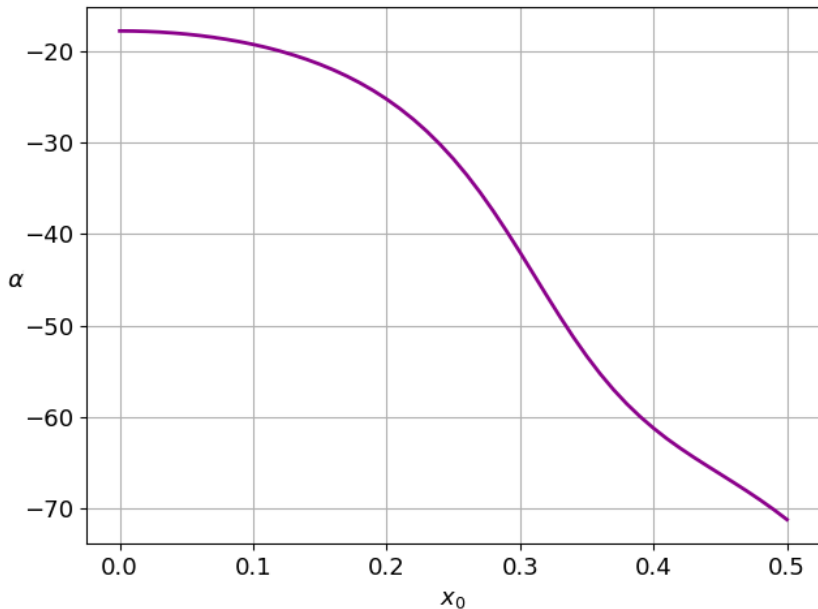
$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}.$$

# Схематическая визуализация критической зависимости

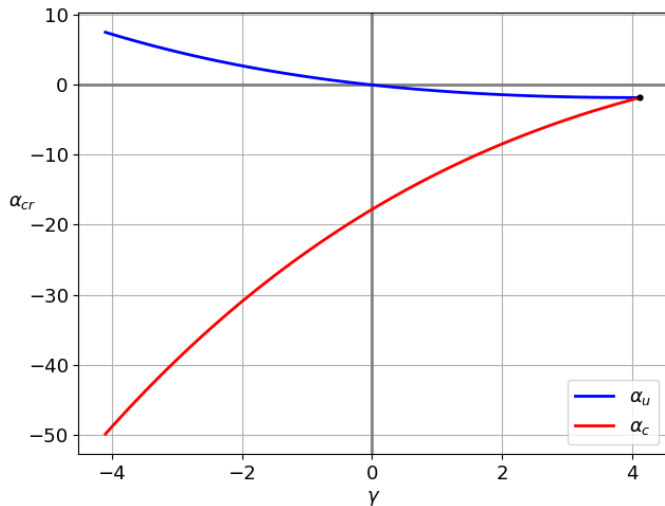


$$B = (\gamma_*, \alpha_*)$$

Численные результаты:  $\alpha_c(x_0)$  при  $\gamma = 0$



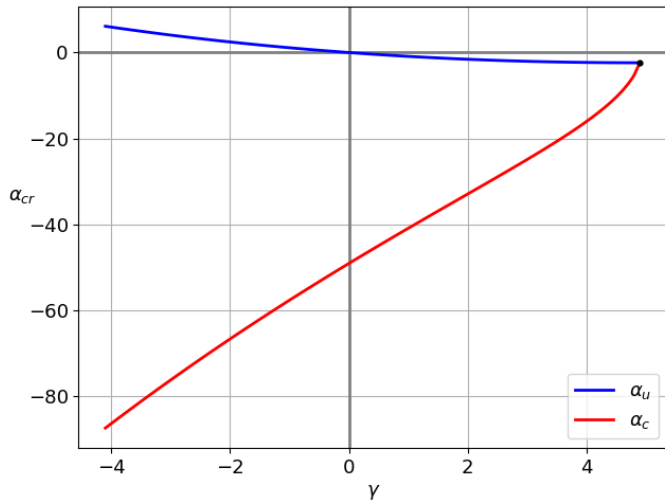
# Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0 : \quad \gamma_* \approx 4.115$$

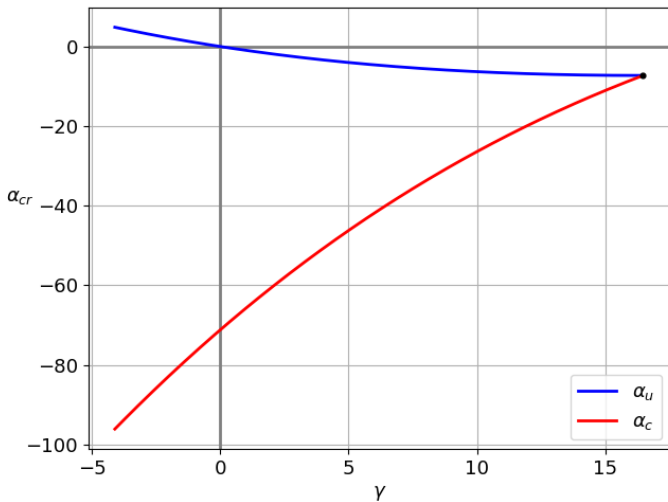


# Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



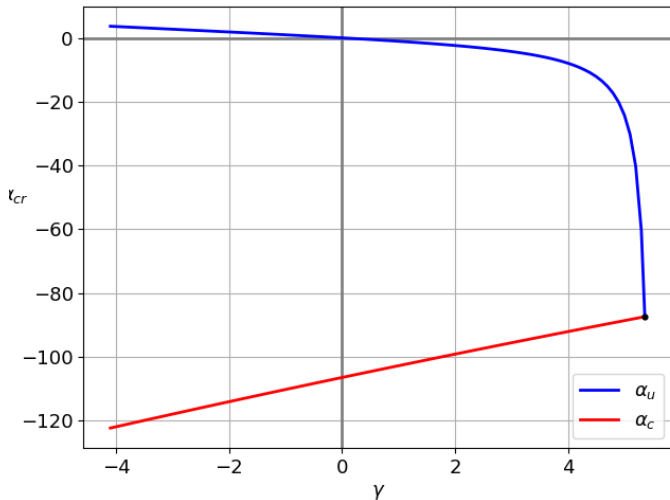
$$x_0 = 0.33 : \quad \gamma_* \approx 4.895$$

# Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



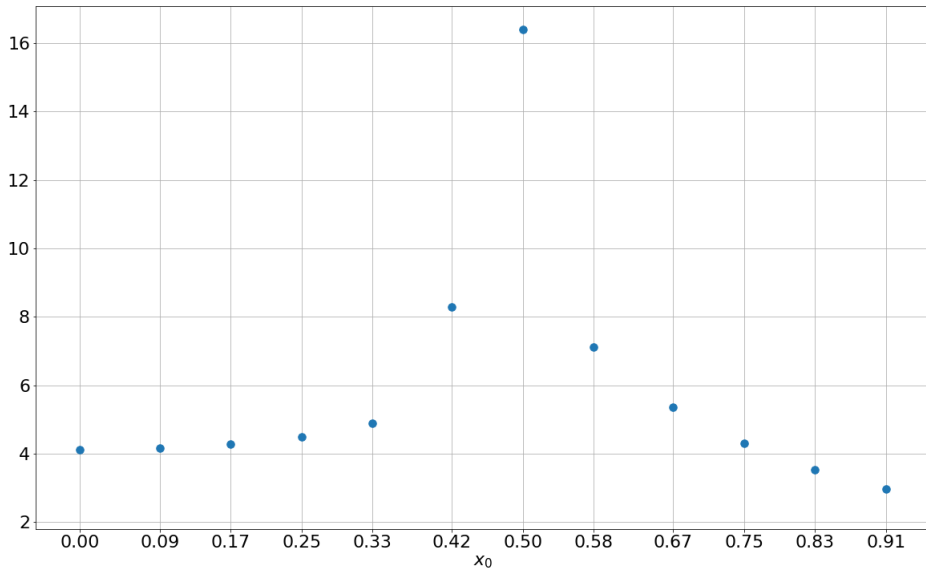
$$x_0 = 0.5 : \quad \gamma_* \approx 16.4$$

# Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.67 : \quad \gamma_* \approx 5.361$$

# Численные результаты: $\gamma_*(x_0)$



$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_2 + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

## Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0$  :  $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$ ,

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \quad (9)$$

$$u_0'(0, t) = 0, \quad u_0'(1, t) = \alpha_u u_0(x_0, t), \quad (10)$$

$$u_0 = \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \quad (11)$$

$$u_2'(0, t) = 0, \quad u_2'(1, t) = \alpha_u u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t), \quad (12)$$

## Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \quad (13)$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0. \quad (14)$$

$$v_2 = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{\rho^3}{32} \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x + \frac{3\rho^3 + 4\rho'}{8\sqrt{-\gamma}} x \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x,$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

## Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \quad (15)$$

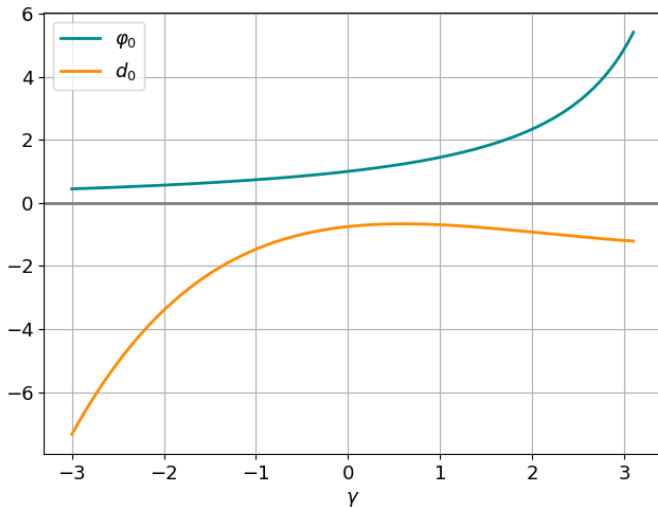
$$\phi_0 = \frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0},$$

$$d_0 = \frac{-3\gamma \operatorname{sh} 3\mu - 12 \operatorname{sh} \mu - 12\mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u \mu \operatorname{ch} 3\mu x_0 + 12\alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0}{16(\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)},$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma}.$$

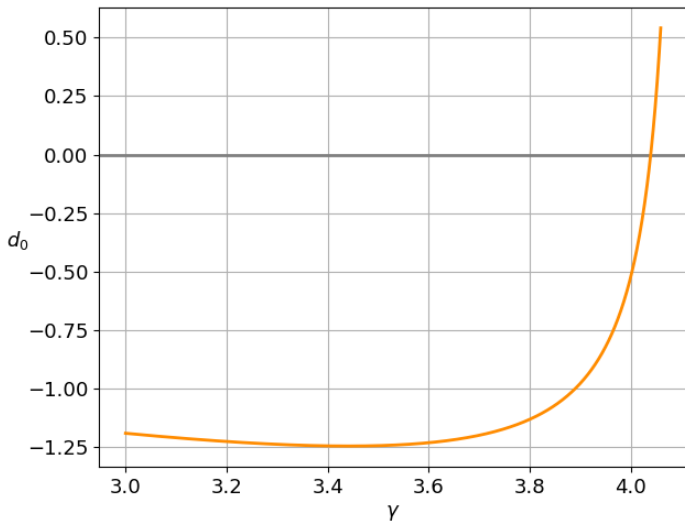


# Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



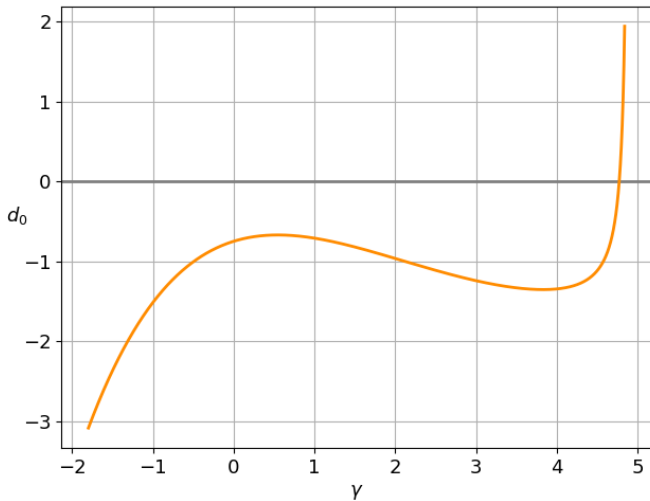
$$x_0 = 0$$

# Численные результаты: $d_0(\gamma)$



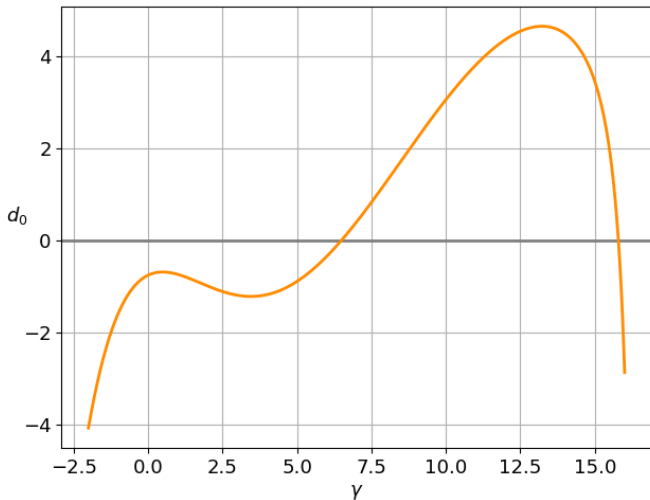
$$x_0 = 0 : \quad \gamma_l \approx 4.039, \quad \gamma_* \approx 4.115$$

# Численные результаты: $d_0(\gamma)$



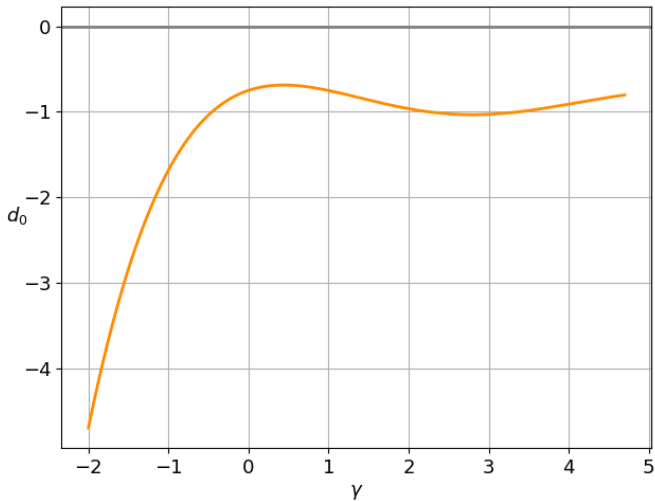
$$x_0 = 0.33 : \quad \gamma_l \approx 4.773, \quad \gamma_* \approx 4.895$$

# Численные результаты: $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.5 : \quad \gamma_l \approx 6.485, \quad \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты:  $\phi_0(\gamma)$  и  $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.67 : \quad \gamma_* \approx 5.361$$

## Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega$  :  $\varepsilon = \alpha_c - \alpha$ ,

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \quad (16)$$

$$u_0'(0, t) = 0, \quad u_0'(1, t) = \alpha_c u_0(x_0, t), \quad (17)$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t} \operatorname{ch} \mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \mu x}.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \quad (18)$$

$$u_2'(0, t) = 0, \quad u_2'(1, t) = \alpha_c u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t), \quad (19)$$

## Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega)v_2 - z'w(x) - 3z|z|^2w|w|^2 = 0, \quad (20)$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + z(s)w(x_0), \quad (21)$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x.$$

## Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z |z|^2, \quad (22)$$

$$\phi_0 = \operatorname{Re} \phi, \quad d_0 = \operatorname{Re} d,$$

$$\phi = \frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0},$$

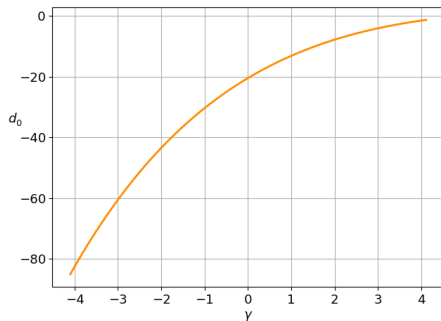
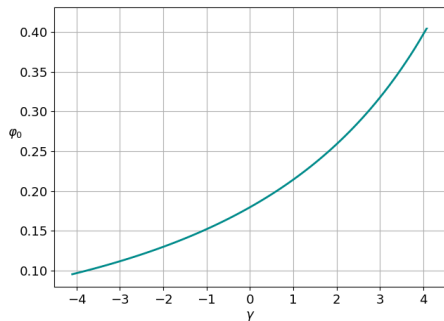
$$d = \frac{3\mu(G(\mu + 2 \operatorname{Re} \mu) + G(\mu + 2i \operatorname{Im} \mu) + 2G(\bar{\mu}))}{2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)},$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$G(y) = \frac{\alpha_c - y \operatorname{sh} y}{y^2 + \gamma - i\omega}.$$

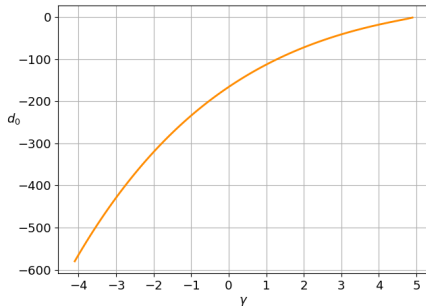
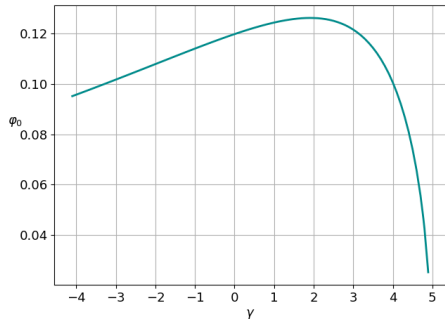


# Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0$$

# Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.33$$