Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одной краевой задачи с линейным отклонением в краевом условии

Ивановский Леонид Игоревич
Аспирант
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: leon19unknown@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу с линейным отклонением в одном из краевых условий

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0, t), \tag{2}$$

для которой параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, а $x_0 \in [0,1]$. Краевая задача (1), (2) очевидным образом имеет нулевое решение. В зависимости от значений параметров, это решение может быть устойчивым или неустойчивым. Представляет интерес определить условие устойчивости нулевого состояния равновесия и выяснить какие решения от него ответвляются при ее потере. В данном случае основными способами потери устойчивости являются дивергентный, когда в спектре устойчивости состояния равновесия появляется нулевое значение, и колебательный, соответствующий случаю выхода пары собственных значений на мнимую ось.

Для выяснения устойчивости нулевого решения для линеаризованной в нуле краевой задачи (1), (2) выполняется стандартная эйлерова замена вида $u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x)$. Тогда для функции $v(x)$ получается следующая задача на собственные значения:

$$v'' + (\gamma - \lambda) v = 0,$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha\, v(x_0),$$

При решении этой краевой задачи получается характеристическое уравнение вида

$$\sqrt{-\gamma + \lambda}\, \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + \lambda} = \alpha. \tag{3}$$

Здесь выяснение устойчивости нулевого состояния равновесия сталкивается со следующими трудностями: можно найти значения параметров, при которых корни характеристического уравнения (3) пересекают мнимую ось. Однако в таком случае не удается доказать, что все остальные корни будут лежать слева от мнимой оси. В связи с этим в комплексе будут применяться аналитические и численные методы для решения данной задачи.

Для уравнения (3) выясняется важный вопрос о критических значениях $\alpha_{cr}(\gamma)$, при которых корни уравнения (3) выходят на мнимую ось, в зависимости от того, каким образом, дивергентным или колебательным, нулевое состояние равновесие краевой задачи (1), (2) теряет свою устойчивость. Для изучения фазового портрета краевой задачи (1), (2) используется нормальная форма, которая получается в результате разложения решения краевой задачи (1), (2) по степеням малого параметра, косвенно характеризующего собой отклонение нулевого состояния равновесия от положения равновесия.

Источники и литература

1) Кащенко С. А. “О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), с. 168 – 185.

2) Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. “Теория и приложения бифуркации рождения цикла”, *М.: Мир*, 1985. - 280 с.