

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, Релаксационные колебания в математических моделях экологии, *Tr. МИАН*, 1993, том 199, 3–124

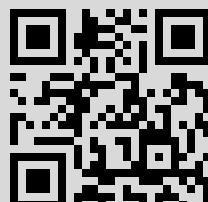
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 46.237.31.37

14 февраля 2022 г., 14:40:00



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В теории релаксационных колебаний следует различать два аспекта проблемы. Первый из них, составляющий содержание  $C$ -теории, связан с выявлением предельного объекта, к которому сходится релаксационная система, и попутной формулировкой условий существования релаксационного цикла. Другая часть теории сложнее: ее цель — обосновать сходимость к предельному объекту в гладких метриках. Попутно, в частности, решается вопрос о единственности и устойчивости релаксационного цикла.

Эта схема в полном объеме реализована для релаксационных систем в конечномерном пространстве. Однако при рассмотрении систем с запаздыванием, фазовое пространство которых бесконечномерно, ее приходится видоизменять. Отметим три характерных случая. Во-первых, реализуется самая простая ситуация, когда из достаточно широкой области начальных условий решения наматываются на релаксационный цикл, мультиплликаторы которого, исключая единичный, по модулю неограниченно убывают при уменьшении или увеличении динамического параметра. Здесь  $C$ -теорема сводится к доказательству существования цикла, а  $C^1$ -теорема — к обоснованию указанного характера поведения мультиплликаторов. Вторая ситуация в определенной степени аналогична классической: релаксационная система в равномерной топологии сваливается к предельному объекту, а анализ уравнений в вариациях углубляет эту связь. Наконец, возможен наиболее интересный и сложный случай, когда к предельному объекту релаксационная система сходится только в слабой топологии. На важном примере из математической экологии показано, что в этом случае счетное число мультиплликаторов уравнения в вариациях имеет ненулевые пределы.

В основном мы ограничили свое изложение рассмотрением содержательных примеров. Различные обобщения, распространение на более широкие классы уравнений и т. д. предоставляем начинающим исследователям.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, только и представляющая для нас интерес, берет свое начало с заметки Л. С. Понtryгина и Е. Ф. Мищенко [59], послужившей основой для последующих работ [58, 60—63]. Свое завершение эта теория получила в статьях [28, 29, 31]. Особо отметим статью [28], в которой показано, что при некоторой общности положения произвольная релаксационная система обыкновенных дифференциальных уравнений — малое возмущение в  $C^1$ -метрике определенным образом ей соответствующей релейной системы. Эта статья прояснила также содержание предыдущих работ: они посвящены  $C$ -сходимости релаксационной системы к подходящей релейной системе.

Итак, произвольная релаксационная система обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае — гладкое возмущение релейной системы. При рассмотрении вопроса о релаксационных колебаниях в системах с запаздыванием сталкиваемся с более разнообразной ситуацией. В частности, для этого класса эволюционных уравнений не удается построить унифицированной теории. В связи с этим ниже изложение ведется на уровне содержательных примеров, представляющих самостоятельный и значительный интерес, что позволяет выявить важные закономерности.

В монографии, состоящей из трех глав, суммированы исследования авторов за последние несколько лет [13, 14, 22, 25, 26, 35, 43—45]. Первая глава посвящена рассмотрению релаксационных колебаний, амплитуда которых неограниченно возрастает при убывании малого параметра или увеличении большого параметра. Первый рассмотренный здесь пример — классическое уравнение Хатчинсона, описывающее изменение плотности вида, релаксационный цикл которого связан с плодовитостью популяции. Характерная особенность хатчинсоновского релаксационного цикла: у уравнения в вариациях все мультиплекторы, кроме единичного, по экспоненциальному закону приближаются к нулю при увеличении малтузианского коэффициента линейного роста. Однако возможен и промежуточный случай, который встречается при исследовании билокальной модели уравнения Хатчинсона с диффузией. Соответствующая система дифференциально-разностных уравнений имеет двумерный тор, на который решения наматываются по экспоненциальному закону с большим показателем экспоненты. На самом же торе движения медленные, что затрудняет полное рассмотрение вопроса. Наконец, еще более сложный пример доставляет математическая модель реакции Белоусова. В этом примере характеристические показатели системы в вариациях конечны, а малость мультиплекторов обеспечивается за счет асимптотически большого периода колебаний.

Наибольшее значение, однако, имеет исследованная в первой главе математическая модель задачи о взаимодействии хищника со своей сильно плодовитой жертвой. Этот пример типовой: выделен такой класс начальных условий, что решения соответствующей системы дифференциально-разностных уравнений в  $C^1$ -метрике близки к некоторой двумерной релейной системе (в терминах оператора последования — к некоторому одномерному отображению).

Во второй главе на примере математической модели динамики популяций насекомых начинается исследование свойств релаксационных циклов конечной амплитуды, т. е. ограниченной сверху не зависящей от малого параметра постоянной. Главная особенность рассматриваемого дифференциально-разностного уравнения — сходимость к предельному объекту в слабой топологии, что затрудняет уже доказательство теоремы о существовании циклов. Более нетривиальное следствие: счетное число мультиликаторов уравнения в вариациях имеет ненулевые пределы при стремлении к нулю малого параметра. В конце главы показывается, что исследуемое уравнение обладает также большим запасом сильно неустойчивых релаксационных циклов. Последнее означает, что у уравнений в вариациях есть мультиликаторы, модули которых неограниченно возрастают при уменьшении малого параметра.

Вторую главу следует считать центральной — со многих точек зрения представляя интерес исследованное в ней дифференциально-разностное уравнение. Кказанному в предыдущем абзаце добавим, например, что при построении асимптотики циклов возникает проблема нахождения определенных решений специальных уравнений, а это типично для сложных задач теории релаксационных колебаний.

В третьей главе продолжается изучение релаксационных циклов конечной амплитуды. Исследуемая здесь система с запаздыванием одновременно содержитьна в квантовой физике и математической экологии. Подчеркнем, что для ее медленно осциллирующего цикла теорема о С-сходимости аналогична соответствующему утверждению в конечномерном случае. Это обстоятельство проясняет  $C^1$ -теорему, согласно которой у системы в вариациях только два мультиликатора, один из которых единичный, имеют ненулевые пределы при неограниченном уменьшении малого параметра. С помощью специального приема доказана также теорема о существовании большого числа быстро осциллирующих релаксационных циклов, названных из-за их специфики циклами с короткими периодами. Вопрос об их устойчивости также решается с помощью специально развитой техники. Существенно, что они могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Более подробный анализ свойств устойчивости самого простого из них показал, что потеря устойчивости происходит колебательным образом. В связи с этим формулируется задача о построении устойчивых двухчастотных колебаний, решение которой связано с некоторым четырехмерным отображением.

В конце главы показывается, что полученные результаты носят общий характер — развитая техника применяется к исследованию релаксационных циклов дифференциально-разностных уравнений достаточно общего вида.

Авторы посчитали необходимым выполнить монографическое исследование теории релаксационных колебаний в экологических уравнениях не только в связи с актуальностью вопроса, но и с целью привлечь внимание специалистов к новому перспективному направлению — изучению релаксационных циклов дифференциально-разностных уравнений. Поэтому подробное изложение уже наработанных способов анализа, в частности выявления связи с классическим случаем обыкновенных уравнений, представляется как своевременным, так и достаточно важным.

Первая глава написана Ю. С. Колесовым. Вторая и третья главы написаны совместно. Результаты последних двух разделов принадлежат А. Ю. Колесову.

# Глава первая

## РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

### 1. Ряд сведений из математической экологии

**1.1. Уравнения одновидового биоценоза.** Первую математическую модель для описания динамики численности вида предложил в 1798 г. Т. Мальтус, согласно представлениям которого при благоприятных условиях любой вид увеличивает свою численность  $N(t)$  по экспоненциальному закону, т. е.

$$\dot{N} = rN, \quad (1.1)$$

где параметр  $r$  в последующем получил название малтузианского коэффициента линейного роста. Правда, при решении одной конкретной экологической задачи, в связи с которой и появились числа Фибоначчи, аналогичный механизм роста популяции еще в 1202 г. предложил Фибоначчи. Закон Мальтуса хорошо подтверждается экспериментальным материалом, если невелика численность популяции, т. е. пока ее размер не лимитируется доступной пищей и территорией. Чтобы учесть тормозящие факторы, в 1835 г. Л. А. Кетле и П. Ф. Ферхольст предложили уравнение

$$\dot{N} = r(1 - N/K)N, \quad (1.2)$$

получившее название логистического. В (1.2) фигурирует важный параметр  $K$ , характеризующий средний размер популяции и называемый емкостью среды обитания, который главным образом зависит от количества пищи и площади ареала обитания. Переоткрыт логистический закон был в 1920 г. Р. Пирлом и Л. Д. Ридом.

Закон, задаваемый уравнением (1.2), хорошо работает при описании динамики роста популяций микроорганизмов. Однако, если попытаться его применить к динамике численности массовых видов млекопитающих, явно выходим за границы применимости. Дело в том, что плотность, т. е. величина  $N/K$ , многих видов млекопитающих, обитающих, скажем, в Канаде и Якутии, резко меняется с течением времени [66, 79]. Чтобы сохранить логистический закон и для этих видов, в 1948 г. Г. Хатчинсон предложил [75] уравнение

$$\dot{N} = r[1 - N(t - h)]N, \quad (1.3)$$

где в отличие от (1.2)  $N$  — плотность популяции в текущий момент времени. В (1.3) положительный параметр  $h$  — средний возраст половозрелых самок в благоприятные годы, а

$$r = \ln(1 + mp), \quad (1.4)$$

где  $m$  — доля половозрелых самок,  $p$  — средняя величина помета [33]. Подчеркнем, что уравнение (1.3) моделирует самую простую ситуацию, когда среда обитания однородна, миграционные факторы не учитываются (точнее, они столь значительны, что происходит полное перемешивание), количество доступной пищи регулярно восстанавливается до некоторого уровня. Нетрудно сообразить, что при описанных условиях и при увеличении произведения  $rh$  в уравнении (1.3) возникают незатухающие автоколебания. Первые результаты на пути строгого доказательства существования цикла при  $rh > \pi/2$  получил

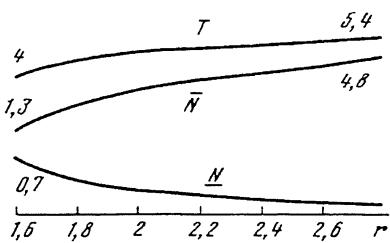


Рис. 1.1

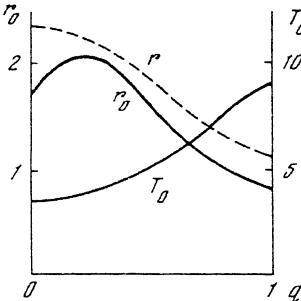


Рис. 1.2

в 1961 г. Джонсон [76], который существенно использовал предшествующую статью Райта [80]. Однако полная ясность в данном вопросе наступила много позднее (см. [73], где приведена библиография). Отметим также, что в заметках [74, 81] уравнение (1.3) привлекалось к вопросу о плотности простых чисел.

На рис. 1.1, где за единицу времени принято  $h$ , показана зависимость основных характеристик хатчинсоновского цикла от малтузианского коэффициента линейного роста.

Правая часть уравнения (1.3) — разность двух слагаемых, из которых первое в соответствии с формулой (1.4) связано с фактором рождаемости. Второе слагаемое, обеспечивающее запаздывающую внутреннюю обратную связь, связано с ограниченностью пищевых ресурсов и территории обитания. Тем самым становится ясно, что учет более тонкой возрастной структуры популяции приведет к дифференциальному-разностному уравнению [38]

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j N(t-h-j+1) \right] N, \quad (1.5)$$

где положительные параметры  $\alpha_j < 1$  связаны равенствами:

$$\alpha_j = q^{j-1} \alpha_1, \quad \alpha_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) = 1. \quad (1.6)$$

В статье [38] уравнение (1.5) использовано для объяснения некоторых особенностей колебаний плотности зайца-беляка и ондатры в Якутии.

На рис. 1.2 показаны зависимости бифуркационного значения  $r_0$  и величины  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — частота возбуждения автоколебаний, от  $0 < q < 1$  при  $n = 4$ ,  $h = 0.9$ . Штриховой линией отмечены значения малтузианского коэффициента линейного роста, при котором амплитуда колебаний равна трем (график заимствован из работы [68], в которой рассматривается вопрос о колебаниях плотности якутской белки и ее основных пищевых конкурентов). Хорошо видно, что при относительно небольших  $q$  происходит гашение колебаний. Аналогичное имеет место в случае популяции ондатры [38]. Однако в случае зайца-беляка за счет долгожителей при любом  $q$  происходит увеличение размаха колебаний.

Перейдем к вопросу о способе определения колебаний отдельных возрастных групп. Обозначим через  $u(t, s)$  плотность особей возраста  $s$  в момент времени  $t$ . Естественно предположение, что эта функция удовлетворяет системе уравнений [37]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi(t) u + \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad u(t, 0) = \psi(t) N(t), \quad (1.7)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — функции смертности и рождаемости соответственно. Очевидно, система (1.7) дополняется соотношениями

$$N(t) = \int_0^{\infty} u(t, s) ds, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(t, s) = 0. \quad (1.8)$$

Из (1.7) имеем

$$u(t, s) = N(t-s)\psi(t-s) \exp \int_{t-s}^t \varphi(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в первое равенство (1.8), получаем связь

$$\dot{N} = (\psi - \varphi) N \quad (1.10)$$

между  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $N$ .

Итак, согласно формулам (1.9) и (1.10) при решении вопроса о колебаниях плотности возрастных групп требуется знать  $\psi$  или  $\varphi$ . Из биологических соображений следует, что функция

$$\varphi(t) = \Psi(\dot{N}/N) > \dot{N}/N$$

должна быть близка к постоянной при низкой плотности популяции, когда рождаемость высокая, а смертность низкая, и сильно убывать при высокой плотности, когда, наоборот, рождаемость низкая, а смертность высокая. Это свойство функции  $\Psi$ , что очевидно, должно наиболее заметно проявляться при увеличении мальтизианского коэффициента линейного роста. Численные расчеты показывают, что хорошее соответствие с биологическим смыслом выходит, если взять

$$\Psi(x) = \frac{1}{a} \exp [a(x - x_0)], \quad a, x_0 > 0,$$

где  $ax_0 < 1$ , если  $ar > 1$ , и  $\exp [a(r - x_0)] \geq ar$ , если  $ar \leq 1$ .

Изложенный подход к определению колебаний плотности возрастных групп апробировался, в частности, на уравнении

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j N(t-h-j+1) \right] N - u(t) N, \quad (1.11)$$

где  $u(t)$  — некоторая неотрицательная периодическая функция, введенная в [36] для учета влияния охоты на динамику изменения плотности популяции. Как оказалось, при самом различном выборе стратегии охоты происходит омоложение популяции, что хорошо согласуется с действительностью.

Наконец, учет миграционного фактора приводит к краевой задаче

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + r(1 - N_{t-h}) N, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.12)$$

где  $N(t, x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  плоской области  $\Omega$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $N_{t-h} = N(t-h, x)$ ,  $\nu$  — нормальное направление в точках  $\partial\Omega$ . В (1.12) коэффициент диффузии  $D$  пропорционален площади, необходимой в среднем отдельной особи для нормальной жизни [49]. Отсюда становится ясно, что при уменьшении  $D$  обязательно возникнет десинхронизация автоколебаний, т. е. появится пространственно неоднородная структура в однородной среде.

Как уравнение (1.3), так и в особенности краевая задача (1.12) достаточно сложны. Однако основные свойства уравнения (1.3) можно понять, рассматривая упрощенную модель

$$N(t+1) = N(t) F(N), \quad t = 0, 1, \dots,$$

где

$$F(N) = \exp \left[ \lambda \left( 1 - \frac{N(t) + N(t-1)}{2} \right) \right].$$

Аналогично в простейшем варианте  $\Omega = (0, 1)$  хорошее представление о механизме десинхронизации автоколебаний можно получить, анализируя отображения

$$N_1(t+1) = [(1 - D) N_1(t) + DN_2(t)] F(N_1), \quad (1.13)$$

$$N_2(t+1) = [DN_1(t) + (1 - D) N_2(t)] F(N_2). \quad (1.14)$$

**1.2. Уравнения многовидового биоценоза.** Пусть  $N_1 \in R^n$  — количество жертв,  $N_2 \in R^m$  — хищников. Считаем, что взаимодействие этих видов при описанных в предыдущем пункте идеализированных условиях описывается системой векторных уравнений

$$\dot{N}_1 = [r_0 - A_{11}N_1 - A_{12}N_2 - a_1 N_1(t - h_1)] N_1, \quad (1.15)$$

$$\dot{N}_2 = [A_{21}N_1 - A_{22}N_2 - a_2 N_2(t - h_2)] N_2, \quad (1.16)$$

где координаты векторов  $r_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  положительны, элементы матриц,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  неотрицательны и нулевые главные диагонали у матриц  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ , умножение векторов покоординатное,  $h_1 \in R^n$ ,  $h_2 \in R^m$  — векторы с положительными координатами, из  $t$  вычитается соответствующая координате  $N_1$ ,  $N_2$  координата  $h_1$ ,  $h_2$ . Система (1.15), (1.16) структурно напоминает известные вольтерровские модели [8]. На самом деле, однако, есть три важных отличия.

Во-первых, в (1.16) нет слагаемых, называемых «коэффициентами смертности» хищников (в предыдущем пункте объяснено, что функции рождаемости и смертности вторичны).

Во-вторых, в систему (1.15), (1.16) вполне определенным образом входят запаздывания (обобщается идея Хатчинсона).

Предположим, в-третьих, что система (1.15), (1.16) имеет состояние равновесия  $(K_1, K_2)$  с положительными координатами. Тогда она может быть записана в форме

$$\dot{N}_1 = r_1 \left[ e_n + A \left( e_n - \frac{N_1}{K_1} \right) + B \left( e_m - \frac{N_2}{K_2} \right) - \frac{N_1(t-h_1)}{K_1} \right] N_1, \quad (1.17)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 \left[ C \frac{N_1}{K_1} + D \left( e_m C \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right) - \frac{N_2(t-h_2)}{K_2} \right] N_2, \quad (1.18)$$

где деление векторов покоординатное, у векторов  $e_n \in R^n$ ,  $e_m \in R^m$  все координаты равны 1, координаты векторов  $r_1 \in R^n$ ,  $r_2 \in R^m$  положительны, у  $n \times n$  и  $m \times m$  матриц  $A$  и  $D$  все элементы неотрицательны, а главные диагонали нулевые, у  $n \times m$  матрицы  $B$  неотрицательны все элементы, у  $m \times n$  матрицы  $C$  неотрицательны все элементы и  $Ce_n = e_m$ , при раскрытии круглых скобок в (1.18) сначала  $D$  применяется к  $e_m$ , а уже затем производится переумножение векторов.

Система (1.17), (1.18) обладает свойством инвариантности, т. е. ее структура сохраняется, если происходит конкурентное вытеснение некоторых из видов. Основное же достоинство системы (1.17), (1.18) состоит в том, что все ее коэффициенты — внутренние характеристики экосистемы, имеющие проз-

рачный биологический смысл. Эти обстоятельства имеют существенное значение при численном определении коэффициентов системы (1.17), (1.18) на основе анализа экспериментального материала. В качестве примера сошлемся на статью [48], в которой дано объяснение достаточно загадочному феномену — роли экологической ловушки в стабилизации биологического сообщества. При решении этой задачи ничего придумывать не пришлось — проблема свелась к идентификации параметров.

Подчеркнем, что для жертв имеет смысл понятие малтузианского коэффициента линейного роста, каждый из которых не изменяется при конкурентном вытеснении части видов. Величины коэффициентов линейного роста хищников при этом меняются, что обусловлено изменением их пищевой базы. Однако коэффициенты, характеризующие сопротивление среды (координаты векторов  $a_1$ ,  $a_2$  в (1.15), (1.16) и  $r_1/K_1$ ,  $r_2/K_2$  в (1.17), (1.18)), остаются неизменными как у жертв, так и у хищников.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу хищник—жертва—жертва. Согласно (1.17), (1.18) она моделируется системой

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r_1 \left[ 1 + a_{12} \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} \right) + b_{13} \left( 1 - \frac{N_3}{K_3} \right) - \frac{N_1(t-h_1)}{K_1} \right] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2 \left[ 1 + a_{21} \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} \right) + b_{23} \left( 1 - \frac{N_3}{K_3} \right) - \frac{N_2(t-h_2)}{K_2} \right] N_2, \\ \dot{N}_3 &= r_3 \left[ c_1 \frac{N_1}{K_1} + c_2 \frac{N_2}{K_2} - \frac{N_3(t-h_3)}{K_3} \right] N_3,\end{aligned}$$

где  $c_1, c_2 > 0$  и  $c_1 + c_2 = 1$ . Предположим, что

$$1 + a_{21} + b_{23} < (a_{21} + c_1 b_{23}) \tilde{K}_1 / K_1,$$

где

$$\frac{\tilde{K}_1}{K_1} = \frac{1 + a_{12} + b_{13}}{1 + c_1 b_{13}}.$$

При этом условии рассматриваемая система имеет устойчивый режим, у которого

$$N_1(t) > 0, \quad N_2(t) \equiv 0, \quad N_3(t) > 0,$$

т. е. возможно конкурентное вытеснение второй жертвы. Если это происходит, после переходного процесса сваливается к двумерной системе

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \tilde{r}_1 \left[ 1 + \tilde{b}_{13} \left( 1 - \frac{N_3}{\tilde{K}_3} \right) - \frac{N_1(t-h_1)}{\tilde{K}_1} \right] N_1, \\ \dot{N}_3 &= \tilde{r}_3 \left[ \frac{N_1}{\tilde{K}_1} - \frac{N_3(t-h_3)}{\tilde{K}_3} \right] N_3,\end{aligned}$$

где  $\tilde{b}_{13} = c_1 b_{13}$ ,  $\tilde{r}_3 = c_1 r_3 \tilde{K}_1 / K_1$ . Последняя формула означает, что коэффициент линейного роста хищника изменяется достаточно сложным образом, причем он может как возрасти, так и уменьшиться. При этом в силу равенств

$$\tilde{K}_3 / K_3 = c_1 \tilde{K}_1 / K_1, \quad \tilde{r}_3 / \tilde{K}_3 = r_3 / K_3$$

при  $c_1 \rightarrow 0$  в пределе получаем

$$\dot{N}_3 = -r_3 \frac{N_3(t-h_3)}{K_3} N_3,$$

т. е. хищник вымирает вместе со второй жертвой, так как первая из них перестает входить в его пищевой рацион.

Если ареал, в котором развиваются события, обладает выраженной пространственной неоднородностью, обязателен учет миграционных факторов. При этом общая структура уравнений (1.17), (1.18) сохраняется [42], но к их правым частям следует добавить соответственно слагаемые

$$\frac{1}{K_s} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( K_s^2 D_s \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{N_s}{K_s} \right) + \frac{1}{K_s} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( K_s^2 D_s \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{N_s}{K_s} \right),$$

где  $s = 1, 2$ , и поставить граничные условия непроницаемости. Если же еще добавляется временная неоднородность, экологические уравнения становятся в значительной степени неопределенными, так как приходится работать с уравнениями (1.15), (1.16), идентификация параметров которых затруднительна.

Интересно, что во всех исследованных случаях роль пространственной неоднородности однотипна — это дополнительный стабилизирующий фактор, так как эффективно способствует гашению колебаний.

В приложении к человеческой популяции данное положение приводит к следующим выводам. Как биологический вид в процессе эволюции человечество теряло устойчивость, что в основном связано с изменением его возрастной структуры, а усложнение социальной структуры способствовало определенной стабилизации. Как оказывается, если сопротивление внешней среды многомерно и достаточно плавно зависит от пространственных переменных, то при биологически осмысленных остальных параметрах происходит полное гашение колебаний. Таким образом, на определенном уровне стабилизируется размер человеческой популяции, рост которой обуславливается техническим прогрессом, только тогда, когда в каждом государстве подходящим образом усложняется инфраструктура, а также усиливается правовая и социальная защищенность человека, улучшаются условия труда и отдыха и т. д. Отметим, что мы исключили из рассмотрения случай вырождения нации, наблюдавшийся, например, в России в последние два десятилетия застоя, когда происходило даже некоторое уменьшение численности населения.

Естественно, в столь кратком изложении опущены многие тонкости, в частности связь модели (1.17), (1.18) с представлениями наиболее крупных биологов о причинах колебаний численности видов в природе (по этому поводу отсылаем к монографии [54]).

**1.3. Стабилизирующая роль экологической ловушки.** Эта задача выше упоминалась. Ее источником послужила статья [3], в которой описана следующая экологическая ситуация, сложившаяся на о. Ньюфаундленд. Число видов, обитающих на этом острове, небольшое. Самым крупным из массовых хищников является рысь. Ее основными жертвами служат заяц-беляк, олень-карибу и полярный заяц. Характерная особенность функционирования этой простой экосистемы такова. Ясно, что полярный заяц плохо приспособлен к защите от хищника, а поэтому большинство встреч с рысью кончается его гибеллю. Тем самым обычно низкая его плотность возрастает только во время подъема плотности зайца-беляка и оленя-карибу, когда рысь в основном питается этими двумя видами. В связи с этим в [3] говорится, что полярный заяц находится в экологической ловушке. В [3] отмечается также, что экологическая ловушка играет важную стабилизирующую роль. Это связывается

с удачным подбором жертв рыси и ее умением переключаться с одной жертвы на другую.

Итак, можно считать, что в [3] не вскрыта глубинная суть экологической ловушки. Наш анализ покажет, что сделать это, не прибегая к математическому моделированию, весьма затруднительно.

Исходя из изложенного в предыдущих двух пунктах, заключаем, что динамику описанной выше экосистемы моделируют дифференциальные уравнения:

$$\dot{N}_1 = r_1 [1 + a_{14} (1 - N_4) + b_{12} (1 - N_2) - \alpha_{11} N_1 (t - h_1) - \alpha_{12} N_1 (t - h_1 - 1)] N_1, \quad (1.19)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [1 + a_{24} (1 - N_4) + b_{21} (1 - N_1) - \alpha_{21} N_2 (t - h_2) - \alpha_{22} N_2 (t - h_2 - 1)] N_2, \quad (1.20)$$

$$\dot{N}_3 = r_3 [1 + a_{34} (1 - N_4) - \alpha_{31} N_3 (t - h_3) - \alpha_{32} N_3 (t - h_3 - 1) - \alpha_{33} N_3 (t - h_3 - 2) - \alpha_{34} N_3 (t - h_3 - 3)] N_3, \quad (1.21)$$

$$\dot{N}_4 = r_4 [c_1 N_1 + c_2 N_2 + c_3 N_3 - \alpha_{41} N_4 (t - h_4) - \alpha_{42} N_4 (t - h_4 - 1) - \alpha_{43} N_4 (t - h_4 - 2) - \alpha_{44} N_4 (t - h_4 - 3)] N_4. \quad (1.22)$$

Здесь  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$  — соответственно плотности зайца-беляка, полярного зайца, оленя-карибу и рыси. Далее в (1.19)–(1.22)

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{1 + a_{14} + b_{12}}, \quad r_2 = \frac{\lambda_2}{1 + a_{24} + b_{21}}, \quad r_3 = \frac{\lambda_3}{1 + a_{34}}, \quad (1.23)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  — мальтузианские коэффициенты линейного роста.

Опишем способ выбора числовых значений параметров системы (1.19)–(1.22). Совсем просто определяются внутренние характеристики рассматриваемых видов: мальтузианские коэффициенты линейного роста, возрасты половой зрелости самок, число возрастных групп и характеризующие их коэффициенты. Соответствующие числа сведены в таблицу.

Вид	Мальтузианский коэффициент линейного роста	Возраст половозрелых самок	Количество возрастных групп	Характеристика возрастной структуры
Зайц-беляк	1,44	1,86	2	0,6; 0,4
Полярный заяц	0,92	1,86	2	0,9; 0,1
Олень-карибу	0,41	1,37	4	0,28; 0,26; 0,24; 0,22
Рысь	0,35	1,81	4	0,5; 0,27; 0,15; 0,08

Дадим краткие пояснения. Мальтузианские коэффициенты линейного роста зайца-беляка и оленя-карибу получены с помощью формулы (1.4) и путем анализа экспериментального материала из [17, 66]. Соответствующий коэффициент для полярного зайца фактически приведен в [3]. Коэффициент линейного роста рыси определялся с учетом изложенного в [57, 66] биологического материала. Возраст половой зрелости самок вычисляется без труда. Количество возрастных групп и их числовые характеристики для зайца-беляка выбраны в соответствии с изложенным в [66]. Соответствующие параметры для оленя-карибу получены путем анализа возрастного состава Булунского стада диких северных оленей [17], которое считается эталонным. Однако эти па-

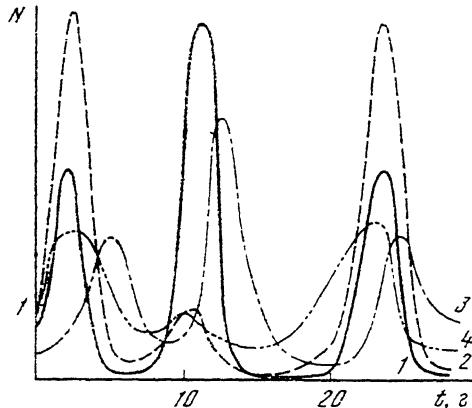


Рис. 1.3

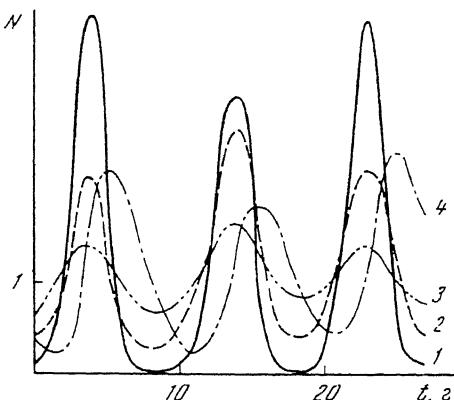


Рис. 1.4

метры для рыси выбраны достаточно произвольно, так как соответствующих данных в литературе нет [57]. Это же замечание относится и к полярному зайцу.

Обратимся теперь к коэффициентам, характеризующим межвидовое взаимодействие. Данные об обычных потерях от хищничества [66] позволяют считать, что

$$a_{14} = 0,1. \quad (1.24)$$

В [3] указывается, что с мая по октябрь более 70% молодняка оленя-карибу гибнет в результате нападения рыси. В силу (1.23) и таблицы отсюда следует, что коэффициент давления рыси на оленя-карибу

$$a_{34} = 1,9. \quad (1.25)$$

Перейдем к параметрам  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — долям каждой жертвы в рационе хищника. Чуть выше отмечалось, что молодняк оленя-карибу, пока он не подрос, — легкая добыча рыси. Естественно допущение, что в соответствующее время оленята составляют ее основную пищу. Относительная длительность промежутка с мая по октябрь и берется за коэффициент  $c_3$ , т. е.

$$c_3 = 0,35. \quad (1.26)$$

Дополнительно заметим, что в тех заповедниках страны, где рысь благоденствует, доля оленят в ее рационе примерно та же [57]. Доля полярного зайца в рационе рыси оценивалась из примерных расчетов размера ее популяции, количества корма, необходимого одной рыси, и соображения, что хищник уничтожает почти весь приплод полярного зайца, средняя численность которого на острове довольно стабильна (около тысячи). По оценкам такого рода выходит, что полярный заяц составляет несколько процентов всей добычи рыси. Ниже принимается, что

$$c_2 = 0,05. \quad (1.27)$$

Отсюда автоматически следует, что

$$c_1 = 0,6. \quad (1.28)$$

В дальнейшем эти числа не меняются.

Остается выбрать коэффициенты конкурентной борьбы между двумя видами зайцев и коэффициент давления рыси на полярного зайца. В [3] отмечается, что при прочих равных условиях, но в отсутствие рыси, полярный заяц

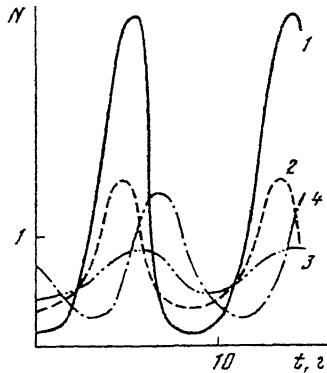


Рис. 1.5

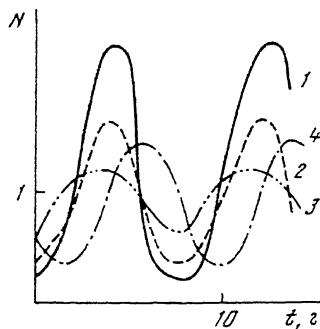


Рис. 1.6

приживается и хорошо размножается. Поэтому конкурентная борьба между этими двумя видами зайцев не является жесткой. В этом случае коэффициенты конкуренции невелики. Ниже берем

$$b_{21} = 0,2, \quad (1.29)$$

т. е. считаем, что коэффициент давления зайца-беляка на полярного зайца достаточно заметен. Точное его значение не так существенно. Значительно более важен коэффициент конкуренции  $b_{12}$  со стороны полярного зайца, который ниже меняем в определенном диапазоне. Коэффициент  $a_{24}$  давления рыси на полярного зайца, что отмечалось в начале пункта, по биологическим причинам достаточно велик. Предположим сначала, что

$$a_{24} = 5. \quad (1.30)$$

При указанных в таблице значениях и при данных (1.24)–(1.30) на рис. 1.3–1.6 показана динамика изменения стационарных режимов системы (1.19)–(1.22) соответственно при  $b_{12} = 0,1; 0,16; 0,3; 0,4$ .

Хорошо видно, что с ростом  $b_{12}$  происходит стабилизация колебаний. Более того, как оказывается, при  $b_{12} \geq 0,5$  устойчивым становится состояние равновесия системы (1.19)–(1.22) с равными единице координатами. Биологический смысл всего сказанного прозрачен: колебания плотности всех видов самым существенным образом зависят от степени интенсивности колебаний плотности зайца-беляка, которые уменьшаются за счет увеличения коэффициента конкуренции  $b_{12}$  со стороны полярного зайца. При этом обязательно должен быть достаточно велик коэффициент  $a_{24}$  давления рыси на полярного зайца. Чтобы в этом убедиться, достаточно провести сопоставление показанного на рис. 1.5 и 1.7, где в последнем случае вместо (1.30) принято, что  $a_{24} = 3$ . Отметим также, что при  $a_{24} > 5$  показанные на рис. 1.3–1.6 графики меняются мало.

Как уже отмечалось выше, некоторые из параметров системы (1.19)–(1.22) выбраны с большой погрешностью. Существенно, что данное обстоятельство на качественном уровне не влияет на описанную динамику стационарных режимов системы (1.19)–(1.22).

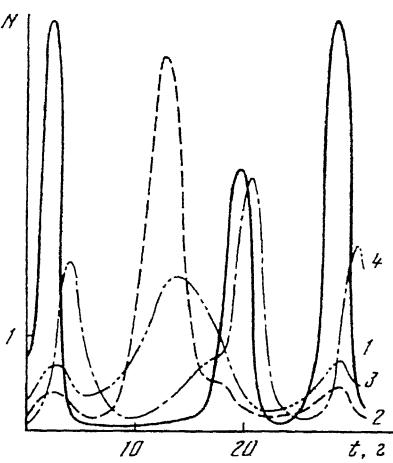


Рис. 1.7

Итак, из анализа математической модели (1.19)–(1.22) стало ясно, что центральную роль в стабилизации рассматриваемой экосистемы играют два обстоятельства: значительное давление рыси на полярного зайца и успешная конкуренция последнего с зайцем-беляком. Чтобы окончательно все стало ясно, подчеркнем, что причина нестабильности рассматриваемой экосистемы — излишне интенсивные колебания плотности зайца-беляка. Но совместное действие двух указанных выше причин приводит к тому, что рысь может их эффективно гасить. Тем самым существование экологической ловушки таково: рысь заметно давит на зайца-беляка опосредованно — через сильное угнетение популяции полярного зайца.

Рассмотренный в этом пункте пример интересен и в том отношении, что он проясняет природу так называемого десятилетнего цикла колебаний плотности млекопитающих в таежных зонах России и Канады [66, 79]. Для их тундровых районов характерен трехлетний цикл, что обусловлено величиной периода колебаний плотности лемминга, базового вида в этих ареалах.

**1.4. Математическая модель сахарного диабета.** Начнем с краткого изложения механизма процесса регулирования уровня глюкозы в крови. Обычно сахар организма выбрасывает в избытке. Понижает его концентрацию активный инсулин, являющийся производной инсулина, вырабатываемого поджелудочной железой. Интенсивность работы последней повышается при увеличении концентрации глюкозы в крови и уменьшается при увеличении концентрации активного инсулина. Концентрация активного инсулина зависит также от количества глюкозы в крови.

Этого краткого описания достаточно, чтобы прийти к следующему выводу. Инсулин правомерно считать хищником  $N_1$  первого порядка, активный инсулин — хищником  $N_2$  второго порядка, глюкозу — жертвой  $N_3$ . При этом своеобразие ситуации состоит в том, что жертва  $N_3$  может стимулировать или подавлять рост хищника  $N_2$ .

Если воспользоваться нашим методом моделирования, то в силу сказанного приходим к системе

$$\dot{N}_1 = r_1 [N_3/K_3 + a_{12} (N_3/K_3 - N_2/K_2) - N_1(t-h)/K_1] N_1, \quad (1.31)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [N_1/K_1 + a_{23} (N_1/K_1 - N_3/K_3) - N_2/K_2] N_2, \quad (1.32)$$

$$\dot{N}_3 = r_3 [1 + a_{32} (1 - N_2/K_2) - N_3/K_3] N_3, \quad (1.33)$$

где только у параметра  $a_{23}$  знак произволен: при  $a_{23} < 0$  глюкоза способствует производству активного инсулина, а при  $a_{23} > 0$  — угнетает. По аналогии со случаем экологических уравнений разумно считать, что величины

$$r_3 (1 + a_{32}), \quad r_1/K_1, \quad r_2/K_2, \quad r_3/K_3 \quad (1.34)$$

являются инвариантами, т. е. сохраняются при любом изменении параметров регулирования  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{32}$ . В (1.31) запаздывание  $h = 2,5 \div 3,5$  часа характеризует среднее время, необходимое для производства инсулина поджелудочной железой.

Из самого беглого анализа характеристического квазиполинома линеаризованной на состоянии равновесия ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ) системы просто выводится, что в широком диапазоне изменения параметров наблюдается колебательная неустойчивость. В этом случае устойчивым режимом системы (1.31)–(1.33) является периодическое решение, период которого примерно равен 12 часам. Перечислим некоторые нетривиальные свойства этого цикла.

а) Пусть относительно велики  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $a_{23}$  и малы  $K_2$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{32}$ . При этих условиях  $N_3$  осциллирует достаточно интенсивно. Этот случай моделирует сахарный диабет.

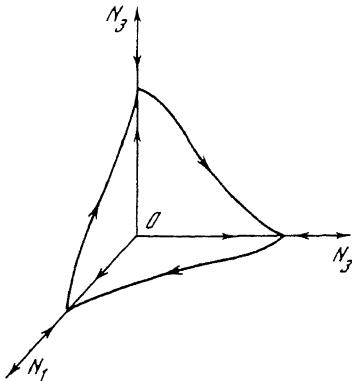


Рис. 1.8

б) Пусть все параметры имеют умеренные значения и  $a_{23} < 0$ . При этих условиях колебания  $N_3$  умеренные. Этот случай соответствует норме.

в) Пусть  $a_{23}, a_{32}$  велики, а  $K_3, a_{12}$  малы. При этих условиях колебания  $N_3$  наиболее резкие. Этот случай моделирует довольно редкую болезнь, когда излишне мал средний уровень глюкозы в крови.

Перечисленные свойства системы (1.31)–(1.33) можно понять, не прибегая к ее численному интегрированию, если воспользоваться постулированным выше свойством постоянства величин (1.34). Собственно, чтобы подчеркнуть роль инвариантов, мы посчитали возможным привести систему (1.31)–(1.33). Она была получена вторым автором еще в 1983 г. Изложенный здесь материал им докладывался на семинаре по теории и приложениям дифференциальных уравнений при Ярославском университете.

**1.5. Разъяснение «парадокса планктона».** Данный вопрос связан с конкуренцией видов с сильно пересекающимися требованиями к окружающей среде. Для простоты предположим, что речь идет о трех видах. Тогда имеем

$$\dot{N}_1 = r_1 [1 + a_{12}(1 - N_2) + a_{13}(1 - N_3) - N_1(t - h_1)] N_1, \quad (1.35)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [1 + a_{21}(1 - N_1) + a_{23}(1 - N_3) - N_2(t - h_2)] N_2, \quad (1.36)$$

$$\dot{N}_3 = r_3 [1 + a_{31}(1 - N_1) + a_{32}(1 - N_2) - N_3(t - h_3)] N_3. \quad (1.37)$$

Положим

$$\alpha_1 = a_{31} \frac{\lambda_1}{r_1} - \frac{\lambda_3}{r_3}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{r_2} - a_{21} \frac{\lambda_1}{r_1}, \quad (1.38)$$

$$\alpha_3 = a_{12} \frac{\lambda_2}{r_2} - \frac{\lambda_1}{r_1}, \quad \alpha_4 = \frac{\lambda_3}{r_3} - a_{32} \frac{\lambda_2}{r_2}, \quad (1.39)$$

$$\alpha_5 = a_{23} \frac{\lambda_3}{r_3} - \frac{\lambda_2}{r_2}, \quad \alpha_6 = \frac{\lambda_1}{r_1} - a_{13} \frac{\lambda_3}{r_3}, \quad (1.40)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – малютзианские коэффициенты линейного роста.

**Теорема 1.1.** Пусть ненулевые числа (1.38)–(1.40) одного знака. Тогда система (1.35)–(1.37) в качестве инвариантного множества имеет гомоклинический треугольник, целиком лежащий на границе конуса вектор-функций с неотрицательными компонентами.

На рис. 1.8 показан этот гомоклинический треугольник для случая, когда нет запаздываний в системе (1.35)–(1.37).

Введем обозначение

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 / \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 - 1.$$

**Теорема 1.2.** Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда при  $\alpha > 0$  ( $< 0$ ) гомоклинический треугольник локально экспоненциально устойчив (неустойчив).

В качестве иллюстративного примера рассмотрим систему

$$\dot{N}_1 = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_3) - N_1(t-1)] N_1, \quad (1.41)$$

$$\dot{N}_2 = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_1) - N_2(t-1)] N_2, \quad (1.42)$$

$$\dot{N}_3 = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_2) - N_3(t-1)] N_3. \quad (1.43)$$

В системе (1.41)–(1.43) гомоклинический треугольник возникает при  $a > 1$ , становясь устойчивым при  $a > 2$ . Поясним его биологический смысл: за счет жесткой конкурентной борьбы сначала, скажем, первый вид почти вытесняет остальные два, через достаточно длинный промежуток времени частичная победа переходит к третьему виду, затем ко второму и т. д. Существенно, что с течением времени углубляются локальные минимумы плотности каждого из видов. Это означает, что выживет только какой-то один вид.

Добавим к правым частям системы (1.35)–(1.37) диффузионные слагаемые и поставим условия непроницаемости на границе некоторой области.

**Теорема 1.3.** *Пусть в условиях теоремы 1.1  $\alpha > 0$ . Тогда при подходящем уменьшении коэффициентов диффузии гомоклинический треугольник неустойчив в рамках распределенной модели.*

Обоснования теорем 1.1 и 1.2 проводятся по изложенным в [37] схемам с подходящими изменениями, связанными с наличием запаздываний в системе (1.35)–(1.37). Стогого обоснования теоремы 1.3 мы пока не имеем. Однако с биологических позиций она очевидна, поэтому соответствующее утверждение нами сформулировано в виде теоремы. Отметим еще, что теорема 1.3, вообще говоря, перестает быть справедливой, если в (1.35)–(1.37) хотя бы одно из запаздываний обращается в нуль.

Численный анализ показывает, что наиболее простой сценарий таков. При небольших коэффициентах конкуренции компоненты аттрактора системы (1.35)–(1.37) квалифицированно отделены от нуля. Затем при увеличении жесткости конкурентной борьбы он вливает в гомоклинический треугольник, который становится глобальным аттрактором. В более сложных сценариях аттрактор обычного типа может существовать с устойчивым гомоклиническим треугольником. Однако во всех вариантах учет малого миграционного фактора приводит к тому, что вместо гомоклинического треугольника аттрактором становится стационарный режим, компоненты которого квалифицированно отделены от нуля.

Применим изложенные факты к объяснению известного «парадокса планктона». Его суть заключается в следующем. Более пятидесяти лет назад Гаузе сформулировал положение, согласно которому виды с сильно пересекающимися требованиями к окружающей среде существовать не могут. Но именно к таковым относятся совместно существующие виды планктона. Как мы показали, парадокс разрешается, если вместе с запаздываниями учесть малый миграционный фактор, что естественно для данных биологических сообществ.

## 2. Свойства релаксационного цикла уравнения Хатчинсона

**2.1. Постановка задачи и теорема о существовании релаксационного цикла.** Нормируя в уравнении (1.3) время  $t \rightarrow ht$  и полагая  $\lambda = rh$ , получаем

$$\dot{N} = \lambda [1 - N(t-1)] N. \quad (2.1)$$

Поставим вопрос об асимптотике и устойчивости релаксационного цикла уравнения (2.1) в предположении, что  $\lambda$  – большой параметр. В качестве его

фазового пространства возьмем  $C(-2, -1)$ . Обозначим через  $S_0$  замкнутое выпуклое множество в  $C(-2, -1)$ , элементами которого являются функции

$$0 \leq N(t, \lambda) \leq \exp[m\lambda(t+1)], \quad N(-1, \lambda) = 1, \quad (2.2)$$

где положительная постоянная  $m < 1$ .

**Теорема 2.1.** *Найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при каждом  $\lambda > \lambda_0$  на множестве  $S_0$  определен оператор последовательного уравнения (2.1), преобразующий его в себя.*

Интегрируя шагами уравнение (2.1) с начальными условиями (2.2), убеждаемся, что его решения на отрезке  $[-1, 0]$  возрастают до экспоненциально больших значений. При переходе через нуль каждое решение за асимптотически короткое время падает до сверхэкспоненциально малых значений, а затем его рост идет примерно по закону Мальтуса асимптотически большое время. Поэтому найдется такое первое значение времени  $T - 1$ , что  $N(T - 1, \lambda) = 1$ ,  $N(T - 1, \lambda) > 0$ . Положим

$$\Pi N(t, \lambda) = N(T + t, \lambda), \quad -2 \leq t \leq -1.$$

Из построения следует, что оператор последовательности определен на  $S_0$  и преобразует это множество в себя.

**2.2. Асимптотика релаксационного цикла.** Из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что перед тем как попасть в  $S_0$ , периодическое решение долго возрастает. Отсюда и из структуры уравнения (2.1) следует, что

$$N(t, \lambda) = [1 + O(\exp(-2\lambda))] c \exp \lambda (t+1), \quad (2.3)$$

где  $-3 \leq t \leq -2$ , а постоянная  $c$  имеет порядок единицы. Из (2.3) и уравнения (2.1) выводим, что

$$N(t, \lambda) = [1 + \exp(-\lambda) + O(\exp(-2\lambda))] \exp \{\lambda(t+1) - \exp \lambda t\}, \quad -2 \leq t \leq -1. \quad (2.4)$$

В свою очередь, из (2.4) и (2.1) получаем, что

$$N(t, \lambda) = [1 + \exp(-\lambda) - \exp \lambda (t-1) + 1/2 \exp \lambda (2t-1) + O(\exp(-2\lambda))] \exp \{\lambda(t+1) - \exp \lambda t\}, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (2.5)$$

Обозначим через  $\bar{N}$  наибольшее значение  $N(t, \lambda)$ . В силу (2.2) и (2.1)  $\bar{N} = N(0, \lambda)$ . Отсюда и из (2.5) заключаем, что

$$\bar{N} = \exp(\lambda - 1) + 1/2e + O(\exp(-\lambda)). \quad (2.6)$$

Перейдем к отрезку  $[0, 1]$ . Используя формулу (2.5) в уравнении (2.1), сначала ее уточняем, чтобы затем получить равенство

$$N(t, \lambda) = \exp \{\lambda(t+1) - \exp \lambda + \exp [\lambda - \exp \lambda (t-1)] + 1/2 \exp [2\lambda(t-1) - \exp \lambda (t-1)] + \exp [-\exp \lambda (t-1)] - 1 + \exp(-\lambda) + O(\exp(-2\lambda))\}. \quad (2.7)$$

Важной характеристикой является то значение времени  $t_0 > 0$ , когда, резко убывая в первый раз, периодическое решение достигает значения 1. Из формулы (2.7) выводим, что

$$t_0 = \ln \lambda / (\lambda - 1) + O(\ln^2 \lambda / \lambda^3). \quad (2.8)$$

Теперь можно приступить к построению асимптотики периода цикла. На промежутке  $[1, T-4]$  сначала заменим  $N(t, \lambda)$  на нуль, а затем на

$\lambda \exp(-3\lambda)$ . После этого вспомним, что согласно уравнению (2.1) периодическое решение имеет единичное среднее значение. Поэтому описанный выше прием с изменением  $N(t, \lambda)$  позволяет оценить  $T$  сверху и снизу. Отсюда и из формул (2.3)–(2.5), (2.7) получаем

$$T = (1 + \exp \lambda)/\lambda + O(\exp(-\lambda)/\lambda). \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.1) следует, что наименьшее значение  $N$  периодического решения  $N(t, \lambda)$  достигается в момент времени  $1 + t_0$ . Тем самым нужно, опираясь на формулу (2.7), проинтегрировать уравнение (2.1) чуть дальше, что приводит к равенству

$$N = \exp \left[ -\exp \lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2}\right) \right]. \quad (2.10)$$

Вычисляя по формулам (2.6), (2.9) и (2.10) и сопоставляя с показанным на рис. 1.1, приходим к выводу, что найденные асимптотические формулы работают уже при  $\lambda \geq 2.5$ .

В приложениях к динамике популяций млекопитающих сталкиваемся со случаями, когда параметр  $\lambda$  относительно невелик, т. е. малопригодна наша асимптотическая теория. Однако она применима к популяциям рыб, мальтизианский коэффициент линейного роста которых, с трудом поддающийся измерению и меняющийся от ареала к ареалу, достаточно велик. В частности, формула (2.10) делает ясной причину, по которой в природе практически отсутствуют одновидовые ихтиоценозы. Исключение составляют виды, которые в процессе эволюции выработали специальные механизмы гашения колебаний, скажем, порционное икрометание у карасевых или каннибализм у окуневых [53].

Совсем кратко остановимся на свойствах релаксационного цикла уравнения

$$\dot{N} = \lambda [1 - \alpha N(t-1) - (1-\alpha)N(t-1-\gamma)] N, \quad (2.11)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma > 0$  – фиксированные параметры, а  $\lambda$  – большой параметр. Отметим, что (2.11) – простейший вариант уравнения (1.5). Утверждение теоремы 2.1 для уравнения (2.11) сохраняется, но меняются асимптотические формулы для его релаксационного цикла. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, отметим только, что  $\bar{N}$  и  $T$  становятся примерно в  $1/\alpha$  раз больше, а  $N$  примерно во столько же раз меньше. На биологическом языке данные факты отражают то очевидное обстоятельство, что долгожители не нужны сильно плодовитому виду. Напомним, кстати, что в п. 1.1 фактически этот вывод был сделан – в случае сильно плодовитого вида заметны колебания только младшей возрастной группы, т. е. остальных возрастных групп практически нет.

**2.3. Устойчивость и единственность релаксационного цикла.** В уравнении в вариациях

$$\dot{v} = -\lambda N(t, \lambda) v(t-1) + \frac{\dot{N}(t, \lambda)}{N(t, \lambda)} v \quad (2.12)$$

релаксационного цикла  $N(t, \lambda)$  выполним нормирующую замену

$$v_1 = v/N(t, \lambda) \quad (2.13)$$

и перейдем к присоединенному уравнению

$$\dot{w} = \lambda N(t, \lambda) w(t+1). \quad (2.14)$$

В качестве фазового пространства последнего удобно взять  $C(2, 3)$ . Из аналитической работы, которую выполним в следующем разделе, вытекает

следующий характер поведения решения  $w(t, \lambda)$  уравнения (2.14) с произвольным начальным условием из  $C(2, 3)$ . Сначала все ясно: при  $1 < t < 2$  функция  $w(t, \lambda)$  со сверхэкспоненциальной точностью близка к постоянной  $w_0$  — значению  $w(t, \lambda)$  при  $t = 2$ . Ясно также, что при  $0 < t < 1$  ее существенное изменение начинается лишь в асимптотически малой окрестности нуля. Она продолжает сильно меняться и при  $-1 < t < 0$ . Но уже при  $-2 < t < -1$  происходит стабилизация ее значений — с высокой точностью выход на ту же постоянную  $w_0$ .

Чтобы ситуация окончательно прояснилась, рассмотрим хейловское скалярное произведение [35]

$$w(t, \lambda) \dot{N}(t, \lambda)/\lambda N(t, \lambda) - \int_{t-1}^t N(s, \lambda) w(s+1, \lambda) ds \quad (2.15)$$

функций  $\dot{N}(t, \lambda)/\lambda N(t, \lambda)$  и  $w(t, \lambda)$ . Напомним, что на самом деле выражение (2.15) от  $t$  не зависит. Удобно взять, скажем,  $t = -2$ . Тогда из асимптотических свойств цикла  $N(t, \lambda)$  и решений  $w(t, \lambda)$  уравнения (2.14) вытекает, что выражение (2.15) стремится к  $w_0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Подведем очевидные итоги. При  $\lambda \rightarrow \infty$  единица является простым мультиликатором оператора монодромии уравнения (2.12). При этом его остальные мультиликаторы стремятся к нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** Построенный при доказательстве теоремы 2.1 оператор последовательного приближения  $\Pi$  имеет единственную неподвижную точку в  $S_0$ , соответствующий релаксационный цикл уравнения (2.1) которой орбитально экспоненциально устойчив.

Формально уравнение (2.1) не имеет предельного объекта при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Однако в совокупности теоремы 2.1 и 2.2 позволяют в качестве такового считать его релаксационный цикл. Поэтому можно провести параллель между уравнением (2.1) и уравнением Ван-дер-Поля с большим параметром из классической теории релаксационных колебаний [62].

**2.4.** Другой способ исследования уравнения в вариациях. Изложим иной прием анализа поведения решений уравнения (2.14) при  $t \rightarrow -\infty$ , который будет полезен в дальнейшем. Выполняя замену

$$w = w_1 \exp \lambda t, \quad (2.16)$$

перейдем от (2.14) к уравнению

$$\dot{w}_1 = -\lambda w_1 + \mu a(t, \lambda) w_1(t+1), \quad (2.17)$$

в котором

$$a(t, \lambda) = \lambda N(t, \lambda) \exp \lambda. \quad (2.18)$$

Кроме того, в (2.17) теперь фигурирует параметр  $0 < \mu < 1$ . Смысл его введения прояснится чуть ниже.

Будем считать, что в уравнении (2.17) функция  $a(t, \lambda)$  задается формулой (2.18) только при  $1 < t < T - 3$ , где  $T$  — период  $N(t, \lambda)$ . При  $T - 3 < t < T - 3 + \delta$ , где параметр  $\delta > 0$  произвольно мал, функцию  $a(t, \lambda)$  путем монотонного уменьшения изменим так, чтобы

$$a(T - 3 + \delta, \lambda) = a(1, \lambda),$$

а затем продолжим на всю числовую прямую по периодичности. Из малости  $a(t, \lambda)$  и содержащихся в [32, 47] результатов тогда следует, что при  $t \rightarrow -\infty$  для решений измененного уравнения (2.17) имеет место экспоненциальная дихотомия. Существенно, что нормы проекторов, ее осуществляющих, ограничены равномерно по  $\lambda$  и  $\mu$ . Вполне очевидно, далее, что при  $\mu = 0$

подпространство экспоненциально растущих при  $t \rightarrow -\infty$  решений уравнения (2.17) одномерно, а значит, таковым оно будет и при  $\mu = 1$ . Отсюда и из формулы (2.16) вытекает, что

$$\|U(1, T-2)w_1(t)\| \leq M_1 \exp(-\gamma_1 \exp \lambda) \|w_1(t)\|. \quad (2.19)$$

Здесь  $M_1, \gamma_1$  — универсальные положительные постоянные,  $U(t, \tau)$  — оператор Коши уравнения (2.14),  $w_1(t)$  принадлежит подходящему подпространству коразмерности один пространства  $C(T-3, T-2)$ . Интегрируя уравнение (2.14) шагами, убеждаемся, что

$$\|U(-2, 1)\| \leq M_2 \exp \gamma_2 \lambda, \quad (2.20)$$

где  $M_2, \gamma_2$  — положительные постоянные. Из сопоставления (2.19) с (2.20) выводим, что решения уравнения (2.14) с начальными условиями из упомянутого выше подпространства  $C(T-3, T-2)$  за время  $T$  становятся сверхэкспоненциально малыми. При этом, что очевидно, решения с начальными условиями из дополнительного одномерного подпространства — периодические решения уравнения (2.14).

**2.5. Стабилизирующая роль каннибализма.** Биологически — это ситуация, когда особи старшей возрастной группы поедают молодых. Тем самым в самом простом случае имеем дело с уравнением

$$\dot{N} = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1-N) - N(t-1)] N, \quad (2.21)$$

где положительный параметр  $a$  характеризует глубину каннибализма (за счет каннибализма размер популяции уменьшается в  $(1+a)$  раз). Линеаризуя уравнение (2.21) на его единичном состоянии равновесия, получаем

$$\dot{v} = -\frac{a\lambda}{1+a} v - \frac{\lambda}{1+a} v(t-1). \quad (2.22)$$

**Лемма 2.1.** Если  $a > 1$ , при любом  $\lambda$  решения уравнения (2.2) экспоненциально затухают. Если же  $a < 1$ , аналогичное имеет место только при

$$\lambda < \omega_0 \sqrt{(1+a)/(1-a)}, \quad \cos \omega_0 = -a, \quad \pi/2 < \omega_0 < \pi.$$

Достаточно тривиальное доказательство опускаем.

Итак, при  $a < 1$  с ростом  $\lambda$  единичное состояние равновесия уравнения (2.21) колебательным образом теряет устойчивость.

**Теорема 2.3.** Пусть

$$a < 1, \quad \lambda > \omega_0 \sqrt{(1+a)/(1-a)}. \quad (2.23)$$

Тогда уравнение (2.21) имеет такой цикл  $N(t, \lambda)$ , что

$$0 < N(t, \lambda) < (1+a)/a. \quad (2.24)$$

Для доказательства удобно в качестве фазового пространства уравнения (2.16) взять  $R \times L(-2, -1)$ . Рассмотрим в нем выпуклое замкнутое множество

$$S_0 = \{N(t) : 0 < N(t) < 1, \quad N(-1) = 1\}.$$

Так как все корни характеристического квазиполинома уравнения (2.22) комплексные, на  $S_0$  определен оператор последования  $\Pi$  по траекториям уравнения (2.21). Более того,  $\Pi S_0 \subset S_0$ , что вытекает из неосцилляции относительно единицы его решений. Рассмотрим, далее, корень  $\tau + i\sigma$  упомянутого квазиполинома с наибольшей действительной частью. Из равенств

$$\operatorname{tg} \sigma = -\frac{\sigma}{\tau + a\lambda/(1+a)}, \quad (\tau + \frac{a\lambda}{1+a})^2 + \sigma^2 = \frac{\lambda^2}{(1+a)^2} \exp(-2\tau)$$

следует, что

$$\pi/2 < \sigma < \pi.$$

Отсюда выводим, что при  $N(t) \in S_0$  и

$$\|1 - N(t)\| = \nu,$$

где постоянная  $\nu > 0$  достаточно мала, равномерно по рассматриваемым  $N(t)$  отрицателен интеграл

$$\int_{-2}^{-1} (1 - N(t)) \sin \sigma (t+1) \exp \tau (t+1) dt. \quad (2.25)$$

Но тогда неподвижная точка  $N(t) \equiv 1$  оператора  $\Pi$  в  $S_0$  обладает свойством отталкивания. Последнее означает следующее. Пусть  $N(t) \in S_0$  и

$$0 < \|1 - N(t)\| < \delta,$$

где постоянная  $\delta$  достаточно мала. Тогда найдется такое целое число  $m = m[N(t)]$ , что

$$\|1 - \Pi^m N(t)\| > \delta.$$

Поэтому [73] оператор  $\Pi$  имеет в  $S_0$  не равную тождественно единице неподвижную точку. Попутно прояснился вопрос с выбором фазового пространства: гарантируется нужная отрицательность интеграла (2.25).

Обращаем внимание, что с ростом  $\lambda$  и при начальных условиях из  $C(-2, -1)$ , удовлетворяющих ограничениям (2.2), уравнение (2.21) начинает работать как реле: основное время решения проводят либо в окрестности нуля, либо в окрестности  $(1+a)/a$ . В частности, на введенном в п. 2.1 множестве  $S_0$  определен оператор последования  $\Pi$ , преобразующий его в себя. Поэтому уравнение (2.21) при больших  $\lambda$  и  $a < 1$  имеет релаксационный цикл  $N(t, \lambda)$ , который, очевидно, удовлетворяет неравенствам (2.24), а его период близок к  $(1+a)/a$ . Вопросы о его асимптотике и устойчивости будут изучены в третьей главе.

### 3. Релаксационные колебания в билокальной модели уравнения Хатчинсона с диффузией

**3.1 Постановка задачи.** Уравнение (2.1), о чём сказано выше, при больших значениях  $\lambda$  описывает динамику изменения плотности сильно плодовитой популяции, обитающей в однородном ареале, когда пищевая база регулярно восстанавливается до некоторого фиксированного уровня, а миграционный фактор столь велик, что пространственные возмущения гаснут. Ровно при этих биологических посылках рассмотрим два ареала, соединенные относительно узким проходом. В результате приходим к системе

$$\dot{N}_1 = D(N_2 - N_1) + \lambda [1 - N_1(t-1)] N_1, \quad (3.1)$$

$$\dot{N}_2 = D(N_1 - N_2) + \lambda [-N_2(t-1)] N_2, \quad (3.2)$$

где коэффициент диффузии  $D$  характеризует глубину связи ареалов. Биологически очевидно, что при не слишком малых  $D$  колебания в системе (3.1), (3.2) синхронизированы, т. е. ее единственный атTRACTОР — постоянный в предыдущем разделе однородный цикл

$$(N(t, \lambda), N(t, \lambda)), \quad (3.3)$$

а при определенном уменьшении  $D$  колебания начинают десинхронизироваться. Наша цель — путем сочинения наглядных биологических представлений и ряда специальных математических построений детально разобраться с динамикой решений с положительными координатами систем (3.1), (3.2).

**3.2. Нейтральная кривая.** Линеарируем систему (3.1), (3.2) на однородном цикле (3.3) и рассмотрим проекцию

$$\dot{v} = -zv - \lambda N(t, \lambda) v(t-1) + \frac{\dot{N}(t, \lambda)}{N(t, \lambda)} v, \quad (3.4)$$

где  $z = 2D$ , на единственную пространственно неоднородную моду. В (3.4) выполним нормирующую замену (2.13) и перейдем к присоединенному уравнению

$$\dot{w} = zw + \lambda N(t, \lambda) w(t+1). \quad (3.5)$$

Как и в предыдущем разделе, возьмем в качестве его фазового пространства  $C(2, 3)$ . Удобно выполнить в (3.5) замену

$$w \rightarrow w \exp zt, \quad (3.6)$$

что приводит к уравнению

$$\dot{w} = \mu N(t, \lambda) w(t+1), \quad (3.7)$$

где  $\mu = \lambda \exp z$ . Из полученных ранее асимптотических формул  $N(t, \lambda)$  вытекает, что с экспоненциальной точностью решение  $w(t)$  уравнения (3.7) с произвольным начальным условием из  $C(2, 3)$  близко к  $w_0$  — значению начального условия при  $t = 2$  — вплоть до момента времени  $\delta = \ln 3\lambda/\lambda$ . Используя метод шагов, приведем формулу для определения  $w_{\text{вых}} = w(-3 + \delta)$ :

$$w_{\text{вых}} = w_0 \left[ 1 - \mu \int_{-3+\delta}^{\delta} N ds + \mu^2 \int_{-3+\delta}^{\delta} N \int_{s+1}^{\delta} N dt ds - \mu^3 \int_{-3+\delta}^{\delta} N \int_{s+1}^{\delta} N \int_{\sigma+1}^{\delta} N dt ds ds \right]. \quad (3.8)$$

Вычисляя асимптотически интервалы в (3.8), получаем

$$w_{\text{вых}} = w_0 [\lambda + \lambda z T + O(z + \lambda z^2 T + \lambda^3 \exp(-\lambda))]. \quad (3.9)$$

Снова ссылаясь на асимптотические свойства  $N(t, \lambda)$ , из уравнения (3.7) выводим, что с экспоненциальной точностью  $w(t) = w_{\text{вых}}$  при  $-T + 2 \leq t \leq -3 + \delta$ . Отсюда и из вида замены (3.6) получаем формулу

$$\nu = (w_{\text{вых}}/w_0) \exp(-zT) \quad (3.10)$$

для ведущего мультиликатора уравнения (3.5) (его остальные мультиликаторы стремятся к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Приравнивая  $\nu$  к единице, из формулы (3.10) находим

$$z_{\text{кр}} = \lambda [\ln(\lambda \ln \lambda) + O(\ln \ln \lambda / \ln \lambda)] \exp(-\lambda). \quad (3.11)$$

Тем самым пришли к следующему утверждению.

**Теорема 3.1.** При  $z < z_{\text{кр}}$  уравнения (3.5) появляются экспоненциально растущие решения.

Если  $\lambda = \pi/2 + \epsilon$ , где  $0 < \epsilon \ll 1$ , асимптотика нейтральной кривой уравнения (3.5) строится с помощью локальных методов [40]. Соединяя методы большого и малого параметров с численным интегрированием, в статье [12] построена нейтральная кривая при произвольных  $\lambda > \pi/2$ . Ее график показан на рис. 3.1.

**3.3. Предполагаемая динамика.** Назовем  $h$ -осцилляцией системы (3.1), (3.2) ее  $2h$ -периодический режим вида

$$(N_*(t, \lambda), N_*(t-h, \lambda)). \quad (3.12)$$

Как легко сообразить, система (3.1), (3.2) имеет  $h$ -осцилляцию в том и только том случае, если уравнение

$$\dot{N} = D [N(t-h) - N] + \lambda [1 - N(t-1)] N \quad (3.13)$$

имеет  $2h$ -периодическое решение  $N(t, \lambda)$ .

**Теорема 3.2.** Пусть в уравнении (3.13)  $D$  и  $h$  — произвольно фиксированные положительные числа. Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при каждом  $\lambda \geq \lambda_0$  уравнение (3.13) имеет  $h$ -релаксационный цикл, периода которого асимптотически близок к  $1+h$ .

Обоснование теоремы 3.2 относительно близко к доказательству теоремы 2.1, а потому опускается. Другая причина — в следующей главе подробно рассматривается доказательство близкого, но много более сложного результата.

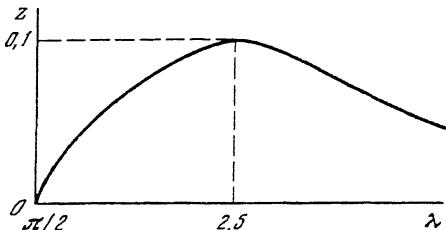


Рис. 3.1

(3.2) в режиме  $h$ -осцилляции выгодно с биологических позиций. Однако  $h$ -осцилляция (3.12) в условиях теоремы 3.2 неустойчива по Ляпунову. Дадим естественно-научное объяснение этому факту.

При значениях диффузии  $D$  порядка единицы реально имеем один ареал, условно разделенный на два. При этом однородный цикл (3.3) устойчив в соответствии с теоремой 3.1, а  $h$ -осцилляция (3.12) — по допущению. Тем самым получается, что без особых дополнительных усилий функционирование рассматриваемой экосистемы (для примера — одновидового ихтиоценоза) можно перевести в режим (3.12). Из свойств  $h$ -осцилляции вытекает, что без заметных потерь для популяции можно из нее в определенные моменты времени, длительность между которыми не более двух, изымать большое число особей. Приходим к своеобразному варианту биологического вечного двигателя.

Как оказывается,  $h$ -осцилляция системы (3.1), (3.2) сохраняется при любом уменьшении диффузии  $D$ . Но при этом ее среднее значение убывает, минимум колебаний углубляется, период растет.

Численный анализ системы (3.1), (3.2), выполненный при  $2 < \lambda < 6$ , т. е. при всех практически интенсивных значениях этого параметра, позволил сформулировать следующие положения.

При  $D > z_{kp}/2$  однородный цикл (3.3) — единственный аттрактор системы (3.1), (3.2). При  $z_{kp}/2 < D < D_*$  аттрактор состоит из двух пространственно неоднородных циклов ( $N_1(t, \lambda), N_2(t, \lambda)$ ) и ( $N_2(t, \lambda), N_1(t, \lambda)$ ), ответвляющихся от однородного при прохождении  $D$  через  $z_{kp}/2$ . А при прохождении  $D$  через  $D_*$ , где  $D_*$ , как функция от  $\lambda$ , сверхэкспоненциально мало, они влипают в  $h$ -осцилляцию, отдавая ей свою устойчивость, т. е. при  $D < D_*$  единственным аттрактором становится  $h$ -осцилляция. Далее существует такое  $D_* < D_{max} < z_{kp}/2$ , что при уменьшении  $D$  от  $z_{kp}/2$  до  $D_{max}$  период пространственно неоднородных циклов сокращается, а среднее значение растет. При уменьшении  $D$  от  $D_{max}$  до  $D$  их период начинает возрастать, а среднее значение уменьшается. Фаза колебаний пространственно неоднородных циклов при уменьшении  $D$  от  $z_{kp}/2$  до  $D$  монотонно растет.

Приведем ряд важных числовых характеристик. Отношение  $2D_{\max}/z_{kp}$  при  $2 < \lambda < 6$  монотонно убывает до 0,1. При диффузии, равной  $D_{\max}$ , период колебаний  $T_{\max}$  с увеличением  $\lambda$  от значений немногим больше трех уменьшается до значений немногим меньше трех, среднее значение периодической функции  $N_{cp} = 0,5 (N_1 + N_2)$  немногим больше величины  $(T_{\max})^{-1} \exp \lambda$ , наконец,  $\min N_{cp}$  больше 0,3.

В связи с изложенным становится ясно, что в практике ведения рыбного хозяйства разумно пруды соединять подходящим образом подобранными притоками — это существенно повысит продуктивность (хороший пример, когда информация прямо приводит к возрастанию материальных благ).

Теперь о математической причине, по которой затруднен строгий анализ динамики системы (3.1), (3.2). Можно показать, что при  $D > z_{kp}/2$  двумерное неустойчивое многообразие  $h$ -осцилляции одновременно является устойчивым многообразием однородного цикла. Это означает, что система (3.1), (3.2) имеет двумерный инвариантный тор, который экспоненциально устойчив с показателем экспоненты порядка  $\lambda$ . На самом же торе движения медленные, а значит, он сохраняется при любом уменьшении  $D$ . Таким образом, динамика системы (3.1), (3.2) — периодическая, но ее более подробное рассмотрение весьма осложняет указанное выше обстоятельство.

#### 4. Явление самоорганизации в одновидовом биоценозе

**4.1 Постановка задачи и эвристические соображения.** Термин «волны жизни» ввел в 1905 г. С. С. Четвериков, обративший внимание на роль в эволюции. Позднее отмечено было [72], что в ряде случаев в центральных частях ареала обитания колебания плотности заметно меньше. Этот любопытный феномен объяснялся тем, что условия жизни в центре ареала наиболее отвечают требованиям вида.

Ниже излагаются результаты численного анализа краевой задачи (1.12). В связи с этим несколько подробнее остановимся на биологическом смысле коэффициента диффузии  $D$ . Из (1.12) следует, что  $D$  имеет размерность  $\text{км}^2/\text{год}$ . Как уже отмечалось в первом разделе, разумно допущение, что  $D = D_0 \text{mes } S$ , где  $D_0$  — безразмерный коэффициент, а  $S \subset \Omega$  — область, которую отдельная особь «осваивает» в течение времени  $h$ . Близкий смысл коэффициенту диффузии  $D$  дан в работе [65], в которой предположено, что  $S$  — круг радиуса  $r$ , а  $D_0 = 1/4\pi$ .

Удобно считать, что область  $\Omega$  унифицирована, т. е.

$$\text{mes } \Omega = 1. \quad (4.1)$$

Выполнения этого равенства всегда можно достичь с помощью нормировок  $x_1 \rightarrow kx_1, x_2 \rightarrow kx_2$ . При этом  $D$  заменяется на  $k^{-2}D$ . Тем самым случай большого ареала обитания сводится к случаю, когда выполнено условие (4.1), но с небольшим коэффициентом диффузии. Таким образом, при условии (4.1) имеют биологический смысл любые значения коэффициента диффузии  $D$  в краевой задаче (1.12).

В дальнейшем считаем, что в краевой задаче (1.12) за единицу времени взято  $h$ . Это означает (см. начало п. 2.1), что в (1.12)  $h = 1$ , а вместо  $r$  стоит величина  $\lambda = rh$ .

Исходя в основном из биологических соображений, опишем мыслимые стационарные режимы краевой задачи (1.12) при условии (4.1).

Во-первых, соответственно допущение, что при уменьшении коэффициента диффузии  $D$  количество различных стационарных режимов краевой задачи (1.12) неограниченно возрастает, причем многие из них носят выраженный стохастический характер. Как первое, так и второе положения связаны с тем,

что с уменьшением  $D$  слабо синхронизируются колебания плотности локальных популяций, о чем уже кратко говорилось в п. 1.1.

Во-вторых, уже при докритических значениях  $D$ , т. е. при  $D > D_{kp}(\lambda)$ , когда еще устойчив однородный цикл, из уплотнения траекторий рождаются пространственно неоднородные режимы со сложной и одновременно хорошо упорядоченной пространственной и временной структурой. По поводу первой части этого положения нужно отметить, что в большинстве случаев пространственно однородный цикл теряет устойчивость жестко [21]. Однако более полным является чисто биологическое объяснение. С этой целью рассмотрим некоторый локальный ареал. Как следует из сказанного во втором разделе, даже при не очень больших  $\lambda > \pi/2$  однородный цикл имеет высокий всплеск на промежутке времени с примерно равной единице длительностью, после которого плотность становится малой относительно большое время. Поэтому в соответствующий временной промежуток наступает пищевое изобилие. Понятно, что в такие моменты времени в рассматриваемый локальный ареал могут мигрировать особи с соседних ареалов. Если все это происходит достаточно согласованно во всех локальных ареалах, то, с одной стороны, уменьшается биологический период колебаний (усредненное по локальным ареалам время от одного всплеска плотности до другого), а с другой стороны — увеличивается среднее значение плотности. Этот механизм, очевидно, может работать при не слишком больших  $D$ , но он никак не связан со значением  $D_{kp}(\lambda)$ . Ясно также, что эти стабилизирующие факторы по-разному проявляются в центре ареала обитания (из которого и в который удобно мигрировать) и на его периферии.

Именно описанные стационарные режимы краевой задачи (1.12) целесообразно назвать режимами самоорганизации. Совместно с ними, конечно, существуют пространственно неоднородные режимы хатчинсонского типа, биологический период которых близок к периоду однородного цикла, их средние значения близки к единице и интенсивны колебания плотности в каждом из локальных ареалов.

Естественно, что пространственные и временные эффекты стационарных режимов краевой задачи (1.12) должны проявляться тем ярче, чем выше плодовитость вида, т. е. больше приведенный малтузианский коэффициент линейного роста  $\lambda$ . Однако даже и при не слишком больших значениях  $\lambda$  возникают существенные затруднения при численном анализе краевой задачи (1.12). В основном это связано с тем, что с ростом  $\lambda$  уменьшаются те значения  $D$ , при которых наблюдаются интересующие нас феномены, а значит, пространственно неоднородные режимы становятся все более «мелковзернистыми». Последнее обстоятельство обязывает при численном интегрировании брать небольшие шаги по пространственным переменным, что приводит к значительному увеличению числа узлов сетки.

**4.2. Пространственно неоднородные режимы в квадрате.** Считаем, что в краевой задаче (1.12)  $\Omega$  — единичный квадрат. Покроем его равномерной сеткой с шагом  $H$  и обозначим через  $N_{k,m}(t)$  значения плотности  $N$  в узлах сетки. Апроксимируем краевую задачу (1.12) отображениями

$$N_{k,m}(t + \tau) = [N_{k,m}(t) + \tau D \Delta_H N_{k,t}(t)] \times \\ \times \exp \left[ \lambda \tau \left( 1 - \frac{N_{k,m}(t-1+\tau) + N_{k,m}(t-1)}{2} \right) \right], \\ k, m = 1, \dots, M-1, \quad t = 0, \tau, 2\tau, \dots, \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{0,k} &= N_{1,k}, & N_{M,k} &= N_{M-1,k}, & k &= 0, \dots, M, \\ N_{m,0} &= N_{m,1}, & N_{m,M} &= N_{m,M-1}, & m &= 0, \dots, M, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где  $M = 1/H$ , а  $\Delta_H$  – обычная разностная аппроксимация оператора Лапласа. Обращаем внимание, что отображения (4.2), (4.3) имеют тот же биологический смысл, что и краевая задача (1.12). В п. 1.1 частный случай (1.13), (1.14) отображений (4.2), (4.3) предлагается для наглядного объяснения процесса возникновения пространственно неоднородных структур в однородной среде.

В процессе вычислений полагалось  $H = 1/9$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $\lambda \ll 3$ , а коэффициент диффузии  $D$  менялся в широких пределах. Начальные условия для  $N_{k,m}(t)$  при  $-1 \leq t \leq 0$  брались в виде

$$N_{k,m}(t) = A_{k,m} \cos(\omega t + \alpha_{k,m}) + B_{k,m} \quad (4.4)$$

Сначала отметим свойства пространственно неоднородных стационарных режимов краевой задачи (1.12), которые выше были названы хатчинсоновскими. Оказалось, что они существуют только при послекритических значениях  $D$ . Опишем свойства двух из них.

Один из них, названный «волной, бегущей из угла в угол», при  $\lambda = 3$  и  $D = 0,035$  (это значение диффузии лишь чуть меньше критического) обладает следующей динамикой. Пик плотности, возникший в угле квадрата, довольно быстро приводит к подъему плотности во всем квадрате. При этом с течением времени пик плотности перемещается по диагонали в противоположный угол. Затем долго наблюдается низкая плотность, после чего ситуация примерно повторяется. Динамическое среднее здесь лишь немного больше единицы, а биологический период примерно равен 7,25, т. е. практически совпадает с хатчинсоновским. Подчеркиваем, что рассматриваемый стационарный режим заведомо не является периодическим, так как с течением времени «мера» пространственной неоднородности меняется существенно. Правдоподобно, что имеем дело с «классическим хаосом», связанным с возникновением гомоклинических структур.

При  $\lambda = 3$  и меньших значениях  $D$  возникают хатчинсоновские режимы совсем другого типа. Например, при  $D = 0,01$  наблюдается стационарный режим, который представляет собой волну, бегущую из центра квадрата к его боковым сторонам – так называемый ведущий центр. Его биологические характеристики, как и у предыдущего, не слишком хороши.

Перейдем к вопросу об эволюции хатчинсоновских режимов при уменьшении  $D$ . У каждого из них динамическое среднее  $M [N_{cp}(t)]$ , где

$$N_{cp}(t) = \iint_{\Omega} N(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.5)$$

монотонно возрастает при уменьшении  $D$ . Происходит также их сближение по своим свойствам, так как все они трансформируются в «диффузионный хаос», когда период колебаний заметно меняется при переходе от одного локального ареала к другому, что влечет достаточно произвольное изменение с течением времени высот пиков плотности.

При отыскании режимов самоорганизации постоянные в (4.4) выбирались из уже отмечавшегося выше биологического соображения: миграция всегда направлена в сторону локальных ареалов, в которых наблюдается пищевое изобилие. Это разумное соображение позволило при  $\lambda = 3$  обнаружить важный режим самоорганизации, названный «вихрем». Его эволюция при  $D = 0,035$  через промежутки времени, равные 0,25, показана на рис. 4.1. Обращаем внимание, что всплески плотности максимальны в углах (порядка 17,2–17,4, т. е. превосходят хатчинсоновские), из которых最难 migriровать. В четырех ближайших к центру узлах сетки плотность меняется от 0,6 до 3, т. е. наиболее благоприятные условия для жизни – в центре ареала. Функция (4.5) осциллирует с амплитудой порядка 0,15 в окрестности значения 2,9. Период этих осцилляций примерно равен 0,75, что связано с симметрией области.

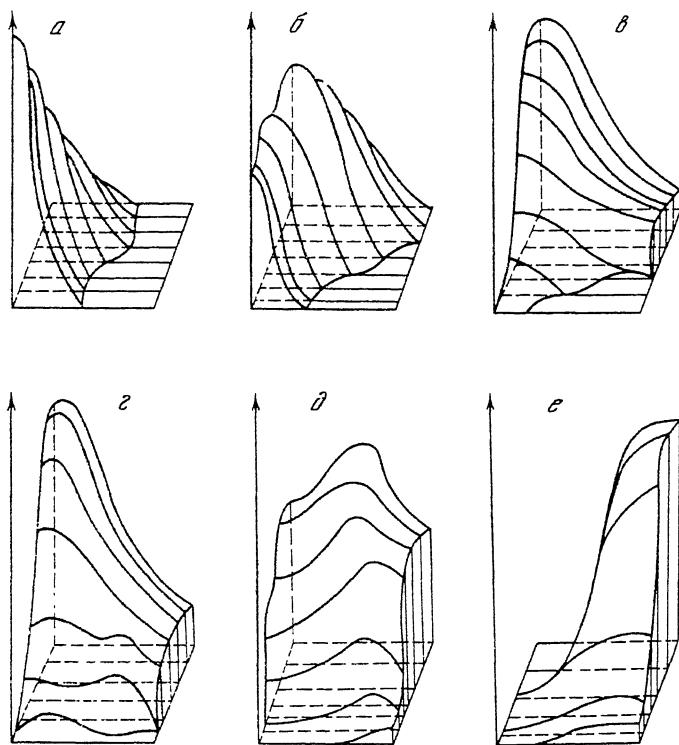


Рис. 4.1

Представляет интерес эволюция вихря при изменении коэффициента диффузии. Как оказывается, хорошо выраженная вихревая самоорганизация имеет место только при уменьшении  $D$  от 0,05 до 0,015.

Подчеркиваем, что тем самым при определенных  $D$  вихрь существует с устойчивым однородным циклом. Еще три важные закономерности, наблюдающиеся при уменьшении диффузии. Во-первых, при уменьшении  $D$  биологический период медленно растет. Например, при  $D = 0,05$  он равен 2,85, а при  $D = 0,015$  становится уже заметно больше, равняясь 3,25. Во-вторых, динамическое среднее  $M [N_{cp}(t)]$  убывает с уменьшением  $D$  (ситуация противоположная по сравнению с хатчинсоновскими режимами). Так, при

$$D = 0,05; 0,035; 0,025; 0,015$$

соответственно имеем

$$M [N_{cp}(t)] = 3,3; 2,9; 2,7; 2,5.$$

В-третьих, с уменьшением  $D$  пространственная и временная структура вихря становится все менее упорядоченной. Именно по этой причине возникают режимы самоорганизации совсем иного типа.

Опишем один из таких режимов, существующий при  $\lambda = 3$  только при послекритических значениях  $D$ , который назовем «табуреткой». При численном его отыскании квадрат делится на четыре равные части, в каждой из которых задавались начальные условия, соответствующие рассмотренному выше вихрю. Это означает, что табуретка — система из четырех согласованных вихрей. При  $D = 0,025$  ее временная разверстка представлена на рис. 4.2 через промежутки

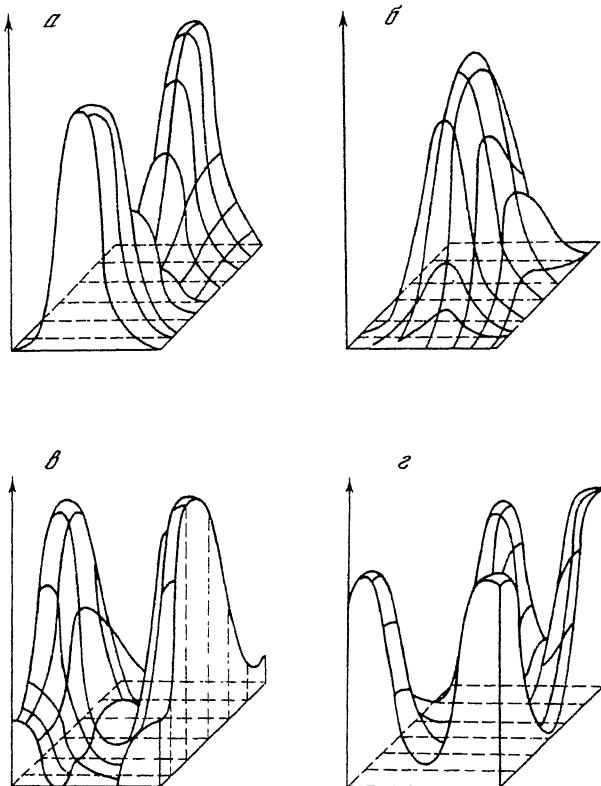


Рис. 4.2

времени, равные 0.5. Дополнительно отметим, что время, за которое процесс проходит все свои стадии, примерно равно 2.75; максимальная величина пиков плотности примерно равна 14; интегральная плотность  $N_{\text{ср}}(t)$  осциллирует около 3,4 с амплитудой порядка 0,2. Табуретка существует, качественно не меняясь, при уменьшении  $D$  от 0,03 до 0,01. Однако если  $M[N_{\text{ср}}(t)] = 3,4$  при  $D = 0,025$ , то уже  $M[N_{\text{ср}}(t)] = 3$  при  $D = 0,01$ . Тем самым наблюдается единообразная картина: как в случае вихря, так и в случае табуретки максимум времений и пространственной упорядоченности приходит на момент их возникновения, а при постепенном уменьшении  $D$  происходит плавное их «разрушение».

При значительном уменьшении  $D$  каждый из описанных выше двух типов режимов самоорганизации трансформируются в диффузионный хаос. При этом происходит их сближение с режимами хатчинсоновского типа, каждый из которых, напоминаем, также с уменьшением  $D$  переходит в аналогичный режим функционирования. Отметим, что при  $\lambda = 3$  в режиме диффузионного хаоса величина  $M[N_{\text{ср}}(t)]$  падает только до значения, близкого к 2, а биологический период остается меньше, чем 3.75.

Наконец, остановимся на динамике режимов самоорганизации, связанный с уменьшением  $\lambda$ . В полном соответствии с биологическим смыслом ухудшаются выделенные выше биологические характеристики. При этом уже при  $\lambda < 2$  режим самоорганизации типа вихря не наблюдается (табуретка исчезает раньше).

**4.3. Пространственно неоднородные режимы в треугольнике.** Чтобы выявить зависимость этих режимов от симметрии области, рассмотрим случай, когда  $\Omega$  — прямоугольный треугольник  $x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 / 2 \leq 1$ . Покроем его

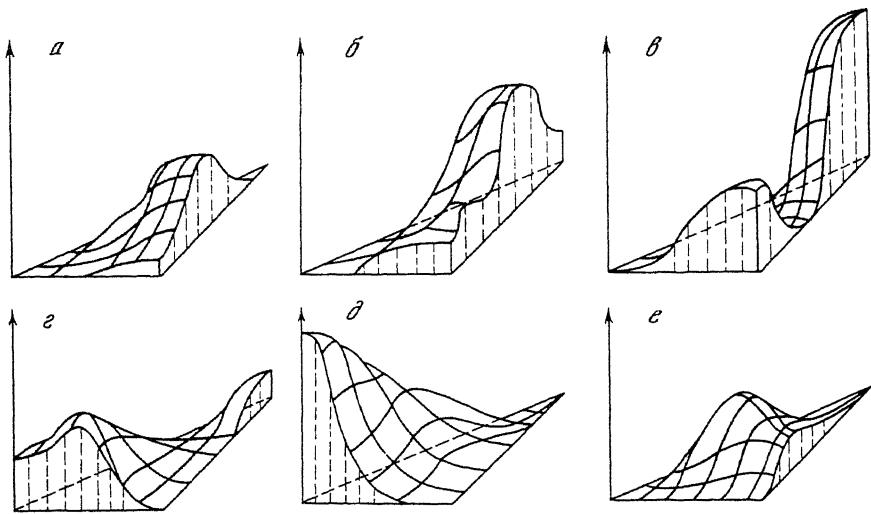


Рис. 4.3

сеткой с шагами  $H_{x_1} = H$  по  $x_1$  и  $H_{x_2} = 2H$  по  $x_2$ . В результате краевая задача (1.12) заменится отображениями (4.2), в которых теперь  $k + m \leq M - 1$ , где как и раньше,  $M = 1/H$ . Вместо (4.3) теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} N_{k, M-k-1} &= {}^4/{}_5 N_{k-1, M-k-1} + {}^1/{}_5 N_{k, M-k-2}, \\ k &= 2, \dots, M-3, \\ N_{1, M-2} &= N_{1, M-3}, \quad N_{M-2, 1} = N_{M-3, 2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{0, m} &= N_{1, m}, \quad m = 0, \dots, M-1, \\ N_{k, 0} &= N_{k, 1}, \quad k = 0, \dots, M-1. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь равенства (4.6) — аппроксимации граничных условий на гипотенузе, а (4.7) — на катетах. В процессе вычислений полагалось  $H = 0,1$ ,  $\tau = 0,01$ ,  $\lambda = 3$ , а начальные условия при  $-1 \leq t \leq 0$  задавались в соответствии с формулами (4.4).

Остановимся сначала на пространственно неоднородных режимах хатчинсонского типа. Они полностью соответствуют обнаруженным для квадрата: волны плотности, бегущие из одного острого угла треугольника в другой, и режимы типа ведущего центра. Их общие свойства такие же, что и в случае квадрата, причем при значительном уменьшении  $D$  каждый из них трансформируется в диффузионный хаос.

Как и в случае квадрата, уже при относительно больших  $D$  имеется режим самоорганизации вихревого типа. При  $D = 0,035$  его временная разверстка (через равные 0,5 промежутки времени) показана на рис. 4.3. Соответствующий этому вихрю график  $N_{cp}(t)$  приведен на рис. 4.4. Хорошо видно, что колебания  $N_{cp}(t)$  хотя и близки к периодическим, но таковыми не являются (в случае квадрата периодичность выражена сильнее).

Этот режим самоорганизации наблюдается в достаточно широком диапазоне изменения коэффициента диффузии, причем, как и в предыдущем пункте, с уменьшением  $D$  его биологический период растет, а динамическая средняя плотность  $M [N_{cp}(t)]$  уменьшается. Например, при  $D = 0,04$  биологический период близок к 2,9, а при  $D = 0,01$  — уже к 3,25. При этом  $M [N_{cp}(t)]$

уменьшается от 3 до 2.8. Следует подчеркнуть, что с уменьшением  $D$  меняется характер поведения волн плотности в углах треугольника. Во-первых, пики становятся меньше, что является общей закономерностью. Во-вторых, что специфично для треугольника, при прохождении прямого угла и острого, примыкающего к единичному катету, пики волн плотности раздваиваются: один из них «умирает» в угле, а другой движется дальше. При значительном уменьшении  $D$  вихрь перерождается в диффузионный хаос, общие свойства которого описаны в предыдущем пункте.

Итак, можно считать установленным, что как пространственно неоднородные режимы хатчинсоновского типа, так и режимы самоорганизации относительно слабо зависят от геометрии области.

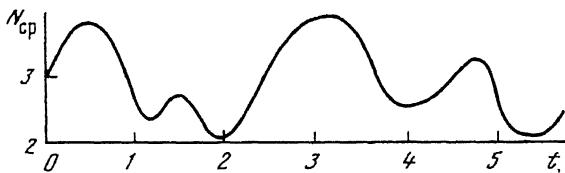


Рис. 4.4

**4.4. Ряд замечаний.** Суммируя предыдущие результаты, можно утверждать, что при больших значениях  $\lambda$  пространственно неоднородные режимы краевой задачи (1.12) распадаются на два сильно различающихся класса — режимы хатчинсоновского типа и режимы самоорганизации. Только при значительном уменьшении коэффициента диффузии представители стационарных режимов этих двух типов сближаются по своим свойствам, переходя в диффузионный хаос. Подчеркнем, что речь идет именно об индивидуальных стационарных режимах, так как при любом уменьшении  $D$  возникают все более мелко-зернистые режимы самоорганизации с прекрасными биологическими характеристиками (ср. построенные выше вихрь и табуретку).

Полученные результаты объясняют, в частности, относительно небольшой период колебаний плотности мышевидных в природе, что связано, как нам представляется, с процессами самоорганизации.

С новых позиций остановимся на вопросе о характере периодических режимов системы (3.1), (3.2). Сопоставляя сказанное в п. 3.3. и в данном разделе, приходим к выводу, что при  $D > D_{\max}$  пространственно неоднородные циклы системы (3.1), (3.2) следует считать хатчинсоновскими. Если же  $D < D_{\max}$ , циклы системы (3.1), (3.2) нет аналога среди стационарных режимов краевой задачи (1.12), т. е. при указанных  $D$  они специфичны для описанной в п. 3.1 биологической ситуации.

Если при оговоренных в п. 3.1 биологических посылках рассмотреть три или большее число ареалов, соединенных относительно узкими проходами, то сохраняется [41] в общем виде сделанное в предыдущем обзете заключение о хатчинсоновском характере стационарных колебаний при  $D > D_{\max}$  (докритические колебания при больших значениях  $\lambda$  не наблюдается). Правда, теряется свойство периодичности пространственно неоднородных режимов соответствующей системы дифференциально-разностных уравнений. Но зато становится стабильнее оптимальное значение  $M [N_{\text{ср}}(t)]$ , которое меньше меняется при отклонении  $D$  от  $D_{\max}$ .

Безусловно, вопрос о динамике решений краевой задачи (1.12) при больших значениях  $\lambda$  следует отнести к теории релаксационных колебаний. Однако возникающие аналитические затруднения столь велики, что выше мы огра-

ничились описанием результатов численного интегрирования, которые, по нашему мнению, достаточно полны. Связано это с тем, что значение  $\lambda = 3$ , а тем более  $\lambda = 6$ , это весьма не малые числа, т. е. полученные при этих значениях результаты с большой достоверностью экстраполируются на большие  $\lambda$ .

**4.5. Об одном из возможных механизмов видеообразования.** Процесс видеообразования — наиболее сложный и запутанный вопрос эволюционной теории. Условно можно говорить, что к настоящему времени выработаны две крайние точки зрения на эту проблему. Ряд исследователей считает, что образование новых видов главным образом идет за счет внутренних факторов — это сторонники так называемого симпатрического видеообразования [19]. Другие же видят главную причину в географической изоляции [56]. Промежуточная точка зрения изложена в [70], где подчеркнута важная роль экологических факторов в механизме видеообразования. Излагаемый ниже подход ближе всего именно к этой точке зрения.

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений с диффузией

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = D \Delta N_1 + \frac{\lambda}{1+a} \left[ 1 + a(1 - N_2) - N_1(t-1, x) \right] N_1, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = D \Delta N_2 + \frac{\lambda}{1+a} \left[ 1 + a(1 - N_1) - N_2(t-1, x) \right] N_2, \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial N_1}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial N_2}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (4.10)$$

которая моделирует конкурентную борьбу двух очень близких видов, что отражает равенство коэффициентов диффузии, мальтузианских коэффициентов линейного роста и параметров, характеризующих интенсивность конкурентной борьбы.

Выше было показано, что при не малых  $\lambda$  и небольших  $D$  в краевой задаче (1.12) возникают сложные пространственно неоднородные режимы. Тем самым открывается возможность для реализации следующей ситуации: две локальные популяции, представляющие из себя две разделенные во времени популяционные волны, при столкновении в какой-то момент времени могут вступить в конкурентную борьбу, что математически приводит к замене краевой задачи (1.12) на систему (4.8)–(4.10). Чтобы все лучше прояснилось, остановимся кратко на свойствах стационарных режимов краевой задачи (4.8)–(4.10). У нее возможны, например, режимы самоорганизации, когда два вида следуют один за другим, а также более специфические. Существенно, что на наиболее выгодных стационарных режимах динамическое среднее

$$0,5M[N_{1cp}(t) + N_{2cp}(t)] \quad (4.11)$$

заметно больше, чем в случае краевой задачи (1.12).

Итак, получается, что достаточно плодовитой популяции выгодно разделиться по крайней мере на две части — это приводит к повышению стабильности экосистемы, одной из мер которой разумно считать величину (4.11).

## 5. Динамика взаимодействия хищника со своей сильно плодовитой жертвой

**5.1. Постановка задачи.** В соответствии с изложенным в п. 1.2 для моделирования взаимодействующих популяций хищника и жертвы имеем систему дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{N}_1 = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_2) - N_1(t-1)] N_1, \quad (5.1)$$

$$\dot{N}_2 = r [N_1 - N_2(t-h)] N_2. \quad (5.2)$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  — соответственно плотности популяций жертвы и хищника; положительный параметр  $a$  — коэффициент давления хищника на жертву, что приводит к сокращению размера популяции жертвы в  $(1+a)$  раз;  $h$  — время, за которое происходит смена поколений в популяции хищника (за единицу времени принята соответствующая характеристика жертвы), а  $r$  — его коэффициент линейного роста; наконец,  $\lambda$  — малтизузианский коэффициент линейного роста жертвы, предполагаемый в дальнейшем большим. Как и в разд. 2, последнее означает, что жертва сильно плодовита.

Если  $N_2 \equiv 0$ , т. е. хищник отсутствует, выполняя в (5.1) нормирующую замену  $N_1 \rightarrow (1+a) N$ , приходим к уравнению Хатчинсона (2.1), свойства релаксационного цикла которого описаны во втором разделе.

Примем следующее определение. Периодический режим системы (5.1), (5.2) с положительными компонентами  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  назовем  $k$ -циклом,  $k=0, 1, \dots$ , если  $N_1(t)$  изменяется по хатчинсоновскому закону в том смысле, что у этой компоненты аналогичные порядки отмеченных в п. 2.2 числовых характеристик цикла уравнения (2.1). Относительно компоненты  $N_2(t)$  предполагаем, что на промежутках времени ровно в  $(k+1)$  раз больше периода имеет один всплеск, когда  $N_2(t) \geq 1$ , с близкой к  $h$  продолжительностью, а его высота по порядку равна  $\lambda^{-1} \exp \lambda$ . Квалифицированно между всплесками значения  $N_2(t)$  сверхэкспоненциально малы.

На первый взгляд, представляется правдоподобным, что  $k$ -циклы — естественные аттракторы системы (5.1), (5.2). Однако еще в 1980 г. второй автор высказал гипотезу, что при больших значениях  $\lambda$  для рассматриваемой системы характерны хаотические колебания. В ее основе лежит простое биологическое соображение: следствием сильной неустойчивости пищевой базы хищника должно быть нерегулярное изменение его плотности, а значит, и плотности жертвы. Ниже показывается, что на самом деле ситуация много сложнее и запутаннее. Именно, как оказывается, это биологическое положение работает при больших, но не чрезмерно, значениях параметра  $\lambda$ . В пределе же происходит вырождение странного аттрактора. Данные факты представляют общетеоретический интерес.

**5.2. Основные положения С-теории.** Изложение начнем с простейшего случая — условий существования 0-циклов. Из самого их определения вытекает, что подлежат рассмотрению решения системы (5.1), (5.2) со следующими положительными начальными условиями.

Так как  $N_2(t)$  сверхэкспоненциально мало время порядка  $\lambda^{-1} \exp \lambda$ , то в силу изложенного в разделе 2 в конце этого временного промежутка  $N_1(t)$  с высокой точностью меняется по хатчинсоновскому закону. Тем самым можно считать, что при  $-2 < t < -1$

$$N_1(t) = N(t, \lambda), \quad (5.3)$$

где

$$N(t, \lambda) = b \exp [\lambda(t+1) - \frac{b}{1+a} (\exp \lambda t - \exp(-\lambda)) + O(\exp(-2\lambda))],$$

а  $b$  — положительная постоянная, роль которой прояснится позднее.

Теперь о начальных условиях второй координаты решений системы (5.1), (5.2). Будем считать, что при  $-1-h < t < -1$  функции  $N_2(t)$  монотонно возрастают, причем

$$\underline{N}_2 \leq N_2(-1) \leq \bar{N}_2, \quad (5.4)$$

где

$$\underline{N}_2 = \exp [-\lambda^{-1} (B + \gamma_1) \exp \lambda], \quad (5.5)$$

$$\bar{N}_2 = \exp [-\lambda^{-1} (B + \gamma_2) \exp \lambda], \quad (5.6)$$

$$B = r(1+a) [1 - \exp(-b/(1+a))], \quad (5.7)$$

а  $\gamma_1 > \gamma_2$  — положительные постоянные, которые в дальнейшем выбираются подходящим образом.

Чтобы облегчить восприятие излагаемого ниже материала, несколько огрубляя, опишем общий характер поведения решений системы (5.1), (5.2) с такими начальными условиями. При  $-1 < t < 0$  хатчинсоновский характер изменения  $N_1(t)$  сохраняется, что следует из формул (5.7) и (5.5), (5.6). На самом деле он сохраняется до такого асимптотически малого положительного момента времени (в дальнейшем будет показано, что он имеет порядок  $\lambda^{-1}$ ), при котором вторая компонента решения  $N_2(t)$  становится порядка единицы. Начиная с этого момента времени переменные в системе (5.1), (5.2) начинают сильно взаимодействовать. Однако, что имеет существенное значение, этот временной промежуток экспоненциально мал. Но именно за столь малое время  $N_2(t)$  становится величиной порядка  $\lambda^{-1} \exp \lambda$ , а  $N_1(t)$  от экспоненциально больших значений уменьшается до величин порядка единицы. При дальнейшем росте  $t$  значения  $N_1(t)$  становятся сверхэкспоненциально малыми, а  $N_2(t)$  за время порядка  $h$  почти не меняется. При  $t > h$  значения  $N_2(t)$  также становятся сверхэкспоненциально малыми. При указанных  $t$  различие между  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  проявляется в следующем. Переменная  $N_1(t)$  начинает изменяться в хорошем соответствии с хатчинсоновским законом, а переменная  $N_2(t)$  практически не меняется вплоть до очередного всплеска плотности жертвы.

Положим

$$\gamma = -\lambda \exp(-\lambda) \cdot \ln N_2(-1) - B \quad (5.8)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$F(\gamma) = r\lambda \int_0^{t_1} N_1(s) ds \cdot \exp(-\lambda), \quad (5.9)$$

где  $t_1$  — такой асимптотически малый момент времени, что

$$N_1(t_1) = 1. \quad (5.10)$$

**Лемма 5.1.** Пусть квалифицированно

$$\gamma > r(1+a) \exp(-b/(1+a)). \quad (5.11)$$

Тогда

$$F(\gamma) = r(1+a) \exp(-b/(1+a)) + o(1). \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Из неравенства (5.4) и формул (5.5)–(5.8) вытекает, что при условии (5.11) плотность хищника остается сверхэкспоненциально малой и при  $0 < t < t_1$ . Отсюда и из формулы (5.9) делаем вывод о справедливости асимптотического равенства (5.12).

**Лемма 5.2.** Пусть квалифицированно

$$0 < \gamma < r(1+a) \exp(-b/(1+a)). \quad (5.13)$$

Тогда

$$F(\gamma) = \gamma + o(1). \quad (5.14)$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$J(t) = \frac{a\lambda}{1+a} \int_0^t N_2(s) ds. \quad (5.15)$$

Из уравнения (5.1) и равенства (5.10) вытекает, что с высокой точностью

$$J(t_1) = \ln N(t_1, \lambda). \quad (5.16)$$

Максимизируя правую часть формулы (5.16) по  $t_1$ , убеждаемся, что

$$J(t_1) \leq \lambda. \quad (5.17)$$

Из уравнения (5.2) следует, что при  $0 \leq t \leq t_1$

$$\dot{N}_2 \leq rN_1(t)N_2(t). \quad (5.18)$$

Далее, согласно уравнению (5.1) и формуле (5.3)

$$N_1(t) \leq (1+a) \exp \lambda, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (5.19)$$

Опираясь на неравенства (5.17) и (5.19), из дифференциального неравенства (5.18) выводим, что

$$N_2(t_1) \leq \frac{2r(1+a)^2}{a} \exp \lambda. \quad (5.20)$$

Приступим к доказательству асимптотического равенства (5.14). Сначала предположим, что при некотором  $\gamma$ , удовлетворяющем неравенствам (5.13), квалифицированно

$$F(\gamma) > \gamma. \quad (5.21)$$

Из очевидных свойств системы (5.1), (5.2) получаем, что в момент времени  $t_1$  сверхпотенциально велика плотность хищника. Это противоречит оценке (5.20), т. е. неравенство (5.21) невозможно. Остается рассмотреть случай, когда квалифицировано

$$F(\gamma) < \gamma. \quad (5.22)$$

При условии (5.22) плотность хищника сверхэкспоненциально мала и при  $0 \leq t \leq t_1$ . Но тогда справедливо асимптотическое равенство (5.12). Сопоставляя его с неравенством (5.22) и правым неравенством (5.13), убеждаемся, что получено противоречие. Доказательство закончено.

Предположим, что в условиях леммы 5.2 величина  $N_2(t_1)$  асимптотически мала. Из уравнения (5.10) тогда следует, что справедливо асимптотическое равенство (5.12). Вступаем в противоречие с правым неравенством (5.13).

Итак, при условиях (5.13) величина  $N_2(t_1)$  заведомо не мала. По техническим причинам удобно считать, что  $N_2(t_1) \geq 1$ . Подчеркнем еще раз, что выбор единицы обусловлен соображениями удобства.

Обозначим через  $t_0$  такой момент времени, что

$$N_2(t_0) = 1, \quad 0 < t_0 \leq t_1. \quad (5.23)$$

**Лемма 5.3.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$t_0 = \left\{ \ln \left[ 1 - \frac{1+a}{b} \ln (1-y) \right] + o(1) \right\} / \lambda, \quad (5.24)$$

где

$$y = \gamma / [r(1+a) \exp(-b/(1+a))]. \quad (5.25)$$

**Доказательство.** Заметим, что  $t_0$  — момент времени сверхэкспоненциального роста  $N_2(t)$ . Поэтому интеграл от  $N_2(t)$  по промежутку  $0 \leq t \leq t_0$

экспоненциально мал. Тем самым для указанных  $t$  сохраняется в главном формула (5.3). Существенно также, что в силу неравенства (5.20) интеграл от  $N_1(t)$  по промежутку  $t_0 \leq t \leq t_1$  по порядку не превосходит  $\lambda$ . Поэтому для отыскания  $t_0$  можно воспользоваться формулой (5.9) и асимптотическим равенством (5.14). На этом пути приходим к формуле (5.24).

Положим

$$x(t) = \int_{t_0}^t N_1(s) ds. \quad (5.26)$$

Из очевидных свойств системы (5.1), (5.2) следует, что со сверхэкспоненциальной точностью

$$\frac{\ddot{x}}{x} = \lambda \left[ 1 - \frac{N_1(t-1)}{1+a} \right] - \frac{a\lambda}{1+a} \exp rx. \quad (5.27)$$

Путем умножения на  $\dot{x}$  и последующего интегрирования перейдем от уравнения (5.27) к интегродифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t_0) + \lambda \left[ 1 - \frac{N_1(t-1)}{1+a} \right] x + \frac{\lambda}{1+a} \int_{t_0}^t \dot{N}_1(s-1) x(s) ds + \\ &\quad + \frac{a\lambda}{r(1+a)} (1 - \exp rx). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Вместо (5.28) сначала рассмотрим существенно более простое уравнение

$$\dot{x} = \dot{x}(t_0) [1 - \exp r(x - \tilde{x})], \quad (5.29)$$

где

$$\tilde{x} = \frac{\lambda}{r} - \frac{\ln \lambda}{r} + \frac{\ln A}{r}, \quad A = \frac{r(1+a)}{a} N_1(t_0) \exp(-\lambda). \quad (5.30)$$

Будем временно работать с модельным уравнением (5.29) как с точным.

Из (5.29) и (5.30) выводим, что

$$J(t_1) = J(t_0) + r [\dot{x}(t_0)(t_1 - t_0) - x(t_1)]. \quad (5.31)$$

Согласно уравнению (5.2)

$$J(t_0) = [1 + o(1)] \frac{a\lambda}{r(1+a) N_1(t_0)}, \quad (5.32)$$

откуда в силу (5.10), (5.29)–(5.31) следует, что

$$t_1 - t_0 = \frac{2\lambda - \ln \lambda}{r N_1(t_0)} + O(\exp(-\lambda)). \quad (5.33)$$

**Лемма 5.4.** Пусть  $x(t)$ ,  $x(t_0) = 0$  – решение интегродифференциального уравнения (5.28). Тогда для величины  $t_1 - t_0$  справедливо асимптотическое равенство (5.33), а

$$x(t_1) = \tilde{x} + O(\lambda^2 \exp(-\lambda)). \quad (5.34)$$

Не будем останавливаться на достаточно простом обосновании, базирующимся на анализе уравнения для разности соответствующих решений уравнений (5.28) и (5.29).

Из формулы (5.34) вытекает важное для дальнейшего асимптотическое равенство

$$N_2(t_1) = [1 + o(1)] \lambda^{-1} A_{np} \exp \lambda, \quad (5.35)$$

где в соответствии с (5.24) и (5.25)

$$A_{np} = \frac{r(1+a)}{a} (1-y) [b - (1+a) \ln(1-y)] \exp\left(-\frac{b}{1+a}\right). \quad (5.36)$$

При  $t \geq 3h$  из уравнений (5.1), (5.2) выводим, что справедлива приближенная формула

$$N_2(t) = N_2(t_1) \exp[-rhN_2(t_1)], \quad (5.37)$$

сохраняющаяся вплоть до очередного всплеска плотности жертвы.

Из формул (5.35)–(5.37) вытекает, что в вопросе о существовании 0-циклов существенную роль должно играть отображение

$$y \rightarrow F(y), \quad (5.38)$$

где

$$F(y) = 1 - \exp \frac{b}{1+a} + rh \frac{b}{a} (1-y) - \Delta (1-y) \ln (1-y),$$

а

$$\Delta = rh(1+a)/a. \quad (5.39)$$

Отметим, что при помощи замены

$$z = (1-y) \exp(-b/(1+a)) \quad (5.40)$$

отображение (5.38) преобразуется к очень простому виду

$$z \rightarrow 1 + \Delta z \ln z. \quad (5.41)$$

В соответствии с (5.25) и (5.40) в (5.41)

$$0 < z < \exp(-b/(1+a)). \quad (5.42)$$

Пусть

$$1 < \Delta < e. \quad (5.43)$$

Из структуры отображения (5.41) тогда следует, что при подходящей малости  $b$  оно некоторый отрезок

$$0 < z_1 \leq z \leq z_2 < 1 \quad (5.44)$$

преобразует квалифицированно в себя. Тем самым можно ожидать, что при условии (5.43) система (5.1), (5.2) имеет 0-цикл.

Обозначим через  $S_1$  множество таких непрерывных функций вида (5.3), что остаток в формуле для  $N(t, \lambda)$  оценивается по модулю через  $M_1 \exp(-2\lambda)$ , где положительная постоянная  $M_1$  подходящим образом велика. Через  $S_2$  обозначим множество монотонно возрастающих при  $-1-h < t < -1$  непрерывных функций, для которых при  $t = -1$  выполнены неравенства (5.4), причем фигурирующие в формулах (5.5), (5.6) постоянные  $y_1, y_2$  при пересчете с помощью равенства (5.25) переходят в такие постоянные  $y_1, y_2$ , где  $0 < y_2 < y_1 < 1$ , что отображение (5.38) отрезок  $[y_2, y_1]$  преобразует квалифицированно в себя.

Имеет место следующее утверждение, непосредственно вытекающее из проделанных построений.

**Теорема 5.1.** Пусть выполнены неравенства (5.43). Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  на

замкнутом выпуклом множестве  $S_1 \times S_2$  в  $C(-2, -1) \times C(-1-h, -1)$  определен оператор последований по траекториям системы (5.1), (5.2), преобразующий данное множество в себя.

При доказательстве  $C^1$ -теоремы нам потребуется более тонкая связь не-подвижной точки  $y_0$  отображения (5.38) со свойствами цикла, существующего в условиях теоремы 5.1. Начнем со случая, когда  $y_0$  экспоненциально устойчиво, а таковым оно будем только при

$$1 < \Delta < 2,25 \dots \quad (5.45)$$

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены неравенства (5.45). Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  оператор последований по траекториям системы (5.1), (5.2) преобразует в себя выпуклое замкнутое множество  $S_1 \times S_2$  из теоремы 5.1. Только теперь фигурирующие в определении  $S_2$  постоянные  $y_1, y_2$  таковы, что

$$y_1 = y_0 + \delta(\lambda), \quad y_2 = y_0 - \delta(\lambda), \quad (5.46)$$

где положительная функция  $\delta(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Теорема 5.3.** Пусть

$$2,25 \dots < \Delta < \infty. \quad (5.47)$$

Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  на множестве  $S_1 \times S_2$  из теоремы 5.2 определен оператор последований по траекториям системы (5.1), (5.2), который по переменной  $N_1$  сжимает, а по переменной  $N_2$  растягивает.

Доказательства этих утверждений также следуют из уже проделанных ранее построений.

Если отображение (5.41) имеет экспоненциально устойчивый или экспоненциально неустойчивый цикл

$$z_1, \dots, z_m, \quad (5.48)$$

теоремы 5.2 и 5.3 без труда модифицируются применительно к этой ситуации.

Вернемся к неравенствам (5.43), чтобы лучше прояснилась их роль.

При  $\Delta < 1$  у отображения (5.41) экспоненциально устойчиво состояние равновесия  $z = 1$ , а значит, в соответствии с неравенствами (5.42) при любом уменьшении  $b$  выходим за границу применимости теорем 5.1 и 5.2. Ситуацию, возникающую при убывании и прохождении  $\Delta$  через единицу, хорошо объясняет отображение (5.38). Несложно усмотреть, что при

$$\Delta = \Delta(b) = \left( \exp \frac{b}{1+a} - 1 \right) / \frac{b}{1+a}$$

экспоненциально устойчиво его нулевое состояние равновесия. При

$$1 < \Delta < \Delta(b)$$

функция  $F(y)$  отрицательна при небольших значениях  $y$ . Существенно, что при указанных  $\Delta$  каждая траектория отображения (5.38) с произвольным начальным условием  $0 < y < 1, F(y) > 0$ , сваливается к отрицательным значениям  $y$ . Это означает, что происходит переход к стационарным режимам, биологически более выгодным для рассматриваемой экосистемы.

Обратимся теперь к случаю  $\Delta > e$ . Для определенности будем считать, что

$$e < \Delta < 2e. \quad (5.49)$$

При условии (5.49) фундаментальным является следующее обстоятельство: почти каждая траектория отображения (5.38) с таким начальным условием  $y$ , что  $0 < F(y) < 1$ , сваливается к значениям  $y$ , при которых  $F(y) > 1$ . В силу

(5.49) при небольших значениях  $b$  необременительно допущение, что на самом деле

$$\exp\left(\frac{b}{1+a}\right) < F(y) < 1 + \exp\left(\frac{b}{1+a}\right). \quad (5.50)$$

Неравенства (5.50) проясняют ситуацию. Действительно, пусть заданная на входе величина  $\tilde{y}$  удовлетворяет неравенствам (5.50). Тогда при рассмотрении следующего всплеска плотности жертвы (в силу (5.50) на первый всплеск плотности жертвы хищник практически не реагирует) роль  $\tilde{y}$  будет выполнять величина

$$y = \tilde{y} - \exp\left(\frac{b}{1+a}\right). \quad (5.51)$$

Равенство (5.51) учтем в отображении  $\tilde{y} \rightarrow F(\tilde{y})$ , в котором затем выполним замену (5.40). В итоге получим отображение

$$z \rightarrow 2 + \Delta z \ln z,$$

которое работает при  $z < z < \bar{z}$ , где  $z$  и  $\bar{z}$  — корни уравнения

$$z \ln z = -1/\Delta$$

Тем самым при условии (5.49) за динамику отвечает отображение

$$z \rightarrow \Phi_1(z), \quad (5.52)$$

где

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} 1 + \Delta z \ln z, & z \in [z, \bar{z}], \\ 2 + \Delta z \ln z, & z \in [\bar{z}, z]. \end{cases}$$

Отображение (5.52) позволяет относительно просто разобраться с вопросом о существовании 1-циклов. Циклы с большими индексами наша конструкция позволяет обнаружить только при  $\Delta > 2e$ . При этом возникает аналогичное (5.52), но более сложно устроенное отображение  $z \rightarrow \Phi_k(z)$ , зависящее от номера  $k$ -цикла. Способ его построения ясен, а значит, подробнее на этом останавливаться нет смысла.

**5.3. Доказательство  $C^1$ -теоремы.** Линеаризуем систему (5.1), (5.2) на 0-цикле, о котором идет речь в теоремах 5.2 или 5.3, а затем выполним аналогичные (2.13) нормирующие замены. В итоге придем к линейной системе

$$\dot{v} = -\frac{\lambda}{1+a} N_1(t-1) v(t-1) - \frac{a\lambda}{1+a} N_2(t) w, \quad (5.53)$$

$$\dot{w} = rN_1(t) v - rN_2(t-h) w(t-h). \quad (5.54)$$

Рассуждая, как и в п. 2.4 (правда, аналогичная (2.20) оценка получается чуть сложнее: ее вывод базируется на лемме об интегральных неравенствах в системах с запаздыванием, простейший вариант которой, например, приведен в [34, 50]), убеждаемся, что при возрастании времени решения системы (5.53), (5.54) за относительно короткое время сваливаются к двумерному семейству. В алгоритмическом плане это означает следующее (ср. с изложенным в п. 2.3). Пусть

$$v(t) \in C(-2, -1), \quad w(t) \in C(-1-h, -1).$$

Тогда уже при  $t=3h$  со сверхэкспоненциальной точностью разрешающий оператор Коши системы (5.53), (5.54) аппроксимируется двумерной матрицей, применяемой к вектору  $(v_0, w_0)$ , где  $v_0, w_0$  — значения начальных условий

при  $t = -1$ . Еще одно упрощающее обстоятельство. Система (5.53), (5.54) имеет периодическое решение с координатами

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\dot{N}_2(t)}{N_2(t)}. \quad (5.55)$$

При  $t = -1$  для величин (5.55) с высокой точностью имеем  $v_0 = 1$ ,  $w_0 = 0$ . Со сверхэкспоненциальной точностью тот же вектор  $(1, 0)$  получается и при  $t = -3h$ . Поэтому интересующая нас матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1(\lambda) \\ 0 & b_2(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Из (5.56) следует, что проблема сводится к асимптотическому интегрированию системы (5.53), (5.54) при начальных условиях

$$v(t) \equiv 0, \quad w(t) \equiv 1, \quad t \leq -1. \quad (5.57)$$

Достаточно ясно, что при  $-1 \leq t \leq t_0$  второе тождество (5.57) выполняется с высокой точностью. Отсюда следует, что для  $\dot{w}(t_0)$  в соответствии с (5.53), (5.54) имеем формулу:

$$\dot{w}(t_0) = - \frac{ar\lambda}{1+a} N_1(t_0) \int_0^{t_0} N_2(s) ds. \quad (5.58)$$

Из (5.15), (5.32) и (5.58) выводим, что

$$\dot{w}(t_0) = - [1 + o(1)] a\lambda / (1 + a). \quad (5.59)$$

Поэтому при  $t_0 \leq t \leq t_1$  изучению подлежит следующая задача Коши:

$$\ddot{w} - \frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)} \dot{w} + \frac{ar\lambda}{1+a} N_1(t) N_2(t) w = 0, \quad (5.60)$$

$$w(t_0) = 1, \quad \dot{w}(t_0) = -a\lambda / (1 + a). \quad (5.61)$$

Из уравнения (5.2) имеем, что на нужном нам временному отрезке со сверхэкспоненциальной точностью

$$\dot{N}_2 = rN_1(t) N_2(t). \quad (5.62)$$

С учетом равенств (5.61) и (5.62) проинтегрируем уравнение (5.60) по отрезку  $[t_0, t]$  и результат запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{w} = \lambda & \left[ -\frac{a}{1+a} N_2(t) + 1 - \frac{N_1(t-1)}{1+a} \right] w + \\ & + \frac{\lambda}{1+a} \left[ \int_{t_0}^t \dot{N}_1(s-1) w(s) ds - 1 - a + N_1(t_0-1) \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Из дальнейших построений будет следовать, что интегродифференциальное уравнение (5.63) можно заменить на обыкновенное уравнение

$$\dot{w} = -\frac{a\lambda}{1+a} N_2(t) w - \frac{\lambda}{1+a} [1 + a - N_1(t_0-1)]. \quad (5.64)$$

Из (5.64) и первого равенства (5.61) получаем, что

$$w(t_1) = \exp(-J(t_1, t_0)) - \frac{\lambda}{1+a} [1 + a - N_1(t_0-1)] \int_{t_0}^{t_1} \exp(-J(t_1, \tau)) d\tau, \quad (5.65)$$

где (ср. с (5.15))

$$J(t_1, \tau) = \frac{a\lambda}{1+a} \int_{\tau}^{t_1} N_2(s) ds. \quad (5.66)$$

Дальнейший прогресс связан с уравнением

$$\dot{x} = \dot{x}(t_0) [1 - \exp r(x - x(t_1))], \quad (5.67)$$

которое в соответствии с леммой 5.4 несущественно отличается как от уравнения (5.29), так и от уравнения (5.28). Из формул (5.30), (5.34) и уравнения (5.67) выводим, что с приемлемой для нас точностью

$$J(t_1, \tau) = r [x(\tau) - x(t_1) + \dot{x}(t_0)(t_1 - \tau)], \quad (5.68)$$

а значит (ср. с (5.31)),

$$J(t_1, t_0) = r [\dot{x}(t_0)(t_1 - t_0) - x(t_1)]. \quad (5.69)$$

Из (5.30), (5.33), (5.34) и (5.69) вытекает, что первое слагаемое правой части формулы (5.65) имеет порядок  $\exp(-\lambda)$ , а такая малость (это будет ясно из дальнейшего) позволяет им пренебречь.

Чтобы разобраться с вопросом о порядке малости второго слагаемого правой части формулы (5.65), учтем в (5.68) явную формулу

$$\begin{aligned} x(t) &= \dot{x}(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{r} \ln [1 - \exp(-rx(t_1))] + \\ &\quad + \exp(r[\dot{x}(t_0)(t - t_0) - x(t_1)]) \end{aligned} \quad (5.70)$$

для решения  $x(t)$ ,  $x(t_0) = 0$ , уравнения (5.67). В итоге убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \exp[-J(t_1, \tau)] &= \exp[-J(t_1, t_0)] - \exp[-r\dot{x}(t_0)(t_1 - t_0)] + \\ &\quad + \exp[-r\dot{x}(t_0)(t_1 - \tau)]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Формула (5.71) позволяет получить важное соотношение

$$\lambda^{-1} w(t_1) \exp \lambda = \frac{1 + \ln z_0}{r(1+a) z_0 \ln z_0} + o(1), \quad (5.72)$$

где в соответствии с (5.40)

$$z_0 = (1 - y_0) \exp(-b/(1+a)). \quad (5.73)$$

Подчеркнем, что формула (5.72) сохраняется и для соответствующего решения уравнения (5.63). Тривиальное обоснование, связанное с использованием теоремы о дифференциальных неравенствах, опускаем.

В силу резкого убывания  $N_1(t)$  и структуры системы (5.53), (5.54) с высокой точностью

$$w(t) \equiv w(t_1), \quad t_1 \leq t \leq h + t_0. \quad (5.74)$$

При  $h + t_0 \leq t \leq h + t_1$  из (5.53), (5.54) и (5.74) следует, что

$$w(t) = w(t_1) - r \int_{t_0}^{t-h} N_2(s) w(s) ds + o(1). \quad (5.75)$$

Из (5.10) и (5.60), (5.61) выводим, что

$$-r \int_{t_0}^{t_1} N_2(s) w(s) ds = \frac{1+a}{a\lambda} \dot{w}(t_1). \quad (5.76)$$

Важный момент: в силу асимптотического равенства (5.72)

$$\lambda^{-1} \dot{w}(t_1) = o(1). \quad (5.77)$$

Учитывая (5.76) и (5.77) в (5.75), заключаем, что

$$w(h + t_1) = o(1). \quad (5.78)$$

Согласно изложенному в предыдущем пункте

$$N_2(t) = [1 + o(1)] \lambda^{-1} A_{np} \exp \lambda, \quad t_1 \leq t \leq h + t_0. \quad (5.79)$$

Из (5.53), (5.54) и (5.74), (5.78), (5.79) следует, что при  $h + t_1 \leq t \leq 2h + t_0$

$$w(t) = -(t - h - t_1) r N_2(t_1) w(t_1) + o(1). \quad (5.80)$$

Перейдем к отрезку  $2h + t_0 \leq t \leq 2h + t_1$ . В соответствии с (5.53), (5.54) на этом временнóм промежутке

$$w(t) = w(2h + t_0) - r \int_{h+t_0}^{t-h} N_2(s) w(s) ds + o(1). \quad (5.81)$$

Учитывая в (5.81) формулу (5.75), получаем

$$\begin{aligned} w(2h + t_1) &= w(2h + t_0) - r w(t_1) \int_{h+t_0}^{h+t_1} N_2(s) ds + \\ &+ r^2 \int_{h+t_0}^{h+t_1} N_2(s) \int_{t_0}^{s-h} N_2(\sigma) w(\sigma) d\sigma ds + o(1). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Интеграл от  $N_2(t)$  по отрезку  $[h + t_0, h + t_1]$  конечен. Поэтому второе слагаемое правой части формулы (5.82) мало за счет малости  $w(t_1)$ . Для оценки третьего слагаемого заметим, что в силу (5.64)

$$\left| \int_{t_0}^{s-h} N_2(\sigma) w(\sigma) d\sigma \right| \leq \frac{c}{\lambda},$$

где положительная постоянная  $c$  от  $\lambda$  не зависит. Напомним также, что при  $h + t_0 \leq t \leq h + t_1$  значения функции  $N_2(t)$  по порядку равны  $\lambda^{-1} \exp \lambda$ , а для разности  $t_1 - t_0$  справедливо асимптотическое представление (5.33). Приходим к выводу, что

$$w(2h + t_1) = w(2h + t_0) + o(1). \quad (5.83)$$

Из (5.53), (5.54) и (5.83) вытекает, что

$$w(3h) = w(2h + t_0) - r \int_{h+t_1}^{2h} N_2(s) w(s) ds + o(1). \quad (5.84)$$

Учтем в правой части (5.84) равенство (5.80). Опираясь попутно на формулу (5.79) и используя особенности уравнения (5.2), приходим к заключению, что

$$w(3h) = w(2h + t_0) - w(h + t_1) \exp \left( -r \int_{t_0}^{t_1} N_2(s) ds \right) + o(1). \quad (5.85)$$

Из (5.78)–(5.80) и (5.85) выводим итоговый результат:

$$w(3h) = -rh A_{np} \lambda^{-1} w(t_1) \exp \lambda + o(1). \quad (5.86)$$

В формуле (5.86) учтем равенства (5.36) и (5.72). Получаем

$$b_2(\lambda) = \Delta(1 + \ln z_0) + o(1). \quad (5.87)$$

Равенство (5.87) позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 5.4.** В условиях теорем 5.2 и 5.3 счетное число мультиликаторов системы (5.53), (5.54) стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ , один равен единице, а для еще одного справедливо асимптотическое равенство (5.87).

Аналогичное теореме 5.4 утверждение справедливо в вопросе об устойчивости  $k$ -циклов при  $1 \leq k \leq k_0$ . Подходящая модификация теоремы 5.4 имеет место также в вопросе об устойчивости циклов, соответствующих циклам (5.48) отображения (5.41).

Сделаем еще одно замечание. Незначительная модификация доказательства теоремы 5.4 позволяет убедиться, что оператор последовательности по траекториям системы (5.1), (5.2) на множестве  $S_1 \times S_2$ , введенном в теореме 5.1, в  $C^1$ -метрике близок к отображению (5.41). Эта дополнительная информация позволяет теснее связать динамические свойства системы (5.1), (5.2) с отображением (5.41). Например, с помощью рассуждений из заметки [30] можно установить существование у исходной системы (5.1), (5.2) счетного числа дихотомических циклов в случае, когда некоторый из циклов вида (5.48) отображения (5.41) имеет грубую гомоклиническую траекторию.

**5.4. О границе применимости построенной асимптотической теории и о глобальной динамике.** Начнем с изложения результатов численного интегрирования системы (5.1), (5.2). В процессе вычислений параметры  $a$  и  $h$  различным образом фиксировались, после чего для серии достаточно больших  $\lambda$  параметр  $r$  постепенно увеличивался. Выяснилось, что при относительно малых  $r$  аттрактор решений с наугад выбранными положительными начальными условиями — это 0-цикл, т. е. хищник реагирует на каждый всплеск плотности жертвы. При прохождении  $r$  через определенное значение  $R_0(\lambda, a, h)$  происходит его бифуркация удвоения периода, выражаясь главным образом в том, что начинают несколько различаться по высоте соседние пики плотности хищника. При незначительном дальнейшем увеличении  $r$  происходит бифуркация утверждения периода и т. д. В итоге устанавливаются стохастические колебания, которые при дальнейшем увеличении  $r$  трансформируются в периодические, затем снова наступает хаос и т. д. Однако с ростом  $\lambda$  ширина (по  $r$ ) зон, когда устойчивый цикл рождается из хаоса, резко убывает.

Оказалось также, что по крайней мере при небольших  $a$  с ростом  $\lambda$  из уплотнения траекторий рождаются устойчивые 1-цикл, 2-цикл и т. д. С каждым из них при прохождении  $r$  через некоторые значения  $R_k(\lambda, a, h)$ , где

$$R_0(\lambda, a, h) < R_1(\lambda, a, h) < R_2(\lambda, a, h) < \dots,$$

происходит бифуркация удвоения периода и т. д. Еще одно свойство: функции  $R_k(\lambda, a, h)$  по  $\lambda$  и  $h$  монотонно убывают, а по  $a$  монотонно возрастают. Далее при небольших значениях  $a$  функции  $R_k(\lambda, a, h)$  с небольшими номерами по мере увеличения  $\lambda$  заметно приближаются к нулю. Однако с возрастанием  $a$  их убывание становится незначительным. Наконец, при увеличении  $\lambda$  становится труднее отлавливать устойчивые  $k$ -циклы с большими номерами, что свидетельствует об уменьшении их областей притяжения.

Теоретическим базисом описанных результатов численного интегрирования послужили наглядные биологические соображения, высказанные вторым автором в 1980 г.

Если пищевая база хищника становится все более неустойчивой (растет параметр  $\lambda$ ), он, вообще говоря, не может эффективно контролировать ситуацию. Отсюда, в частности, следует, что на значительных временных промежутках плотность жертвы меняется в хорошем соответствии с хатчинсонским законом. Автоматически получаем, что между пиками плотности жертвы не

только мала плотность хищника, но и мал его реальный коэффициент линейного роста  $rN_1(t)$ . Поэтому уместно говорить, что в соответствующие временные промежутки в популяции хищника наблюдается стресс — в течение многих генераций низка его репродуктивная способность. А на высокие всплески плотности жертвы в общем случае хищник реагирует популяционными взрывами самой разной интенсивности, что служит главной причиной беспорядочного изменения во времени как его плотности, так и плотности жертвы. При этом биологический смысл странного аттрактора состоит в том, что последний выгоднее регулярных процессов: многое умеренное «провалы»  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$ , а значит, стабильнее рассматриваемая экосистема.

Хорошо видно, что наши теоретические результаты не подтверждают изложенные биологические соображения и не соответствуют описанным выше численным экспериментам. Причина этого нетривиальна. Приступим к ее объяснению.

**Теорема 5.5.** *Пусть в системе (5.1), (5.2)*

$$a = a_0/\lambda, \quad r = r_0/\lambda, \quad (5.88)$$

где положительные постоянные  $a_0, r_0$  от  $\lambda$  не зависят. Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$ , что при  $\lambda > \lambda_0$  справедливы утверждения теорем 5.1—5.4, но теперь роль  $\Delta$  в отображениях (5.41), (5.52) и т. д. выполняет величина  $r_0 h/a_0$ .

Утверждение теоремы 5.5 сохраняется, если в системе (5.1), (5.2) параметры  $a$  и  $r$  — произвольные затухающие функции параметра  $\lambda$ , но при этом отношение  $r/a$  имеет конечный предел при  $\lambda \rightarrow \infty$  и, кроме того,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a \exp \gamma \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} r \exp \gamma \lambda = \infty$$

при некотором  $0 < \gamma < 1$ , т. е. функции  $a$  и  $r$  убывают не слишком быстро.

**Теорема 5.6.** *Пусть в системе (5.1), (5.2) имеет место вырожденный случай, когда коэффициент давления хищника на жертву  $a = 0$ . Тогда найдется такое достаточно большое положительное число  $\lambda_0$  и зависящее от него целое число  $k_0$ , что при  $\lambda > \lambda_0$  система (5.1), (5.2) имеет сильно неустойчивые  $k$ -циклы с номерами  $0 < k < k_0$ .*

Эти утверждения, непосредственно вытекающие из наших построений, позволяют в полном объеме объяснить результаты численных экспериментов с системой (5.1), (5.2). Связано это с тем, что при значениях  $\lambda < 6$ , при которых в основном проводилось численное интегрирование системы (5.1), (5.2), и при относительно небольших  $a$  параметр  $a_0$  из (5.88) также невелик.

Суммируя все вместе, приходим к заключению, что при конечных  $a$  развитая нами асимптотическая теория имеет предельный характер: она работает при столь больших значениях малтузианского коэффициента линейного роста жертвы, что во многом теряется биологическое содержание задачи.

Заключая рассмотрение динамики системы (5.1), (5.2) при  $\Delta > 1$ , изложим наглядные соображения, позволяющие сделать вывод, что в теоремах 5.1—5.4 построены аттракторы с широкой областью притяжения. Пусть ее начальные условия задаются при  $t \leq t_{\text{вх}}$ . Предполагаем, что при указанных  $t$  начальная функция  $N_1(t)$  имеет вид (5.3) при  $b = 1$ , а вторая компонента начального условия — такая монотонно возрастающая непрерывная функция  $N_2(t)$ , также зависящая от большого параметра  $\lambda$ , что

$$\int_{t_{\text{вх}} - h}^{t_{\text{вх}}} N_2(s) ds = o(1), \quad N_2(t_{\text{вх}}) = 1.$$

Очевидно,  $t_{\text{вх}}$  выполняет роль  $t_0$ . Поэтому при  $t \geq t_{\text{вх}}$  для построения  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  можно воспользоваться уравнением (5.29), а значит, справедлива приближенная формула (5.37), в которой

$$N_2(t_1) = \frac{r(1+a)}{a\lambda} N_1(t_{\text{вх}}). \quad (5.89)$$

Перейдем к рассмотрению очередного всплеска плотности жертвы. Изменяя отсчет времени, можно считать, что он начинается при  $t = -1$ . Из формулы (5.3) при  $b = 1$  выводим, что при  $-1 \leq t \leq t_{\text{вых}}$ ,  $N_2(t_{\text{вых}}) = 1$ , в соответствии с (5.37) справедливо приближенное равенство

$$N_2(t) = N_2(t_1) \times \\ \times \exp \left[ -rh N_2(t_1) + r(1+a)\lambda^{-1} \exp \lambda \left( 1 - \exp \left( -\frac{\exp \lambda t}{1+a} \right) \right) \right]. \quad (5.90)$$

Из (5.89), (5.90) и формулы (5.3) при  $b = 1$  без труда следует, что приближенно

$$t_{\text{вых}} = \frac{1}{\lambda} \ln \left[ -(1+a) \ln \left( 1 - \frac{rh}{a} \exp \left( \lambda t_{\text{вх}} - \frac{\exp \lambda t_{\text{вх}}}{1+a} \right) \right) \right]. \quad (5.91)$$

Пусть в (5.91)  $t_{\text{вх}} = \varphi/\lambda$ . Учитывая это обстоятельство и выполняя замену

$$\varphi = \ln [-(1+a) \ln z],$$

приходим к отображению (5.41). Основной же интерес для нас представляет случай, когда в (5.91)

$$t_{\text{вх}} = -\alpha + \beta/\lambda, \quad (5.92)$$

где  $0 < \alpha < 1$ , а знак параметра  $\beta$  произволен. При условии (5.92) из (5.91) выводим, что приближенно

$$\beta \rightarrow \beta + \ln \Delta. \quad (5.93)$$

Из (5.93) вытекает, что при  $\Delta > 1$  итерации отображения (5.93) уходят на бесконечность. С использованием (5.91) можно показать, что при условии (5.92) через  $\lambda$  шагов получаем

$$\beta = \alpha \lambda + O(1). \quad (5.94)$$

Из сопоставления (5.92) и (5.94) заключаем, что  $t_{\text{вх}}$  становится порядка  $\lambda^{-1}$ , где работает отображение (5.41).

Итак, отображение (5.91) и следующее из него отображение (5.41) получены при достаточно общих предположениях о характере поведения решений системы (5.1), (5.2), в частности, фактически без использования идейно нагруженных лемм 5.1–5.4. Другими словами, мы хотим сказать, что отображение (5.41) получается, если опираться лишь на самые общие свойства решений системы (5.1), (5.2). Это замечание делаем в связи с работой [20], где многое менее строго по сравнению с изложенным чуть выше выведено отображение (5.41), но в которой не содержится, конечно, решения рассмотренной нами задачи.

Если  $\Delta < 1$ , происходит уход от колебаний хатчинсонского типа. В следующем пункте, написанном авторами совместно, в важном частном случае выявим характер установившихся режимов системы (5.1), (5.2) при этом ограничении.

**5.5. О динамике системы (5.1), (5.2) при небольших значениях коэффициента линейного роста хищника.** Чтобы дать представление о динамике системы (5.1), (5.2) при  $\Delta < 1$ , изучим интересный со многих точек зрения случай, когда

$$r = \lambda \exp(-\alpha \lambda), \quad \alpha > 0. \quad (5.95)$$

При этом, чтобы упростить изложение, обоснования  $C^1$ -утверждений опускаем, ограничиваясь описанием схемы исследования.

Начнем анализ с асимптотического интегрирования системы (5.1), (5.2) при начальных функциях

$$N_1(t) = \exp \lambda (1 - ax_0/(1+a))t, \quad N_2(t) \equiv x_0, \quad (5.96)$$

задаваемых при  $t \leq 0$ . В (5.96)  $x_0$  — постоянная из интервала  $(0, 1 + 1/a)$ . Пусть сначала

$$x_0 < (1 + 1/a)(1 - \alpha). \quad (5.97)$$

При условии (5.97) и при  $0 \leq t \leq t_0 - \delta$ , где  $t_0 = \alpha/(1 - ax_0/(1+a))$ , а постоянная  $\delta > 0$  достаточно мала, в силу малости  $r$  переменные в системе (5.1), (5.2) взаимодействуют слабо. Отсюда следует, что равномерно по указанным  $t$

$$N_1(t) = [1 + o(1)] \exp \lambda (1 - ax_0/(1+a))t, \quad (5.98)$$

$$N_2(t) = [1 + o(1)] x_0 \exp \left[ \frac{1+a}{1+(1-x_0)a} \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right) (t - t_0) \right]. \quad (5.99)$$

Если же  $|t - t_0| \ll \delta$ , т. е. при сильном взаимодействии переменных, главная асимптотика  $N_1$ ,  $N_2$  находится из решения системы

$$\dot{N}_1 = \lambda (1 - a(1+a)^{-1} N_2) N_1, \quad \dot{N}_2 = r N_1 N_2. \quad (5.100)$$

Обоснование таково: в силу ограниченности  $N_2(t)$  слагаемое  $r N_2(t-h) N_2(t)$  в (5.2) можно опустить, а так как в силу (5.97)  $t_0 < 1$ , содержащее запаздывание слагаемое в (5.1) также можно отбросить. Положим в (5.100)

$$y = r \int_0^t N_1(s) ds, \quad x_0 \exp y = N_2, \quad \tau = \lambda(t - t_0).$$

В итоге получим уравнение (ср. с (5.27))

$$\ddot{y} = [1 - ax_0(1+a)^{-1} \exp y] \dot{y}, \quad (5.101)$$

которое подлежит рассмотрению при  $-\infty < \tau < \infty$ . Согласно (5.98) нас интересует такое его решение, что при  $\tau \rightarrow -\infty$

$$y \sim \frac{1}{1 - ax_0/(1+a)} \exp \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right) \tau, \quad \dot{y} \sim \exp \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right) \tau. \quad (5.102)$$

Учитывая (5.102), после интегрирования левой и правой частей (5.101) по промежутку  $(-\infty, \tau]$  приходим к уравнению

$$\dot{y} = y - ax_0(1+a)^{-1} (\exp y - 1), \quad (5.103)$$

от которого удобно перейти к интегральному равенству

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{1+a}{1+(1-x_0)a} \times \\ &\times \exp \left[ \frac{1+(1-x_0)a}{1+a} \tau + \frac{ax_0}{1+a} \int_{-\infty}^{\tau} (1+y(s) - \exp y(s)) ds \right]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

В банаховом пространстве  $V(\tau_0)$ , состоящем из непрерывных при  $(-\infty, -\tau_0]$  функций с нормой

$$\|y\|_{\tau_0} = \sup_{\tau \leq -\tau_0} \left| y(\tau) \exp \left[ -\frac{1 + (1 - x_0) a}{1 + a} \tau \right] \right|,$$

выделим множество

$$S = \left\{ y(\tau) \in V(\tau_0) : y(\tau) \geq 0, \|y\|_{\tau_0} \leq \frac{1 + a}{1 + (1 - x_0) a} \right\}. \quad (5.105)$$

Несложно показывается, что оператор, порожденный правой частью (5.104), при достаточно больших положительных  $\tau_0$  преобразует множество (5.105) в себя и на нем является сжимающим. Полученную функцию  $y(\tau)$  доопределяем на все значения  $\tau$  в соответствии с (5.103), откуда следует, что она монотонно возрастает и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к конечному пределу  $y_0(x_0)$ , где  $y_0$  — положительный корень уравнения

$$ax_0(1+a)^{-1}(\exp y - 1) = y. \quad (5.106)$$

Из наших построений следует, что при  $t = t_0 + \delta$  функция  $rN_1$  имеет экспоненциально малое значение, она остается таковой вплоть до момента времени  $t = 1$ , а при  $t > 1$  падает до сверхэкспоненциально малых значений. Отметим также, что значение функции  $N_2$  при  $t = t_0 + \delta$  асимптотически близко к  $x_0 \exp y_0$ .

Обозначим через  $t_1$  второй положительный корень уравнения  $N_1(t) = 1$ . Для нахождения его асимптотики заметим, что после замены  $rt = s$  уравнение (5.2) с экспоненциальной точностью аппроксимируется уравнением  $\dot{N}_2 = -N_2^2$  на любом конечном промежутке изменения  $s$ . Дополняя это уравнение начальным условием  $N_2(0) = x_0 \exp y_0$ , находим

$$N_2(s) = x_0 \exp y_0 / (1 + sx_0 \exp y_0). \quad (5.107)$$

Учитывая затем формулу (5.107) в равенстве

$$t_1 - \frac{a}{1+a} \int_0^{t_1} N_2(t) dt - \frac{1}{1+a} \int_{-1}^{t_1-1} N_1(t) dt = 0,$$

убеждаемся, что

$$t_1 = [1 + o(1)] \frac{s_0}{\lambda} \exp \alpha \lambda, \quad (5.108)$$

где  $s_0$  — корень уравнения

$$s_0 - \frac{a}{1+a} \ln (1 + s_0 x_0 \exp y_0) = \frac{y_0}{1+a}. \quad (5.109)$$

Введем в рассмотрение отображение

$$x_0 \rightarrow f(x_0) = x_0 \exp y_0 / (1 + s_0 x_0 \exp y_0). \quad (5.110)$$

Из отмеченных выше асимптотических свойств  $N_1$ ,  $N_2$  следует, что равномерно по  $-1 \leq t \leq 0$  и  $-h \leq t \leq 0$  соответственно (ср. с (5.96))

$$N_1(t + t_1) = [1 + o(1)] \exp \lambda \left( 1 - \frac{\alpha f(x_0)}{1+a} \right) t, \quad (5.111)$$

$$N_2(t + t_1) = [1 + o(1)] f(x_0). \quad (5.112)$$

Поэтому имеет смысл отдельно остановиться на свойствах отображения (5.110).

**Лемма 5.5.** *Отображение (5.110) преобразует интервал  $(0, 1 + 1/a)$  в себя, на котором оно монотонно и имеет единственную неподвижную точку  $x_* < 1$ , причем  $0 < f'(x_*) < 1$ .*

**Доказательство.** Сначала установим монотонность отображения (5.110). С этой целью введем в рассмотрение функцию  $x_1(x_0) = x_0 \exp y_0(x_0)$ . Из уравнения (5.106) и представления  $y_0 = \ln x_1 - \ln x_0$  последовательно выводим

$$x'_1(x_0) = x_1 \left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right)/x_0 \left(1 - \frac{ax_1}{1+a}\right) < 0, \quad (5.113)$$

$$y'_0(x_0) = a(x_1 - x_0)/x_0(1+a) \left(1 - \frac{ax_1}{1+a}\right) < 0. \quad (5.114)$$

Чтобы ситуация с неравенствами (5.113), (5.114) стала совсем ясной, заметим, что

$$ax_1/(1+a) > 1. \quad (5.115)$$

А неравенство (5.115) очевидно, так как оно означает, что  $\varphi'(y_0) > 0$ , где  $\varphi(y) = ax_0(1+a)^{-1}(\exp y - 1) - y$ ,  $\varphi(y_0) = 0$ .

Чтобы продвинуться дальше, рассмотрим функцию  $x_2 = x_2(x_1)$ , определяемую из уравнения

$$-\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{a}{1+a}s\right) \frac{ds}{s^2} = \frac{y_0(x_0)}{1+a}, \quad (5.116)$$

в котором  $x_0 = x_0(x_1)$  (это правомерно в силу неравенства (5.113)). Из уравнения (5.116), неравенств (5.113)–(5.115) и оценки  $ax_2/(1+a) < 1$  (она выводится аналогично выводу неравенства (5.115) из равенства (5.116)) следует, что

$$x'_2(x_1) = \frac{x_2^2}{ax_2/(1+a) - 1} \left\{ \frac{1}{x_1^2} \left( \frac{ax_1}{1+a} - 1 \right) + \frac{y'_0(x_0)x'_0(x_1)}{1+a} \right\} < 0. \quad (5.117)$$

Наконец, из (5.113), (5.117) и равенства  $f(x_0) = x_2$  заключаем, что отображение (5.110) преобразует интервал  $(0, 1 + 1/a)$  в себя, причем

$$f'(x_0) = x'_2(x_1)x'_1(x_0) > 0, \quad 0 < x_0 < 1 + 1/a. \quad (5.118)$$

Для нахождения неподвижной точки отображения (5.110) воспользуемся вытекающим из (5.109) представлением

$$f(x_0) = x_0 \exp a^{-1}(1+a)(y_0 - s_0),$$

из которого следует, что на неподвижной точке  $y_0 = s_0$ . Поэтому, полагая в (5.109)  $s_0 = y_0$ , а (см. (5.106))

$$x_0 = a^{-1}(1+a)y_0/(\exp y_0 - 1), \quad (5.119)$$

для отыскания  $y_0$  приходим к уравнению

$$y_0 = 2\sqrt{a(1+a)^{-1}} \operatorname{sh}(y_0/2), \quad (5.120)$$

которое, очевидно, имеет единственный положительный корень  $y_0 = y_*$ . Таким образом, на интервале  $(0, 1 + 1/a)$  отображение (5.110) имеет единственную неподвижную точку, для которой, полагая в (5.109)  $s_0 = y_*$ , получаем формулу

$$x_* = [\exp y_* - 1]/y_* \exp y_* < 1.$$

В силу (5.118) осталось показать, что  $f'(x_*) < 1$ . Отметим, что из единственности неподвижной точки следует лишь, что  $f'(x_*) \leq 1$ . Однако если  $f'(x_*) = 1$ , то  $s'_0(x_*) = y'_0(x_*)$ . А отсюда после некоторых преобразований выводим, что  $y_* = y_0(x_*)$  удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{(1+a)^2} \frac{\exp y_* - 1}{1 - \exp y_* + y_* \exp y_*} + \frac{(\exp y_* - 1 - y_*)^2}{(\exp y_* - 1)^2} = 0. \quad (5.121)$$

Последнее же невозможно, так как левая часть (5.121) положительна при всех  $y_* > 0$ . Лемма доказана.

Дополнительно заметим, что  $f(x_0) \rightarrow 0$  или  $1+1/a$  при  $x_0 \rightarrow +0$  или  $x_0 \rightarrow 1+1/a - 0$  соответственно, а  $f'(x_0) \rightarrow \infty$  в обоих случаях.

**Теорема 5.7.** Пусть  $\alpha$  — произвольно фиксированная постоянная из интервала  $(0, \alpha_*)$ , где  $\alpha_* = 1 - ax_* (1+a)^{-1}$ , а  $x_*$  — неподвижная точка отображения (5.110). Тогда найдется такое достаточно большое  $\lambda_0 > 0$ , что при всех  $\lambda \geq \lambda_0$  система (5.1), (5.2) при условии (5.95) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл, для начальных условий и периода которого справедливы асимптотические формулы (5.111), (5.112) и (5.108) (при замене  $f(x_0)$  на  $x_*$ ,  $s_0$  на  $s_* = s_0(x_*)$ ).

Доказательство существования цикла базируется на свойствах решений системы (5.1), (5.2) с начальными условиями (5.96) и лемме 5.5 (см., например, теоремы 5.1, 5.2), а при асимптотическом интегрировании системы в вариациях используются те же конструкции, что и при нелинейном анализе (см. п. 5.3). В частности, на участке сильного взаимодействия возникает аналогичное (5.104) линейное неоднородное интегральное уравнение. Опуская соответствующие вычисления, отметим лишь, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  все мультипликаторы системы в вариациях стремятся к нулю, за исключением двух — простого единичного и еще одного, имеющего своим пределом  $f'(x_*)$ .

Поведение решений системы (5.1), (5.2) с начальными условиями (5.96) при (ср. с (5.97))

$$(1 - \alpha)(1 + 1/a) < x_0 < 1 + 1/a \quad (5.122)$$

выявляется просто, так как в этом случае переменные в (5.1), (5.2) взаимодействуют слабо:  $N_2(t)$  асимптотически близко к  $x_0$  при всех рассматриваемых  $t$ , а  $N_1(t)$  меняется по хатчинсоновскому закону. Поэтому здесь (ср. с (5.108))

$$t_1 = [1 + o(1)] \frac{1 + a}{\lambda (1 + (1 - x_0) a)} \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1 + a} \right), \quad (5.123)$$

а вместо формул (5.111), (5.112) равномерно по  $-1 \leq t \leq 0$  и  $-h \leq t \leq 0$  соответственно имеем

$$N_1(t + t_1) = [1 + o(1)] \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1 + a} \right) t, \quad (5.124)$$

$$N_2(t + t_1) = x_0 + \left[ \frac{(1 + a)^2 (1 - x_0) x_0}{1 + (1 - x_0) a} + o(1) \right] \times \\ \times \exp \left( -\lambda \left( \alpha + \frac{ax_0}{1 + a} - 1 \right) \right). \quad (5.125)$$

Стало достаточно ясно, что при условии (5.122) система (5.1), (5.2) имеет такой цикл, что постоянная  $x_0$  асимптотически близка к единице. Сформулируем точное утверждение.

**Теорема 5.8.** Пусть  $\alpha$  — произвольно фиксированная постоянная из промежутка  $(1/(1+a), \infty)$ . Тогда при всех достаточно больших  $\lambda$  система (5.1), (5.2) при условии (5.95) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл, для периода и начальных условий которого справедливы асимптотические формулы (5.123) и (5.124), (5.125) при  $x_0 = 1$ .

Не останавливаясь на стандартном обосновании теоремы, заметим только, что все мультиликаторы системы в вариациях на цикле стремятся к нулю, за исключением простого единичного и мультиликатора  $\mu$ , для которого справедлива асимптотическая формула:

$$\mu = 1 - [1 + o(1)](1 + a)^2 \exp[-\lambda(\alpha - 1/(1 + a))].$$

Отметим еще, что цикл, о котором идет речь в теореме 5.8, ответствует при увеличении  $r$  от экспоненциально орбитально устойчивого континуума периодических решений, имеющегося при  $r = 0$ .

Как будет ясно из дальнейшего, мы достигнем определенной полноты исследования, если изучим случай, когда в (5.96)  $x_0$  заменено на

$$x = x_0 + (1 + a)\gamma/\alpha\lambda, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad (5.126)$$

а в (5.95)  $\alpha = 1 - ax_0/(1 + a)$ . Интегрируя систему (5.1), (5.2) с модифицированными указанным образом начальными условиями, при  $0 \leq t \leq 1 - \delta$ , где  $\delta > 0$  достаточно мало и фиксировано, получаем формулы (ср. с (5.98), (5.99))

$$N_1(t) = [1 + o(1)] \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax}{1 + a} \right) t, \quad (5.127)$$

$$N_2(t) = [1 + o(1)] x_0 \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1 + a}{1 + (1 - x_0)a} \exp \left[ \lambda \left( 1 - \frac{ax}{1 + a} \right) (t - 1) - \gamma \right] \right\}. \quad (5.128)$$

На участке сильного взаимодействия, т. е. при  $|t - 1| \leq \delta$ , вместо системы (5.100) теперь имеем систему

$$\dot{N}_1 = \lambda \left[ 1 - \frac{a}{1 + a} N_2 - \frac{1}{1 + a} \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax}{1 + a} \right) (t - 1) \right] N_1, \quad (5.129)$$

$$\dot{N}_2 = r N_1 N_2. \quad (5.130)$$

Выполняя в (5.129), (5.130) замены

$$y = r \int_0^t N_1(s) ds, \quad x \exp y = N_2, \quad \tau = \lambda(t - 1),$$

и полагая затем  $x = x_0$ , приходим к уравнению

$$\ddot{y} = \left[ 1 - \frac{ax_0}{1 + a} \exp y - \frac{1}{1 + a} \exp \left( 1 - \frac{ax_0}{1 + a} \right) \tau \right] \dot{y}, \quad (5.131)$$

интересующее нас решение которого в силу (5.127) должно обладать следующими свойствами: при  $\tau \rightarrow -\infty$

$$y \sim \frac{c(1+a)}{1+(1-x_0)a} \exp\left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right) \tau, \quad \dot{y} \sim c \cdot \exp\left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right) \tau, \quad (5.132)$$

где  $c = \exp(-\gamma)$ .

Положим  $z(\tau) = \dot{y}(\tau)$  и перейдем от (5.131) с учетом (5.132) к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\tau) &= c \cdot \exp\left\{\left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right)\tau + \frac{ax_0}{1+a} \int_{-\infty}^{\tau} \left[1 - \exp\left(\int_{-\infty}^s z(\sigma) d\sigma\right)\right] ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+(1-x_0)a} \exp\left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right) \tau\right\}, \end{aligned} \quad (5.133)$$

анализ которого совершенно аналогичен исследованию уравнения (5.104). На этом пути получаем определенную при всех  $-\infty < \tau < \infty$  функцию  $z(\tau)$ , которая при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к нулю со сверхэкспоненциальной скоростью. Возвращаясь снова к уравнению (5.131), убеждаемся, что искомое его решение

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} z(s) ds$$

определенено при всех  $-\infty < \tau < \infty$ , монотонно возрастает и стремится при  $\tau \rightarrow \infty$  к конечному пределу

$$z_0(x_0, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) d\tau.$$

Проделанный анализ показывает, что при  $t = 1 + \delta$  функция  $N_1$  становится сверхэкспоненциально малой, а значение  $N_2$  асимптотически близко к  $x_0 \exp z_0$ . Поэтому дальнейшее исследование полностью совпадает с изложенным в начале пункта: для второго положительного корня уравнения  $N_1(t) = 1$  имеем асимптотическое представление

$$t_1 = [1 + o(1)] \frac{\sigma_0}{\lambda} \exp \lambda \left(1 - \frac{ax_0}{1+a}\right), \quad (5.134)$$

где  $\sigma_0$  — корень уравнения

$$(1+a)\sigma_0 - a \ln(1 + \sigma_0 x_0 \exp z_0) = z_0, \quad (5.135)$$

а вместо формул (5.111), (5.112) равномерно по  $-1 \leq t \leq 0$  и  $-h \leq t \leq 0$  соответственно получаем

$$N_1(t + t_1) = [1 + o(1)] \exp \lambda (1 - a\tilde{x}(1+a)^{-1}) t, \quad (5.136)$$

$$N_2(t + t_1) = [1 + o(1)] \tilde{x}, \quad (5.137)$$

где

$$\tilde{x} = x_0 \exp z_0 / (1 + \sigma_0 x_0 \exp z_0). \quad (5.138)$$

Поэтому естественно ожидать, что при условии (5.126) каждому простому корню  $\gamma_0$  уравнения

$$G(x_0, \gamma) = x_0, \quad (5.139)$$

где  $G$  — правая часть формулы (5.138), при фиксированном  $x_0 \in (0, 1 + 1/a)$  должен соответствовать цикл исходной системы (5.1), (5.2). Понятно также, что за его устойчивость должно отвечать отображение

$$\gamma \rightarrow \lambda a (1 + a)^{-1} [G(x_0, \gamma) - x_0]. \quad (5.140)$$

А поскольку отображение (5.140) имеет экспоненциально неустойчивую неподвижную точку  $\gamma(\lambda) = \gamma_0 + O(\lambda^{-1})$ , то таким же будет и релаксационный цикл системы (5.1), (5.2).

Чтобы придать аккуратность дальнейшим построениям, остановимся подробнее на свойствах функции  $G(x_0, \gamma)$ . Из (5.133) следует, что при  $\gamma \rightarrow \infty$ , т. е. при  $c \rightarrow 0$  справедливо асимптотическое представление

$$z_0 = (1 + a) c + O(c^2). \quad (5.141)$$

Учитывая (5.141) в (5.135), приходим к выводу, что

$$\sigma_0 = \frac{c}{1 - ax_0/(1 + a)} + O(c^2). \quad (5.142)$$

Наконец, подставляя (5.141) и (5.142) в (5.138), получаем, что при больших  $\gamma$

$$G(x_0, \gamma) = x_0 \left[ 1 + \frac{(1 + a)(1 - x_0)}{1 - ax_0/(1 + a)} \exp(-\gamma) + O(\exp(-2\gamma)) \right]. \quad (5.143)$$

Выполняя в (5.133) замену  $\tau = \sigma + \gamma/(1 - ax_0/(1 + a))$  и устремляя  $\gamma$  к  $-\infty$ , убеждаемся, что  $z_0 \rightarrow y_0(x_0)$ . Поэтому и

$$G(x_0, \gamma) \rightarrow f(x_0), \quad \gamma \rightarrow -\infty, \quad (5.144)$$

где  $f$  — функция (5.110).

**Лемма 5.6.** При  $0 < x_0 < x_*$  и  $1 < x_0 < 1 + 1/a$ , где  $x_*$  — неподвижная точка отображения (5.110), справедливы соответственно неравенства  $G(x_0, \gamma) > x_0$  и  $G(x_0, \gamma) < x_0$ ,  $-\infty < \gamma < \infty$ . Если же  $x_* < x_0 < 1$ , то уравнение (5.139) имеет единственный корень  $\gamma_0 = y_0(x_0)$ , причем

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}(x_0, \gamma_0) > 0. \quad (5.145)$$

**Доказательство.** В силу (5.143), (5.144) и установленных ранее свойств функции  $f$  для обоснования леммы достаточно доказать, что если уравнение (5.139) имеет корень  $\gamma_0$ , то обязательно выполняется неравенство (5.145).

Пусть  $\gamma_0$  — корень уравнения (5.139). Из представления  $G = x_0 \exp a^{-1} (1 + a)(z_0 - \sigma_0)$  следует, что при  $\gamma = \gamma_0$  выполняется равенство  $\sigma_0 = z_0$ . Учитывая его в (5.135), находим

$$x_0 = (\exp z_0 - 1)/z_0 \exp z_0, \quad (5.146)$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \gamma} = \left( \frac{a}{1 + a} x_0 z_0 + \frac{1}{1 + a} \right) \frac{\partial z_0}{\partial \gamma} / \left( 1 - \frac{ax_0}{1 + a} \right). \quad (5.147)$$

Подставляя затем (5.146), (5.147) в формулу

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma} = x_0 \frac{1 + a}{a} \left( \frac{\partial z_0}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \gamma} \right),$$

окончательно получаем

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}(x_0, \gamma_0) = - \frac{x_0}{1 - ax_0/(1 + a)} \frac{\exp z_0 - 1 - z_0}{z_0 \exp z_0} \frac{\partial z_0}{\partial \gamma}(x_0, \gamma_0).$$

Итак, проблема свелась к доказательству неравенства  $\partial z_0 / \partial \gamma < 0$  или, что то же самое,  $\partial z_0 / \partial c > 0$ .

Положим  $h_0(\tau) = \frac{\partial z}{\partial c}(\tau)$ . Напомним, что

$$\frac{\partial z_0}{\partial c} = \int_{-\infty}^{\tau} h_0(s) ds.$$

Поэтому нам достаточно показать положительность функции  $h_0(\tau)$ .

Из уравнения (5.133) следует, что  $h_0$  — решение линейного неоднородного уравнения:

$$h_0(\tau) + \frac{ax_0}{1+a} z(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \omega(s) \int_{-\infty}^s h_0(\sigma) d\sigma ds = \frac{1}{c} z(\tau), \quad (5.148)$$

где

$$\omega(\tau) = \exp \left( \int_{-\infty}^{\tau} z(s) ds \right).$$

Введем в рассмотрение оператор

$$Lh_0 = \frac{ax_0}{1+a} z(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \omega(s) \int_{-\infty}^s h_0(\sigma) d\sigma ds.$$

Напомним, что функция  $z(\tau)$  положительна, а при  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $\infty$  стремится к нулю с экспоненциальной и сверхэкспоненциальной скоростями соответственно. Отсюда и из структуры оператора  $L$  следует, что при любом  $\tau_0 \in (-\infty, \infty)$  он действует в пространстве  $V(\tau_0)$  и компактен. А так как он вольтерровский, то его спектральный радиус равен нулю. Поэтому уравнение (5.148) однозначно разрешимо. Чтобы доказать положительность  $h_0(\tau)$ , поделим равенство (5.148) на  $z(\tau)$  и результат запишем в виде

$$u_0(\tau) + \frac{ax_0}{1+a} \int_{-\infty}^{\tau} \omega(s) \int_{-\infty}^s z(\sigma) u_0(\sigma) d\sigma ds = \frac{1}{c}, \quad (5.149)$$

где  $u_0(\tau) = h_0(\tau) / z(\tau)$ . Из (5.149) вытекает существование такого достаточно большого положительного числа  $\tau_0$ , что

$$u_0(\tau) > 0, \quad -\infty < \tau \leq -\tau_0.$$

Остается воспользоваться еще раз вольтерровостью фигурирующего в (5.149) интегрального оператора, чтобы путем рассуждения от противного убедиться в положительности  $u_0(\tau)$  при всех  $\tau$ . Приходим к требуемому результату: интеграл от  $h_0(\tau)$  по  $-\infty < \tau < \infty$  конечен и положителен. Лемма доказана.

Сформулируем теперь строгий результат.

**Теорема 5.9.** Пусть при фиксированном  $x_0 \in (x_*, 1)$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x_0}(x_0, \gamma_0) \right| \neq 1, \quad (5.150)$$

где  $\gamma_0$  — корень уравнения (5.139). Тогда при всех достаточно больших  $\lambda$  однозначно определяется такая функция  $\gamma = \gamma(\lambda)$ ,  $\gamma(\infty) = \gamma_0$ , что система (5.1), (5.2) при

$$r = \lambda \exp \left( -\lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right) - \gamma(\lambda) \right)$$

имеет сильно неустойчивый цикл, причем для начальных условий, периода  $T(\lambda)$  и ведущего (наибольшего по модулю) мультипликатора справедливы асимптотические формулы:

$$N_1(t, \lambda) = [1 + o(1)] \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right) t, \quad N_1(0, \lambda) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0,$$

$$N_2(t, \lambda) = [1 + o(1)] x_0, \quad N_2(0, \lambda) = x_0, \quad -h \leq t \leq 0,$$

$$T(\lambda) = [1 + o(1)] \frac{\sigma_0}{\lambda} \exp \lambda \left( 1 - \frac{ax_0}{1+a} \right), \quad \sigma_0 = \sigma_0(x_0, \gamma_0),$$

$$\mu = [1 + o(1)] \frac{\lambda a}{1+a} \frac{\partial G}{\partial \gamma}(x_0, \gamma_0).$$

Для доказательства существования цикла воспользуемся следующим специальным приемом. Рассмотрим для системы (5.1), (5.2) множество начальных функций  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , где

$$\Omega_1 = \{N_1(t) \in C(-1, 0) : 0 \leq N_1(t) \leq \exp \lambda m_0 t, \quad N_1(0) = 1\},$$

$$\Omega_2 = \{N_2(t) \in C(-h, 0) : x_0 - \delta \leq N_2(t) \leq x_0 + \delta\},$$

а  $m_0, \delta > 0$  — некоторые достаточно малые универсальные постоянные, и положим в (5.2)

$$r = \lambda \exp (-\lambda (1 - ax(1+a)^{-1}) - \gamma), \quad (5.151)$$

где теперь параметр  $\gamma$  меняется в малой окрестности  $\gamma_0$ , а  $x = N_2(0)$ . Равенство (5.151) означает, что  $r$  является теперь функционалом от начального условия  $N_2(t)$ . Проводя асимптотическое интегрирование системы (5.1), (5.2) с предложенными начальными условиями (по поводу технических деталей см. соответствующее место перед леммой 5.6), приходим к формулам (5.136), (5.137), в которых теперь  $\tilde{x} = G(x, \gamma)$ .

Итак, проблема существования цикла сводится к отысканию грубой неподвижной точки отображения

$$x \rightarrow G(x, \gamma).$$

Остается отметить, что в силу выбора  $\gamma_0$  и условия (5.150) такая неподвижная точка  $x = x(\gamma)$ ,  $x(\gamma_0) = x_0$ , в окрестности  $x_0$  единственна. Тем самым доказано существование цикла  $N_1(t, \lambda, \gamma)$ ,  $N_2(t, \lambda, \gamma)$  у системы (5.1), (5.2) при

$$r = \lambda \exp \{-\lambda [1 - a(1+a)^{-1}N_2(0, \lambda, \gamma)] - \gamma\}$$

и при всех  $\gamma$ , близких к  $\gamma_0$ . Завершающий этап — определение  $\gamma = \gamma(\lambda)$  из условия  $N_2(0, \lambda, \gamma) = x_0$ , которое возможно в силу леммы 5.6, асимптотических равенств

$$N_2(0, \lambda, \gamma) = x(\gamma) + o(1), \quad \frac{\partial N_2}{\partial \gamma}(0, \lambda, \gamma) = x'(\gamma) + o(1)$$

и неравенства (см. неравенства (5.145) и (5.150))

$$x'(\gamma_0) = \frac{\partial G}{\partial \gamma}(x_0, \gamma_0) / \left( 1 - \frac{\partial G}{\partial x_0}(x_0, \gamma_0) \right) \neq 0.$$

На доказательстве неустойчивости цикла останавливаются не будем. Отметим лишь, что остальные мультиплликаторы системы в вариациях (кроме 1 и  $\mu$ ) при  $\lambda \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

Обращаем внимание, что аналогичный прием — так называемый метод функционализации параметра — применялся ранее в [24] для построения неустойчивых циклов-уток в многомерных релаксационных системах обыкновенных уравнений, причем там также возникало аналогичное (5.151) ограничение.

Теоремы 5.7—5.9 позволяют проследить за динамикой системы (5.1), (5.2) при условии (5.95) и при уменьшении  $\alpha$ . Действительно, при всех  $\alpha > \alpha_*$  система (5.1), (5.2) имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл, доставляемый теоремой 5.8, который, по всей видимости, является ее глобальным аттрактором. При прохождении  $\alpha$  через  $\alpha_*$  из уплотнения траекторий рождаются еще два цикла — устойчивый (доставляемый теоремой 5.7) и неустойчивый (доставляемый теоремой 5.9). При  $(1+a)^{-1} < \alpha < \alpha_*$  все три цикла существуют, а при прохождении  $\alpha$  через  $(1+a)^{-1}$  циклы, доставляемые теоремами 5.8 и 5.9, объединяются и исчезают. Таким образом, при  $0 < \alpha < (1+a)^{-1}$  выживает лишь устойчивый цикл, о котором говорится в теореме 5.7.

Вероятно, последний цикл сохраняется при всех тех  $r$ , при которых  $\Delta < 1$ . В частности, правдоподобно, что при прохождении  $\Delta$  через единицу в него трансформируется цикл, о котором идет речь в теореме 5.2.

**5.6. Итоговые замечания.** Итак, нами построена достаточно развитая асимптотическая теория релаксационных периодических колебаний системы (5.1), (5.2). Существенно, что при  $\Delta > 1$  может происходить их стохастизация [69], носящая, однако, достаточно закономерный характер. Нетривиальным представляется то обстоятельство, что наша теория имеет предельный характер (наиболее ясно это следует из теорем 5.5 и 5.6). Впрочем, данное положение, вероятно, типично для систем дифференциальных уравнений, моделирующих явление турбулентности. В качестве примера укажем на известную систему Лоренца, у которой при увеличении энергетического параметра от сложных колебаний остаются лишь относительно просто устроенные циклы.

## 6. Релаксационный цикл математической модели реакции Белоусова

**6.1. Математическая модель и некоторые ее свойства.** Интересующая нас реакция открыта Белоусовым в 1951 г., но его подробная статья на эту тему опубликована относительно недавно [2]. Детальный экспериментальный анализ реакции Белоусова выполнен в [18]. К настоящему времени известно много окислительно-восстановительных химических реакций, имеющих однотипный механизм. Опишем его, следуя [18], где в качестве основных веществ выделены бромат, церий и бромид. На качественном уровне механизм колебаний таков: церий ( $[Ce^{4+}] = N_2$ ), выполняющий роль катализатора, способствует образованию бромида ( $[Br^-] = N_3$ ), который служит сильным ингибитором бромата ( $[HBrO_2] = N_1$ ), а последний повышает концентрацию церия.

В [18] период автоколебаний церия поделен на временные промежутки  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — фазы возрастания и падения концентрации соответственно, что позволило сформулировать следующие положения.

а) Малые количества  $Br^-$ , добавленные в фазе  $\tau_1$ , вызывают переключение, т. е. переход в фазу убывания  $\tau_2$ . Минимальное количество  $Br^-$ , вызывающее переключение, уменьшается к концу фазы  $\tau_1$ .

б)  $Br^-$ , добавленный в фазе  $\tau_2$ , удлиняет ее. Эффект тем сильнее, чем больше добавка и чем ближе она к концу фазы  $\tau_2$ .

в) Добавка  $\text{Ag}^+$ , связывающего  $\text{Br}^-$ , вызывает следующие эффекты: если концентрация  $\text{Br}^-$  уменьшена в фазе  $\tau_2$ , это приводит к переключению, а добавка  $\text{Ag}^+$  в фазе  $\tau_1$  приводит к увеличению ее длительности.

г) При непрерывном увеличении концентрации  $\text{Br}^-$  автоколебания исчезают.

д) Аналогичный предыдущему результат получается при увеличении концентрации  $\text{Ce}^{4+}$ .

е) Добавка  $\text{Ce}^{4+}$  в фазе  $\tau_1$  приводит к переключению.

Сопоставляя эти факты с изложенным в п. 1.2 общим подходом к моделированию биологических популяций, заключаем, что реакция Белоусова удивительно похожа на своеобразную задачу хищник—жертва. В связи с этим для ее моделирования введем в рассмотрение систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = r_1 [1 + a(1 - N_3/K_3) - N_1/K_1] N_1, \quad (6.1)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [N_1/K_1 - N_2/K_2] N_2, \quad (6.2)$$

$$\dot{N}_3 = r_3 [N_2/K_2 - N_3/K_3] N_3, \quad (6.3)$$

где  $K_s$ ,  $r_s$ ,  $s = 1, 2, 3$  — соответственно средние концентрации и коэффициенты линейного роста бромата, церия и бромида. В п. 1.2 говорилось, что некоторые из параметров экологических уравнений — их инварианты. В данном случае можно ожидать, что при изменении неспецифических условий протекания реакции сохраняются величины

$$r_2/K_2, \quad r_3/K_3. \quad (6.4)$$

Наглядный смысл здесь таков: если увеличиваются средние концентрации церия или бромида, в среднем соответствующим образом возрастает скорость изменения их концентраций. Ниже считаем, что данное достаточно разумное допущение справедливо.

Линеаризуем систему (6.1)–(6.3) на ее состоянии равновесия

$$(K_1, K_2, K_3). \quad (6.5)$$

Затем составим характеристическое уравнение

$$\mu/r_1 = -1 - ar_2r_3/[(\mu + r_2)(\mu + r_3)]. \quad (6.6)$$

Из (6.6) легко выводим следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** Пусть биквадратное уравнение

$$\omega^4 - (ar_2r_3 - r_2^2 - r_3^2)\omega^2 + (1 + a)r_2^2r_3^2 = 0 \quad (6.7)$$

имеет корни  $\omega_2 > \omega_1 > 0$ . Тогда состояние равновесия (6.5) системы (6.1)–(6.3) колебательным образом неустойчиво при

$$\frac{(\omega_2^2 + r_2^2)(\omega_2^2 + r_3^2)}{ar_2r_3(r_2 + r_3)} > r_1 > \frac{(\omega_1^2 + r_2^2)(\omega_1^2 + r_3^2)}{ar_2r_3(r_2 + r_3)}. \quad (6.8)$$

На рис. 6.1 при  $a = 40$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 3$  показана эволюция колебаний плотности церия соответственно при

$$r_1 = 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 1; 10.$$

Отметим также, что в подавляющем большинстве случаев автоколебания в системе (6.1)–(6.3) возникают жестко.

Перейдем к объяснению приведенных выше экспериментальных фактов.

а) Пусть в фазе  $\tau_1$  увеличено  $N_3$ . Тогда в соответствии с (6.1) уменьшится  $N_1$ , что согласно (6.2) приведет к уменьшению  $N_2$ . Тем самым длительность

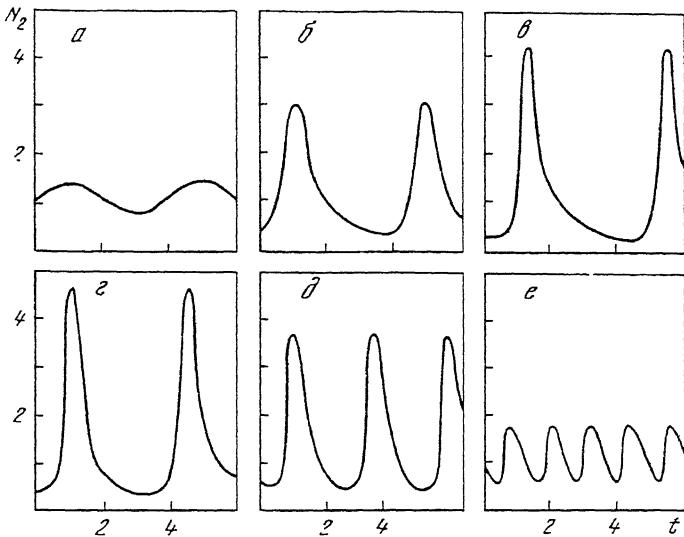


Рис. 6.1

фазы  $\tau_1$  сократится. Очевидно, переход к фазе  $\tau_2$  происходит при меньшем увеличении  $N_3$  в конце фазы  $\tau_1$ .

б) Если же  $N_3$  увеличено в фазе  $\tau_2$ , то в силу убывания  $N_1$  и последующего уменьшения  $N_2$  длительность этой фазы возрастает.

в) Пусть  $N_3$  уменьшено в фазе  $\tau_2$ . Тогда согласно (6.1) увеличится  $N_1$ , что приведет к возрастанию  $N_2$ . Последнее же вызовет сокращение фазы  $\tau_2$ . Но если  $N_3$  уменьшено в фазе  $\tau_1$ , то в силу сказанного ее длительность возрастет.

г) Согласно (6.4) при увеличении  $K_3$  возрастает  $r_3$ . Отсюда следует, что корни  $\omega_1$  и  $\omega_2$  уравнения (6.7) сближаются и исчезают. Это приводит к гашению колебаний.

д) Аналогичное предыдущему происходит при увеличении  $K_2$ , а значит, в силу (6.4) и  $r_2$ .

е) Пусть  $N_2$  увеличено в фазе  $\tau_1$ . Согласно (6.3) тогда возрастет  $N_3$ , а в силу (6.1)  $N_1$  уменьшится. Отсюда и из (6.2) вытекает, что фаза  $\tau_1$  сократится.

Итак, идентичны сформулированные выше и в начале пункта положения. Тем самым проведена апробация математической модели (6.1)–(6.3).

**6.2. Релаксационная постановка задачи и построение аппроксимирующей релейной системы.** В (6.1)–(6.3) выполним нормирующие замены

$$N_s \rightarrow K_s N_s, \quad s = 1, 2, 3,$$

и перейдем к системе

$$\dot{N}_1 = r_1 [1 + a(1 - N_3) - N_1] N_1, \quad (6.9)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [N_1 - N_2] N_2, \quad (6.10)$$

$$\dot{N}_3 = r_3 [N_2 - N_3] N_3 \quad (6.11)$$

для плотностей участвующих в реакции веществ. В дальнейшем считаем, что параметр  $a$  достаточно велик, а параметры  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  как-то фиксированы. Теорема 6.1 подсказывает, что при этих условиях должны находиться глубоко в области существования автоколебаний. Численный счет не только это под-

тврждает, но позволяет убедиться, что аттрактор системы (6.9)–(6.11) — следующим образом устроенный релаксационный цикл: колебания плотности бромата  $\delta$ -образцы; колебания плотности церия велики, но более сглаженные; колебания плотности бромида относительно пологие.

Таким образом, на эвристическом уровне динамика системы (6.9)–(6.11) понятна, причем, как и в случае уравнения Хатчинсона (2.1), ее предельным объектом при  $a \rightarrow \infty$  является релаксационный цикл. Однако при разработке строгой теории сталкиваемся с существенными трудностями. В основном это связано с тем, что при  $a \rightarrow \infty$  имеют конечные пределы ненулевые характеристические показатели системы в вариациях релаксационного цикла, а сходимость к нулю ее мультиликаторов происходит за счет асимптотически большого периода колебаний. В связи с указанными обстоятельствами ниже ограничимся изложением формализма построения так называемой нулевой асимптотики релаксационного цикла, для обоснования которой сошлемся на результаты численного интегрирования системы (6.9)–(6.11). В частности, этот способ действий сделает наглядно ясными отмеченные выше свойства характеристических показателей и мультиликаторов систем в вариациях.

В теоретическом отношении еще более сложная задача решается во второй главе. Здесь же предпочтаем обойтись наглядными представлениями главным образом в связи с тем, что система (6.9)–(6.11) не содержит запаздывания, а значит, не принадлежит к числу наших главных объектов исследования. Отметить ее, однако, целесообразно, так как представляется, что значение в биофизике системы (6.9)–(6.11) примерно совпадает с ролью уравнения Хатчинсона (1.3) в математической экологии.

Вернемся к анализу системы (6.9)–(6.11). Начнем с напоминания, что обычная релаксационная система

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad x \in R^n, \quad y \in R^m \quad (6.12)$$

при некоторой общности положения — гладкое возмущение релейной системы

$$\dot{y} = g(x, y), \quad x = \begin{cases} \Phi_1(y), \\ \Phi_2(y), \end{cases} \quad (6.13)$$

где «полотенца»  $x = \Phi_s(y)$ ,  $s = 1, 2$ , находится из алгебраического уравнения  $f(x, y) = 0$ . Представляется правдоподобным, что в основе произвольной релаксационной системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, лежит подходящим образом устроенная релейная система, которую в интересующем нас случае системы (6.9)–(6.11) нужно брать зависящей от  $a$ . Наша цель — разумно выбрать аппроксимирующую (6.9)–(6.11) релейную систему, чтобы получить сколько-нибудь обоснованную информацию об асимптотических свойствах интересующего нас релаксационного цикла.

Итак, в случае нетрадиционной системы (6.9)–(6.11) ситуация сильно отличается от классического случая системы (6.12), где не зависящая от  $\varepsilon$  нулевая асимптотика релаксационного цикла определяется из релейной системы (6.13).

Отмеченные ранее свойства релаксационного цикла системы (6.9)–(6.11) подсказывают, что ее аппроксимирующую релейную систему следует определить таким образом. Отбросим уравнение (6.9), считая, что в уравнении (6.4)

$$N_1 = F(N_3). \quad (6.14)$$

Здесь

$$F(N_3) = \begin{cases} 0 & \text{при } N_3 > 1, \\ R & \text{при } N_3 < d, \\ 0 \text{ или } R & \text{при } d < N_3 < 1, \end{cases} \quad (6.15)$$

где большой параметр  $R$  равен максимальному значению первой координаты релаксационного цикла системы (6.9)–(6.11), а  $d = d(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Опишем способ функционирования релейной системы (6.10), (6.11), (6.14). Пусть для определенности  $\dot{N}_3(0) > 1$ . Тогда сначала в уравнении (6.10)  $N_1(t) \equiv 0$ , а поэтому  $N_2(t)$  убывает, что со временем приведет к убыванию  $N_3(t)$ . Тем самым найдется такой первый момент времени  $t_0$ , что  $N_3(t_0) = d$ . Если выполнено условие нормального переключения  $\dot{N}_3(t_0) < 0$ , то оно и происходит — в последующие моменты времени в (6.10)  $N_1(t) \equiv R$ . При  $t > t_0$  функция  $N_2(t)$  возрастает, что вызывает возрастание  $N_3(t)$ . Пусть  $t_1$  — такой первый момент времени, что  $N_3(t_1) = 1$ , причем выполнено условие нормального переключения  $\dot{N}_3(t_1) > 0$ . Тогда в последующие моменты времени в (6.10) снова  $N_1(t) \equiv 0$  и т. д.

В дальнейшем асимптотику цикла релейной системы (6.10), (6.11), (6.14) построим с помощью метода припасовывания. Опишем его суть. Произвольно возьмем два положительных числа  $\tau_1, \tau_2$  и в соответствии с (6.15) положим

$$N_1(t) = \begin{cases} R & \text{при } 0 < t < \tau_1, \\ 0 & \text{при } \tau_1 < t < \tau_1 + \tau_2, \end{cases} \quad (6.16)$$

а на остальные значения  $t$  продолжим  $N_1(t)$  по периодичности с периодом  $T = \tau_1 + \tau_2$ . При условии (6.16) из (6.10) однозначно находится  $T$ -периодическая функция  $N_2(t)$ . Подставляем ее в уравнение (6.11) и решаем его при начальном условии  $N_3(0) = d$ , требуя, чтобы

$$N_3(\tau_1) = 1, \quad N_3(\tau_1 + \tau_2) = d. \quad (6.17)$$

Эти равенства, называемые уравнениями периодов, позволяют, вообще говоря, найти  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Если дополнительно окажется, что лишних переключений на периоде нет, т. е.

$$N_3(t) < 1 \quad \text{при } 0 < t < \tau_1, \quad (6.18)$$

$$N_3(t) > d \quad \text{при } \tau_1 < t < \tau_1 + \tau_2, \quad (6.19)$$

и выполнены условия нормального переключения

$$\dot{N}_3(\tau_1) > 0 \quad \text{и} \quad \dot{N}_3(\tau_1 + \tau_2) < 0, \quad (6.20)$$

то построенный таким образом  $T$ -периодический режим — цикл релейной системы (6.10), (6.11), (6.14).

Из структуры системы (6.9)–(6.11) следует, что координаты ее цикла имеют единичные средние. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$R\tau_1 = \tau_1 + \tau_2. \quad (6.21)$$

Доставляемое равенством (6.21) ограничение в общем случае позволяет найти функциональную зависимость  $d$  от  $R$ .

Остановимся теперь на непростом вопросе о функциональной зависимости  $R$  от  $a$ . Всюду ниже считаем, что

$$R = a [1 - c(a)/\ln a], \quad (6.22)$$

где положительная функция  $c(a)$  ограничена при  $a \rightarrow \infty$ . Способ ее уточнения опишем позднее. Вначале же различные характеристики цикла релейной системы (6.10), (6.11), (6.14) будем определять с такой точностью, на которую не влияет произвол в выборе  $c(a)$ .

**6.3. Асимптотика цикла аппроксимирующей релейной системы.** Полагая  $u = 1/N_2$ , из (6.10) выводим

$$u(t) = \begin{cases} u(0)E(t) + \frac{1}{R}[1 - E(t)], & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ u(\tau_1) + r_2(t - \tau_1), & \tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2, \end{cases} \quad (6.23)$$

где  $E(t) = \exp(-r_2 R t)$  и где в силу периодичности

$$u(0) = 1/R + r_2 \tau_2 / [1 - E(\tau_1)]. \quad (6.24)$$

Пусть  $\nu = 1/N_3$ ,  $\nu(0) = 1/d$ ,  $\nu(\tau_1) = 1$ . Тогда из (6.11) следует

$$\nu(t) = \begin{cases} \frac{1}{d} R_-(t, 0) + r_3 \int_0^t R_-(t, s) ds, & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ R_-(t, \tau_1) + r_3 \int_{\tau_1}^t R_-(t, s) ds, & \tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2, \end{cases} \quad (6.25)$$

где

$$R_{\pm}(t, s) = \exp \left[ \pm r_3 \int_s^t \frac{d\sigma}{u(\sigma)} \right].$$

Сразу же отметим, что при  $0 \leq t \leq \tau_1$

$$R_+(t, 0) = \left[ 1 - \frac{1}{R u(0)} + \frac{E(-t)}{R u(0)} \right]^\gamma, \quad (6.26)$$

где  $\gamma = r_3/r_2$ , а при  $\tau_1 \leq s \leq t \leq \tau_1 + \tau_2$

$$R_-(t, s) = \left[ \frac{u(\tau_1) + r_2(s - \tau_1)}{u(\tau_1) + r_2(t - \tau_1)} \right]^\gamma. \quad (6.27)$$

Из условия непрерывности функции (6.25) в точке  $\tau_1$  вытекает равенство

$$\frac{1}{d} = R_+(\tau_1, 0) - r_3 \int_0^{\tau_1} R_+(s, 0) ds. \quad (6.28)$$

А так как в точке  $\tau_1 + \tau_2$  упомянутая функция (6.25) должна обращаться в  $1/d$ , то в дополнение к (6.28) имеем

$$\frac{1}{d} = R_-(\tau_1 + \tau_2, \tau_1) + r_3 \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} R_-(\tau_1 + \tau_2, s) ds. \quad (6.29)$$

Приравняем правые части формул (6.28) и (6.29), а затем исключим  $\tau_1$  с помощью равенства (6.21). В итоге выйдет уравнение для определения  $\tau_2$ , из которого с использованием формул (6.26) и (6.27) относительно просто следует, что

$$\tau_2 = (1/r_2) \ln A + O(1/\ln a), \quad (6.30)$$

$$A = \begin{cases} A_1 & \text{при } \gamma \leq 1, \\ A_2 & \text{при } \gamma > 1, \end{cases}$$

$$A_1 = a (\ln a)^{(1+1/\gamma)(1+1/\ln a)/(1+1/\gamma)},$$

$$A_2 = A_1 - (1+1/\gamma)^{1/\gamma}/(\ln a)^{1/\gamma}.$$

После этого асимптотика  $\tau_1$  и  $d$  строится при помощи формул (6.21), (6.22) и (6.28).

Пусть  $\underline{N}_2$  и  $\bar{N}_2$  — минимальное и максимальное значения функции  $N_2(t)$ .

Тогда

$$\underline{N}_2 = 1/\ln A + O(1/(\ln a)^3), \quad (6.31)$$

$$\frac{\bar{N}_2}{a} = 1 - \frac{(1 + 1/\gamma)^{1/\gamma} \ln [a (\ln a)^{1+1/\gamma}]}{(\ln a)^{1+1/\gamma}} + O\left(\frac{1}{(\ln a)^{1+1/\gamma}}\right). \quad (6.32)$$

Обоснование следует из того, что в силу формулы (6.23) функция  $u(t)$  свое максимальное значение принимает в нуле, а ее минимум достигается в точке  $\tau_1$ .

Нахождение  $\underline{N}_3$  и  $\bar{N}_3$  затруднительнее, что связано с более сложным поведением функции  $v(t)$ . Проще определяется ее максимум, который достигается в момент времени, асимптотически близкий к нулевому. Вычисления здесь базируются на тейлоровском представлении  $v(t)$ . Опуская несложные выкладки, приведем сразу окончательный результат

$$\underline{N}_3 = (1 + 1/\gamma)/\ln A + O(1/(\ln a)^3). \quad (6.33)$$

Минимум функции  $v(t)$  реализуется при некотором  $t$  из интервала  $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ . Используя формулы (6.25) и (6.27), убеждаемся, что он совпадает с минимумом при  $0 < x < 1$  функции

$$(1 - \Delta)x^x + \Delta/x, \quad \Delta = u(\tau_1)/(1 + 1/\gamma).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{N}_3}{a^{1/(1+\gamma)}} = \frac{1}{(1 + \gamma)^{1/(1+\gamma)}} + O\left(\frac{1}{(\ln a)^{1/\gamma}}\right). \quad (6.34)$$

Суммируем проведенные построения в виде следующего предложения.

**Лемма 6.1.** Построенные периодические функции  $N_2(t)$  и  $N_3(t)$  — компоненты цикла релейной системы (6.10), (6.11), (6.14).

Для доказательства нужно убедиться в справедливости неравенств (6.18), (6.19) и условий нормального переключения (6.20), что делается элементарно.

В дополнение к лемме 6.1 заметим, что построенный цикл орбитально экспоненциально устойчив, причем конечен его ненулевой характеристический показатель.

**6.4. О некоторых свойствах решений исходной системы.** Пусть  $N_1(0) = 1$ , а  $N_2(0)$  и  $N_3(0)$  выбраны с учетом формул (6.31) и (6.33). При асимптотическом интегрировании системы (6.9)–(6.11) с указанными начальными условиями основное затруднение связано с преодолением примыкающего к нулю асимптотически малого участка времени, когда происходит существенное изменение  $N_1(t)$ . Достаточно очевидно, что конечен интеграл от  $N_1(t)$  по сразу же начинающемуся промежутку ее взлета, длящемуся время порядка  $\ln a/r_1 a$ . Затем за время порядка  $\ln a/r_2 a$  функция  $N_1(t)$  примерно равна  $a$ . По истечении указанного промежутка происходит резкое возрастание  $N_3(t)$ , что приводит к падению  $N_1(t)$  до весьма малых значений. Асимптотическое интегрирование системы (6.9)–(6.11) при остальных значениях  $t$  трудностей не вызывает.

Из этого описания характера поведения решений системы (6.9)–(6.11) с наиболее интересными для нас начальными условиями вытекает, что максимальное значение  $\bar{N}_1$  компоненты  $N_1(t)$  ее релаксационного цикла должно с высокой точностью достигаться в момент времени, когда минимально значение компоненты  $N_3(t)$ . Поэтому из уравнения (6.9) и формулы (6.33) вытекает, что

$$N_1 = 1 - \frac{1 + 1/\gamma}{\ln A} + O\left(\frac{1}{(\ln a)^3}\right). \quad (6.35)$$

Опираясь на формулу (6.35), в (6.22) можно уточнить функцию  $c(a)$ , что позволит точнее рассчитать параметры релаксационного цикла релейной системы (6.10), (6.11), (6.14).

Теперь кратко о  $C$ -теореме для системы (6.9)–(6.11). Естественно, она имеет место, а ее доказательство — расширение изложенного выше общего описания с учетом развитой в предыдущем пункте техники. Теорема о  $C^1$ -сходимости здесь также имеет место, но ее доказательство совсем уж громоздко.

В заключение приведем таблицу, в которой в нижних строках — значения, найденные по формулам (6.30)–(6.35), а в верхних — результаты численного интегрирования системы (6.9)–(6.11) для характерного случая  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ .

$a$	$T$	$\bar{N}_1/a$	$\bar{N}_2/a$	$\bar{N}_3/\sqrt{a}$	$\underline{N}_2$	$\underline{N}_3$
200	8,7	0,76	0,46	0,62	0,116	0,232
	8,4	0,76	0,38	0,71	0,118	0,236
500	9,9	0,79	0,50	0,64	0,101	0,202
	9,6	0,79	0,49	0,71	0,104	0,208
700	10,4	0,80	0,51	0,65	0,096	0,193
	10,1	0,80	0,52	0,71	0,099	0,198
1000	10,8	0,81	0,52	0,66	0,092	0,185
	10,5	0,81	0,55	0,71	0,095	0,190

6.5. Биологические и физические системы типа реакция—диффузия. Для целого ряда задач биофизики и математической экологии типична ситуация, когда единственный атTRACTор точечной модели

$$\dot{u} = F(u) \quad (6.36)$$

— ее орбитально экспоненциально устойчивый цикл  $u_0(t)$ . В (6.36)  $u \in R^n$ ,  $n > 2$ , а  $F$  — гладкая вектор-функция. Для примера сошлемся на уравнение Хатчинсона (1.3) и математическую модель реакции Белоусова (6.9)–(6.11) в наиболее важном диапазоне изменения ее параметров. При этом наличие или отсутствие запаздывания в рассматриваемых ниже вопросах роли не играет.

Принципиальна и трудна проблема адекватности точечной модели (6.36) в тех случаях, когда недостаточно экспериментального материала или когда неоднозначна его интерпретация. Поэтому важна выработка общих и объективных оценок качества математических моделей биофизики и математической экологии. Подойдем к этому вопросу со следующей стороны. Предположим, что в какой-то конкретной задаче осмыслен (более того, имеет большое значение) учет диффузионных факторов. Тем самым целесообразно вместе с (6.36) рассмотреть систему типа реакция—диффузия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6.37)$$

где  $D = \text{diag} \{d_j\}$ ,  $d_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а  $\Omega$  — ограниченная область с кусочно гладкой границей в  $R^2$  или  $R^3$ . Ее фазовым пространством (пространством начальных условий) считаем  $C(\Omega)$ .

Начнем со следующего понятия.

**Определение 1.** Краевую задачу (6.37) отнесем к числу простых физических, если ее однородный цикл  $u_0(t)$  устойчив при любом изменении коэффициентов диффузии.

Целенаправленный анализ показывает, что существование устойчивых пространственно неоднородных режимов в простых физических системах целиком связано с хорошей геометрией области  $\Omega$ . Например, на окружности для такого типа систем характерны бегущие волны [23], невозможные для уравнения Хатчинсона с диффузией [41]. Оказывается также, что большинство широко используемых в биофизике и математической экологии именных математических моделей относится к числу простых физических [46]. Природа данного феномена проста: все эти модели в той или иной степени — варианты системы Ван-дер-Поля.

Чтобы сформулировать очередное определение, изложим сначала факты, относящиеся к устойчивости однородного цикла системы (6.9)–(6.11) с учетом диффузионных факторов. Соответствующее исследование выполнено в [27]. Как оказывается, в среде с диффузией цикл системы (6.9)–(6.11) неустойчив, если, во-первых, по своей форме он уже приобрел релаксационные черты и если, во-вторых, соблюдена иерархия достаточно малых коэффициентов диффузии

$$d_1 < d_2 < d_3, \quad (6.38)$$

соответствующих  $N_1, N_2, N_3$ . Если при соблюдении неравенств (6.38) начать пропорционально уменьшать коэффициенты диффузии, то количество мод, на которых наблюдается неустойчивость, относительно невелико, причем происходит их смещение в сторону высокомодовости. Последнее означает, что с уменьшением коэффициентов диффузии на младших модах устойчивость восстанавливается, а диффузионная неустойчивость наблюдается за счет мод со все более высокими номерами.

**Определение 2.** Краевую задачу (6.37) отнесем к числу сложных физических, если механизм диффузионной неустойчивости ее однородного цикла  $u_0(t)$  носит описанный выше характер.

Пока нам известны только два по-настоящему содержательных примера сложных физических систем типа реакция—диффузия. Один из них — это, конечно, математическая модель реакции Белоусова. О втором скажем в следующей главе.

Из формул (3.10) следует, что в случае уравнения Хатчинсона с диффузией ситуация иная: с уменьшением коэффициента диффузии монотонно растет число мод, на которых неустойчив хатчинсоновский цикл.

**Определение 3.** Краевую задачу (6.37) отнесем к числу биологических, если диффузионная неустойчивость ее однородного цикла  $u_0(t)$  носит хатчинсоновский характер, т. е. при погружении в область неустойчивости за счет пропорционального уменьшения коэффициентов диффузии получаем описанную выше картину.

Представляется правдоподобным, что только в биологических системах типа реакция—диффузия возникают режимы самоорганизации.

Конечно, предложенная классификация краевых задач вида (6.37) должна уточняться и расширяться по мере накопления информации о характере и природе пространственно неоднородных режимов в средах с диффузией.

## Глава вторая

# РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ НАСЕКОМЫХ

### 7. Описание математической модели и теорема о существовании релаксационных циклов

**7.1. Математическая модель отдельной популяции насекомых.** Жизненный цикл насекомых сложен. Опишем, например, кратко годовой жизненный цикл зимней пяденицы [5]. Ее бабочки выходят из почвы под дубами в ноябре и декабре. Бескрылые самки ползут к деревьям и поднимаются по стволам. Крылатые самцы собираются на нижней части стволов. Здесь они спариваются с самками, которые продолжают подниматься, чтобы отложить яйца в трещинах коры и в лишайниках высоко над землей. В среднем каждая самка откладывает около 150 яиц. В начале апреля, когда почки на дубах раскрываются, появляются личинки. Ко второй половине мая они заканчивают питание и на шелковинках спускаются с деревьев, зарываются в почву, завивают коконы и окукливаются. Затем процесс повторяется.

Изложенный в п. 1.2 способ моделирования биологических сообществ подсказывает, что для описания динамики изменения численности активных фаз насекомых с полным метаморфозом (стадии яйца и куколки — своеобразные формы беременности) целесообразно взять систему дифференциально-разностных уравнений [39]

$$\dot{N}_1 = r_1 [1 - a(1 - N_2(t - h_1)/K_2) - N_1(t - h_2)/K_1] N_1, \quad (7.1)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 [N_1(t - (1 - h_1 - h_2))/K_1 - N_2/K_2] N_2. \quad (7.2)$$

Здесь  $N_1$  — количество имаго,  $N_2$  — личинок,  $h_1$  — время между появлением личинок и имаго,  $(1 - h_1)$  — время между появлением имаго и личинок,  $h_2$  — среднее время жизни в году популяции имаго,  $K_1$  и  $K_2$  — средние численности,  $r_1(1 - a)$  — малтузианский коэффициент линейного роста. Параметр  $r_2$  зависит от скорости отрождения личинок, а значит, не мал. Параметр  $a < 1$  характеризует долю личинок, достигающих стадии имаго.

Итак, при составлении системы (7.1), (7.2) предполагается, что динамика популяций насекомых в основном определяется ее активными фазами — имаго и личинок. Эти фазы в жизненном цикле насекомых играют ключевую роль: имаго осуществляет воспроизведение вида, а на стадии личинок идет внутривидовая борьба. Собственно, сама структура уравнений (7.1), (7.2) — отражение биологического смысла этих двух фаз. Иными словами мы считаем правдоподобным, что пассивные фазы яйца и куколки не должны входить в динамические уравнения. Представляется, что определение колебаний их численности — вторичная задача, в некоторой степени аналогичная той, которая возникает при нахождении колебаний численности возрастных групп популяций млекопитающих и рыб.

Пусть  $r_0 = r_1(1 - a)$ . Из биологического смысла малтузианского коэффициента линейного роста следует (ср. с формулой (1.4)), что

$$r_0 = \ln pm, \quad (7.3)$$

где  $p$  — доля самок в популяции имаго,  $m$  — среднее число яиц, откладываемых одной самкой. Определение параметров  $h_1$  и  $h_2$  из анализа экспериментального материала также не вызывает затруднений. Как уже сказано выше, параметр

$r_2$  относительно велик. Поэтому осмысленно в (7.2) устремить  $r_2$  к бесконечности, вводя в рассмотрение предельное уравнение

$$\dot{N} = r_0 \left[ 1 + \frac{a}{\varepsilon} N(t - (H_0 - h_0)) - \frac{1}{\varepsilon} N(t - h_0) \right] N. \quad (7.4)$$

Здесь

$$N = N_1/K_1, \quad h_0 = h_2, \quad \varepsilon = 1 - a, \quad N_2/K_2 = N(t - (H_0 - h_1 - h_2)).$$

При описанном способе вывода уравнения (7.4) из системы (7.1), (7.2)  $H_0 = 1$ . Однако в дальнейшем удобно считать параметр  $H_0$  произвольным целым числом, чтобы охватить случаи, когда жизненный цикл насекомых больше одного года. Впрочем, скажем, в популяции сибирского шелкопряда жизненный цикл длится иногда один год, а иногда — два года, причем с равной частотой [4, 52]. В этом случае первое слагаемое, стоящее в квадратных скобках правой части (7.2), заменяется на выражение

$$\frac{N_1(t - (1 - h_1 - h_2)) + N_1(t - (2 - h_1 - h_2))}{2K_1}.$$

Соответственно в (7.4)  $\frac{a}{\varepsilon} N(t - (H_0 - h_0))$  нужно заменить на

$$\frac{a}{2\varepsilon} (N(t - (1 - h_0)) + N(t - (2 - h_0))).$$

Отметим также, что для сибирского шелкопряда

$$r_0 = 5; \quad h_1 = 0,84; \quad h_2 = 0,12,$$

параметр  $a$ , вероятно, немного больше 0,5, а  $r_2$  располагается между 10 и 15.

К настоящему времени система (7.1), (7.2) относительно подробно проанализирована с помощью численных методов. Перечислим кратко основные свойства аттракторов ее решений с положительными начальными условиями.

Во-первых, она диссипативна. Во-вторых, ее установившиеся режимы носят хорошо выраженный  $\delta$ -образный характер. В-третьих, биологический период (время между соседними всплесками численности или некоторыми их группами) очень близок к единице. В-четвертых, стационарные режимы часто носят сложный характер, причем наблюдается постепенное нарастание колебаний с последующей фазой депрессии, т. е. хорошо моделируется известное в природе явление вспышек численности. В-пятых, стационарные режимы чувствительны даже к небольшим изменениям параметров. В-шестых, могут существовать сразу большое число качественно различных стационарных режимов.

Это перечисление можно продолжать еще долго. Но уже из отмеченных свойств решений системы (7.1), (7.2) следует, что при тонком сопоставлении теоретических и экспериментальных данных обязательно возникнут затруднения технического характера, связанные с обычной неопределенностью ряда параметров. Поэтому статья [59], в которой дано теоретическое объяснение классическим экспериментам Николсона, Бирга и Кромби (их описание см. в [5]), представляется совсем непростой. Ее результаты, в частности, позволяют сделать заключение о хорошей апробации биологического закона, в краткой форме выраженного системой (7.1), (7.2).

В связи с экспериментальной проверкой модели (7.1), (7.2) подчеркнем следующие два обстоятельства. Во-первых, специфика большинства лабораторных экспериментов такова, что параметр  $a$  относительно мал в силу жесткой конкуренции среди личинок. Во-вторых, при их моделировании следует более тонко учитывать возрастную структуру рассматриваемой популяции (в статье [59]

использован достаточно простой вариант, что придает ей дополнительную ценность.

С динамической точки зрения при не малых  $r_2$  одно уравнение (7.4) эквивалентно системе (7.1), (7.2). Однако стационарные режимы уравнения (7.4) много чувствительнее к вариации параметров, т. е. ситуация обычная — или простота, или стабильность. Все же в дальнейшем мы предпочтем более простое уравнение (7.4), считая, что фигурирующий в его правой части параметр  $\varepsilon$  достаточно мал, т. е. порождаемая им система автоматического регулирования энергетически перевозбуждена. При этом условии поставим вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости релаксационных циклов конечной амплитуды уравнения (7.4). Эта задача, поставленная вторым автором еще в 1982 г., важна хотя бы по той причине, что ее решение позволит аналитическими средствами выявить свойства его стационарных режимов, аналогичные полученным численно. Чтобы ниже разобраться также с границей применимости теоретических результатов, суммируем в таблице ряд важных числовых характеристик массовых видов насекомых, полученных путем анализа экспериментального материала из [1, 6, 9, 51, 67].

Вид	$r_0$	$h_0$
Зимняя пяденица	3,2	0,125
Сосновая пяденица	3,5	0,09
Колорадский жук	3,5	0,14
Сосновый коконопряд	3,6	0,125
Вредная черепашка	3,7	0,1
Рыжий сосновый пилильщик	4	0,09
Сосновая совка	4,5	0,06

**7.2. Математическая модель задачи паразит-хозяин.** Считаем, что паразит откладывает яйца в личинки хозяина, внутри которых затем развиваются личинки паразита. Отсюда и из уже изложенных ранее общих принципов следует, что для активных фаз рассматриваемых насекомых имеем систему уравнений [36]

$$\dot{N}_1 = r_1 \left[ 1 - a_1 \left( 1 - \frac{N_2(t-h_1)}{K_2} \right) + a_2 \left( 1 - \frac{M_2(t-(q_1+q_2-\gamma))}{Q_2} \right) - \frac{N_1(t-h_2)}{K_1} \right] N_1, \quad (7.5)$$

$$\dot{N}_2 = r_2 \left[ \frac{N_1(t-(1-h_1-h_2))}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right] N_2, \quad (7.6)$$

$$\dot{M}_1 = p_1 \left[ \frac{N_2(t-(h_1+h_2+\gamma))}{K_2} - a_3 \left( 1 - \frac{M_2(t-q_1)}{Q_2} \right) - \frac{M_1(t-q_2)}{Q_1} \right] M_1, \quad (7.7)$$

$$\dot{M}_2 = p_2 \left[ \frac{M_1(t-(1-q_1-q_2))}{Q_1} - \frac{M_2}{Q_2} \right] M_2. \quad (7.8)$$

Здесь  $\gamma$  — время между окончанием вылета имаго хозяина и имаго паразита;  $r_1(1-a_1+a_2)$  и  $p_1(1-a_3)$  — соответственно мальтузианские коэффициенты линейного роста хозяина и паразита; параметры  $a_1$  и  $a_3$ , каждый из которых

меньше единицы, характеризуют глубину связи между популяциями личинок и имаго хозяина и паразита соответственно; параметр  $a_2$  — коэффициент давления паразита на хозяина, что приводит к уменьшению средней численности имаго хозяина в  $(1 + a_2)$  раз; биологический смысл остальных параметров ясен.

Сделаем пояснения к способу выбора величин запаздываний в цепях внешней обратной связи. Пусть  $s_1$  — время между появлением личинок паразита и окончанием вылета имаго хозяина, а  $s_2$  — время между окончанием вылета имаго паразита в текущем году и появлением личинок хозяина в прошлом году. Тогда справедливы равенства

$$s_1 = q_1 + q_2 - \gamma, \quad s_2 = h_1 + h_2 + \gamma,$$

делающие более понятным данный вопрос.

Подчеркнем также, что в правой части уравнения (7.5) фигурирует  $M_2$ , а не  $M_1$ . Связано это с тем, что количество имаго хозяина зависит от числа незараженных паразитом личинок, т. е. в конечном счете от количества личинок паразита в соответствующий временной промежуток.

Как было отмечено в предыдущем пункте, коэффициенты  $r_2$  и  $p_2$  не малы. Устремляя каждый из них к бесконечности, приходим к заметно более простой системе

$$\begin{aligned} \dot{N} &= r [1 - a_1 (1 - N(t - (1 - h))) + a_2 (1 - M(t - (1 - \gamma))) - \\ &\quad - N(t - h)] N, \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\dot{M} = p [N(t - (1 + \gamma)) - a_3 (1 - M(t - (1 - q))) - M(t - q)] M. \quad (7.10)$$

Здесь

$$N = N_1/K_1, \quad M = M_1/Q_1, \quad r = r_1, \quad p = p_1, \quad h = h_2, \quad q = q_2.$$

Наконец, при  $M \equiv 0$  приходим к уравнению (7.4), в котором  $a = a_1/(1 + a_2)$ . Отсюда следует, что давление паразита углубляет связь между популяциями личинок и имаго хозяина.

Аналогичным образом моделируются более сложные сообщества насекомых (см. [16], где проведено также сопоставление с рядом природных наблюдений). В теоретическом отношении наш подход стыкуется с представлениями из [6, 7], где изменение численности насекомых во времени трактуется как автoreгулируемый процесс.

Ниже мы не будем касаться вопроса о релаксационных циклах системы (7.9), (7.10), т. е. цель данного пункта — привлечь внимание к интересной нерешенной задаче.

**7.3. Теорема о существовании релаксационных циклов.** Из биологических соображений следует, что при малых значениях  $\epsilon$  уравнение (7.4) может иметь релаксационные циклы следующего характера: примерно время  $h_0$  функция  $N$  по порядку равна единице (имаго есть), а потом время, близкое к  $H_0 - h_0$ , значения  $N$  весьма малы (имаго нет). Наша ближайшая цель — придать строгий смысл этому наглядному представлению.

Удобно унифицировать уравнение (7.4), выполняя нормирующую замену времени  $t/(H_0 - h_0) \rightarrow t$ . Приходим к уравнению

$$\dot{N} = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{\epsilon} N(t - 1) - \frac{1}{\epsilon} N(t - h) \right] N, \quad (7.11)$$

где  $\lambda = (H_0 + h_0)r_0$ ,  $h = h_0/(H_0 - h_0)$ .

Введем в рассмотрение одномерное отображение

$$z \rightarrow 1 + h + z - [\exp \lambda (z + h) - \exp \lambda z]/\lambda, \quad (7.12)$$

правую часть которого обозначим через  $F$ . Говорят, что отображение (7.12) имеет экспоненциально устойчивый цикл

$$z_0, \dots, z_k, \quad (7.13)$$

если числа (7.13) попарно различны,  $F(z_i) = z_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k$ ,  $z_{k+1} = z_0$  и мультипликатор

$$F'(z_0) \cdot \dots \cdot F'(z_k)$$

по модулю меньше единицы.

**Теорема 7.1.** Пусть одномерное отображение (7.12) имеет экспоненциально устойчивый цикл (7.13). Тогда при  $h < 1$  найдется такое  $\varepsilon_k > 0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$  уравнение (7.11) имеет релаксационный цикл, определенным образом связанный с циклом (7.13) отображения (7.12), общий характер которого в терминах уравнения (7.4) описан выше.

Доказательство теоремы начнем с простейшего случая, когда цикл отображения (7.12) — его состояние равновесия

$$z_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda(1+h)}{\exp \lambda h - 1}. \quad (7.14)$$

При этом считаем, что  $\lambda(1+h) < 2$ , т. е. состояние равновесия (7.14) экспоненциально устойчиво.

В фазовом пространстве  $C(-1, 0)$  уравнения (7.11) будем, конечно, рассматривать только неотрицательные функции. В этом классе функций выделим такое выпуклое замкнутое множество  $S_0$ , что на нем определен оператор последования  $\Pi$ , причем  $\Pi S_0 \subset S_0$ .

Положим

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \exp \lambda [z_0 + h + \varepsilon^{1/3}], \quad M = \exp \lambda [z_0 + h - \varepsilon^{1/3}], \\ \underline{N}(t, \varepsilon) &= \underline{M} \exp \left\{ \lambda(t+1) - \frac{\varepsilon}{a\underline{M} + \varepsilon} \left[ -1 + \exp \lambda \frac{a\bar{M} + \varepsilon}{\varepsilon} (t+1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

По определению  $N(t, \varepsilon) \in S_0$ , если, во-вторых,

$$\underline{N}(t, \varepsilon) \leq N(t, \varepsilon) \leq \bar{M}, \quad -1 \leq t \leq -1 + \delta_1(\varepsilon), \quad (7.15)$$

где  $\delta_1(\varepsilon) = (\frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon z_0) \exp [-\lambda(z_0 + h)]$ ; во-вторых,  $N(t, \varepsilon)$  монотонно убывает при

$$-1 + \delta_1(\varepsilon) \leq t \leq -1 + \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) + \delta_2(\varepsilon), \quad (7.16)$$

где  $\delta_2(\varepsilon) = \left( \frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon(z_0 + h) \right) \exp [-\lambda z_0 + 3 \exp (-\lambda h)]$ ; в-третьих,

$$N(t, \varepsilon) \leq \varepsilon \begin{cases} \exp \left[ -\frac{m(1-\delta(\varepsilon)+t)}{\varepsilon} \right], & -1 + \delta(\varepsilon) \leq t \leq -1/2, \\ \exp \frac{m(1-2\delta(\varepsilon)t)}{\varepsilon}, & -1/2 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

где постоянная  $m > 0$  обслуживает все функции из  $S_0$ ; в-четвертых,  $N(0, \varepsilon) = \varepsilon$ ; наконец, в-пятых,

$$z_0 - \varepsilon^{1/2} \leq z_{\text{вых}} \leq z_0 + \varepsilon^{1/2}, \quad (7.18)$$

где

$$z_{\text{вых}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{-1+\delta(\varepsilon)} N(t, \varepsilon) dt - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.19)$$

Сохраним обозначение  $N(t, \varepsilon)$ ,  $t \geq 0$ , за решением уравнения (7.11) с начальным условием из  $S_0$ . Отметим ряд его важных для дальнейшего свойств. Из неравенств (7.17) и (7.18) вытекает, что при  $h \leq t \leq h + \delta(\varepsilon)$

$$N(t, \varepsilon) \leq \exp \lambda (z_0 + h + 2\varepsilon^{1/2}). \quad (7.20)$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\int_{-1}^{-1+\delta_1(\varepsilon)} N(t, \varepsilon) dt > \frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon z_0 - \varepsilon \frac{\exp(-\lambda h)}{\lambda}. \quad (7.21)$$

Из неравенств (7.17) и (7.21) выводим, что при  $\delta_1(\varepsilon) \leq t \leq h$

$$N(t, \varepsilon) \geq \exp [\lambda z_0 - 2 \exp(-\lambda h)]. \quad (7.22)$$

Опираясь на неравенства (7.17), (7.20), (7.22) и обращаясь к уравнению (7.11), заключаем, что при  $h + \delta_1(\varepsilon) \leq t \leq \min(2h, 1) = h$ .

$$\begin{aligned} N(t, \varepsilon) &\leq \exp \lambda \left\{ z_0 + h + 3\varepsilon^{1/2} + [t - h - \delta_1(\varepsilon)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \exp [\lambda z_0 - 2 \exp(-\lambda h)] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Неравенство (7.23) позволяет сделать вывод, что при  $h + \delta(\varepsilon) \leq t \leq h$ . решение  $N(t, \varepsilon)$  удовлетворяет неравенству типа (7.17) и что

$$\int_{h+\delta_1(\varepsilon)}^{h_*} N(t, \varepsilon) dt \leq \varepsilon \exp \lambda [h + 3 \exp(-\lambda h)]. \quad (7.24)$$

Обозначим через  $t_N$ , где в силу (7.22) и (7.23)

$$h < t_N < h + \delta(\varepsilon), \quad (7.25)$$

такой момент времени, что  $N(t_N, \varepsilon) = \varepsilon$ . Промежуток  $0 \leq t \leq t_N$  назовем временем всплеска  $N(t, \varepsilon)$ .

Из структуры уравнения (7.11) следует, что при  $h_* \leq t \leq 1$  решение  $N(t, \varepsilon)$  также удовлетворяет неравенству типа (7.17), а его существенный рост начинается при  $t > 1$ . Ясно также, что в некоторый момент времени  $T$  решение  $N(t, \varepsilon)$  в первый раз достигает значения  $\varepsilon$  не позднее и не ранее того, как произойдет компенсация предыдущего падения. Поэтому в силу неравенств (7.18) и (7.25)

$$|T - 1 - h| < \delta(\varepsilon). \quad (7.26)$$

Поделим левую и правую части уравнения (7.11) на  $N(t, \varepsilon)$  и результат проинтегрируем по отрезку  $[0, T]$ . Используя неравенства (7.17), (7.26) и формулу (7.19), преобразуем получившееся в итоге выражение к виду

$$z_{\text{вых}} = F(z_{\text{вых}}) + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)), \quad (7.27)$$

где указанный порядок малости равномерен по выбору начального условия из  $S_0$ , а

$$z_{\text{вых}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{T-1}^{t_N} N(t, \varepsilon) dt - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.28)$$

Из неравенств (7.18), условий теоремы и формулы (7.27) вытекает, что

$$z_0 - q \varepsilon^{1/2} \leq z_{\text{вых}} \leq z_0 + q \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < q < 1. \quad (7.29)$$

Из левого неравенства (7.18), правого неравенства (7.15) и уравнения (7.11) следует, что при  $h \leq t \leq h + \delta_1(\varepsilon)$

$$N(t, \varepsilon) \geq \exp \left\{ \lambda(z_0 - 2\varepsilon^{1/2} + t) - \frac{\varepsilon}{aM + \varepsilon} \left[ -1 + \exp \lambda \frac{aM + \varepsilon}{\varepsilon} (t - h) \right] \right\}. \quad (7.30)$$

Из (7.30) выводим аналогичное (7.21) неравенство

$$\int_h^{h + \delta_1(\varepsilon)} N(t, \varepsilon) dt \geq \frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon z_0 - \varepsilon \frac{\exp(-\lambda h)}{\lambda}. \quad (7.31)$$

Допустим, что

$$T = 1 + h + \varepsilon \gamma \exp[-\lambda(z_0 + h)], \quad (7.32)$$

где  $\gamma > 0$  такое, что неравенство (7.26) соблюдается. При условии (7.32) из неравенств (7.20) и (7.24) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{T-1}^{t_N} N(t, \varepsilon) dt &\leq \int_h^{h_*} N(t, \varepsilon) dt \leq [\delta_1(\varepsilon) - \varepsilon \gamma \exp(-\lambda(z_0 + h))] \exp(z_0 + h + \\ &+ 2\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon \exp \lambda [h + 3 \exp(-\lambda h)] \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon (z_0 - \gamma) + \\ &+ \varepsilon \exp \lambda [h + 4 \exp(-\lambda h)]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из формулы (7.28) и неравенств (7.29), (7.33) заключаем, что заведомо

$$\gamma \leq \exp \lambda [h + 5 \exp(-\lambda h)]. \quad (7.34)$$

Предположим, что

$$T = 1 + h - \varepsilon \gamma \exp[-\lambda(z_0 + h)]. \quad (7.35)$$

Так как равномерно по начальному условию при  $h - \varepsilon \gamma \exp[-\lambda(z_0 + h)] \leq t \leq h$  решение  $N(t, \varepsilon)$  отличается от  $\exp \lambda (z_0 + t)$  на величину порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , то в силу неравенства (7.31)

$$\int_{T-1}^{t_N} N(t, \varepsilon) dt \geq \frac{1}{2} \varepsilon \gamma + \frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon z_0 - \varepsilon \frac{\exp(-\lambda h)}{\lambda}. \quad (7.36)$$

Из сопоставления неравенства (7.36) с правым неравенством (7.29) выводим, что

$$\gamma \leq 3 \frac{\exp(-\lambda h)}{\lambda}. \quad (7.37)$$

Неравенства (7.34) и (7.37) приводят к более тонкой по сравнению с (7.26) оценке

$$|T - 1 - h| \leq \varepsilon h m_0, \quad (7.38)$$

где постоянная  $m_0$  ограничена при  $h \rightarrow 0$ . Из неравенства (7.38) следует, в частности, что период искомого цикла уравнения (7.4) с хорошей точностью близок к  $H_0$ .

Заметим, что в силу неравенства (7.30) и отмеченного чуть выше асимптотического свойства  $N(t, \varepsilon)$  величины

$$\int\limits_{\frac{h}{(1+\varepsilon m_0)h}}^{(1+\varepsilon m_0)h} N(t, \varepsilon) dt, \quad \int\limits_{\frac{h}{(1-\varepsilon m_0)h}}^h N(t, \varepsilon) dt$$

равномерно по начальному условию имеют порядок  $\varepsilon$ . Отсюда и из неравенств (7.20), (7.30) следует, что  $N(T+t, \varepsilon)$  удовлетворяет неравенствам (7.15) (напоминаем, что попутно, в частности,  $\varepsilon^{1/2}$  заменяется на  $\varepsilon^{1/3}$ , а это позволяет компенсировать отличие  $T$  от  $1+h$ ). Монотонное убывание  $N(T+t, \varepsilon)$  при значениях  $t$ , удовлетворяющих неравенствам (7.16), обеспечивает неравенство (7.22) и структура правой части уравнения (7.11). Неравенство (7.17) для  $N(T+t, \varepsilon)$  при

$$m = \frac{\lambda h (1+h)}{2 [1 - \exp(-\lambda h)]} \exp[\lambda h - 2 \exp(-\lambda h)]$$

— следствие формулы (7.14), неравенства (7.22) и структуры уравнения (7.11). Итак, на множестве  $S_0$  построен оператор последований  $\Pi(N) = N(T+t, \varepsilon)$ , преобразующий его в себя.

В общем случае, когда отображение (7.12) имеет экспоненциально устойчивый цикл (7.13) с  $k \geq 1$ , можно ограничиться рядом пояснений.

Множество  $S_0$  конструируется, как и ранее, а оператор последований представляется в виде

$$\Pi = \Pi_k \cdot \Pi_{k-1} \cdot \dots \cdot \Pi_0.$$

Затем показывается, что оператор  $\Pi_0$  преобразует  $S_0$  в  $S_1$ , где свойства  $S_1$  аналогичны  $S_0$ , но с заменой  $z_0$  на  $z_1$ . При этом если

$$z_0 - \varepsilon^{1/2} \leq z_{\text{вх}}^0 \leq z_0 + \varepsilon^{1/2},$$

то

$$z_1 - q_0 \varepsilon^{1/2} \leq z_{\text{вх}}^1 \leq z_1 + q_0 \varepsilon^{1/2},$$

где  $z_{\text{вх}}^1$  вычисляется по аналогичной (7.28) формуле, а  $q_0$  лишь чуть больше  $|F'(z_0)|$ . Продолжая этот процесс, убеждаемся, что оператор  $\Pi$  определен на  $S_0$  и преобразует его в себя. Доказательство закончено.

Резюме к изложенному доказательству: инвариантное множество  $S_0$  устроено столь сложно, что догадаться о его структуре — фактически предсказать достаточно нетривиальные асимптотические свойства периодических решений.

**7.4. О границе применимости теоремы 7.1.** Полагая  $M = \exp \lambda(z+h)$ , преобразуем отображение (7.12) к виду

$$M \mapsto M \exp \{r_0 H_0 - [1 - \exp(-r_0 h_0)] M\}, \quad (7.39)$$

где попутно осуществлен переход к параметрам уравнения (7.4). Из доказательства теоремы 7.1 следует, что

$$\varepsilon \ll \min M_i, \quad (7.40)$$

где  $M_i = \exp \lambda(z_i + h)$ , а  $z_i$  — числа (7.13). Ограничение (7.40) необременительное, когда аттрактор отображения (7.39) состоит из экспоненциально устойчивого состояния равновесия. Численное интегрирование уравнения (7.11), выполненное Н. Б. Федотовым, показало, что в этом случае при увеличении энер-

гетического параметра  $a$  из уплотнения траекторий рождается устойчивый цикл, сохраняющийся при любом разумном уменьшении  $\varepsilon$ . При  $\lambda(1+h) > 2$  сначала ситуация аналогична, но с уменьшением  $\varepsilon$  цикл претерпевает различные бифуркации, причем неизбежно в соответствии с законом, задаваемым отображением (7.12). Причина проста — с ростом  $\lambda$  правая часть в (7.40) становится чрезмерно малой. В частности, для большинства массовых видов насекомых, что следует из приведенных в таблице их числовых характеристик, мала правая часть неравенства (7.40).

**7.5. Дальнейшая схема исследования.** Из доказательства теоремы 7.1 вытекает, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оператор последовательности  $\Pi$  на множестве  $S_0$  сходится в достаточно слабом и своеобразном смысле к циклу (7.13) отображения (7.12). Отсутствие предельного объекта в хороший топологии — главная причина последующих затруднений.

В следующем разделе нам удастся построить асимптотику только самого простого из релаксационных циклов, соответствующего экспоненциальному устойчивому состоянию равновесия (7.14) отображения (7.12), при дополнительном предположении о малости запаздывания  $h$  в уравнении (7.11). Подчеркнем, что мы сможем построить асимптотику именно цикла, а не семейства решений с близкими начальными условиями. Поэтому теорема о  $C^1$ -сходимости сводится ровно к вычислению предельных значений мультиликаторов уравнения в вариациях. Мы считаем нетривиальным тот факт, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  счетное их число имеет ненулевые пределы (совсем даже непростое обоснование у нас займет весь девятый раздел).

В конце главы будет изложен новый вопрос — существование и сильная неустойчивость релаксационных циклов конечной амплитуды уравнения (7.11) с более сложной временной упорядоченностью.

## 8. Асимптотические свойства простейшего релаксационного цикла

**8.1. Базовая краевая задача.** Как уже говорилось, основное внимание уделим построению асимптотики простейшего релаксационного цикла, период которого согласно оценке (7.38) равен  $1 + h + \varepsilon\nu$ , где зависящий от  $\varepsilon$  параметр  $\nu$  подлежит определению. О способе распространения развитой техники на общий случай скажем в конце раздела.

Пусть  $N(t, \varepsilon)$  — рассматриваемое периодическое решение уравнения (7.11). Введем обозначения

$$\varphi(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} N(t, \varepsilon), \quad -1 + h + \varepsilon\nu \leq t \leq h + \varepsilon\nu,$$

$$\Phi_\varphi(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} N(t + 1 + h + \varepsilon\nu, \varepsilon), \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Очевидно, при  $-1 + h + \varepsilon\nu \leq t \leq 0$  на цикле должно выполняться равенство

$$\varphi(t, \varepsilon) = \Phi_\varphi(t, \varepsilon). \tag{8.1}$$

Далее, из уравнения (7.11) следует, что при  $0 \leq t \leq h + \varepsilon\nu$  должно иметь место равенство

$$\varphi(t, \varepsilon) = \exp \left[ \lambda t + \lambda a \int_{-1}^{t-1} \Phi_\varphi(s, \varepsilon) ds - \lambda \int_{-h}^{t-h} \varphi(s, \varepsilon) ds \right]. \tag{8.2}$$

Проведем упрощение центрального равенства (8.2), связанного с участком всплеска цикла. Сделать это можно и нужно, так как на рассматриваемом

временным промежутке главный вклад в формирование  $\varphi(t, \varepsilon)$  вносит ее степенная асимптотика.

Из уравнения (7.11) вытекает, что

$$\Phi_\varphi(t, \varepsilon) = \varphi(h + \varepsilon\nu, \varepsilon) \exp \left[ \lambda(t+1) + \frac{\lambda a}{\varepsilon} \int_{-1+h+\varepsilon\nu}^{t+h+\varepsilon\nu} N(s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{\varepsilon\nu}^{t+1+\varepsilon\nu} N(s, \varepsilon) ds \right]. \quad (8.3)$$

Из (8.2) и (8.3) выводим, что при  $0 < t < h$  с точностью до величин порядка  $\exp(-m/\varepsilon)$ ,  $m > 0$ , справедливо равенство

$$\varphi(t, \varepsilon) = \exp \left[ \lambda t - \lambda \int_{-h}^{t-h} \varphi(s, \varepsilon) ds + \lambda a \varphi(h + \varepsilon\nu, \varepsilon) \int_{-1}^{t-1} \exp \left[ \lambda(s+1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda \int_{\varepsilon\nu}^{s+1+\varepsilon\nu} \varphi(\sigma, \varepsilon) d\sigma \right] ds \right]. \quad (8.4)$$

В правой части формулы (8.4) фигурирует величина  $\varphi(h + \varepsilon\nu, \varepsilon)$ . Она может быть просто вычислена. Действительно, в силу изложенного при доказательстве теоремы 7.1 с отмеченной выше точностью при  $\delta < t < h - \delta$ , где положительный параметр  $\delta$  мал, но фиксирован, справедливо равенство

$$N(t, \varepsilon) = \exp \lambda(z+t), \quad (8.5)$$

где  $z = z(\varepsilon)$ ,  $z(0) = z_0$ , причем

$$N(h + \varepsilon\nu, \varepsilon) = \exp \lambda(z + h + \varepsilon\gamma), \quad (8.6)$$

где параметр  $\gamma = \gamma(\varepsilon)$  имеет порядок единицы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что

$$\varepsilon \varphi(h + \varepsilon\nu, \varepsilon) = \exp \lambda(z + h + \varepsilon\gamma). \quad (8.7)$$

Перейдем к выводу базового дифференциального уравнения, играющего основную роль в вопросе об асимптотике цикла на участке всплеска. С этой целью продифференцируем равенство (8.4) по времени и учтем формулу (8.7). В итоге получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = \lambda \left[ 1 - \varphi(t-h, \varepsilon) + \frac{a}{\varepsilon} \exp \left[ \lambda(z+h+\varepsilon\gamma+t) - \lambda \int_{\varepsilon\nu}^{t+\varepsilon\nu} \varphi(\sigma, \varepsilon) d\sigma \right] \right] \varphi. \quad (8.8)$$

Достаточно ясно, что основное затруднение при построении асимптотики релаксационного цикла связано с началом его всплеска. Это означает, что вместо (8.8) изучению подлежит более простое уравнение

$$\dot{\varphi} = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{\varepsilon} \exp \left[ \lambda(z+h+\varepsilon\gamma+t) - \lambda \int_{\varepsilon\nu}^{t+\varepsilon\nu} \varphi(\sigma, \varepsilon) d\sigma \right] \right] \varphi. \quad (8.9)$$

Придадим точный смысл понятию решения уравнения (8.9), считая параметр  $\nu$  положительным, что в дальнейшем строго обосновывается. Полагая в (8.9)

$$\psi = \int_{\varepsilon\nu}^t \varphi(\sigma, \varepsilon) d\sigma,$$

получаем уравнение

$$\dot{\psi} = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{\varepsilon} \exp \{ \lambda (z + h + \varepsilon \gamma + t) - \lambda \psi (t + \varepsilon \nu, \varepsilon) \} \right] \psi \quad (8.10)$$

с опережающим аргументом. Фиксируем  $0 < t_0 < h$  и поставим для уравнения (8.10) задачу Коши отыскания решения при  $t < t_0$ , если известно, что при  $t_0 < t < t_0 + \varepsilon\nu$

$$\varepsilon \psi = (1/\lambda) [\exp \lambda (z + t) - \exp \lambda z] - c_0 \varepsilon \ln (1/\varepsilon) + \varepsilon c_1, \quad (8.11)$$

$$\varepsilon \dot{\psi} = \exp \lambda (z + t), \quad (8.12)$$

где  $c_0 = \lambda^{-1} \exp (-\lambda h)$ , а  $c_1$  — произвольный параметр, который вместе с  $\nu$  определяется из дополнительных условий

$$\psi (\varepsilon \nu, \varepsilon) = 0, \quad \psi (0, \varepsilon) = 1. \quad (8.13)$$

Обращаем внимание, что правая часть (8.12) и главная часть правой части (8.11) — следствие формулы (8.5). Необходимость в модификации правой части (8.11) связана с равенствами (8.13), второе из которых следует из (8.2), о чем уже говорилось и что прояснится в последующем.

Из дальнейших построений будет следовать, что базовая краевая задача (8.10) — (8.13) однозначна разрешима. Это позволяет построить асимптотику цикла с произвольной степенной точностью. При этом попутно определяются и фигурирующие в (8.10) параметры  $z$  и  $\gamma$ . Однако мы ставим более узкую задачу: построение такой асимптотики цикла, которая существенна для выявления его свойств устойчивости.

Обоснование асимптотики решения задачи (8.10) — (8.13) стандартно и базируется на исследовании линеаризованного уравнения (8.10). Но при этом возникает один новый момент: из-за сингулярности задачи (подробнее о ее природе будет сказано ниже) доказательство даже простых асимптотических формул требует знания достаточно подробной формальной асимптотики. Поэтому ниже приведем алгоритмы ее вычисления.

**8.2. Алгоритмы построения асимптотики решения краевой задачи (8.10) — (8.13) на участках медленного и быстрого движений.** При  $\varepsilon^{1/0} < t < t_0$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$ , т. е. на участке медленного движения, из структуры уравнения (8.10) следует, что с точностью до  $\exp (-m/\varepsilon^{1-\lambda_0})$ ,  $m > 0$ , для решения задачи (8.10) — (8.12) сохраняется формула (8.11).

В окрестности нулевого момента времени, т. е. на участке быстрого движения, выполним в (8.10) замены  $t = \varepsilon\tau$ ,  $\psi (\varepsilon\tau, \varepsilon) = \varepsilon\nu (\tau, \varepsilon)$ . В результате приходим к уравнению

$$\ddot{\nu} = [\varepsilon\lambda + \alpha x \exp \{ \varepsilon\lambda (\nu + \tau) - \varepsilon\nu (\tau + \nu, \varepsilon) \}] \dot{\nu}, \quad (8.14)$$

которое согласно (8.13) следует дополнить условиями

$$\nu (\nu, \varepsilon) = 0, \quad \dot{\nu} (0, \varepsilon) = 1. \quad (8.15)$$

Здесь  $x = \lambda \exp \lambda (z + h)$ , а  $z$  будем считать независимым параметром, близким к  $z_0$ .

Полагая в (8.14), (8.15)

$$\nu (\tau, \varepsilon) = \nu_0 (\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k (\tau), \quad (8.16)$$

где (см. (8.14), (8.15) при  $\varepsilon = 0$ )

$$\nu_0 (\tau) = (1/x) (\exp x\tau - \exp x\nu), \quad (8.17)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , для определения неизвестных функций  $v_k$ ,  $k \geq 1$ , приходим к рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений:

$$\ddot{v}_k = \kappa \dot{v}_k + f_k(\tau), \quad (8.18)$$

где  $f_k$  зависит только от  $v_m$  с номерами  $m < k - 1$ . Дополняя уравнения (8.18) условиями

$$v_k(\nu) = 0, \quad \dot{v}_k(0) = 0, \quad k \geq 1, \quad (8.19)$$

последовательно определяем коэффициенты ряда (8.16). Например, для  $v_1$  имеем уравнение:

$$\ddot{v}_1 - \kappa \dot{v}_1 = (\lambda - \kappa) \dot{v}_0 + \kappa \lambda [\gamma + \tau - v_0(\tau + \nu)] \dot{v}_0,$$

из которого с учетом (8.19) находим

$$\begin{aligned} v_1 &= R(\tau) - R(\nu), \quad R(\tau) = \left[ \frac{1 - \lambda \gamma}{\kappa} + (-1 + \lambda \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{\kappa} \exp \kappa \nu) \tau + \frac{\lambda}{2} \tau^2 \right] \exp \kappa \tau - \frac{\lambda}{2 \kappa^2} \exp(2\tau + \nu). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Равенства (8.17), (8.20) в совокупности с методом математической индукции приводят к представлениям

$$v_k(\tau) = r_k + \sum_{l=1}^{k+1} P_{2(k-l+1)}^k(\tau) \exp b_l \tau, \quad k \geq 0, \quad (8.21)$$

где  $r_k$  — некоторые постоянные, а  $P_m^k(\tau)$  — многочлены степени  $m$ . Представления (8.21) будут использованы в п. 8.4 при построении высших приближений на участке поворота.

**8.3. Нулевое приближение решения краевой задачи (8.10)–(8.13) на участке поворота.** Исследование участка поворота связано с заменами

$$t = \frac{\varepsilon}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s}, \quad w = \psi \left( \frac{\varepsilon}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s}, \varepsilon \right). \quad (8.22)$$

Выполняя их в (8.10), получаем уравнение

$$sw'' + w' = - \left[ \varepsilon \frac{\lambda}{\kappa} + a \exp \left\{ \varepsilon \lambda \left( \gamma + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s} \right) - \lambda w(sq, \varepsilon) \right\} \right] w', \quad (8.23)$$

где  $q = \exp(-\kappa \nu)$ , а штрих — дифференцирование по  $s$ . Полагая, далее, в (8.23)  $\varepsilon = 0$ , для определения нулевого приближения  $w_0(s)$  функции  $w(s, \varepsilon)$  приходим к уравнению

$$sw_0'' + w_0' = -w_0' \exp[-\lambda w_0(sq)]. \quad (8.24)$$

Учитывая замены (8.22) в (8.11) и (8.17), убеждаемся, что нами должно быть построено такое решение  $w_0(s)$  уравнения (8.24), для которого справедливы асимптотические представления:

$$w_0 \sim 1/\kappa s, \quad s \rightarrow \infty, \quad w_0 \sim -c_0 \ln s + c_1, \quad s \rightarrow +0. \quad (8.25)$$

Покажем, что при подходящих  $\nu$  и  $c_1$  уравнение (8.24) имеет решение, обладающее свойствами (8.25).

Доволним уравнение (8.24) начальными условиями

$$sw_0' |_{s \rightarrow +0} = -c_0, \quad (w_0 + c_0 \ln s) |_{s \rightarrow +0} = c_1. \quad (8.26)$$

Локальная разрешимость задачи (8.24), (8.26) устанавливается следующим образом. Положим

$$w_0 = v - c_0 \ln s, \quad \omega = s^{1-\lambda c_0} v'$$

Тогда для определения  $\omega(s)$  получаем интегральное уравнение

$$\omega(s) = c_0 \left( \frac{q}{s} \right)^{\lambda c_0} \int_0^s \frac{\Omega(\sigma)}{\sigma^{1-\lambda c_0}} d\sigma - \left( \frac{q}{s} \right)^{\lambda c_0} \int_0^s \sigma^{2\lambda c_0 - 1} \omega(\sigma) \Omega(\sigma) d\sigma. \quad (8.27)$$

где

$$\Omega(\sigma) = \exp \left[ -\lambda c_1 - \lambda q^{\lambda c_0} \int_0^\sigma \frac{\omega(\tau q)}{\tau^{1-\lambda c_0}} d\tau \right],$$

со слабой особенностью, к которому при достаточно малом  $s_0$  в пространстве  $C(0, s_0)$  применим принцип сжимающих отображений.

**Лемма 8.1.** Решение задачи (8.24), (8.26) определено на всей положительной полусоси, причем  $w'_0(s) < 0$  и справедливы асимптотические разложения

$$w_0 = -c_0 \ln s + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} s^{k\lambda c_0}, \quad s \rightarrow +0, \quad (8.28)$$

$$w_0 = x_0 + \frac{x_1}{s^\alpha} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{s^{k\alpha}}, \quad s \rightarrow \infty, \quad (8.29)$$

где  $\alpha = \exp(-\lambda x_0)$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $w'_0(s) < 0$  при  $s \in (0, Q)$ , где  $(0, Q)$  — максимальный интервал существования решения.

В силу первого условия (8.26) при малых  $s$  неравенство  $w'_0(s) < 0$  очевидно. Пусть найдутся такие  $0 < s_0 < s_1$ , что  $w'_0(s) > 0$  при  $s_0 < s < s_1$ , а  $w'_0(s_0) = 0$ . При этих условиях, интегрируя уравнение (8.24) по  $[s_0, s_1]$ , получаем

$$0 < s_1 w'_0(s_1) = - \int_{s_0}^{s_1} \exp[-\lambda w_0(sq)] w'_0(s) ds < 0.$$

что невозможно.

Если  $Q < \infty$ , то в силу уже доказанной монотонности  $w_0(s)$

$$\lim_{s \rightarrow Q-0} w_0(s) = -\infty. \quad (8.30)$$

Но тогда из соотношений

$$-\int_0^s \exp[-\lambda w_0(\sigma q)] w'_0(\sigma) d\sigma = c_0 + s w'_0(s) < c_0$$

следует сходимость несобственного интеграла

$$-\int_0^Q \exp[-\lambda w_0(\sigma q)] w'_0(\sigma) d\sigma. \quad (8.31)$$

С другой же стороны, из (8.30) вытекает существование такого  $s_0 \in (0, Q)$ , что  $w_0(s) < 0$  при  $s \in [s_0, Q]$ . А отсюда и из очевидного неравенства

$$-\int_{s_0}^Q \exp[-\lambda w_0(\sigma q)] w'_0(\sigma) d\sigma \geq -\int_{s_0}^Q w'_0(\sigma) d\sigma = \infty$$

приходим к противоречию со сходимостью интеграла (8.31).

Итак, функция  $w_0(s)$  определена при всех  $s > 0$ . Невозможность предельного равенства (8.30) при  $s \rightarrow \infty$  доказывается аналогично (при замене  $Q$  на  $\infty$ ). Тем самым функция  $w_0(s)$  имеет конечный предел  $x_0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Используя это обстоятельство в уравнении (8.24), при помощи метода неопределенных коэффициентов без труда устанавливаем справедливость разложения (8.29). Справедливость же разложения (8.28) аналогично выводим из интегрального уравнения (8.27). Лемма доказана.

Из первого условия (8.25) и асимптотического равенства (8.29) следует, что дальнейшее продвижение связано с разрешимостью системы

$$x_0(\nu) = 0, \quad x_1(\nu, c_1) = 1/\nu \quad (8.32)$$

алгебраических уравнений, где левая часть первого уравнения от  $c_1$  не зависит. Это следует из аналогичного леммы 8.1 утверждения для уравнения, получающегося из (8.24) путем замены  $s \exp(-c_1/c_0) \rightarrow s$ .

**Лемма 8.2.** *Найдется такое положительное число  $\bar{h} < 1$ , что при  $0 < h < \bar{h}$  система (8.32) при  $z = z_0$  однозначно разрешима, причем для ее решения  $(\nu^0(h), c_1^0(h))$  справедливы асимптотические равенства*

$$\nu^0(h) = 2h^2 + O(h^3), \quad c_1^0(h) = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{h} + O(h). \quad (8.33)$$

**Доказательство.** В силу (7.14)  $x|_{z=z_0} = \lambda x_0(h)/h$ , где  $x_0(0) = 1$ . Поэтому формально от  $h \rightarrow 0$  уравнение (8.24) зависит сингулярно. Однако после замен  $\nu = \mu h/\lambda$  (см. неравенство (7.38)),  $s = h\sigma$ ,  $c_1 + c_0 \ln(1/h) = \tilde{c}_1$  вместо (8.24), (8.26) получаем задачу Коши

$$\sigma w''_0 + w'_0 = -w'_0 \exp[-\lambda w_0(\sigma q_0)], \quad (8.34)$$

$$\sigma w'_0|_{\sigma \rightarrow +0} = -c_0, \quad (w_0 + c_0 \ln \sigma)|_{\sigma \rightarrow +0} = \tilde{c}_1, \quad (8.35)$$

где  $q_0 = \exp[-\mu x_0(h)]$ , регулярно зависящую от  $\mu$  и  $h$ . Согласно лемме 8.1 при  $\sigma \rightarrow \infty$  для решения задачи (8.34), (8.35) справедливо асимптотическое представление

$$w_0(\sigma) = y_0 + y_1/\sigma^\alpha + O(1/\sigma^{2\alpha}), \quad \alpha = \exp(-\lambda y_0).$$

Поэтому уравнения (8.32) эквивалентны системе

$$y_0(\mu, h) = 0, \quad y_1(\mu, \tilde{c}_1, h) = 1/\lambda x_0(h). \quad (8.36)$$

Существенно, что при  $\mu = 0$  уравнение (8.34) интегрируется в квадратурах, причем интересующее нас решение доставляется формулой

$$w_0(\sigma) = (1/\lambda) \ln (\exp \lambda \tilde{c}_1/\sigma^\beta + 1/\beta), \quad \beta = \exp(-\lambda h). \quad (8.37)$$

Поэтому  $y_0(0, h) \equiv h$ , а

$$\left. \frac{\partial y_0}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = - \int_0^\infty \lambda \sigma [w'_0(\sigma)]^2 \exp[-\lambda w_0(\sigma)] d\sigma = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Отсюда следует, что к первому уравнению системы (8.36) применима теорема о неявной функции. Решая его относительно  $\mu = \mu^0(h)$ , получаем

$$\mu^0(h) = 2\lambda h + O(h^2). \quad (8.38)$$

Подставим (8.38) во второе уравнение системы (8.36) и попытаемся найти  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1^0(h)$ .

Важное замечание: при замене  $\sigma \exp(-\tilde{c}_1/c_0) \rightarrow \sigma$  коэффициент  $y_1(\mu^0(h), \tilde{c}_1, h)$  в разложении  $w(\sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$  преобразуется в независящий от  $\tilde{c}_1$  коэффициент  $\tilde{y}_1(h)$ . Аналитически это означает, что

$$y_1(\mu^0(h), \tilde{c}_1, h) = \tilde{y}_1(h) \exp(\tilde{c}_1/c_0). \quad (8.39)$$

Учтем (8.39) во втором уравнении системы (8.36) и заметим, что согласно формуле (8.37)  $\tilde{y}_1(0) = 1/\lambda$ . Поэтому

$$\tilde{c}_1^0(h) = O(h). \quad (8.40)$$

Возвращаясь к исходным переменным  $\nu, c_1$  из (8.38) и (8.40) получаем равенства (8.33).

Формулами (8.38) и (8.40) доставляются решения системы (8.36), которые стремятся к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Покажем, что других решений у нее нет.

Пусть первое уравнение системы (8.36) имеет такое решение  $\mu(h), 0 < h \leq h$ , что

$$\mu(h) > m_0\lambda + 1, \quad (8.41)$$

где положительная постоянная  $m_0$  взята из правой части неравенства (7.38). В силу формулы (8.39) второе уравнение системы (8.36) разрешимо и при выполнении неравенства (8.41). Но тогда, что следует из излагаемых в дальнейшем построений, уравнение (7.11) имеет решение, для которого неравенство (7.38) нарушается. Последнее же невозможно.

При  $h = 0$  из (8.34), (8.35) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = - \int_0^\infty w'_0(\sigma) \exp[-\lambda w_0(\sigma \exp(-\mu))] d\sigma &< - \int_0^\infty w'_0(\sigma) \exp[-\lambda w_0(\sigma)] d\sigma = \\ &= \frac{1}{\lambda} \exp[-y_0(\mu, 0)]. \end{aligned}$$

Поэтому  $y_0(\mu, 0) < 0$  при  $0 < \mu < m_0\lambda + 1$ . А это значит, что с необходимостью  $\mu(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Доказательство заканчено.

Из приведенного обоснования леммы 8.2 следует, что система (8.32) однозначно разрешима не только при  $z = z_0$ , но и при всех близких  $z$ . Соответствующее решение обозначим через  $(\nu^0(z, h), c_1^0(z, h))$ .

**Лемма 8.3.** При  $\nu \leq 0$  уравнение (8.24) не имеет решения с требуемыми свойствами.

**Доказательство.** Выполняя замены  $\nu \rightarrow -\nu, u = 1/s$ , преобразуем уравнение (8.24) к виду

$$uw''_0 + w'_0 = w'_0 \exp[-\lambda w_0(uq)], \quad (8.42)$$

где по-прежнему  $q = \exp(-\lambda\nu)$ . При этом из первого равенства (8.25) следует, что уравнение (8.42) надо дополнить начальными условиями

$$w_0|_{u \rightarrow +0} = 0, \quad w'_0|_{u \rightarrow +0} = 1/\lambda. \quad (8.43)$$

Локальная разрешимость задачи (8.42), (8.43) устанавливается путем перехода к интегральному уравнению

$$\omega(u) = \int_0^u \frac{\omega(s) + 1/\lambda}{s} \left[ \exp \left[ -\frac{\lambda qs}{\lambda} - \lambda \int_0^{sq} \omega(\sigma) d\sigma \right] - 1 \right] ds,$$

где  $\omega = w'_0 - 1/\kappa$ . Пусть  $(0, Q)$  — максимальный интервал существования решения. Покажем сначала, что  $w'_0 > 0$ , а затем, что  $Q = \infty$ .

Строгое возрастание  $w_0$  при малых  $u$  — следствие второго равенства (8.43). Допустим, найдется такое  $u_0$ , что  $w'_0(u) > 0$  при  $0 < u < u_0$ , а  $w'_0(u_0) = 0$ . Тогда из уравнения (8.42) вытекает, что

$$0 = uw'_0(u) \left|_{0}^{u_0} \right. = \int_0^{u_0} w'_0(s) \exp[-\lambda w_0(sq)] ds > 0,$$

т. е. получаем противоречие.

Из установленной монотонности  $w_0$  следует, что

$$\lim_{u \rightarrow Q-0} w_0(u) = \lim_{u \rightarrow Q-0} w'_0(u) = \infty.$$

А тогда в силу уравнения (8.42)

$$J = \int_0^Q w'_0(s) \exp[-\lambda w_0(sq)] ds = \infty.$$

С другой стороны, так как  $w''_0(u) < 0$  при  $0 < u < Q$ , то

$$J < \int_0^Q w'_0(sq) \exp[-\lambda w_0(sq)] ds = 1/\lambda q, \quad (8.44)$$

т. е. приходим к противоречию.

Итак, решение задачи (8.42), (8.43) определено на положительной полуоси. Интегрируя уравнение (8.42) по отрезку  $[0, u]$  и устремляя  $u$  к бесконечности, убеждаемся, что

$$w_0(u) \sim c(\nu) \ln u, \quad u \rightarrow \infty, \quad (8.45)$$

где

$$c(\nu) = \int_0^\infty w'_0(s) \exp[-\lambda w_0(sq)] ds. \quad (8.46)$$

Отметим, что стоящий в правой части (8.46) интеграл сходится в силу неравенства (8.44). Второе условие (8.25) означает, что

$$c(\nu) = c_0, \quad (8.47)$$

где, напоминаем,  $c_0 = \lambda^{-1} \exp(-\lambda h)$ . Однако из монотонности  $w_0$  следует, что

$$c(\nu) > \int_0^\infty w'_0(s) \exp[-\lambda w_0(s)] ds = 1/\lambda,$$

а значит, уравнение (8.47) при  $\nu \geq 0$  решений не имеет. Доказательство закончено.

**8.4. Построение высших приближений решения краевой задачи (8.10)–(8.13) на участке поворота.** Снова вернемся к уравнению (8.23), выбору решения  $w(s, \varepsilon)$  которого предположим следующую формальную процедуру. Учитывая в ряде (8.16) замены (8.22), представления (8.21) и проводя разложение по  $\varepsilon$ , заключаем, что интересующее нас решение уравнения (8.23) должно раскладываться в асимптотический ряд

$$w = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n} w_{n,m}(s) \ln^m(1/\varepsilon), \quad (8.48)$$

где  $w_0$  — функция из п. 8.3, определенная при всех  $z$ , близких к  $z_0$ .

Описанная процедура приводит к следующему алгоритму. Полагаем в (8.23), (8.11)

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n} q_{n,m} \ln^m (1/\varepsilon), \quad (8.49)$$

$$c_1 = c_1^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n} c_1^{n,m} \ln^m (1/\varepsilon), \quad (8.50)$$

где  $q_0 = \exp(-\lambda v^0(z, h))$ ,  $c_1^0 = c_1^0(z, h)$ , а функции  $v_0(z, h)$ ,  $c_1^0(z, h)$  определены после доказательства леммы 8.2. Затем подставляем в (8.23) вместо  $w$  ряд (8.48) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В итоге для определения функций  $w_{n,m}$  получаем рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений, которые снабжаем начальными условиями исходя из равенств (8.11), (8.12) с учетом (8.22) и (8.50). Неизвестные же постоянные  $q_{n,m}$ ,  $c_1^{n,m}$  находим из условий «сшивания» асимптотических формул (8.16) и (8.48) при  $s \rightarrow \infty$ .

Изложенную выше общую схему проиллюстрируем на примере  $n = 1$ , а так как все особенности алгоритма проявляются уже здесь, то остановимся только на этом случае.

Действуя описанным выше способом, приходим к серии начальных задач

$$\begin{aligned} Lw_{1,0} &= \lambda q_{1,0} sw'_0(sq_0) w'_0(s) \exp(-\lambda w_0(sq_0)) + [\exp(-\lambda w_0(sq_0)) - \frac{\lambda}{\kappa} - \\ &\quad - \lambda \left( \gamma + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{s} \right) \exp(-\lambda w_0(sq))] w'_0, \end{aligned} \quad (8.51)$$

$$\left( w_{1,0} - \frac{\lambda c_0}{2\kappa} \ln^2 \frac{1}{s} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = c_1^{1,0}, \quad (8.52)$$

$$\left( sw'_{1,0} + \frac{\lambda c_0}{\kappa} \ln \frac{1}{s} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = 0, \quad (8.53)$$

$$Lw_{1,1} = \lambda q_{1,1} sw'_0(sq_0) w'_0(s) \exp(-\lambda w_0(sq_0)) - \frac{\lambda}{\kappa} w'_0 \exp(-\lambda w_0(sq_0)), \quad (8.54)$$

$$\left( w_{1,1} - \frac{\lambda c_0}{\kappa} \ln \frac{1}{s} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = c_1^{1,1}, \quad (8.55)$$

$$\left( sw'_{1,1} + \frac{\lambda c_0}{\kappa} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = 0, \quad (8.56)$$

$$Lw_{1,2} = \lambda q_{1,2} sw'_0(sq_0) w'_0(s) \exp(-\lambda w_0(sq_0)), \quad (8.57)$$

$$w_{1,2} \Big|_{s \rightarrow +0} = \frac{\lambda c_0}{2\kappa} + c_1^{1,2}, \quad sw'_{1,2} \Big|_{s \rightarrow +0} = 0, \quad (8.58)$$

где

$$Lw = sw'' + w' [1 + \exp(-\lambda w_0(sq_0))] - \lambda w(sq_0) w'_0 \exp(-\lambda w_0(sq_0)),$$

разрешимость которых доказывается посредством перехода к некоторым интегральным уравнениям (см. аналогичные места в п. 8.3).

Остановимся сначала на анализе задачи (8.51)–(8.53). Представим ее решение в виде суммы  $w_{1,0}^1 + w_{1,0}^2$ , где

$$Lw_{1,0}^1 = [\exp(-\lambda w_0(sq_0)) - \frac{\lambda}{\kappa} - \lambda \left( \gamma + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{s} \right) \exp(-\lambda w_0(sq_0))] w_0', \quad (8.59)$$

$$\left( w_{1,0}^1 - \frac{\lambda c_0}{2\kappa} \ln^2 \frac{1}{s} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = 0, \quad (8.60)$$

$$\left( sw_{1,0}^1 + \frac{\lambda c_0}{\kappa} \ln \frac{1}{s} \right) \Big|_{s \rightarrow +0} = 0, \quad (8.61)$$

$$Lw_{1,0}^2 = \lambda q_{1,0} s w_0'(sq_0) w_0'(s) \exp(-\lambda w_0(sq_0)), \quad (8.62)$$

$$w_{1,0}^2 \Big|_{s \rightarrow +0} = c_1^{1,0}, \quad sw_{1,0}^2 \Big|_{s \rightarrow +0} = 0. \quad (8.63)$$

Учитывая в (8.59)–(8.61) асимптотические свойства  $w_0$  при  $s \rightarrow \infty$  (см. лемму 8.1), при помощи метода неопределенных коэффициентов убеждаемся в справедливости для  $w_{1,0}^1$  при  $s \rightarrow \infty$  представления:

$$w_{1,0}^1 = \sum_{k=0}^2 \ln^k s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_{k,r}^1}{s^r} + \beta_1, \quad (8.64)$$

где, подчеркнем, коэффициенты  $\beta_{k,r}^1$ ,  $\beta_1$  не зависят от неизвестных постоянных  $q_{1,0}$ ,  $c_1^{1,0}$ .

Для решения задачи (8.62), (8.63) имеем представление

$$w_{1,0}^2 = c_1^{1,0} \frac{\partial w_0}{\partial c_1} - \frac{q_{1,0}}{\kappa q_0} \frac{\partial w_0}{\partial \nu}, \quad (8.65)$$

где  $w_0 = w_0(s, \nu, c_1)$  – решение начальной задачи (8.24), (8.26), а производные берутся при  $c_1 = c_1^0(z, h)$ ,  $\nu = \nu^0(z, h)$  (формула (8.65) устанавливается непосредственно из (8.24), (8.26) при помощи дифференцирования по  $\nu$  и  $c_1$ ). Поэтому асимптотика  $w_{1,0}^2$  при  $s \rightarrow \infty$  получается просто: нужно продифференцировать асимптотическое равенство (8.29) по  $\nu$ ,  $c_1$  и взять нужные линейные комбинации (см. (8.65)). На этом пути получаем

$$w_{1,0}^2 = \sum_{k=0}^1 \ln^k s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_{k,r}^2}{s^r} + \beta_2. \quad (8.66)$$

Опишем теперь способ определения неизвестных постоянных  $q_{1,0}$ ,  $c_1^{1,0}$ . С этой целью учтем в формулах (8.16), (8.21) ряд (8.49), положим  $\tau = (1/\kappa) \ln(1/\varepsilon s)$  и проведем переразложение по  $\varepsilon$ . В итоге убеждаемся, что при  $s \rightarrow \infty$  для  $w_{n,m}$  должны выполняться асимптотические равенства

$$w_{n,m} = \sum_{k=0}^{2n-m} \ln^k s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m,r}^k}{s^r} + \alpha_{n,m}, \quad n \geq 1, \quad (8.67)$$

где  $\alpha_{n,2n} = 0$ , причем коэффициенты  $\alpha_{n,m,r}^k$  зависят от  $q_{j,s}$  с номерами  $j \leq n-1$ . Отметим также, что для полного совпадения коэффициентов ряда (8.67) при  $n=1$ ,  $m=0$  и суммы рядов (8.64) и (8.66) достаточно потребовать равенства их свободных членов и коэффициентов при  $1/s$ . Это следует из того, что оба эти ряда, являясь формальными решениями одного и того же уравнения второго порядка, полностью определяются заданием своих свободных

членов и коэффициентов при  $1/s$  (проверяется при помощи метода неопределенных коэффициентов). Таким образом, для нахождения  $c_1^{1,0}$ ,  $q_{1,0}$  получаем уравнения

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha_{1,0}, \quad \beta_{0,1}^1 + \beta_{0,1}^2 = \alpha_{1,0,1}^0, \quad (8.68)$$

где согласно (8.65)

$$\beta_2 = -\frac{q_{1,0}}{\kappa q_0} x'_0, \quad \beta_{0,1}^2 = c_1^{1,0} \frac{\partial x_1}{\partial c_1} - \frac{q_{1,0}}{\kappa q_0} \frac{\partial x_1}{\partial \nu}, \quad (8.69)$$

$x_0$ ,  $x_1$  — функции (8.32), а производные берутся при  $\nu = \nu^0(z, h)$ ,  $c_1 = c_1^0(z, h)$ . Напомним также, что  $\beta_1$ ,  $\beta_{0,1}^1$ ,  $\alpha_{1,0}$ ,  $\alpha_{1,0,1}^0$  от постоянных  $q_{1,0}$  и  $c_1^{1,0}$  не зависят. Поэтому уравнения (8.68) представляют собой линейную относительно  $q_{1,0}$  и  $c_1^{1,0}$  систему, определитель которой в силу леммы 8.2 отличен от нуля.

Анализ начальной задачи (8.54) — (8.56) проводится совершенно аналогично и на нем останавливаются не будем. Новый момент возникает лишь при рассмотрении начальной задачи (8.57), (8.58), для решения которой имеем аналогичную (8.65) формулу

$$w_{1,2} = \left( \frac{\lambda c_0}{2\kappa} + c_1^{1,2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial c_1} - \frac{q_{1,2}}{\kappa q_0} \frac{\partial w_0}{\partial \nu}. \quad (8.70)$$

Из представления (8.70) для  $w_{1,2}$  получаем при  $s \rightarrow \infty$  асимптотическое равенство (см. аналогичное место для  $w_{1,0}^2$ ):

$$w_{1,2} = \sum_{k=0}^1 \ln^k s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\delta_{k,r}}{s^r} + \delta_0, \quad (8.71)$$

структурно отличающееся от требуемого (см. (8.67) при  $n=1$ ,  $m=2$ ). Однако после определения постоянных  $q_{1,2}$ ,  $c_1^{1,2}$  из уравнений

$$-\frac{q_{1,2}}{\kappa q_0} x'_0 = 0, \quad c_1^{1,2} \frac{\partial x_1}{\partial c_1} - \frac{q_{1,2}}{\kappa q_0} \frac{\partial x_1}{\partial \nu} = \alpha_{1,2,1}^0 \quad (8.72)$$

все слагаемые вида  $\ln s/s^r$  в (8.71) исчезнут. Действительно, из первого уравнения (8.72) имеем  $q_{1,2}=0$ . Поэтому согласно (8.70)

$$w_{1,2} = \left( \frac{\lambda c_0}{2\kappa} + c_1^{1,2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial c_1}$$

и требуемое асимптотическое разложение получается из (8.29) после дифференцирования по  $c_1$  и умножения на  $\lambda c_0/\kappa + c_1^{1,2}$ .

Дальнейшая реализация алгоритма не вызывает затруднений. Отметим только, что в общем случае  $q_{1,2} \neq 0$  при  $n > 1$ .

**8.5. Об обосновании асимптотических формул.** Как уже отмечалось, проблема обоснования асимптотики решения задачи (8.10) — (8.13) на участке поворота ( $\lambda_1/\kappa$ )  $\varepsilon \ln(1/\varepsilon) \ll t \ll \varepsilon^{1/2}$ ,  $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ , которому отвечают значения

$$(1/\varepsilon) \exp(-\kappa/\varepsilon^{1-\lambda_2}) \ll s \ll 1/\varepsilon^{1-\lambda_1}, \quad (8.73)$$

связана с исследованием свойств решений линейного уравнения

$$sh'' + h' [1 + \exp(-\lambda w_0(sq))] = \lambda h(sq) w'_0 \exp(-\lambda w_0(sq)). \quad (8.74)$$

Пусть  $h(s, \tau)$  — решение (8.74) с произвольными начальными условиями  $\varphi_0(s) \in C(q\tau, \tau)$ ,  $h_0|_{s=\tau} = \delta_0$ .

Лемма 8.4. Справедливы неравенства

$$\left| h(s, \tau) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial s} h(s, \tau) \right| \leq M \left( \max_s |\varphi_0(s)| + |\tau \delta_0| \right) \quad (8.75)$$

при  $0 < s_0 \leq \tau < s$ ;

$$|h(s, \tau)| + \left| \frac{\partial}{\partial s} h(s, \tau) \right| \leq M \left( \max_s |\varphi_0(s)| + |\tau \delta_0| \right) \ln \frac{1}{\tau} \quad (8.76)$$

при  $s \geq s_0, 0 < \tau \leq s_0$ ;

$$|h(s, \tau)| + \left| s \frac{\partial}{\partial s} h(s, \tau) \right| \leq M \left( \max_s |\varphi_0(s)| + |\tau \delta_0| \right) \ln \frac{1}{\tau} \quad (8.77)$$

при  $0 < \tau < s \leq s_0$ . Здесь  $s_0 > 0$  произвольно фиксировано, а  $M$  — некоторая универсальная постоянная.

Для доказательства в представлении

$$\begin{aligned} h(s, \tau) &= \varphi_0(\tau) + \tau \delta_0 K_0(s, \tau) + \\ &+ \frac{\lambda}{q} \int_{\tau q}^s K_0 \left( s, \frac{\sigma}{q} \right) w'_0 \left( \frac{\sigma}{q} \right) \exp(-\lambda w_0(\sigma)) \varphi_0(\sigma) d\sigma + \\ &+ \frac{\lambda}{q} \int_{\tau}^s K_0 \left( s, \frac{\sigma}{q} \right) w'_0 \left( \frac{\sigma}{q} \right) \exp(-\lambda w_0(\sigma)) h(\sigma, \tau) d\sigma, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_0(s, \tau) &= \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^s \exp \left\{ - \int_{\tau}^{\sigma} [1 + \exp(-\lambda w_0(\delta q))] d\delta / \delta \right\} d\sigma, \quad s \geq \tau, \\ K_0(s, \tau) &\equiv 0, \quad s < \tau, \end{aligned}$$

учтем асимптотические свойства  $w_0(s)$  при  $s \rightarrow 0$  и  $\infty$ , приводящие к оценкам

$$K_0(s, \tau) \leq M, \quad 0 < s_0 \leq \tau < s;$$

$$K_0(s, \tau) \leq M \ln(1/\tau), \quad s \geq s_0, \quad \tau \leq s_0;$$

$$K_0(s, \tau) \leq M \ln(s/\tau), \quad 0 < \tau < s \leq s_0;$$

$$|w'_0(s/q)| \exp(-\lambda w_0(s)) \leq M/s^2, \quad s \geq s_0;$$

$$|w'_0(s/q)| \exp(-\lambda w_0(s)) \leq M/s^{1-\lambda c_0}, \quad 0 < s \leq s_0.$$

После этого доказательство завершается при помощи леммы Гронуолла—Беллмана.

Дальнейшие рассуждения стандартны: полагаем в уравнении (8.23)  $w = w_n(s, \varepsilon) + \varepsilon^n \tilde{w}_n + \varepsilon^{n+1} \tilde{w}_{n+1} + h$ ,  $n \geq 1$ ,  $q = q_n(\varepsilon) + \varepsilon^{n+1} r_1$ , а в равенстве (8.11) —  $c_1 = c_1^n(\varepsilon) + \varepsilon^n r_2$ . Здесь  $w_n(s, \varepsilon)$ ,  $q_n(\varepsilon)$ ,  $c_1^n(\varepsilon)$  — отрезки длины  $n$  рядов (8.48), (8.49) и (8.50) соответственно,  $\tilde{w}_n = (\partial w_0 / \partial c_1) r_2$ ,  $\tilde{w}_{n+1} = (\partial w_0 / \partial v) r_1$ , где функции  $\partial w_0 / \partial c_1$ ,  $\partial w_0 / \partial v$  введены в п. 8.4, а  $r_1$ ,  $r_2$  — подлежащие определению постоянные. После этого получившееся уравнение для  $h$  дополним начальными условиями

$$h(s, \varepsilon) = \varphi_0(s, \varepsilon), \quad q\tau_0 \leq s \leq \tau_0, \quad \dot{h} \Big|_{s=\tau} = \dot{\varphi}_0(\tau_0, \varepsilon),$$

где  $\tau_0 = (1/\varepsilon) \exp(-x/\varepsilon^{1-\lambda_2})$ , а

$$\varphi_0(s, \varepsilon) = \frac{1}{\lambda\varepsilon} \left[ \exp \lambda \left( z + \frac{\varepsilon}{\chi} \ln \frac{1}{s\varepsilon} \right) - \exp \lambda z \right] - c_0 \ln \frac{1}{\varepsilon} + c_1 - \varepsilon^n \tilde{w}_n - \\ - \varepsilon^{n+1} \tilde{w}_{n+1} - w_n,$$

и перейдем обычным образом от дифференциального уравнения к интегральному. Последнее же в силу леммы 8.4 порождает интегральный оператор, преобразующий в себя подходящее множество функций и являющийся сжимающим. На этом пути получаем функцию  $h(s, r_1, r_2, \varepsilon)$ , допускающую оценку

$$|h| + \left| \alpha(s) \frac{\partial}{\partial s} h \right| \leq M \varepsilon^{(n+3)\lambda_2 - 2} \quad (8.78)$$

при всех  $s$  из отрезка (8.73). Здесь  $\alpha(s) = s$ ,  $0 < s < 1$ ,  $\alpha(s) \equiv 1$  при  $s \geq 1$ . Кроме того, аналогичные (8.78) оценки справедливы и для производных по  $r_1, r_2$  функций  $h, \frac{\partial}{\partial s} h$ .

Подробности обоснования асимптотических формул для решения задачи (8.10)–(8.13) на участке быстрого движения, т. е. при  $0 < t < (\lambda_1/\chi) \ln(1/\varepsilon)$ , приводить не будем, так как здесь дело сводится к анализу простого уравнения  $\ddot{y}_0 = xy_0$ . Отметим лишь, что введенные ранее постоянные  $r_1, r_2$  определяются из равенств (8.15).

В заключение подчеркнем еще раз, что в силу (8.78) для построения решения базовой краевой задачи (8.10)–(8.13) с заданной точностью необходимо знать более подробную его формальную асимптотику.

**8.6. Вычисление параметров  $\gamma = \gamma(z, \varepsilon)$  и  $z = z(\varepsilon)$ .** Из уравнения (7.11) вытекает, что при  $h - \varepsilon^\lambda < t < h + \varepsilon^\nu$ ,  $0 < \lambda < 1$ , для релаксационного цикла  $N(t, \varepsilon)$  с экспоненциальной точностью справедлива формула

$$N(t, \varepsilon) = \exp \lambda (t + z - \psi(t - h, \varepsilon) + \psi(-\varepsilon^\lambda, \varepsilon)), \quad (8.79)$$

где  $\psi(t, \varepsilon)$  – решение базовой краевой задачи (8.10)–(8.13). Полагая в (8.79)  $t = h + \varepsilon^\nu$  и учитывая асимптотическое представление (8.16), приходим к формуле

$$N(h + \varepsilon^\nu, \varepsilon) = \exp \lambda \left( h + \varepsilon^\nu + z + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k \right), \quad (8.80)$$

где постоянные  $r_k$  те же, что и в (8.21). Сравнивая (8.80) и (8.7), для определения  $\gamma$  получаем равенство

$$\gamma = \nu + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \quad (8.81)$$

учитывая в котором  $\nu = (-1/\chi) \ln q$ , где  $q$  – ряд (8.49), окончательно выводим:

$$\gamma = \gamma_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n} \gamma_{n,m}(z) \ln^m \frac{1}{\varepsilon}, \quad (8.82)$$

где  $\gamma_0(z) = \nu^0(z, h) - (1/\chi) \exp [x\nu^0(z, h)]$ . Отметим еще, что из равенства  $q_{1,2} = 0$  (см. п. 8.4) следует, что  $\gamma_{1,2}(z) \equiv 0$ .

Используя изложенные выше алгоритмы, без труда получаем полную асимптотику  $N(t, \varepsilon)$  на всем участке всплеска, так как ее вычисление сводится к взятию некоторых интегралов от уже полученных формул (см. п. 8.7, где приведена главная асимптотика). Поэтому соответствующие ряды не выписываем. Ограничимся только формулой для оставшейся в запасе постоянной  $z$ :

$$z = z_0 + z_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n-2} z_{n,m} \ln^m \frac{1}{\varepsilon}, \quad (8.83)$$

где  $z_1 = c_0/\lambda (1+h)$ , определяемой из уравнения

$$\lambda (1+h+\varepsilon\nu) - \lambda \int_{-1+h+\varepsilon\nu}^{h+\varepsilon\nu} N(s, \varepsilon) ds + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{-1+h+\varepsilon\nu}^{\varepsilon\nu} N(s, \varepsilon) ds = 0.$$

**8.7. Асимптотические формулы для релаксационного цикла на участке всплеска.** В этом пункте приведем асимптотические формулы, необходимые для исследования устойчивости релаксационного цикла.

Из изложенного в п. 8.1 и 8.2 вытекает, что на участке быстрого движения

$$N(t, \varepsilon) = \varepsilon \exp \kappa t + O(\varepsilon^{2-\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 < 1,$$

$$t = \varepsilon\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\lambda_1}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (8.84)$$

причем здесь и ниже  $\kappa = \lambda \exp \lambda (z_0 + h)$ . Из изложенного же в п. 8.3 и 8.4 следует, что на участке поворота

$$N(t, \varepsilon) = -\kappa s w'_0(s) + O(\varepsilon^{2\lambda_0}), \quad 0 < \lambda_0 < 1,$$

$$t = \frac{\varepsilon}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s}, \quad \frac{1}{\varepsilon} \exp(-\kappa \varepsilon^{\lambda_0-1}) \leq s \leq \varepsilon^{1-\lambda_1}, \quad (8.85)$$

причем здесь и ниже  $w_0$  берется при  $z = z_0$ . Наконец, на участке медленного движения, т. е. при  $\varepsilon^{\lambda_0} \leq t \leq h + \varepsilon\nu$ , из результатов предыдущего раздела вытекает формула

$$N(t, \varepsilon) = \{1 + O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))\} \exp \lambda (z_0 + t). \quad (8.86)$$

Отбрасываем слагаемые порядка  $\exp(-m/\varepsilon)$ ,  $m > 0$ , из уравнения (7.11) выводим, что при  $h + \varepsilon\nu \leq t \leq 2h + \varepsilon\nu$

$$N(t, \varepsilon) = N(h + \varepsilon\nu, \varepsilon) \exp \left\{ \lambda(t - h - \varepsilon\nu) - \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{\varepsilon\nu}^t N(s, \varepsilon) ds \right\}. \quad (8.87)$$

Положим в (8.87)  $t - h - \varepsilon\nu = \varepsilon\tau$ , учтем (8.86) (при  $t = h + \varepsilon\nu$ ) и (8.84). В итоге для начала участка падения получаем асимптотическую формулу

$$N(t, \varepsilon) = \left\{ 1 + \varepsilon\lambda \left[ \tau - \frac{1}{\kappa} \exp \kappa(\tau + \nu) + \frac{1}{\kappa} \exp \kappa\nu \right] + O(\varepsilon^{2-\lambda_1}) \right\} \exp \lambda (z_0 + h),$$

$$0 \leq \tau \leq \frac{\lambda_1}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.88)$$

Чтобы получить асимптотическую формулу в конце участка падения, выполним в (8.87) замены (8.22) и воспользуемся равенством

$$w(s, \varepsilon) = w_0(s) + O(\varepsilon^{2\lambda_0-1}), \quad \frac{1}{\varepsilon} \exp(-\kappa \varepsilon^{\lambda_0-1}) \leq s \leq \frac{1}{\varepsilon^{1-\lambda_1}}.$$

В итоге приходим к формуле

$$N(t, \varepsilon) = \left[ 1 + O(\varepsilon^{2\lambda_0-1}) \right] \exp \lambda [z_0 + h - w_0(sq)],$$

$$t - h - \varepsilon\nu = \frac{\varepsilon}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s}, \quad \frac{1}{\varepsilon} \exp(-\kappa \varepsilon^{\lambda_0-1}) \leq s \leq \frac{1}{\varepsilon^{1-\lambda_1}}, \quad (8.89)$$

где, как и выше,  $q = \exp(-\kappa\nu)$ .

Подытожим сказанное в виде следующего предложения.

**Теорема 8.1.** При достаточно малых  $h$  на участке всплеска релаксационного цикла уравнения (7.11), порождаемого экспоненциально устойчивым состоянием равновесия (7.14) отображения (7.12), справедливы асимптотические равенства (8.84)–(8.86) и (8.88)–(8.89), а для его периода имеет место асимптотическое равенство

$$T = 1 + h + \varepsilon h \delta(\varepsilon, h), \quad (8.90)$$

где  $\delta_0(h) = \delta(0, h) = 2h + O(h^2)$ ,  $\delta(\varepsilon, 0) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и

$$\delta(\varepsilon, h) = \delta_0(h) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^{2n} \delta_{n,m}(h) \ln^m \frac{1}{\varepsilon}, \quad (8.91)$$

причем  $\delta_{1,2}(h) \equiv 0$ .

Отметим, что формула (8.91) получается при подстановке в выражение  $\nu = (-1/\varepsilon) \ln q$ , где  $q$  – ряд (8.49), ряда (8.83) и переразложения по  $\varepsilon$ . Равенство же  $\delta_{1,2} \equiv 0$  – следствие того, что  $q_{1,2} = 0$  в (8.49).

Остается открытым вопрос о справедливости теоремы 8.1 при произвольном  $h < 1$ .

Другой открытый вопрос связан с построением асимптотики релаксационного цикла, соответствующего экспоненциальному устойчивому циклу (7.13) при  $k \geq 1$  отображения (7.12). Общий способ действия здесь ясен: по заданному всплеску цикла определяется его падение, затем пишется формула для очередного всплеска и т. д., а в конце требуем, чтобы очередной всплеск совпал с начальным. Эта программа, собственно, и была реализована в п. 8.1, что позволило получить базовую краевую задачу (8.10)–(8.13). Ее реализация в более сложном случае приводит к следующим заключениям. Одно уравнение (8.9) заменяется системой, состоящей из  $k+1$  уравнений, которая позволяет построить асимптотику цикла на участках быстрых движений. Однако при изучении участком поворотов единой заменой (8.22) обойтись не удается. Приходится прибегать к методу многих масштабов, а значит, вместо одного уравнения (8.24) подлежит изучению системы уравнений в частных производных. Например, при  $k=1$  вместо уравнения (8.9) имеем систему

$$\dot{\varphi}_1 = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{\varepsilon} \exp \left\{ \lambda(t + z_2 + h + \varepsilon \gamma_2) - \lambda \int_{\nu_2}^{t+\nu_2} \varphi_2(s, \varepsilon) ds \right\} \right] \varphi_1, \quad (8.92)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{\varepsilon} \exp \left\{ \lambda(t + z_1 + h + \varepsilon \gamma_1) - \lambda \int_{\nu_1}^{t+\nu_1} \varphi_1(s, \varepsilon) ds \right\} \right] \varphi_2,$$

где  $\varphi_1(0, \varepsilon) \equiv \varphi_2(0, \varepsilon) \equiv 1$ , а параметры  $z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2$  имеют тот же смысл, что и  $z, \gamma, \nu$  в (8.9). Полагая, далее, в (8.92)

$$\nu_j = \int_{\nu_j}^t \varphi_j(s, \varepsilon) ds, \quad j = 1, 2,$$

а затем  $u_j = \varepsilon \exp(x_j t / \varepsilon)$ ,  $x_j = \lambda \exp \lambda(z_j + h)$ ,  $j = 1, 2$ , получаем аналогичную уравнению (8.24) систему

$$Lw_1 = x_2 \left( x_1 u_1 \frac{\partial w_1}{\partial u_1} + x_2 u_2 \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) \exp [-\lambda w_2(u_1 q_{21}, u_2 q_{22})],$$

$$Lw_2 = x_1 \left( x_1 u_1 \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + x_2 u_2 \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right) \exp [-\lambda w_1(u_1 q_{11}, u_2 q_{12})],$$

где  $q_{ij} = \exp(\kappa_i \nu_j)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

$$L = x_1^2 u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + 2x_1 x_2 u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} + x_2^2 u_2^2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + x_1^2 u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + x_2^2 u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

## 9. Исследование устойчивости простейшего релаксационного цикла

**9.1. Лемма о конечности спектрального радиуса оператора монодромии.**  
Приступим к анализу уравнения в вариациях

$$\dot{v} = \lambda \left[ \frac{a}{\varepsilon} v(t-1) - \frac{1}{\varepsilon} v(t-h) \right] N(t, \varepsilon) + \frac{\dot{N}(t, \varepsilon)}{N(t, \varepsilon)} v, \quad (9.1)$$

где  $N(t, \varepsilon)$  — одно из периодических решений уравнения (7.11), о которых шла речь в теореме 8.1. В качестве его фазового пространства возьмем  $E = L(-1, 0) \times R$ , т. е. при  $-1 \leq t \leq 0$  начальная функция принадлежит  $L(-1, 0)$  и задается значение решения при  $t=0$ . Через  $V$  обозначим оператор монодромии уравнения (9.1).

**Лемма 9.1.** *Найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$  и такая положительная постоянная  $M_0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

$$\|V^n\|_{E \rightarrow E} \leq M_0^n \ln(1/\varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

**Доказательство.** При  $0 \leq t \leq T$ , где  $T = 1 + h + \varepsilon\nu$  — период  $N(t, \varepsilon)$ , обозначим через  $v_0(t, \varepsilon)$  решение уравнения (9.1) с нормированной в  $E$  единицей начальной функцией  $v_0(t)$ . Из (9.1) выводим

$$v_0(t, \varepsilon) = v_0(0) \frac{N(t, \varepsilon)}{\varepsilon} + \lambda \frac{N(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^t [av_0(s-1) - v_0(s-h)] ds, \quad 0 \leq t \leq h, \quad (9.3)$$

$$v(t, \varepsilon) = v_0(h, \varepsilon) \frac{N(t, \varepsilon)}{N(h, \varepsilon)} + \lambda \frac{N(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \int_h^t [av_0(s-1, \varepsilon) - v_0(s-h, \varepsilon)] ds, \quad h \leq t \leq T. \quad (9.4)$$

Из (9.3) и (9.4) следует, что при  $h+\delta \leq t \leq T-\delta$ , где  $\delta > 0$  мало, но фиксировано,  $v_0(t, \varepsilon)$  имеет порядок  $\exp(-m/\varepsilon)$ ,  $m > 0$ , равномерно по начальным условиям. Поэтому достаточно оценить интегралы

$$J_1 = \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} |v_0(t, \varepsilon)| dt, \quad J_2 = \int_{T-\delta}^T |v_0(t, \varepsilon)| dt, \quad (9.5)$$

чтобы в метрике  $L(T-1, T)$  оценить  $v_0(t, \varepsilon)$ .

Учитывая (9.3) в (9.4), получаем

$$J_1 \leq \frac{M_1}{\varepsilon} \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} N(t, \varepsilon) dt + \frac{M_2}{\varepsilon^2} \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} N(t, \varepsilon) \int_h^t N(s-h, \varepsilon) ds dt. \quad (9.6)$$

Здесь и ниже  $M_1, M_2$  и т. д. — универсальные положительные постоянные. Из асимптотических свойств  $N(t, \varepsilon)$  следует, что первое слагаемое правой части (9.6) имеет порядок  $\ln(1/\varepsilon)$ , а второе ограничено при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому

$$J_1 \leq M_3 \ln(1/\varepsilon). \quad (9.7)$$

Приступая к оценке второго интеграла (9.5), отметим неравенство

$$|v_0(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_4}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} N(t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1 + \varepsilon\nu, \quad (9.8)$$

вытекающее из (9.3) и (9.4). Учитывая в (9.4) равенство

$$\int_h^t [av_0(s-1, \varepsilon) - v_0(s-h, \varepsilon)] ds = a \int_{-1+h}^0 v_0(s) ds - \varepsilon \int_0^{t-1} v_0(s, \varepsilon) ds - \int_{t-1}^{t-h} v_0(s, \varepsilon) ds \quad (9.9)$$

и опираясь на неравенство (9.8), получаем

$$J_2 \leq M_5 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{M_6}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\delta}^0 N(t, \varepsilon) \int_{t-1}^{t-h} N(s, \varepsilon) ds dt \leq M_7 \varepsilon \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}, \quad (9.10)$$

где снова использованы асимптотические свойства  $N(t, \varepsilon)$ .

Чтобы оценить  $v_0(T, \varepsilon)$ , сначала отметим неравенства

$$|v_0(h, \varepsilon)| \leq M_8/\varepsilon, \quad \int_0^{h+\varepsilon\nu} |v_0(s, \varepsilon)| ds \leq M_9/\varepsilon, \quad (9.11)$$

вытекающие из (9.3) и (9.4). После этого остается в формуле (9.4) учесть равенство (9.9) и неравенства (9.7), (9.11), что приводит к оценке

$$|v_0(T, \varepsilon)| \leq M_{10} \ln(1/\varepsilon). \quad (9.12)$$

Итак, согласно неравенствам (9.7), (9.10) и (9.12)

$$\|V\|_{E-E} \leq M_0 \ln(1/\varepsilon), \quad (9.13)$$

т. е. утверждение леммы справедливо при  $n = 1$ .

Обозначим через  $v_1(t, \varepsilon)$  решение уравнения (9.1) с начальной функцией  $v_0(T+t, \varepsilon)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ . Из аналогичной (9.3) формулы для  $v_1(t, \varepsilon)$  и неравенства (9.13) вытекает, что при  $0 \leq t \leq h$

$$|v_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{N(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \left[ \gamma(\varepsilon) + \lambda \int_{t+h+\varepsilon\nu}^{t+1+\varepsilon\nu} |v_0(s, \varepsilon)| ds \right], \quad (9.14)$$

где  $\gamma(\varepsilon)$  ограничена при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Из (9.14) и (9.10) выводим оценку

$$|v_1(h, \varepsilon)| \leq M_{11}/\varepsilon, \quad (9.15)$$

аналогичную первому неравенству (9.11). Выписывая затем для  $v_1(t, \varepsilon)$  аналогичную (9.4) формулу и используя оценки (9.14) и (9.15), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} |v_1(t, \varepsilon)| dt &\leq \frac{M_{12}}{\varepsilon} \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} N(t, \varepsilon) dt + \\ &+ \frac{M_{13}}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{h+\varepsilon\nu}^{h+\delta} N(t, \varepsilon) \int_0^{t-h} N(s, \varepsilon) ds dt \leq M_{14} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где опять же использованы асимптотические свойства  $N(t, \varepsilon)$ . Из (9.16) делаем заключение, что оценена аналогичная  $J_1$  величина для  $v_1(t, \varepsilon)$ . Оценки величины, аналогичной  $J_2$ , и  $|v_1(T, \varepsilon)|$  производятся в точности так, как это было сделано в случае  $v_0(t, \varepsilon)$ . Существенно, что на этом пути приходим к неравенству

$$\|V^2\|_{E-E} \leq M_{15} M_0 \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (9.17)$$

в котором  $M_{15}$  от  $M_0$  из (9.13) не зависит. Поэтому при рассмотрении  $V^3$  получим оценку вида (9.17) с заменой  $M_{15}$  на  $M_{15}^2$  и т. д. Уравнивая  $M_{15}$  и  $M_0$ , приходим к неравенствам (9.2). Доказательство закончено.

Для дальнейшего, собственно, представляет интерес вытекающее из леммы 9.1 утверждение.

**Лемма 9.2.** *Мультипликаторы уравнения (9.1) лежат в некотором круге, радиус которого от  $\varepsilon$  не зависит.*

**9.2. Вычисление предела оператора монодромии на гладких начальных функциях.** В (9.1) выполним замену  $v/N \rightarrow \dot{v}$  и перейдем к присоединенному уравнению

$$\dot{v} = -\frac{\lambda}{\varepsilon} N(t, \varepsilon) [av(t+1) - v(t+h)], \quad (9.18)$$

фазовым пространством которого считаем  $C(0, 1)$ . Пусть  $W$  — оператор монодромии уравнения (9.18). Найдем его предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , предполагая, что начальные функции  $v_0(t) \in C_0(0, 1)$ , где  $C_0(0, 1)$  — линеал таких функций из  $C(0, 1)$ , которые при  $t=0$  имеют конечные производные.

**Лемма 9.3.** *При  $v_0(t) \in C_0(0, 1)$  имеем*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W[v_0(t)] = v_0(0) \varphi(t), \quad (9.19)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - \exp \lambda(z_0 + h) + \exp \lambda(z_0 + t), & 0 \leq t \leq h \\ 1, & h \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Доказательство.** При фиксированной функции  $v_0(t)$  начнем шагами интегрировать уравнение (9.18). В частности, при  $-h \leq t \leq 0$  приходим к формуле

$$v(t, \varepsilon) = v_0(0) + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_t^0 N(s, \varepsilon) [av_0(s+1) - v_0(s+h)] ds. \quad (9.20)$$

Из (9.20) и асимптотических свойств  $N(t, \varepsilon)$  вытекает, что равномерно по  $-h \leq t \leq -\gamma_0 \varepsilon \ln(1/\varepsilon)$

$$v(t, \varepsilon) = v_0(0) + \varepsilon \frac{\lambda}{\pi} [v_0(1) - v_0(h)] + o(\varepsilon), \quad (9.21)$$

где  $\pi$  из (8.14) при  $z=z_0$ , а  $\gamma_0 > 0$  произвольно фиксировано, и что равномерно по  $-\gamma_0 \varepsilon \ln(1/\varepsilon) \leq t \leq 0$

$$v(t, \varepsilon) = v_0(0) + O(\varepsilon). \quad (9.22)$$

Интегрируя дальше шагами уравнение (9.18) и снова используя свойства  $N(t, \varepsilon)$ , убеждаемся, что асимптотическое равенство (9.21) сохраняется при  $-1 + \gamma_1 \varepsilon \ln(1/\varepsilon) \leq t \leq -h$ , где  $\gamma_1 > 0$  произвольно велико, но фиксировано.

При  $-1 \leq t \leq -1 + \gamma_1 \varepsilon \ln(1/\varepsilon)$  имеем

$$\begin{aligned} v(t, \varepsilon) &= v\left(-1 + \gamma_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \\ &+ \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_t^{-1 + \gamma_1 \varepsilon \ln(1/\varepsilon)} N(s, \varepsilon) [av_0(s+1) - v(s+h, \varepsilon)] ds. \end{aligned}$$

При интересующих нас  $s$

$$|v_0(s+1) - v_0(0)| \leq M(1+s).$$

Отсюда и из (9.21) выводим, что равномерно по рассматриваемым  $t$

$$v(t, \varepsilon) = v_0(0) + O\left(\varepsilon \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (9.23)$$

При  $-1 - h \leq t \leq -1$ , учитывая в формуле

$$v(t, \varepsilon) = v(-1, \varepsilon) + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_t^{-1} N(s, \varepsilon) [av(s+1, \varepsilon) - v(s+h, \varepsilon)] ds.$$

равенства (9.21)–(9.23), убеждаемся, что равномерно по рассматриваемым  $t$   
 $v(t, \varepsilon) = [1 - \exp \lambda(z_0 + h) + \exp \lambda(z_0 + t + 1 + h)] v_0(0) + o(1)$ . (9.24)

Остается аналогичную (9.20) формулу написать для начального момента времени  $-1 - h$  и на основании уже полученного убедиться в справедливости равенства (9.24) вплоть до момента времени  $-1 - h - \varepsilon\nu$ . Лемма доказана.

**9.3. Негладкие начальные условия.** Анализ доказательства леммы 9.3 убеждает, что на характер поведения  $v(t, \varepsilon)$  при  $-T \leq t \leq 0$  существенно влияют только значения  $v_0(t)$  при  $0 \leq t \leq A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ , где положительный параметр  $A$  достаточно велик. В связи с этим приступим к изучению решений  $v(t, \varepsilon)$  уравнения (9.18) с начальными функциями  $v_0(t, \varepsilon)$ , которые существенно меняются при указанных  $t$ , причем  $v_0(0, \varepsilon) = 0$ ,  $v_0(t, \varepsilon) \equiv 1$  при  $A\varepsilon \ln(1/\varepsilon) < t \leq 1$ .

Применяя к уравнению (9.18) метод шагов, приходим к выводу, что каждое решение с указанным начальным условием близко к нулю при  $-1 + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon) < t \leq 0$ , а при  $-1 \leq t \leq -1 + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$  с точностью до асимптотически малых слагаемых

$$v(t, \varepsilon) = \frac{\lambda a}{\varepsilon} \int_t^{-1 + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)} N(s, \varepsilon) v_0(s+1, \varepsilon) ds.$$

При  $-T + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon) \leq t \leq -1$  решение  $v(t, \varepsilon)$  близко к  $\mu = v(-1, \varepsilon)$ , а при  $-T \leq t \leq -T + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$  с точностью до асимптотически малых слагаемых

$$\begin{aligned} v(t, \varepsilon) &= \mu - \frac{\lambda^2 a}{\varepsilon^2} \int_t^{-T + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)} N(s, \varepsilon) \times \\ &\quad \times \int_{s+h}^{-1 + A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)} N(\sigma, \varepsilon) v_0(\sigma+1, \varepsilon) d\sigma ds. \end{aligned}$$

Нас интересуют собственные функции оператора монодромии  $W$ . Поэтому в последнем выражении положим  $t = -T + \tau$ ,  $0 \leq \tau \leq A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ , и потребуем, чтобы результат равнялся  $\mu v_0(\tau, \varepsilon)$ . После дифференцирования по  $\tau$  получаем

$$\mu \dot{v}_0(\tau, \varepsilon) = \frac{\lambda^2 a}{\varepsilon^2} N(\tau, \varepsilon) \int_{\tau - \varepsilon\nu}^{A\varepsilon \ln(1/\varepsilon)} N(s-1, \varepsilon) v_0(s, \varepsilon) ds.$$

Еще раз дифференцируя по  $\tau$ , приходим к дифференциальному уравнению

$$\mu \left( \ddot{v}_0 - \frac{\dot{N}}{N} \dot{v}_0 \right) + \frac{\lambda^2 a}{\varepsilon^2} N(\tau, \varepsilon) N(\tau + h, \varepsilon) v_0(\tau - \varepsilon\nu, \varepsilon) = 0. \quad (9.25)$$

Формулы (8.85), (8.89) показывают, что коэффициенты уравнения (9.25) существенно меняются при

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} \ln \frac{1}{\varepsilon s}. \quad (9.26)$$

Выполняя в (9.25) замену (9.26) и устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем предельное уравнение

$$\begin{aligned} \mu [s v_0'' + (1 + \exp(-\lambda w_0(sq))) v_0'] - \\ - \lambda v_0(s/q) w_0'(s) \exp(-\lambda w_0(s)) = 0. \end{aligned} \quad (9.27)$$

В (9.27) удобно выполнить замену  $s = 1/u$ , позволяющую записать предельное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \mu [uv_0'' + (1 - \exp(-\lambda\omega_0(u/q)))v_0'] + \\ + \lambda v_0(uq)\omega_0'(u)\exp(-\lambda\omega_0(u)) = 0, \end{aligned} \quad (9.28)$$

где  $\omega_0(u) = w_0(1/u)$ . Из способа вывода уравнения (9.28) следует, что

$$v_0|_{u \rightarrow +0} = 0, \quad v_0|_{u \rightarrow \infty} = 1. \quad (9.29)$$

Таким образом, предельные значения мультиликаторов уравнения (9.18) при рассматриваемых начальных функциях находятся из краевой задачи (9.28), (9.29).

Положим

$$G(u, \sigma) = \begin{cases} [K(\sigma)/K'(\sigma)](\lambda/\sigma)\omega_0'(\sigma)\exp(-\lambda\omega_0(\sigma)), & 0 \leq \sigma \leq u, \\ [K(u)/K'(\sigma)](\lambda/\sigma)\omega_0'(\sigma)\exp(-\lambda\omega_0(\sigma)), & u \leq \sigma, \end{cases}$$

где

$$K(u) = \int_0^u \exp \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s [\exp(-\lambda\omega_0(\tau/q)) - 1] d\tau \right\} ds,$$

и перейдем от краевой задачи (9.28), (9.29) к интегральному уравнению

$$\mu v_0(u) = \int_0^\infty G(u, \sigma)v_0(\sigma q)d\sigma. \quad (9.30)$$

Правая часть равенства (9.30) порождает в  $C(0, \infty)$  компактный и положительный оператор  $L$  (нетривиальные неотрицательные функции преобразует в строго положительные при  $u > 0$ ). Более того, из свойств решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка следует, что оператор  $L$  является осцилляционным (в симметрическом случае такие интегральные операторы изучал Келлог [77, 78], результаты которого на несимметрический случай распространены в [10]; общее понятие осцилляционного оператора содержится в заметке [71]). Отсюда вытекает, что его спектр состоит из счетного числа положительных и простых собственных значений

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \dots, \quad (9.31)$$

причем собственному числу  $\mu_n$  отвечает собственная функция, имеющая ровно  $n - 1$  нулей на интервале  $(0, \infty)$ .

**Лемма 9.4.** Справедливо равенство  $\mu_1 = 1$ .

**Доказательство.** Путем перехода к соответствующему интегральному уравнению проверяется, что при  $\mu = 1$  для уравнения (9.28) разрешима задача Коши

$$v_0|_{u \rightarrow +0} = 0, \quad v_0'|_{u \rightarrow +0} = 1. \quad (9.32)$$

Покажем, что решение этой задачи  $v_0(u) > 0$  при  $u > 0$  и что оно имеет конечный положительный предел при  $u \rightarrow \infty$ .

При  $\mu = 1$  с учетом (9.32) из (9.28) выводим равенство

$$uv_0'(u) = v_0(uq)\exp(-\lambda\omega_0(u)) + \int_{uq}^u v_0'(\sigma)\exp(-\lambda\omega_0(\sigma/q))d\sigma,$$

из которого без труда следует, что  $v_0'(u) > 0$  при  $u > 0$ . Отсюда заключаем, что

$$uv_0'(u) \leq v_0(u)\exp(-\lambda\omega_0(u)). \quad (9.33)$$

Из (9.33) и асимптотических свойств  $\omega_0(u)$  вытекает, что функция  $v_0(u)$  ограничена при  $u \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**9.4. Предельные значения мультиликаторов.** Из результатов предыдущих двух пунктов следует, что числа

$$0, 1 - \exp \lambda(z_0 + h) + \exp \lambda z_0 = \mu_0$$

и цепочка чисел (9.31) являются предельными для мультиликаторов уравнения (9.18).

**Лемма 9.5.** Указанными числами исчерпываются все предельные значения мультиликаторов уравнения (9.18) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 9.2 каждый мультиликатор по крайней мере на некоторой последовательности  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  сходится к конечному пределу. Пусть этот предел  $\mu$  отличен от указанных выше чисел.

В силу леммы 9.2 каждое решение Ляпунова—Флоке в  $C$ -метрике ограничено при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда автоматически следует, что их начальные условия представимы в виде суммы гладкой и негладкой составляющих. Интегрируя отдельно уравнение (9.18) с каждой из них и затем складывая результаты, убеждаемся, что разрешима краевая задача

$$\begin{aligned} \mu(sx'' + x') + \left[ \mu x' + \frac{\mu - \mu_0}{xs} c\varphi(0) \right] \exp(-\lambda\omega_0(sq)) - \\ - \lambda x \left( \frac{s}{q} \right) w'_0(s) \exp(-\lambda\omega_0(s)) = \frac{\mu - \mu_0}{x^2 s} c\ddot{\varphi}(0), \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$x|_{s \rightarrow +0} = 1, \quad x|_{s \rightarrow \infty} = 0, \quad (9.35)$$

где  $\varphi$  — функция из леммы 9.3, а параметр  $c$  связан с наличием гладкой составляющей в начальном условии. Несложный анализ уравнения (9.34) убеждает, что каждое его решение при  $s \rightarrow +0$  неограниченно возрастает по закону

$$\frac{\mu - \mu_0}{x^2 \mu} c\ddot{\varphi}(0) \ln^2 s.$$

Значит, краевая задача (9.34), (9.35) разрешима только при  $\mu = \mu_0$  или  $c = 0$ , т. е. получили противоречие. Лемма доказана.

Рассмотрим соответствующее единичному мультиликатору  $T$ -периодическое решение  $v_0(t, \varepsilon)$  уравнения (9.18). Развитая в п. 9.3 техника позволяет вычислить предел

$$-\lambda x \int_0^\infty v_0(uq) w'_0(u) \exp(-\lambda\omega_0(u)) du, \quad (9.36)$$

где  $v_0(u)$  — функция из леммы 9.4, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  хейловского скалярного произведения

$$\dot{N}(0, \varepsilon) v_0(0, \varepsilon) + \lambda a \int_{-1}^0 \dot{N}(s, \varepsilon) v_0(s+1, \varepsilon) ds - \lambda \int_{-h}^0 \dot{N}(s, \varepsilon) v_0(s+h, \varepsilon) ds$$

функций  $v_0(t, \varepsilon)$  и  $\varepsilon \dot{N}(t, \varepsilon)/N(t, \varepsilon)$ . Число (9.36) ненулевое. Поэтому единичный мультиликатор уравнения (9.18) простой, причем в силу изложенного в п. 9.3 ни один из других мультиликаторов не стремится к единице при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Напоминаем, что на участке всплеска все рассматриваемые циклы имеют одинаковую главную асимптотику. Тем самым изложенные выше факты суммируются в следующее предложение.

**Теорема 9.1.** В условиях теоремы 8.1 множеству  $S_0$  из теоремы 7.1 принадлежит одно начальное условие цикла, являющегося орбитально экспоненциально устойчивым.

Теперь мы можем сделать одно дополнение к п. 7.4, где, напоминаем, обсуждался вопрос о границе применимости теоремы 7.1. Как оказывается, с уменьшением  $\varepsilon$  резко сужается область притяжения даже самого простого релаксационного цикла уравнения (7.11), о котором идет речь в теореме 9.1. Однако данное обстоятельство не умаляет значения теоремы 7.1 и последующих результатов, так как с их помощью получаем хорошее представление о динамике уравнения (7.11) при умеренных значениях  $\varepsilon$ . Обращаем внимание, что все это нетипично, т. е. в асимптотической теории колебаний обычно иная ситуация (см., например, п. 5.4).

**9.5. О динамике популяций насекомых с учетом миграционного фактора.** После проведения предложенной в п. 7.3 процедуры унификации рассмотрению подлежит краевая задача

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + \lambda \left( 1 + \frac{a}{\varepsilon} N_{t-1} - \frac{1}{\varepsilon} N_{t-h} \right) N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (9.37)$$

Для насекомых с выраженным сезонным жизненным циклом пространственно неоднородные режимы краевой задачи (9.37) должны быть следующего характера. Примерно в одно время во всех точках плоской области  $\Omega$  функция  $N(t, x)$  резко возрастает, а затем через время, близкое к  $h$ , происходит ее сильное падение. А пространственная неоднородность в основном выражается в том, что в различных локальных ареалах обитания заметно различаются по высоте всплески плотности. Отсюда следует, что механизм потери устойчивости однородного цикла, о котором идет речь в теореме 9.1, отнюдь не похож на описанный в п. 3.2. По нашему мнению, ситуация здесь ближе к изложенной в п. 6.5, когда там шла речь об устойчивости однородного цикла математической модели реакции Белоусова в среде с диффузией. Тем самым мы считаем, что у линеаризованной на однородном цикле краевой задачи неустойчивость наступает сначала на самых младших модах, а по мере уменьшения  $D$  происходит сдвиг в сторону высокомодовости с восстановлением устойчивости на низких модах. В рамках нелинейной краевой задачи (9.37) это означает, что с уменьшением  $D$  пространственная неоднородность начинает носить все более мелкозернистый характер. Представляет значительный интерес достаточно подробное исследование всех этих вопросов.

Итак, согласно нашим представлениям при малых значениях  $\varepsilon$ , по крайней мере в определенном диапазоне изменения начальных условий, математическая модель динамики популяций насекомых — представитель сложных физических систем. Однако при умеренных значениях  $\varepsilon$  диффузионная неустойчивость однородного цикла по тенденции, конечно, имеет хатчинсоновский характер. Вызвано это тем, что краевая задача (9.37) может быть использована и для моделирования динамики популяций насекомых, жизненный цикл которых не связан со сменой сезонов. Но тогда изменение их плотности в пространстве и во времени должно носить характер, описанный в разделе 4. Это означает, что краевая задача (9.37) в другом диапазоне параметров является биологической системой.

## 10. Существование сильно неустойчивых релаксационных циклов

**10.1. Релаксационные циклы со сложной временной упорядоченностью.** Считаем теперь, что в уравнении (7.4) целое число  $H_0 \geq 2$ , т. е. речь идет о насекомых, жизненный цикл которых равен двум и большему числу годов. При этом условии построенные в теореме 7.1 релаксационные циклы биологически означают, что конечные всплески плотности имаго происходят через  $H_0$  лет. Поставим вопрос о таких релаксационных циклах уравнения (7.4), существование и устойчивость которых на биологическом языке означает, что конечные всплески плотности имаго наблюдаются чаще, например каждый год. Как оказывается, теорема о существовании такого типа релаксационных циклов справедлива, но доказательство не связано с построением инвариантных множеств, а напоминает охоту на циклы-утки релаксационных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [24]. Важно, что и в нашем случае эти циклы обладают свойством сильной неустойчивости, т. е. им соответствующие уравнения в вариациях имеют мультипликаторы, модули которых неограниченно возрастают при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , причем, что необходимо подчеркнуть, при обосновании не требуется информация о тонкой асимптотике циклов.

Биологический смысл изложенных фактов ясен: в энергетически перевозбужденной системе неустойчивы циклы, обладающие чрезмерной временно упорядоченностью.

Прикладное значение сказанного таково: имеем объяснение потери устойчивости соответствующих циклов уравнения (7.11), численно наблюдаемых при промежуточных значениях параметра  $a$  и небольших  $h$ .

**10.2. Математический аспект проблемы существования циклов со сложной временной упорядоченностью.** Предположим, что в уравнении (7.4)

$$h_0 < 1/2. \quad (10.1)$$

При этом ограничении вопрос о существовании интересующих нас релаксационных циклов связан с наличием экспоненциально устойчивых циклов  $M_0, \dots, M_k$  у одномерного отображения

$$M \rightarrow M \exp [r_0 - [1 - \exp(-r_0 h_0)] M], \quad (10.2)$$

отличающегося от (7.39) только отсутствием множителя  $H_0$  у  $r_0$ . Но зато теперь считаем, что  $k < H_0 - 2$ , т. е. при  $H_0 = 2$  речь может идти только об экспоненциально устойчивом состоянии равновесия, при  $H_0 = 3$  допускается к рассмотрению цикл периода два и т. д. Смысл этих ограничений разъясним позднее.

Для простоты изложения ограничимся случаем  $H_0 = 2$ . Дальше технически проще работать с унифицированным уравнением (7.11), в котором теперь в силу (10.1)  $h < 1/3$ . При этом отображение (10.2) удобно переписать в виде

$$z \rightarrow (1 + h)/2 + z - [\exp \lambda(z + h) - \exp \lambda z]/\lambda, \quad (10.3)$$

считая, что оно имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$z_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda(1+h)}{2(\exp \lambda h - 1)}. \quad (10.4)$$

Обозначим через  $S_1$  совокупность неотрицательных функций  $N_1(t, \varepsilon)$ , определенных при  $-1 < t < -(1+h)/2 + \varepsilon\nu_0$ , где  $\nu_0 > 0$  — некоторая постоянная. Считаем, что каждая из них удовлетворяет первым двум условиям из определения множества функций  $S_0$ , введенного при доказательстве теоремы 7.1. Третье условие теперь принимает вид: при  $-1 + \delta(\varepsilon) < t < -3/4$

$$N_1(t, \varepsilon) \leq \varepsilon \exp [ -\nu (1 - \delta(\varepsilon) + t)/\varepsilon ],$$

а при  $-3/4 < t < (1+h)/2 - \varepsilon\nu_0$

$$N_1(t, \varepsilon) \leq \varepsilon \exp [ -\nu ((1+h)/2 + \varepsilon\nu_0 + t)/\varepsilon ],$$

где  $\nu > 0$  — некоторая универсальная постоянная. Вместо четвертого условия предполагаем, что

$$N_1(t, \varepsilon) \leq C_0 \varepsilon, \quad |t + (1+h)/2| \leq \varepsilon\nu_0,$$

где  $C_0 > 1$  — также универсальная постоянная. Пятое условие сохраняется, но, конечно, теперь  $z_0$  — число (10.4).

Через  $S_2$  обозначим множество неотрицательных функций  $N_2(t, \varepsilon)$ ,  $-h < t < 0$ , считая, что

$$N_2(t, \varepsilon) \leq \varepsilon \exp (\nu t/\varepsilon), \quad N_2(0, \varepsilon) = \varepsilon.$$

Фиксируем, далее, такое положительное число  $T_{\text{вх}}$ , что

$$|T_{\text{вх}} - (1+h)/2| \leq \varepsilon\nu_0.$$

Совокупность этих чисел обозначим через  $T_0$ .

Возьмем функции  $N_1(t, \varepsilon)$ ,  $N_2(t, \varepsilon)$  и число  $T_{\text{вх}}$  из введенных выше классов и при  $0 < t < 1 - T_{\text{вх}}$  шагами построим решение  $N(t, \varepsilon)$  уравнения (7.11). Будем считать, что при  $-T_{\text{вх}} < t < -h$  начальная функция задается формулой

$$N_{\text{нач}}(t, \varepsilon) = N(T_{\text{вх}} + t, \varepsilon), \quad (10.5)$$

т. е. при построении  $N(t, \varepsilon)$  используем  $N_1(t, \varepsilon)$  только при  $-1 < t < -T_{\text{вх}}$ . С помощью равенства (10.5) начальная функция теперь задана на всем отрезке  $[-1, 0]$ . Это позволяет продолжить решение до такого момента времени  $T_{\text{вых}}$ , асимптотически близкого к  $(1+h)/2$ , что  $N(T_{\text{вых}}, \varepsilon) = \varepsilon$ .

Таким образом, проблема существования релаксационного цикла половинного периода сведена к разрешимости трех равенств. Первое из них

$$T_{\text{вх}} = T_{\text{вых}}(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon). \quad (10.6)$$

Второе имеет вид

$$N_1(t, \varepsilon) = \Pi_1(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon), \quad (10.7)$$

где  $\Pi_1 = N(T_{\text{вых}} + t, \varepsilon)$ ,  $-1 < t < -(1+h)/2 + \varepsilon\nu_0$ . Наконец, третье — это формула

$$N_2(t, \varepsilon) = \Pi_2(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon), \quad (10.8)$$

где  $\Pi_2 = N(T_{\text{вых}} + t, \varepsilon)$ ,  $-h < t < 0$ . Правые части равенств (10.6)–(10.8) порождают оператор квазипоследования  $\Pi$ , который будем рассматривать в пространстве

$$R \times L(-1, -(1+h)/2 + \varepsilon\nu_0) \times C(-h, 0).$$

**Теорема 10.1.** *При  $h < 1/3$ ,  $\lambda(1+h) < 4$  найдутся такие постоянные  $\nu_0$ ,  $\nu$ ,  $C_0$  и такое  $\varepsilon_0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  введенный выше оператор квазипоследования  $\Pi$  уравнения (7.11) определен на выпуклом замкнутом множестве  $T_0 \times S_1 \times S_2$  и преобразует его в себя.*

Конечно, оператор  $\Pi$  компактным не является, но он уплотняющий [64]. Поэтому в условиях теоремы 10.1 уравнение (7.11) имеет релаксационный цикл половинного периода.

На доказательстве теоремы 10.1 задерживаться не будем.

Теорема 10.2. Уравнение в вариациях каждого из существующих в условиях теоремы 10.1 релаксационного цикла половинного периода имеет мультипликатор, модуль которого по порядку равен  $1/\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Доказательство теоремы 10.2 также опустим. Схема обоснования такого типа утверждений будет изложена в следующей главе.

Вернемся к сформулированному в начале пункта ограничению  $k \leq H_0 - 2$ . Дело здесь в следующем. Будем интегрировать шагами уравнение (7.11) с каким-то начальным условием, предположительно соответствующим, скажем, циклу с тремя всплесками на промежутке времени порядка  $1 + h$ . Деля уравнение (7.11) на  $N(t, \varepsilon)$  и интегрируя результат по подходящим временным промежуткам, убеждаемся, что из предположения о существовании названного цикла следует его соответствующая временная упорядоченность. На этом пути, в частности, становится понятным факт его сильной неустойчивости: небольшие отличия в начальном условии, нарушающие нужную временную упорядоченность, при  $t > 0$  резко нарастают.

## Глава третья

# РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШЕГО УПРАВЛЯЕМОГО БИОЦЕНОЗА

### 11. Постановка задачи и две теоремы о существовании релаксационных циклов

**11.1. Постановка задачи.** Цель данной главы — разобраться с вопросами о существовании, асимптотике и устойчивости релаксационных циклов конечной амплитуды системы с запаздыванием

$$\dot{x} = 1 - x \left( 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y \right), \quad (11.1)$$

$$\dot{y} = \frac{y}{\varepsilon} [x - y(t-h)] - \beta y, \quad (11.2)$$

где положительные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $h$  по порядку равны единице, а положительный параметр  $\varepsilon$  считается малым. Если в (11.2)  $x \equiv 1$ , а  $\beta = 0$ , с точностью до обозначений получаем уравнение Хатчинсона (2.1) для плотности сильно плодовитой популяции. При  $x \equiv 1$ , а  $\beta \neq 0$  оно описывает ситуацию (см. уравнение (11.1)), когда ведется охота с постоянной интенсивностью. При рассмотрении системы (11.1), (11.2) удобно считать, что  $x$  — плотность жертвы, а  $y$  — хищника. Относительно жертвы предполагается, что она не жизнестойка (слагаемое  $-x$  в правой части (11.1)), а поэтому ее популяцию приходится пополнять с постоянной интенсивностью (первое слагаемое правой части (11.1)). Наконец, слагаемое  $-\alpha\varepsilon^{-1}xy$  в (11.1) означает, что хищник сильно угнетает жертву.

Таким образом, система (11.1), (11.2) — простейшая модель функционирования искусственного биоценоза.

С другой стороны, уже достаточно давно (примерно с середины шестидесятых годов) система (11.1), (11.2) используется для моделирования динамики квантовых генераторов (при ее физической интерпретации переменных  $x$  и  $y$  нужно поделить на  $\varepsilon$ ).

Как убедимся в дальнейшем, наличие или отсутствие релаксационных циклов у системы (11.1), (11.2) самым существенным образом зависит от поведения на положительной полусоси функции

$$f(\sigma) = F(\sigma, 1 - \exp(-\sigma)), \quad (11.3)$$

где

$$\begin{aligned} F(\sigma, x) &= \left( 1 - \frac{1}{\alpha\beta} \right) \sigma - 1 + \exp(-\sigma) + \\ &+ \frac{1}{\alpha\beta} \left( \frac{1}{\beta} - x \right) [1 - \exp(-\beta\sigma)]. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Из (11.4) следует, что  $\sigma = 0$  является ее двойным нулем. А так как функция (11.3) — решение некоторого линейного дифференциального уравнения пятого порядка с вещественными корнями характеристического многочлена, то их количество не больше четырех. Поэтому удобно выделить следующих четыре случая (на элементарных обоснованиях не задерживаемся).

Первый случай. Функция (11.3) отрицательна при  $\sigma > 0$ , если

$$\alpha\beta < 1, \alpha < 3. \quad (11.5)$$

Второй случай. Функция (11.3) имеет единственный положительный нуль  $\sigma_0$ , причем  $f'(\sigma_0) > 0$ , если

$$\alpha\beta > 1, \alpha < 3. \quad (11.6)$$

Третий случай. Как во втором случае, но  $f'(\sigma_0) < 0$ , если

$$\alpha\beta < 1, \alpha > 3. \quad (11.7)$$

Четвертый случай. Функция (11.3) положительна при  $\sigma > 0$ , если

$$\alpha\beta > 1, \alpha > 3. \quad (11.8)$$

При выполнении неравенств (11.5) хищник не очень прожорлив и на него охота ведется не чрезмерно интенсивная, т. е. с биологических позиций наиболее прост первый случай. Второй случай имеет наибольшее прикладное значение, так как по-прежнему хищник не слишком прожорлив, а охота может быть любой интенсивности. Третий и четвертый случаи относятся к ситуации, когда хищник достаточно прожорлив.

Для квантовой физики наибольший интерес также представляет второй случай, что следует из приведенных в [15] характерных значений параметров, которые после перехода к нашим обозначениям становятся следующими:

$$\alpha = 1; 2,5; 0,611, \beta = 2; 0,952; 36, 364.$$

Ниже основное внимание уделим второму случаю. О возможности распространения некоторых из результатов на первый и третий случаи скажем особо. Четвертого случая касаться не будем, так как неравенства (11.8) препятствуют, вообще говоря, существованию релаксационного цикла конечной амплитуды.

**11.2. Две леммы, относящиеся ко второму случаю при  $\sigma_0 > h$ .** Положим

$$\varphi(\sigma) = \Phi[\sigma, 1 - \exp(-\sigma)], \quad (11.9)$$

где

$$\Phi(\sigma, x) = F(h, x) + \sigma - h - \exp(-h) + \exp(-\sigma). \quad (11.10)$$

При оговоренных в названии пунктах условиях

$$\varphi(h) = f(h) < 0. \quad (11.11)$$

Поэтому при возрастании  $\sigma$  функция (11.9) имеет нуль  $\sigma_1 > h$ , который, что очевидно, является простым.

**Лемма 11.1.** Справедливо неравенство  $\sigma_1 < \sigma_0$ .

В предположении противного, т. е. при условии  $\sigma_1 \geq \sigma_0$ , введем в рассмотрение функцию  $\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - f(\sigma)$ . В соответствии с (11.11)  $\psi(h) = 0$ , а

$$\psi'(h) = \frac{1}{\alpha\beta} [1 - \exp(-\beta h)] + \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-h)] \exp(-\beta h) > 0.$$

Далее в силу сделанного допущения  $\psi(\sigma_1) \leq 0$ , откуда вытекает существование такого  $h < \sigma_* \leq \sigma_1$ , что  $\psi(\sigma_*) = 0$ ,  $\psi'(\sigma_*) \leq 0$ . Последнее невозможно. Действительно,

$$\begin{aligned} \psi'(\sigma_*) &= \frac{1}{\alpha\beta} [1 - \exp(-\beta\sigma_*)] + \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\sigma_*)] \exp(-\beta\sigma_*) + \\ &+ \frac{1}{\alpha\beta} [\exp(-\beta h) - \exp(-\beta\sigma_*)] \exp(-\sigma_*) > 0, \end{aligned}$$

так как  $\sigma_* > h$ .

Коснемся вопроса о зависимости  $\sigma_1$  от  $h$ .

Лемма 11.2. Справедливо неравенство  $\sigma'_1(h) > 0$ .

Для доказательства удобно правую часть формулы (11.10) обозначить через  $\Phi(h, \sigma, x)$ , явно подчеркнув зависимость от  $h$ . Имеем

$$\sigma'_1(h) = -\Phi_h / [\Phi_\sigma + \Phi_x \exp(-\sigma_1)]. \quad (11.12)$$

Но

$$\varphi'(\sigma_1) = \Phi_\sigma + \Phi_x \exp(-\sigma_1) > 0. \quad (11.13)$$

Поэтому нужно убедиться, что

$$\Phi_h < 0. \quad (11.14)$$

Отметим, что в (11.12)–(11.14) производные берутся при  $\sigma = \sigma_1$ ,  $x = 1$  —  $= \exp(-\sigma_1)$ . Из (11.4) и (11.10) вытекает, что

$$\Phi_h = -\frac{1}{\alpha\beta} [1 - \exp(-\beta h)] - \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\sigma_1)] \exp(-\beta h),$$

т. е. получаем требуемое неравенство (11.14).

11.3. Основная теорема о существовании релаксационных циклов. В дальнейшем  $R \times C(-h, 0)$  — фазовое пространство системы (11.1), (11.2). Обозначим через  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  ее решение с начальными условиями

$$x(0, \varepsilon) = x > 0, \quad (11.15)$$

$$0 \leq y(t, \varepsilon) \leq \varepsilon \exp \frac{m}{\varepsilon} t, \quad y(0, \varepsilon) = \varepsilon, \quad (11.16)$$

где  $m > 0$  — некоторая постоянная. Из (11.16) следует, что при  $0 \leq t \leq h - \delta$ , где вместе с  $\varepsilon$  постоянную  $\delta > 0$  можно сколь угодно уменьшать, с экспоненциальной точностью уравнение (11.2) аппроксимируется обычным

$$\dot{y} = \frac{1}{\varepsilon} xy - \beta y. \quad (11.17)$$

Умножим (11.17) на  $\alpha$  и результат сложим с (11.1). В итоге вместо (11.1), (11.17) получим систему

$$\dot{z} = 1 - x - \beta(z - x), \quad (11.18)$$

$$\varepsilon \dot{x} = \varepsilon(1 - x) - x(z - x), \quad (11.19)$$

где

$$z = x + \alpha y. \quad (11.20)$$

На биологическом языке выбор начальных условий (11.15), (11.16) означает, что при  $0 \leq t \leq \delta$  происходит резкий всплеск плотности хищника, а плотность жертвы резко падает, т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\delta, \varepsilon) = 0. \quad (11.21)$$

Однако функция (11.20) в силу (11.18) на этом временнбом промежутке почти не меняется. Поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(\delta, \varepsilon) = x/\alpha. \quad (11.22)$$

Из (11.18)–(11.22) выводим, что нулевая асимптотика при  $\delta \ll t \ll h - \delta$  имеет вид

$$x_0(t) \equiv 0, \quad y_0(t) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\beta} - x \right) \exp(-\beta t). \quad (11.23)$$

При  $h + \delta \ll t \ll 2h - \delta$  срабатывает запаздывающая обратная связь, что приводит к падению плотности хищника и возрастанию плотности жертвы. Из (11.23) и (11.1), (11.2) следует, что на данном временном промежутке для нулевой асимптотики решений  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  справедливы формулы

$$x_0(t) = 1 - \exp[-(t - h)], \quad y_0(t) \equiv 0. \quad (11.24)$$

Далее согласно (11.23), (11.2) при указанных  $t$  компонента решения  $y(t, \varepsilon)$  экспоненциально мала с показателем экспоненты порядка  $1/\varepsilon$ , коэффициент при котором с точностью до малых величин равен  $F(\sigma, x)$ ,  $\sigma = t - h$ , где  $F$  – функция (11.4). Разумеется, предполагается, что для рассматриваемого решения

$$F(\sigma, x) < 0, \quad 0 < \sigma \ll h. \quad (11.25)$$

Тем самым функция  $y(t, \varepsilon)$  остается экспоненциально малой и при некоторых  $t \geq 2h + \delta$ , а соответствующий коэффициент с точностью до малых величин равен  $\Phi(\sigma, x)$ , где  $\Phi$  – функция (11.10). Поэтому найдется такое первое  $\sigma(x)$ , что  $\Phi(\sigma(x), x) = 0$ . А значит, в соответствии с (11.24) равенство

$$x = 1 - \exp[-\sigma(x)] \quad (11.26)$$

– необходимое условие существования релаксационного цикла конечной амплитуды у системы (11.1), (11.2).

**Теорема 11.1.** Пусть в условиях второго случая

$$\sigma_0 > h. \quad (11.27)$$

Тогда найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  система (1.1), (1.2) имеет релаксационный цикл  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$ , причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(0, \varepsilon) = x_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = h + \sigma_1,$$

где  $x_1 = 1 - \exp(-\sigma_1)$ , а  $T(\varepsilon)$  – его период.

**Доказательство.** Начнем с вопроса о неявной функции  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $\sigma(x_1) = \sigma_1$ , определяемой из равенства  $\Phi(\sigma, x) = 0$ . В неравенстве (11.13)  $\Phi_x < 0$ , поэтому  $\Phi_\sigma > 0$ . Следовательно, гладкая функция  $\sigma(x)$  однозначно находится, причем

$$\sigma'(x_1) = - \left. \frac{\Phi_x}{\Phi_\sigma} \right|_{x=x_1, \sigma=\sigma_1} > 0. \quad (11.28)$$

Теперь введем в рассмотрение одномерное отображение

$$x \mapsto 1 - \exp[-\sigma(x)]. \quad (11.29)$$

По построению оно определено в окрестности своей единственной неподвижной точки  $x_1$ . Покажем, что

$$0 < \sigma'(x_1) \exp[-\sigma(x_1)] < 1. \quad (11.30)$$

Действительно, деля неравенство (11.13) на  $-\Phi_x$  и учитывая (11.28), приходим к неравенству (11.30).

Для завершения доказательства рассмотрим выпуклое замкнутое множество начальных условий (11.15), (11.16), считая, что  $x$  находится в достаточно малой окрестности  $x_1$ , а постоянная  $t$  подходящим образом уменьшена. Оператор последований, очевидным образом определенный на этом множестве, преобразует его в себя: достаточно заметить, что его первая компонента слабо зависит от второй, и сослаться на неравенства (11.30).

Из доказательства теоремы следует, что вторая компонента оператора последований равномерно по рассматриваемым начальным условиям стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а первая компонента сходится к отображению (11.29). Это означает, что имеет место своеобразный вариант теоремы о  $C$ -сходимости. Вопрос о справедливости теоремы о  $C^1$ -сходимости рассмотрим в тринадцатом разделе, где ее трактование полностью совпадает со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Без дополнительных ограничений утверждение теоремы 11.1 сохраняется в условиях первого случая. Для ее справедливости в третьем случае нужно неравенство (11.27) заменить на строгое противоположное неравенство и дополнительно потребовать, чтобы

$$F[\sigma, 1 - \exp(-\sigma_1)] < 0, \quad 0 < \sigma \ll h.$$

Отметим, что некоторый аналог нашей теоремы 11.1 имеется в работе [15], где в формулировке соответствующего утверждения фигурирует неявно заданное одномерное отображение, свойства которого не изучены. Вопрос об устойчивости релаксационного цикла — составной части теоремы о  $C^1$ -сходимости — в [15] также упомянут, но даже фрагментно не указан способ его исследования.

**11.4. Теорема о существовании релаксационных циклов с короткими периодами.** К таковым отнесем циклы системы (11.1), (11.2) с периодом меньше  $h$ . Перед формулировкой основного утверждения, относящегося к вопросу об их существовании, введем ряд величин. Заменим в (11.10)  $h$  на  $h_k$ , а параметр  $h$  будем считать фоновым. Затем рассмотрим уравнения

$$\kappa_1(h_k) = h - (k + 1)h_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11.31)$$

относительно  $h_k$ . В силу леммы 11.2 каждое из них однозначно разрешимо и  $h_k < h/(2k + 1)$ .

**Теорема 11.2.** Пусть в условиях второго случая при произвольно фиксированном  $k$

$$\sigma_0 > h_k. \quad (11.32)$$

Тогда найдется такое  $\varepsilon_k > 0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$  система (11.1), (11.2) имеет такой релаксационный цикл, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_k(\varepsilon) = (h - h_k)/k, \quad (11.33)$$

где  $T_k(\varepsilon)$  — его период.

**Доказательство.** В уравнении (11.2) заменим запаздывание  $h$  на  $h = -h - kT$ . В силу неравенства (11.32) параметр  $T$  можно взять столь близким к правой части равенства (11.33), что  $h < \sigma_0$ . Но тогда в соответствии с теоремой 11.1 измененная указанным выше способом система (11.1), (11.2) имеет релаксационный цикл периода

$$\tilde{T} = h + \sigma_1(h) + o(1). \quad (11.34)$$

Потребуем, чтобы  $\tilde{T} = T$ . Из (11.34) и леммы 11.2 следует, что это уравнение разрешимо, причем в силу (11.31) для его решения  $T_k(\varepsilon)$  выполнено предельное равенство (11.33). Доказательство закончено, так как  $T$ -периодическое решение

измененной системы является  $T$ -периодическим решением исходной системы (11.1), (11.2).

Доказанная теорема 11.2 внешне близка к теореме 10.1. На самом деле, имеется существенное различие, связанное с тем обстоятельством, что в теореме 10.1 речь идет о циклах, период которых по биологическим причинам достаточно жестко задан. Именно в связи с этим использованный при доказательстве теоремы 11.2 прием не проходит в условиях теоремы 10.1.

Опишем теперь способ, используя который в тринацатом разделе решим проблему устойчивости релаксационных циклов с короткими периодами.

Начнем с того, что в системе в вариациях

$$\dot{v} = - \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y\right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xw, \quad (11.35)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} yv + \frac{\dot{y}}{y} w - \frac{1}{\varepsilon} yw(t-h) \quad (11.36)$$

выполним нормирующую замену  $v_1 = v$ ,  $w_1 = w/y$ . Получаем

$$\dot{v} = - \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y\right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xuw, \quad (11.37)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} v - \frac{1}{\varepsilon} y(t-h, \varepsilon) w(t-h), \quad (11.38)$$

где индексы опускаем. Обозначим через

$$v(t, \varepsilon) \exp \mu t, \quad w(t, \varepsilon) \exp \mu t \quad (11.39)$$

ее произвольное решение Ляпунова—Флоке, т. е. функции  $v$ ,  $w$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ . Подставим функции (11.39) в (11.37), (11.38) и запишем результат в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \mu v &= - \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y\right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xuw, \\ \dot{w} + \mu w &= \frac{1}{\varepsilon} v - \frac{1}{\varepsilon} y(t-h, \varepsilon) w(t-h) \exp(-\mu h), \end{aligned}$$

где  $\tilde{h} = h - kT$ . Обращаем внимание, что вместо  $w(t-h, \varepsilon)$  записано  $w(t-\tilde{h})$ , т. е. рассматриваем ее как независимую систему. Выполняя в ней замены

$$v = v_1 \exp(-\mu t), \quad w = w_1 \exp(-\mu t)$$

и снова опуская индексы, приходим к системе

$$\dot{v} = - \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y\right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xuw, \quad (11.40)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} v - \frac{A}{\varepsilon} y(t-\tilde{h}, \varepsilon) w(t-\tilde{h}), \quad (11.41)$$

где  $A = \exp(-\mu kT)$ .

Система (11.40), (11.41) хороша тем, в частности, что для ее исследования достаточно знать асимптотику релаксационного цикла из теоремы 11.1. При ее анализе будем считать  $A$  независимым комплексным параметром. При этом условии будут найдены пределы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всех мультиликаторов системы (11.40), (11.41). Пусть  $\nu(A)$  — один из них. Рассмотрим относительно  $A$  уравнение

$$A^{1/k} \nu(A) = 1. \quad (11.42)$$

Из описанной выше связи систем (11.37), (11.38) и (11.40), (11.41) выводим следующий критерий. Если каждое решение  $A \neq 1$  каждого из уравнений (11.42) лежит вне единичного круга, а единица — простое решение, соответствующий релаксационный цикл с коротким периодом орбитально экспоненциально устойчив. Если же некоторое из уравнений (11.42) имеет такое решение  $A$ , что  $|A| < 1$ , цикл неустойчив.

## 12. Асимптотика релаксационных колебаний

**12.1. Описание схемы исследования.** Естественно, что, как и в случае обыкновенных уравнений [9], структура всей асимптотики релаксационного цикла системы (11.1), (11.2), о котором идет речь в теореме 11.1, определяется асимптотикой на участке быстрого движения, т. е. асимптотикой  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  в подходящей асимптотически малой окрестности  $t = 0$ . Однако возникает и новый момент: для того чтобы асимптотика имела наиболее простой вид, необходимо надлежащим образом выбрать фазу цикла. Как будет ясно из дальнейшего, в нашем случае удобнее строить асимптотику периодического решения системы (11.1), (11.2) с начальными условиями

$$x(0, \varepsilon) = \frac{q}{2}, \quad 0 \leq y(t, \varepsilon) \leq \frac{q}{2\alpha} \exp \frac{mt}{\varepsilon}, \quad y(0, \varepsilon) = \frac{q}{2\alpha}, \quad (12.1)$$

где  $m > 0$ , а  $q$  — постоянная из достаточно малой окрестности  $x_1$ , компоненты которого также обозначим через  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$ . Из излагаемого ниже вытекает, что это периодическое решение отличается от цикла, доставляемого теоремой 11.1, на асимптотически малую fazu (порядка  $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ ).

Итак, в силу (12.1) начнем с асимптотического интегрирования системы (11.18), (11.19), дополненной начальными условиями

$$x(0, \varepsilon) = q/2, \quad z(0, \varepsilon) = q. \quad (12.2)$$

После того как разберемся с асимптотически малой окрестностью  $t = 0$ , построим асимптотику задачи (11.18), (11.19), (12.2) вплоть до асимптотически малой окрестности  $t = h$ . Затем привлечем систему (11.1), (11.2) и построим асимптотику решений при больших значениях  $t$ . Наконец, из равенства  $x(T, \varepsilon) = q/2$ ,  $y(T, \varepsilon) = q/2\alpha$  найдем период  $T > 2h$  релаксационного цикла и постоянную  $q(\varepsilon)$  из (12.1), (12.2).

При реализации описанной программы не будем задерживаться на стандартном обосновании асимптотических формул, отсылая, например, к [31, 62] (см. также раздел 8, где описан способ их обоснования во много более сложном случае).

**12.2. Участок быстрого движения.** Начнем с построения асимптотики задачи Коши (11.18), (11.19), (12.2) при  $-\varepsilon^\lambda \leq t \leq \varepsilon^\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

Заметим, что система (11.18), (11.19) имеет экспоненциально устойчивое (с показателем экспоненты порядка  $\varepsilon^{-1}$ ) инвариантное интегральное многообразие  $x = \varphi(z, \varepsilon)$ , где  $\varphi$  — гладкая по совокупности переменных функция, причем

$$\varphi(z, \varepsilon) = \varepsilon/z + O(\varepsilon^2). \quad (12.3)$$

Поэтому из точки с координатами (12.2) при  $t > 0$  происходит «падение» на интегральное многообразие (12.3), описываемое с помощью развитой в [62] техники (при  $t < 0$  происходит падение на неустойчивое многообразие  $x = z$ ).

Из сказанного выше следует [62], что в (11.18), (11.19) надо сделать замену  $t = \varepsilon t$  и в получившейся системе

$$\dot{z} = \varepsilon [1 - x - \beta(z - x)], \quad \dot{x} = \varepsilon (1 - x) - x(z - x) \quad (12.4)$$

положить

$$z = q + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau), \quad x = x_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \quad (12.5)$$

где  $x_0(\tau) = q/(1 + \exp \varphi\tau)$ . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = F_k(\tau), \quad \dot{x}_k = (2x_0(\tau) - q)x_k + G_k(\tau), \quad (12.6)$$

где  $F_k$  зависит от  $x_n, z_m$  с номерами  $n, m \leq k-1$ , в  $G_k$  — от  $x_n, z_m$  с номерами  $n \leq k-1, m \leq k$ . Дополняя (12.6) начальными условиями  $x_k(0) = z_k(0) = 0$  (см. (12.2)), последовательно определяем коэффициенты разложений (12.5). Например,

$$z_1(\tau) = (1-q)\tau + (\beta-1)\ln 2 - (\beta-1)\ln(1+\exp\varphi\tau), \quad (12.7)$$

$$x_1(\tau) = \int_0^\tau [1 - x_0(s) - z_1(s)x_0(s)] \exp \left\{ \int_s^\tau (2x_0(\sigma) - q) d\sigma \right\} ds. \quad (12.8)$$

Как оказывается, что достаточно просто обосновывается с помощью метода математической индукции, справедливы представления:

$$x_k(\tau) = P_{k,+}^{k-1}(\tau) + \omega_{k,+}(\tau), \quad z_k(\tau) = Q_{k,+}^k(\tau) + \delta_{k,+}(\tau) \quad (12.9)$$

при  $\tau \rightarrow \infty$ ;

$$x_k(\tau) = P_{k,-}^k(\tau) + \omega_{k,-}(\tau), \quad z_k(\tau) = Q_{k,-}^k(\tau) + \delta_{k,-}(\tau) \quad (12.10)$$

при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Здесь  $P_{k,+}^m, Q_{k,+}^m, P_{k,-}^m, Q_{k,-}^m$  — некоторые многочлены степени  $m$ , а остатки  $\omega_{k,+}, \delta_{k,+}$  и  $\omega_{k,-}, \delta_{k,-}$  стремятся к нулю с экспоненциальными скоростями при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $-\infty$  соответственно.

Отметим, что при  $\tau \rightarrow -\infty$  решение задачи Коши (12.4), (12.2) приближается с экспоненциальной скоростью к интегральному многообразию  $x = z$ . Поэтому  $P_{k,-}^k(\tau) = Q_{k,-}^k(\tau)$  при всех  $k \geq 1$ .

Используя представления (12.9), (12.10), можно построить асимптотику решения задачи Коши (12.4), (12.2) с любой степенью точности. Однако для наших целей достаточно равенств

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + O(\varepsilon^{21}), \quad (12.11)$$

$$z(\tau, \varepsilon) = q + \varepsilon z_1(\tau) + O(\varepsilon^{21}), \quad (12.12)$$

где  $-\varepsilon^{\lambda-1} < \tau < \varepsilon^{\lambda-1}$ ,  $1/2 < \lambda < 1$ ,  $x_1(\tau), z_1(\tau)$  — функции (12.7), (12.8), а остатки равномерны по указанным значениям  $\tau$ .

**12.3. Участок медленного движения.** Напомним, что при  $\varepsilon^\lambda < t \leq h - \varepsilon^\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , решение задачи Коши (11.18), (11.19), (12.2) лежит на интегральном многообразии (12.3). Поэтому проблема сводится к вычислению асимптотики начального условия  $z(0, \varepsilon)$  для уравнения

$$\dot{z} = 1 - \varphi(z, \varepsilon) - \beta(z - \varphi(z, \varepsilon)) \quad (12.13)$$

на интегральном многообразии (12.3).

Подставим в (12.5)  $\tau = t/\varepsilon$ , учтем представления (12.9), отбросим экспоненциально малые слагаемые, а затем положим  $t = 0$ . Получаем асимптотическое представление

$$z(0, \varepsilon) = q + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Q_{k,+}^k(0), \quad (12.14)$$

где в силу (12.7)

$$Q_{1,+}^1(0) = (\beta - 1) \ln 2. \quad (12.15)$$

Из (12.3) и (12.13) — (12.15) следуют асимптотические формулы

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad (12.16)$$

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon / z_0(t) + O(\varepsilon^2), \quad (12.17)$$

где

$$z_0(t) = \frac{1}{\beta} (1 - \exp(-\beta t)) + q \exp(-\beta t), \quad (12.18)$$

$$\begin{aligned} z_1(t) = & (1 - \beta) (1 + \ln 2\beta q) \exp(-\beta t) + (1 - \beta) \{ \beta (\beta q - 1) t - \exp \beta t - \\ & - \ln (1 + (\beta q - 1) \exp(-\beta t)) \} \exp(-\beta t), \end{aligned} \quad (12.19)$$

а остатки имеют указанные порядки равномерно по  $\varepsilon^\lambda \leq t \leq h - \varepsilon^\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

**12.4. Построение асимптотики при  $t \geq h - \varepsilon^\lambda$ .** При этих  $t$  имеем дело с системой

$$\dot{z} = 1 - x - \beta(z - x) - \frac{1}{\alpha\varepsilon}(z - x)(z(t-h) - x(t-h)), \quad (12.20)$$

$$\varepsilon \dot{x} = \varepsilon(1 - x) - x(z - x), \quad (12.21)$$

за решением которой с начальными условиями  $x(h - \varepsilon^\lambda, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$ ,  $-\varepsilon^\lambda \leq t \leq h - \varepsilon^\lambda$  сохраним обозначение  $x(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$ . Из (12.20) следует, что асимптотика  $x(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$  определяется асимптотикой  $z(t-h, \varepsilon) - x(t-h, \varepsilon)$ , которая уже построена. Поэтому приведем сразу итоговые формулы.

При  $h - \varepsilon^\lambda \leq t \leq h + \varepsilon^\lambda$  сделаем в (12.20), (12.21) замену  $t = \varepsilon\tau + h$  и положим  $x(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon\tau+h}$ ,  $z(\tau, \varepsilon) = z(t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon\tau+h}$ . Тогда равномерно по  $-\varepsilon^{\lambda-1} \leq \tau \leq \varepsilon^{\lambda-1}$  имеем асимптотические равенства

$$z(\tau, \varepsilon) = a_0(\tau) + \varepsilon a_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (12.22)$$

$$x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon b_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (12.23)$$

где

$$a_0(\tau) = x_1 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\alpha} (q - x_0(s)) ds \right\},$$

$$b_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \exp \left\{ \int_s^{\tau} a_0(\sigma) d\sigma \right\} ds,$$

$$a_1(\tau) = x_2 \exp \left\{ - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\tau} (q - x_0(s)) ds \right\} +$$

$$+ (H) \int_{-\infty}^{\tau} [1 - \beta a_0(s) + \frac{1}{\alpha} b_1(s) (q - x_0(s))] -$$

$$- \frac{1}{\alpha} a_0(s) (z_1(s) - x_1(s))] \exp \left\{ - \int_s^{\tau} \frac{1}{\alpha} (q - x_0(\sigma)) d\sigma \right\} ds,$$

$x_1, x_2$  — значения функций (12.18) и (12.19) соответственно при  $t = h$ , функции  $x_0(s), x_1(s), z_1(s)$  из (12.5), а  $(H)\int$  — регуляризация по Адамару [62].

При  $h + \varepsilon^\lambda \leq t \leq h + \sigma(q) - \varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1$ , где  $\sigma = \sigma(x)$  — введенная при доказательстве теоремы 11.1 функция, имеем

$$x(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) = 1 - (1 - \mu\varepsilon) \exp[-(t - h)] + O(\varepsilon^2), \quad (12.24)$$

где

$$\mu = \lim (b_1(\tau) - \tau), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (12.25)$$

Остается описать способ вычисления постоянной  $q(\varepsilon)$  из (12.1), (12.2) и периода  $T(\varepsilon)$  релаксационного цикла. Пусть  $t_0 = t_0(q, \varepsilon)$  — первый нуль функции  $x(t, \varepsilon) - q/2$ , где  $x(t, \varepsilon)$  — компонента решения системы (12.20), (12.21) при  $t \geq h + \varepsilon^\lambda$ . Его асимптотическому вычислению предпосыплем следующие замечания. Во-первых, полная асимптотика (ср. с (12.24))  $x(t, \varepsilon)$  при  $h + \varepsilon^\lambda \leq t \leq h + \sigma(q) - \varepsilon^\lambda$  имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \varepsilon^k\right) \exp[-(t - h)], \quad (12.26)$$

где  $r_1 = -\mu$  (см. (12.25)). Действительно, при этих  $t$  движение происходит по интегральному многообразию  $x = z$  системы (11.18), (11.19), начальное условие  $x(h, \varepsilon)$  для уравнения  $\dot{x} = 1 - x$ , на котором определяем по описанному в п. 12.3 правилу из представления (12.23). Во-вторых, с экспоненциальной точностью из уравнения (11.2) при  $2h + \varepsilon^\lambda \leq t \leq h + \sigma(q) - \varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1$ , имеем

$$y(t, \varepsilon) = \frac{q}{2\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t x(s, \varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon^\lambda}^{h+\varepsilon^\lambda} y(s, \varepsilon) ds - \beta t \right\}. \quad (12.27)$$

Учитывая в (12.27) формулу (12.26) и построенную ранее асимптотику  $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ , убеждаемся, что

$$y(t, \varepsilon) = \frac{q}{2\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \Phi(t - h, q) - \beta t + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \varepsilon^k \right\}, \quad (12.28)$$

где  $\Phi = \Phi(\sigma, x)$  — функция (11.10). И, наконец, при  $h + \sigma(q) - \varepsilon^\lambda \leq t \leq h + \sigma(q) + \varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1$ , выполняя в системе (11.18), (11.19) замену  $\tau = (1 - h - \sigma(q))/\varepsilon$ , приходим к системе (12.4). Решения последней ищем в виде рядов

$$x = x_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \quad z = g(q) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau), \quad (12.29)$$

где  $g(q) = 1 - \exp[-\sigma(q)]$ , а коэффициенты  $x_k, z_k$  — решения уравнений вида (12.6), которые выбираются из условий «сшивания» при  $\tau \rightarrow -\infty$  с функциями (12.26), (12.28) при  $t = h + \sigma(q) - \varepsilon\tau$ . Например,  $x_0(\tau) = g(q)/(1 + c_0 \exp(g(q)\tau))$ , где

$$c_0 = \frac{q}{2g(q)} \exp[\gamma_0 - \beta(h + \sigma(q))],$$

а постоянная  $\gamma_0$  из (12.28).

Итак, все необходимые сведения для вычисления  $t_0(q, \varepsilon), q(\varepsilon)$  приведены. Приравнивая теперь правую часть формулы (12.29) к  $q/2$ , получаем асимптотическое представление

$$t_0(q, \varepsilon) = h + \sigma(q) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k(q). \quad (12.30)$$

Поэтому для параметра  $q$ , определяемого из уравнения  $z(\tau, \varepsilon)|_{\tau=(t_0-h-\sigma(q))/\varepsilon}=q$ , где  $z(\tau, \varepsilon)$  — ряд (12.29), справедлива аналогичная асимптотическая формула. Учитывая ее в (12.30), выводим

$$T(\varepsilon) = h + \sigma_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k T_k,$$

что завершает построение асимптотики релаксационного цикла системы (11.1), (11.2).

### 13. Свойства устойчивости релаксационных циклов

**13.1. Основная лемма.** Напомним, что вопрос об устойчивости релаксационных циклов системы (11.1), (11.2), доставляемых теоремами 11.1, 11.2, сводится к анализу расположения мультипликаторов системы

$$\dot{v} = - \left( 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y \right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xyw, \quad (13.1)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} v - \frac{A}{\varepsilon} y(t-h, \varepsilon) w(t-h), \quad (13.2)$$

где  $A$  — произвольный комплексный параметр, а  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  — траектория релаксационного цикла с начальными условиями (12.1).

Пусть  $v(t, \varepsilon)$ ,  $w(t, \varepsilon)$  — решение системы (13.1), (13.2) с произвольным начальным условием  $(v_0, w_0(t))$  из шара единичного радиуса с центром в нуле фазового пространства  $R \times C$   $(-h-\delta_0, -\delta_0)$ , где  $\delta_0 > 0$  достаточно мало и фиксировано. Определим функции  $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{w}(t, \varepsilon)$  по следующему правилу: при  $-\delta_0 \leq t \leq h - \delta_0$  функции  $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{w}(t, \varepsilon)$  — решение задачи Коши для системы

$$\dot{v} = - \left( 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} y \right) v - \frac{\alpha}{\varepsilon} xyw, \quad (13.3)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} v \quad (13.4)$$

с начальными условиями  $\tilde{v}(-\delta_0, \varepsilon) = v_0$ ,  $\tilde{w}(-\delta_0, \varepsilon) = w_0$ , где  $w_0 = w_0(-\delta_0)$ ; при  $t \geq h - \delta_0$  в качестве  $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{w}(t, \varepsilon)$  берем решение системы (13.1), (13.2) с начальными условиями  $\tilde{v}(h - \delta_0, \varepsilon)$ ,  $\tilde{w}(h - \delta_0, \varepsilon)$ ,  $-\delta_0 \leq t \leq h - \delta_0$ .

**Лемма 13.1.** Справедливы асимптотические равенства

$$v(t, \varepsilon) = \tilde{v}(t, \varepsilon) + O(\exp(-a/\varepsilon)), \quad (13.5)$$

$$w(t, \varepsilon) = \tilde{w}(t, \varepsilon) + O(\exp(-a/\varepsilon)), \quad a > 0,$$

равномерные по  $-\delta_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \delta_0$  и по начальным условиям  $(v_0, w_0(t))$ .

Для доказательства заметим, что при  $-\delta_0 \leq t \leq h - \delta_0$  формулы (13.5) — следствие общих асимптотических свойств  $y(t, \varepsilon)$ , а при  $t \geq h - \delta_0$  они вытекают из метода шагов и самых грубых оценок решений системы (13.1), (13.2).

**13.2. Исследование устойчивости релаксационных циклов.** Лемма 13.1 сводит проблему расположения мультипликаторов системы (13.1), (13.2) к анализу двумерного оператора

$$W(v_0, w_0(t), \varepsilon) = (\tilde{v}(T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon), \tilde{w}(t + T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon)), \quad (13.6)$$

который удобно отождествить с двумерной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (13.7)$$

где  $a_{11} = \tilde{v}_1(T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon)$ ,  $a_{21} = \tilde{w}_1(T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon)$ ,  $a_{12} = \tilde{v}_2(T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon)$ ,  $a_{22} = \tilde{w}_2(T(\varepsilon) - \delta_0, \varepsilon)$ , а  $(\tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$  и  $(\tilde{v}_2, \tilde{w}_2)$  — функции  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  при  $v_0 = 1$ ,  $w_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ ,  $w_0 = 1$  соответственно. Для вычисления функций  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{v}_2$ ,  $\tilde{w}_2$  при  $-\delta_0 \leq t \leq h - \varepsilon^1$ ,  $0 < \lambda < 1$ , можно продифференцировать асимптотические формулы из п. 12.2—12.4 по  $t$  и  $q$ , а затем взять их нужные линейные комбинации. При  $t \geq h - \varepsilon^1$  для нахождения этих функций необходимо интегрировать систему (13.1), (13.2), используя уже полученные асимптотические формулы и асимптотику релаксационного цикла. На этом пути получаем .

$$a_{11}(\varepsilon) = \frac{A}{\beta} (1 - \exp(-\beta h)) + O(\varepsilon), \quad (13.8)$$

$$a_{12}(\varepsilon) \exp(-\delta_0) = \varepsilon \left\{ \frac{A}{x_1} (1 - (1 + \alpha) x_1) \left( 1 - \frac{1}{\beta} (1 - \exp(-\beta h)) \right) + \right. \\ \left. + (A - A^2) x_1 / x_1 \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (13.9)$$

$$a_{21}(\varepsilon) \exp \delta_0 = - \frac{A}{\alpha \beta \varepsilon} (1 - \exp(-\beta h)) [1 + O(\varepsilon)], \quad (13.10)$$

$$a_{22}(\varepsilon) = A \left( 1 + \frac{(1 - (1 + \alpha) x_1)}{\alpha \beta x_1} (1 - \exp(-\beta h)) \right) - \\ -(A - A^2) x_1 / \alpha x_1 + O(\varepsilon), \quad (13.11)$$

где, напомним,

$$x_1 = \frac{1}{\beta} (1 - \exp(-\beta h)) + x_1 \exp(-\beta h).$$

Введем в рассмотрение квадратное уравнение

$$\lambda^2 - \Delta_1 \lambda + \Delta_2 = 0, \quad (13.12)$$

где

$$\Delta_1 = (1 + \mu) A - A (1 - A) x_1 / \alpha x_1,$$

$$\Delta_2 = \mu A^2, \quad \mu = \frac{1 - x_1}{x_1} \frac{1}{\alpha \beta} [1 - \exp(-\beta h)].$$

Отметим, что в соответствии с неравенствами (11.30)  $\mu < 1$ .

Ниже предполагаем простоту корней  $\lambda_1^0(A)$ ,  $\lambda_2^0(A)$  уравнения (13.12). Это ограничение, носящее характер общности положения, необременительно, так как в дальнейшем комплексный параметр  $A$  принимает конечное число значений. Заметим, что при  $A = 1$  требуемое свойство имеет место, что следует из формул для  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и упоминавшегося неравенства  $\mu < 1$ .

Формулы (13.8)—(13.11) показывают, что при сделанных выше ограничениях о простоте корней уравнения (13.12) для собственных значений матрицы (13.7) справедливы асимптотические равенства

$$\lambda_s(\varepsilon) = \lambda_s^0(A) + O(\varepsilon), \quad s = 1, 2.$$

Все изложенные факты справедливы для присоединенной к (13.1), (13.2) линейной системы. Поэтому ровно два мультипликатора системы (13.1), (13.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют своими пределами числа  $\lambda_1^0(A)$  и  $\lambda_2^0(A)$ , а остальные экспоненциально приближаются к нулю. Теперь в соответствии с изложенным в конце п. 11.4 положим  $A = 1$ , что позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 13.1.** В условиях теоремы 11.1 множеству (11.15), (11.16) принадлежит ровно одно начальное условие релаксационного цикла системы (11.1), (11.2), являющегося орбитально экспоненциально устойчивым.

Обсудим вопрос об устойчивости релаксационных циклов с короткими периодами, ограничиваясь случаем  $k = 1$ . При этом условии уравнение (11.42) трансформируется к виду

$$\mu A^3 + (\mu - x_1/\alpha x_1) A^2 - A - 1 = 0. \quad (13.13)$$

Из (13.13) и сказанного в конце п. 11.4 вытекает, что если простейший релаксационный цикл с коротким периодом при изменении параметров системы (11.1), (11.2) теряет устойчивость, это происходит колебательным образом. Тем самым возникает важный вопрос о динамике системы (11.1), (11.2) в окрестности рассматриваемого неустойчивого релаксационного цикла с коротким периодом. Дадим эвристическое решение данной проблемы.

Как и в п. 11.3, будем работать в рамках нулевых приближений системы (11.1), (11.2). Пусть  $\xi, \Delta\xi > 0, \xi + \Delta\xi < h$ . Считаем, что  $y_0(t) \equiv 0$  соответственно при  $-h < t < -\xi - \Delta\xi$  и  $-\xi \leq t \leq 0$ . А при  $-\xi - \Delta\xi < t < -\xi$  предполагаем, что

$$y_0(t) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\beta} - x_{\text{нач}} \right) \exp [-\beta(t + \xi + \Delta\xi)]. \quad (13.14)$$

В (13.14) параметр  $x_{\text{нач}}$  — произвольное положительное число. Далее пусть при  $t = 0$  задано значение  $x_{\text{вх}}$ . Выписывая при  $t > 0$  формулы для  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  в точности по тому правилу, которое описано в п. 11.3, приходим к четырехмерному отображению

$$\begin{aligned} x_{\text{вх}} &\rightarrow 1 - \exp [-\sigma(\Delta\xi, x_{\text{нач}})], \\ x_{\text{нач}} &\rightarrow x_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (13.15)$$

$$\Delta\xi \rightarrow h - \xi - \Delta\xi,$$

$$\xi \rightarrow \sigma(\Delta\xi, x_{\text{нач}}),$$

где функция  $\sigma$  определяется из уравнения

$$\Phi(\Delta\xi, \sigma, x_{\text{нач}}) = 0. \quad (13.16)$$

Здесь, как и при доказательстве леммы 11.2, подчеркнута зависимость функции (11.10) от запаздывания, роль которого выполняет  $\Delta\xi$ . Простой подсчет показывает, что у матрицы линеаризованного в состоянии равновесия отображения (13.15) одно собственное число нулевое, а оставшиеся три совпадают с  $1/A$ , где  $A$  — решения уравнения (13.13).

Таким образом, выведенное эвристическим путем отображение (13.15) дает тот же ответ на вопрос об устойчивости простейшего релаксационного цикла с коротким периодом, что и точная теория.

Заметим, что авторы статьи [15] также ставили вопрос о существовании и устойчивости релаксационных циклов с короткими периодами. С претензией на строгость, но фактически на эвристическом уровне, в простейшем случае

ими вместо четырехмерного отображения (13.15) введено некоторое трехмерное отображение, мультипликаторы которого, вычисленные в состоянии равновесия, не совпадают с доставляемыми точной теорией.

**13.3. Итоговые замечания.** Итак, при начальных условиях (11.15), (11.16) система (11.1), (11.2) во многом ведет себя аналогично классической релаксационной системе, а специфика проявляется в том, что роль релейного элемента выполняет запаздывающая обратная связь. Вместе с тем она имеет большое количество релаксационных циклов с короткими периодами, техника исследования которых достаточно специфична. Проясняющую роль здесь сыграла бы теорема о строгой связи между отображением (13.15) и решениями системы (11.1), (11.2) с начальными условиями определенного вида. Она позволила бы, в частности, продвинуться в вопросе о существовании устойчивых двухчастотных релаксационных колебаний у системы (11.1), (11.2), на возможность которых указывает отображение (13.15). Подчеркнем, что продвижение в этом направлении может быть достигнуто на пути существенной модернизации развитой нами техники. Связано это с тем, что выше мы строили асимптотику релаксационных колебаний при относительно простых начальных условиях (несколько иначе дело обстояло в предыдущей главе, что вызвало массу затруднений). Тем самым в теории релаксационных колебаний для систем с запаздыванием остаются открытыми еще многие вопросы.

#### 14. Релаксационные циклы конечной амплитуды одного класса скалярных уравнений с запаздыванием

**14.1. Постановка задачи.** Цель этого раздела — проиллюстрировать развитые при исследовании системы (11.1), (11.2) общие методы построения асимптотики и исследования устойчивости релаксационных циклов на примере уравнения

$$\varepsilon \dot{x} = xf(x, x(t-h)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (14.1)$$

где  $h > 0$ , а функция  $f(x, y) \in C^\alpha(K)$ ,  $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ , удовлетворяет следующим ограничениям.

Условие 1. Найдется такое  $x_0 > 0$ , что  $f(x, 0) > 0$  при  $0 \leq x < x_0$ ,  $f(x, 0) < 0$  при  $x > x_0$ ,  $f'_x(x_0, 0) < 0$ .

Условие 2.  $f'_y < 0$  при  $x = x_0$ ,  $0 \leq y \leq y_0$ .

Условие 3.  $f(x, x_0) < 0$  при  $0 \leq x \leq x_0$ .

Отметим, что сформулированным условиям удовлетворяет при  $\gamma > 1$  уравнение

$$\dot{x} = [1 - x - \gamma x(t-1)]x, \quad (14.2)$$

получающееся из (2.21) после замен  $\varepsilon = 1/\lambda$ ,  $x = (a/(1+a))N$ ,  $\gamma = 1/a$ .

**14.2. Существование циклов.** Как и в разд. 11, сначала поставим вопрос о существовании у уравнения (14.1) медленно осциллирующего цикла  $x(t, \varepsilon)$ , т. е. цикла, для которого уравнение  $x(t, \varepsilon) = x_0/2$  имеет не более одного решения на любом промежутке времени длины  $h$ . С этой целью в фазовом пространстве  $C(-h, 0)$  выделим замкнутое и ограниченное выпуклое множество начальных условий  $S$ , состоящее из таких функций  $\varphi(t, \varepsilon)$ , что

$$0 \leq \varphi(t, \varepsilon) \leq (x_0/2) \exp(mt/\varepsilon), \quad \varphi(0, \varepsilon) = x_0/2, \quad (14.3)$$

а постоянная  $m > 0$  одна и та же для всех функций семейства.

Пусть  $x_\varphi(t, \varepsilon)$  — решение уравнения (14.1) с произвольной начальной функцией  $\varphi \in S$ . При условиях 1—3 общие асимптотические свойства  $x_\varphi(t, \varepsilon)$  выявляются просто. Действительно, из оценки (14.3) следует, что равномерно по  $0 \leq t \leq h - \varepsilon^\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , и начальным условиям  $\varphi \in S$  решение  $x_\varphi(t, \varepsilon)$  с

точностью до величин порядка  $\exp(-m\epsilon^{1-\lambda})$  аппроксимируется решением задачи Коши

$$\epsilon \dot{x} = xf(x, 0), \quad x|_{t=0} = x_0/2. \quad (14.4)$$

Поэтому (см. условие 1) функция  $x_\varphi(t, \epsilon)$  за время порядка  $\epsilon \ln(1/\epsilon)$  становится асимптотически близкой к  $x_0$  и остается таковой вплоть до значений  $t$ , асимптотически близких к  $h$ .

Условия 1, 2 гарантируют справедливость при всех  $t \geq 0$  неравенства  $x_\varphi(t, \epsilon) \leq x_0$ . В самом деле, если  $\varphi(t, \epsilon) > 0$  при  $-h < t \leq 0$ , то  $x_\varphi(t, \epsilon) < x_0$  при всех  $t > 0$ . В предположении противного найдется такой первый момент времени  $t_0 > 0$ , что  $x_\varphi(t_0, \epsilon) = x_0$ ,  $\dot{x}_\varphi(t_0, \epsilon) \geq 0$ . Но, с другой стороны, из уравнения (14.1) в силу условий 1, 2 имеем

$$\epsilon \dot{x}_\varphi(t_0, \epsilon) = x_0 f(x_0, x_\varphi(t_0 - h, \epsilon)) < x_0 f(x_0, 0) = 0,$$

что противоречит исходной посылке. Если же  $\varphi(t, \epsilon) \geq 0$ , то, очевидно,  $x_\varphi(t, \epsilon) \leq x_0$ .

Итак, прямая  $x = x_0$  образует для решения  $x_\varphi(t, \epsilon)$  «барьер». А отсюда и из условия 3 вытекает, что при значениях  $t$ , чуть больших  $h$ ,  $x_\varphi(t, \epsilon)$  начинает убывать, за время порядка  $\epsilon \ln(1/\epsilon)$  становится величиной порядка  $\exp\{(1/\epsilon) \times xf(0, x_0)(t-h)\}$  и остается таковой вплоть до асимптотически малой окрестности точки  $t = 2h$ .

При значениях  $t$ , чуть больших  $2h$ , снова начинает работать уравнение (14.4) и  $x_\varphi(t, \epsilon)$  становится величиной порядка  $\exp\{(1/\epsilon)f(0, x_0)h + (1/\epsilon) \times xf(0, 0)(t-2h)\}$ . Полная компенсация наступает в асимптотически малой окрестности  $t = T_0$ , где

$$T_0 = [2 - f(0, x_0)/f(0, 0)]h > 2h, \quad (14.5)$$

затем происходит «срыв» на состояние равновесия  $x = x_0$  уравнения (14.4) и т. д.

Обозначим через  $T(\epsilon, \varphi)$  второй положительный корень уравнения  $x_\varphi(t, \epsilon) = x_0/2$ . Из изложенного выше следует, что равномерно по  $\varphi \in S$

$$T(\epsilon, \varphi) = T_0 + o(1), \quad \dot{x}_\varphi|_{t=T(\epsilon, \varphi)} = (x_0/2\epsilon)[f(x_0/2, 0) + o(1)]. \quad (14.6)$$

Поэтому на множестве  $S$  определен оператор последовательности

$$\Pi\varphi = x_\varphi(t + T(\epsilon, \varphi), \epsilon),$$

который в силу (14.5), (14.6) при подходящем выборе  $m > 0$  преобразует его в себя.

**Теорема 14.1.** При выполнении условий 1—3 найдется такое  $\epsilon_0 > 0$ , что при  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  уравнение (14.1) имеет медленно осциллирующий релаксационный цикл  $x(t, \epsilon)$  периода  $T(\epsilon)$ ,  $T(0) = T_0$ .

Для доказательства существования релаксационных циклов  $x_k(t, \epsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уравнения (14.1) периодов  $T_k(\epsilon) < h/k$  воспользуемся предложенным в п. 11.4 приемом, приводящим в данном случае к следующему утверждению.

**Теорема 14.2.** Пусть выполнены условия 1—3. Тогда по любому натуральному  $k_0$  можно указать такое  $\epsilon_{k_0} > 0$ , что при  $0 < \epsilon < \epsilon_{k_0}$  уравнение (14.1) имеет быстро осциллирующие релаксационные циклы  $x_k(t, \epsilon)$ ,  $k = 1, \dots, k_0$ , для периодов  $T_k(\epsilon)$  которых справедливы равенства:

$$T_k(\epsilon) = (h - h_k)/k + o(1), \quad h_k = h/(1 + kT_0).$$

**14.3. Асимптотика цикла  $x(t, \epsilon)$  на участке взлета и первом участке медленного движения.** В дальнейшем при построении асимптотики цикла  $x(t, \epsilon)$  выделим следующие участки: участок взлета  $-\delta_0 \leq t \leq \delta_0$ , первый

участок медленного движения  $\delta_0 \leq t \leq h - \delta_0$ , участок падения  $h - \delta_0 \leq t \leq h + \delta_0$  и второй участок медленного движения  $h + \delta_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \delta_0$ . Здесь  $\delta_0 > 0$  достаточно мало и фиксировано.

Как уже отмечалось, при  $-\delta_0 \leq t \leq \delta_0$  имеем дело с задачей Коши (14.4), в которой сделаем замену  $t = (\varepsilon/\beta_0) \ln u$ , где  $\beta_0 = f(0, 0) > 0$ . В результате получаем начальную задачу

$$\beta_0 u v' = v f(v, 0), \quad v|_{u=1} = x_0/2. \quad (14.7)$$

Из свойств 1, 2 вытекает, что функция  $v = v(u)$  определена при всех  $0 < u < \infty$ , монотонно возрастает и  $v(u) \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  $v(u) \rightarrow x_0$ ,  $u \rightarrow \infty$ . Остановимся подробнее на ее асимптотическом поведении при  $u \rightarrow 0$  и  $u \rightarrow \infty$ .

Заметим, что задача (14.7) эквивалентна уравнению

$$G(v) = \frac{1}{\beta_0} \ln u, \quad G(v) = \int_{x_0/2}^v \frac{ds}{sf(s, 0)}, \quad (14.8)$$

причем при малых  $v$  функция  $G$  допускает представление

$$G(v) = \frac{1}{\beta_0} \ln v + g_0(v), \quad g_0(v) = \int_{x_0/2}^v \frac{\beta_0 - f(s, 0)}{s \beta_0 f(s, 0)} ds - \frac{1}{\beta_0} \ln \frac{x_0}{2}. \quad (14.9)$$

Учитывая (14.9) в (14.8) и полагая  $v = u\gamma(u)$ , для определения  $\gamma$  приходим к уравнению

$$\frac{1}{\beta_0} \ln \gamma + g_0(u\gamma) = 0. \quad (14.10)$$

Применяя к (14.10) при  $u = 0$  теорему о неявной функции, получаем гладкую функцию  $\gamma = \gamma(u)$ ,  $\gamma(0) = \alpha_0$ , где

$$\alpha_0 = \exp(-\beta_0 g_0(0)).$$

При  $u \rightarrow \infty$  воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} G(v) = -\frac{1}{\beta_1} \ln(x_0 - v) + g_1(v), \quad g_1(v) = \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{x_0}{2} + \\ + \int_{x_0/2}^v \frac{\beta_1(s - x_0) + sf(s, 0)}{\beta_1 s f(s, 0)(s - x_0)} ds, \quad \beta_1 = -x_0 f'(x_0, 0) > 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Учитывая (14.11) в (14.8) и полагая  $u = 1/s$ ,  $v = x_0 - s^{\beta_1/\beta_0} z_0(s)$ , для определения  $z_0$  имеем уравнение

$$-\frac{1}{\beta_1} \ln z_0 + g_1(x_0 - s^{\beta_1/\beta_0} z_0) = 0,$$

из которого при помощи теоремы о неявной функции находим  $z_0 = z_0(s) = \alpha + O(s^{\beta_1/\beta_0})$ ,  $s \rightarrow +0$ , где  $\alpha_1 = \exp(\beta_1 g_1(x_0))$ . Таким образом, при  $u \rightarrow \infty$

$$v(u) = x_0 - \alpha_1/u^{\beta_1/\beta_0} + O(1/u^{2\beta_1/\beta_0}). \quad (14.12)$$

Изложенные построения приводят к формулам

$$x(t, \varepsilon) = v(u), \quad \exp(-\delta_0 \beta_0 / \varepsilon) \leq u \leq \exp(\delta_0 \beta_0 / \varepsilon), \quad (14.13)$$

$$x(t, \varepsilon) = x_0, \quad \delta_0 \leq t \leq h - \delta_0. \quad (14.14)$$

Остатки во всех приводимых ниже формулах (в том числе и в (14.13), (14.14)) имеют порядок  $\exp(-a/\varepsilon)$ ,  $a > 0$ , равномерно по указанным  $t$ , и поэтому их не выписываем.

**14.4.** Асимптотика цикла  $x(t, \varepsilon)$  на участке падения. При  $h - \delta_0 \leq t \leq h + \delta_0$  сделаем в уравнении (14.1) замены  $t = h + (\varepsilon/\beta_0) \ln u$ ,  $w(u, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)|_{t=h+(\varepsilon/\beta_0)\ln u}$ , учтем равенство (14.13) и отбросим экспоненциально малые величины. В результате приходим к уравнению

$$\beta_0 u w' = wf(w, v(u)), \quad (14.15)$$

которое в силу (14.12) следует дополнить начальным условием

$$w|_{u \rightarrow +0} = x_0. \quad (14.16)$$

Итак, построение асимптотики цикла на участке падения свелось к обоснованию разрешимости задачи (14.15), (14.16) при  $0 < u < \infty$ , что представляет основную трудность при построении всей асимптотики.

Для доказательства локальной однозначной разрешимости задачи (14.15), (14.16) положим  $w = x_0 + i\omega_0(u)$  и перейдем к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} L\omega_0(u) = \frac{1}{u} \int_0^u & \left\{ \frac{1}{\beta_0} \omega_0(s) f(x_0 + s\omega_0(s), v(s)) + \right. \\ & \left. + \frac{x_0}{\beta_0 s} [f(x_0 + s\omega_0(s), v(s)) - f'_x(x_0, 0) s\omega_0(s)] \right\} ds, \end{aligned} \quad (14.17)$$

где

$$L\omega_0(u) = \omega_0(u) + \frac{\beta_1}{\beta_0 u} \int_0^u \omega_0(s) ds. \quad (14.18)$$

Обращая затем оператор (14.18) по формуле

$$L^{-1}\omega_0(u) = \omega_0(u) - \frac{\beta_1}{\beta_0 u} \int_0^u \left(\frac{s}{u}\right)^{\beta_1/\beta_0} \omega_0(s) ds,$$

получаем интегральное уравнение, правую часть которого обозначим через  $F(\omega_0)$ . Несложный анализ с учетом свойств функции  $f(x, y)$  и поведения  $v(u)$  при малых  $u$  показывает, что оператор  $F$  преобразует некоторое подмножество функций

$$\omega_0(u) \in C(0, u_0), \quad \omega_0(0) = -\beta_1/(\beta_0 + \beta_1), \quad (14.19)$$

в себя и при достаточно малом  $u_0$  является сжимающим.

Итак, задача (14.15), (14.16) локально однозначно разрешима, причем в силу (14.19)  $w(u) < x_0$  при всех малых  $u > 0$ . Из условий 1, 2 вытекает (см. аналогичное место в п. 14.2), что  $w(u) < x_0$  при всех  $u > 0$ , а из условия 3 следует, что при всех достаточно больших  $u$  функция  $w(u)$  монотонно убывает и

$$w(u) \sim c_0/u^{\beta_2}, \quad \beta_2 = -f(0, x_0)/f(0, 0) > 0, \quad u \rightarrow \infty. \quad (14.20)$$

Суммируя все сказанное выше, приходим к формуле

$$x(t, \varepsilon) = w(u), \quad \exp(-\delta_0 \beta_0 / \varepsilon) \leq u \leq \exp(\delta_0 \beta_0 / \varepsilon), \quad (14.21)$$

где  $t = h + (\varepsilon/\beta_0) \ln u$ .

**14.5.** Асимптотика цикла  $x(t, \varepsilon)$  на втором участке медленного движения. Так как при  $h + \delta_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \delta_0$  функция  $x(t, \varepsilon)$  экспоненциально мала, то при этих  $t$  удобнее строить асимптотику  $\ln x(t, \varepsilon)$ . Используя уже полученные

асимптотические формулы и интегрируя уравнение (14.1) шагами, последовательно получаем

$$\ln x(t, \varepsilon) = f(0, x_0)(t - h)/\varepsilon + \ln c_0, \quad h + \delta_0 \leq t \leq 2h - \delta_0, \quad (14.22)$$

где постоянная  $c_0$  из (14.20);

$$\begin{aligned} \ln x(t, \varepsilon) &= f(0, x_0) \left( \frac{h}{\varepsilon} + \frac{1}{\beta_0} \ln u \right) + \int_0^u \frac{f(0, w(s)) - f(0, x_0)}{\beta_0 s} ds + \\ &+ \ln c_0, \quad t = 2h + \frac{\varepsilon}{\beta_0} \ln u, \quad 2h - \delta_0 \leq t \leq 2h + \delta_0; \end{aligned} \quad (14.23)$$

$$\begin{aligned} \ln x(t, \varepsilon) &= f(0, x_0) \frac{h}{\varepsilon} + (H) \int_0^\infty \frac{f(0, w(s))}{\beta_0 s} ds + \ln c_0 + \\ &+ \frac{f(0, 0)}{\beta_0} \ln u, \quad t = 2h + \frac{\varepsilon}{\beta_0} \ln u, \quad 2h + \delta_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \delta_0. \end{aligned} \quad (14.24)$$

**14.6. Вычисление периода  $T(\varepsilon)$ .** Из общих асимптотических свойств  $x(t, \varepsilon)$  следует, что при  $T_0 - \delta_0 \leq t \leq T_0 + \delta_0$  после замены  $t = T_0 + (\varepsilon/\beta_0) \ln u$  снова получаем уравнение (14.7). А отсюда и из (14.24) заключаем, что при этих  $t$

$$x(t, \varepsilon) = v(r_0 u / \alpha_0), \quad (14.25)$$

где

$$r_0 = \exp \left\{ (H) \int_0^\infty \frac{f(0, w(s))}{\beta_0 s} ds + \ln c_0 \right\}, \quad (14.26)$$

а  $v$  — решение задачи Коши (14.7). Приравнивая, наконец, правую часть (14.25) к  $x_0/2$ , приходим к формуле

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\exp(-a/\varepsilon)), \quad a > 0, \quad (14.27)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\beta_0} (\ln \alpha_0 - \ln r_0). \quad (14.28)$$

В заключение отметим, что строить асимптотику циклов  $x_k(t, \varepsilon)$ ,  $k \geq 1$ , нет необходимости, так как все формулы из предыдущих пунктов справедливы и для них. Отличие состоит лишь в том, что  $h$  заменяется на

$$\tilde{h} = h/[1 + k(T_0 + \varepsilon T_1)] + O(\exp(-a/\varepsilon)), \quad a > 0,$$

а для их периодов  $T_k(\varepsilon)$  имеем формулы

$$T_k(\varepsilon) = (h - \tilde{h})/k.$$

**14.7. Исследование устойчивости релаксационных циклов.** Из изложенного в п. 11.4 следует, что проблема устойчивости циклов  $x(t, \varepsilon)$ ,  $x_k(t, \varepsilon)$  сводится к анализу расположения мультиплликаторов уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} &= x(t, \varepsilon) f'_x(x(t, \varepsilon), x(t - h, \varepsilon)) v + \\ &+ A f'_y(x(t, \varepsilon), x(t - h, \varepsilon)) x(t - h, \varepsilon) v(t - h) \end{aligned} \quad (14.29)$$

с комплексным параметром  $A$ . Исследование уравнения (14.29) проводится по предложенной в разделе 13 схеме, и на нем останавливаться не будем. Приведем сразу окончательный результат.

**Теорема 14.3.** При всех достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (14.29) имеет простой мультиликатор

$$\nu(A, \varepsilon) = (1 - \kappa)A + \kappa A^2 + O(\exp(-a/\varepsilon)), \quad a > 0, \quad (14.30)$$

где  $\kappa = 1 - f(0, x_0)/f(0, 0) > 1$ , а все остальные его мультиликаторы экспоненциально малы.

Сделаем некоторые выводы. Полагая в (14.30)  $A = 1$  и учитывая, что  $\nu(1, \varepsilon) \equiv 1$ , приходим к заключению об экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла  $x(t, \varepsilon)$  уравнения (14.1). Далее, отвечающее за устойчивость циклов с короткими периодами уравнение (11.42) здесь принимает вид

$$P(A) \equiv A^{1/k} [(1 - \kappa)A + \kappa A^2] = 1. \quad (14.31)$$

Для анализа расположения его корней удобно ввести вспомогательное уравнение

$$P(A, \lambda) = 1, \quad (14.32)$$

где  $P(A, \lambda) = A^{1/k} [(1 - \lambda)A + \lambda A^2]$ ,  $1 < \lambda < \kappa$ . Отметим, что, во-первых, при всех  $1 < \lambda < \kappa$  уравнение (14.32) имеет простой корень  $A = 1$  ( $\partial P / \partial A = 1/k + 1 + \lambda \neq 0$  при  $A = 1$ ); во-вторых, при всех  $1 < \lambda < \kappa$  других корней (кроме  $A = 1$ ) у уравнения (14.32) на единичной окружности нет; наконец, в-третьих, при  $\lambda = 1$  корни уравнения (14.32) имеют вид

$$A_m = \exp(\pm i 2\pi m k / (2k + 1)), \quad m = 0, 1, \dots, 2k + 1.$$

Указанные свойства уравнения (14.32) в совокупности с просто проверяемым фактом, что при  $0 < \lambda - 1 \ll 1$  все его корни (за исключением, естественно,  $A = 1$ ) сдвигаются внутрь единичной окружности на величины порядка

$$\frac{2k}{2k + 1} \left(1 - \cos \frac{2\pi km}{2k + 1}\right) (\lambda - 1) > 0,$$

приводят к выводу, что они остаются там и при  $\lambda = \kappa$ .

Суммируем все сказанное выше в виде теоремы.

**Теорема 14.4.** При условиях 1—3 уравнение (14.1) при всех достаточно малых  $\varepsilon$  имеет единственный экспоненциально орбитально устойчивый медленно осциллирующий цикл  $x(t, \varepsilon)$ , а все его быстро осциллирующие циклы  $x_k(t, \varepsilon)$ ,  $k \geq 1$ , экспоненциально неустойчивы.

**14.8. Устойчивость однородного цикла в среде с диффузией.** Полученные в п. 14.7 результаты позволяют без труда решить важную с прикладной точки зрения задачу о диффузионной неустойчивости цикла  $x(t, \varepsilon)$  уравнения (14.1). Поделим уравнение (14.1) на  $\varepsilon$ , добавим в его правую часть диффузионное слагаемое  $D\Delta x$ , где  $D > 0$ , и поставим граничные условия Неймана на достаточно гладкой границе  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset R^m$ ,  $m \geq 1$ . В итоге получаем параболическую краевую задачу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D\Delta x + \frac{x}{\varepsilon} f(x, x(t-h, s)), \quad \frac{\partial x}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (14.33)$$

где  $s \in R^m$ , а  $\nu$  — направление внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

При выполнении условий 1—3 согласно теореме 14.4 краевая задача (14.33) имеет пространственно однородный (не зависящий от  $s$ ) цикл  $x(t, \varepsilon)$ , устойчивый в рамках точечной модели (14.1). Проблема его устойчивости в рамках краевой задачи (14.33) сводится к анализу расположения мультиликаторов уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} = & x(t, \varepsilon) f'_x(x(t, \varepsilon), x(t-h, \varepsilon)) v + \\ & + f'_y(x(t, \varepsilon), x(t-h, \varepsilon)) x(t-h, \varepsilon) v(t-h) - \varepsilon \sigma v, \end{aligned} \quad (14.34)$$

где  $\sigma = \lambda_k D$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  — собственные числа оператора  $-\Delta$  при граничных условиях Неймана.

Считая параметр  $\sigma \geq 0$  в (14.34) меняющимся непрерывно и выполняя замену  $v \exp(\sigma t) \rightarrow v$ , получаем уравнение (14.29), в котором теперь  $A = -\exp(\sigma h)$ . Поэтому все мультипликаторы уравнения (14.34) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремятся к нулю за исключением одного, который обозначим через  $\mu(\sigma, \varepsilon)$ . Из (14.30) для него получаем асимптотическое равенство

$$\mu(\sigma, \varepsilon) = [(1 - x) \exp(\sigma h) + x \exp(2\sigma h)] \exp(-\sigma T(\varepsilon)), \quad (14.35)$$

справедливое с точностью до экспоненциально малых величин.

Несложный анализ функции (14.35) приводит к следующему утверждению (считаем, что в качестве фазового пространства краевой задачи (14.33) взято  $C([-h, 0] \times \Omega)$ ,  $\Omega = \Omega + \partial\Omega$ ).

**Теорема 14.5.** Пусть выполнены условия 1—3 и отрицательна величина (14.28). Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  найдется такое

$$D_{kp}(\varepsilon) = -\varepsilon T_1/\lambda_1 x (x - 1) h^2 + O(\varepsilon^2),$$

что однородный цикл  $x(t, \varepsilon)$  краевой задачи (14.33) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) в метрике фазового пространства  $C$  при  $D - D_{kp} > 0$  ( $< 0$ ). Если же величина (14.28) положительна, однородный цикл устойчив при любых значениях коэффициента диффузии  $D$ .

В заключение отметим, что для цикла  $x(t, \varepsilon)$  уравнения (14.2)

$$v(u) = u/(u + 1), \quad w(u) = (\gamma - 1)v(u)/[(u + 1)^{\gamma-1} - 1],$$

$$T(\varepsilon) = \gamma + 1 - \varepsilon \ln(\gamma - 1).$$

Поэтому его диффузионная неустойчивость возможна только при  $\gamma > 2$  или в биологических переменных — при  $a < 1/2$ .

## 15. Простейшее реле с запаздыванием и релаксационные циклы конечной амплитуды одного класса дифференциально-разностных уравнений

**15.1. Постановка задачи.** Напомним еще раз, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $C^1$ -метрике пределами решений релаксационной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.12) служат решения релейной системы (6.13). В этом разделе в точности такой результат устанавливается для одного класса дифференциально-разностных уравнений. Отличие же от классических релаксационных колебаний состоит в том, что предельный объект здесь — реле с запаздыванием. Последнее обстоятельство еще раз подтверждает высказанную во Введении мысль о невозможности построения достаточно общей теории релаксационных колебаний для уравнений с запаздыванием ввиду большого разнообразия предельных объектов и различных асимптотических свойств решений.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = F(x(t-1)/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (15.1)$$

где функция  $F(x) \in C^\infty(-\infty, \infty)$  такова, что

$$F(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{x^k}, \quad F(x) = -\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{x^k}, \quad \gamma_0 > 0, \quad (15.2)$$

при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\infty$  соответственно. Считаем еще, что асимптотические ряды (15.2) можно дифференцировать любое число раз.

При сформулированных ограничениях поставим вопрос о существовании при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предельного объекта у уравнения (15.1) и о характере сходимости к нему.

**15.2. Теорема о С-сходимости.** Из асимптотических равенств (15.2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x/\varepsilon) = F_0(x), \quad F_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -\gamma_0, & x > 0. \end{cases}$$

Поэтому естественно ожидать, что предельным объектом для уравнения (15.1) будет релейное уравнение

$$\dot{x} = F_0(x(t-1)). \quad (15.3)$$

Пусть  $x_\varphi(t)$  — решение уравнения (15.3) с начальной функцией  $\varphi$  из множества

$$S(r_1, r_2) = \{\varphi(t) \in C(-1, 0) : r_1(t+1) \leq \varphi(t) \leq r_2(t+1)\}, \quad (15.4)$$

где  $0 < r_1 < 1$ ,  $r_2 > 1$ , задаваемой при  $t=0$ . Тогда при  $0 \leq t \leq t_1 + 1$ , где  $t_1 = \varphi(0)/\gamma_0$ , имеем  $x_\varphi(t) = -\gamma_0 t + \varphi(0)$ . При прохождении  $t$  через  $t_1 + 1$  функция  $x_\varphi(t-1)$  становится отрицательной ( $x_\varphi(t_1) = -\gamma_0 \neq 0$ ), т. е. происходит переключение и в дальнейшем  $x_\varphi(t) = x_\varphi(t_1 + 1) + t - t_1 - 1$ . При  $t = t_2 + 1$ , где  $t_2 = t_1 + 1 - x_\varphi(t_1 + 1)$ , снова происходит переключение и т. д.

Пусть  $x_\varphi(t, \varepsilon)$  — решение уравнения (15.1) с начальной функцией  $\varphi(t) \in S(r_1, r_2)$ .

**Теорема 15.1.** Имеем  $x_\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow x_\varphi(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $\varphi$  из множества (15.4) и по  $t$  из любого конечного промежутка.

Для доказательства заметим, что при  $0 \leq t \leq \varepsilon^1$ ,  $0 < \lambda < 1$ , из (15.1) следует оценка

$$|x_\varphi(t, \varepsilon) - \varphi(0)| \leq M\varepsilon^\lambda, \quad M = \sup |F(x)|, \quad -\infty < x < \infty,$$

а из условий (15.2) вытекает, что с точностью до величин порядка

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_\varphi(\varepsilon^\lambda, \varepsilon) - \gamma_0(t - \varepsilon^\lambda), \quad \varepsilon^\lambda \leq t \leq 1 + x_\varphi(\varepsilon^\lambda, \varepsilon)/\gamma_0,$$

равномерно по  $\varphi \in S(r_1, r_2)$  и указанным  $t$ . Продолжая описанный процесс, убеждаемся в справедливости теоремы.

Обращаем внимание, что решение  $x_0(t)$  уравнения (15.3) с начальной функцией  $\varphi = t + 1$  (которая принадлежит  $S(r_1, r_2)$  в силу выбора  $r_1, r_2$ ) порождает цикл периода  $T_0 = 2 + \gamma_0 + 1/\gamma_0$ , к которому за конечное время «прилипают» все траектории  $x_\varphi(t)$ ,  $\varphi \in S(r_1, r_2)$ . А отсюда и из теоремы 15.1 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 15.2.** Найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  уравнение (15.1) имеет цикл  $x_0(t, \varepsilon)$ ,  $x_0(-1, \varepsilon) = 0$ , периода  $T(\varepsilon)$ , причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t |x_0(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0.$$

Итак, уравнение (15.3) действительно служит предельным объектом для (15.1), а теорема 15.1 придает этому понятию точный смысл.

**15.3. Асимптотика цикла  $x_0(t, \varepsilon)$ .** Для построения асимптотики цикла  $x_0(t, \varepsilon)$  заметим, что  $x_0(t-1) < 0$  при  $-1 - \delta_0 \leq t \leq -\delta_0$ , где  $0 < 2\delta_0 < \min(1, \gamma_0)$ . Учитывая это обстоятельство (в совокупности со свойствами  $F(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ ) в уравнении (15.1), убеждаемся, что

$$x_0(t, \varepsilon) = t + 1 + \varepsilon \Delta_1(t, \varepsilon), \quad \Delta_1(-1, \varepsilon) \equiv 0; \quad |\Delta_1| + |\dot{\Delta}_1| \leq M, \quad (15.5)$$

при  $-1 - \delta_0 \leq t \leq -\delta_0$ , где одной и той же буквой  $M$  здесь и ниже обозначаем различные универсальные постоянные.

Интегрируя шагами уравнение (15.1) с начальным условием (15.5) и снова опираясь на свойство (15.2), последовательно получаем:

$$x_0(t, \varepsilon) = 1 - \alpha_1 \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon v(\tau) + \varepsilon^2 \omega_1(\tau, \varepsilon), \quad t/\varepsilon = \tau, \quad (15.6)$$

при  $-\delta_0 \leq t \leq \delta_0$ , где

$$v(\tau) = \int_0^\tau F(s) ds, \quad |\omega_1| \leq M \ln(|\tau| + 2), \quad |\dot{\omega}_1| \leq M/(|\tau| + 2);$$

$$x_0(t, \varepsilon) = -\gamma_0 t + 1 + (\beta_1 - \alpha_1) \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon \Delta_2(t, \varepsilon), \quad |\Delta_2| + |\dot{\Delta}_2| \leq M, \quad (15.7)$$

при  $\delta_0 \leq t \leq t_1(\varepsilon) + 1 - \delta_0$ , где  $t_1(\varepsilon) = 1/\gamma_0 + ((\beta_1 - \alpha_1)/\gamma_0) \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon)$  — первый положительный нуль  $x_0(t, \varepsilon)$ ;

$$x_0(t, \varepsilon) = -\gamma_0 + [(1 + 1/\gamma_0) \beta_1 - \alpha_1] \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon w(\tau) + \varepsilon^2 \omega_2(\tau, \varepsilon) \quad (15.8)$$

при  $t_1(\varepsilon) + 1 - \delta_0 \leq t \leq t_1(\varepsilon) + 1 + \delta_0$ , где  $\tau = (t - t_1(\varepsilon) - 1)/\varepsilon$ ,

$$w(\tau) = \int_0^\tau F(-\gamma_0 s) ds, \quad |\omega_2| \leq M \ln(|\tau| + 2), \quad |\dot{\omega}_2| \leq M/(|\tau| + 2);$$

$$x_0(t, \varepsilon) = t - 1 - \gamma_0 - 1/\gamma_0 + (\beta_1 - \alpha_1) \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon \Delta_3(t, \varepsilon) \quad (15.9)$$

при  $t_1(\varepsilon) + 1 + \delta_0 \leq t \leq t_2(\varepsilon) + 1 - \delta_0$ , где  $t_2(\varepsilon)$  — второй положительный нуль  $x_0(t, \varepsilon)$ ,  $|\Delta_3| + |\dot{\Delta}_3| \leq M$ ;

$$T(\varepsilon) = t_2(\varepsilon) + 1 = 2 + \gamma_0 + 1/\gamma_0 + (\alpha_1 - \beta_1) \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon). \quad (15.10)$$

**15.4. Свойства устойчивости цикла  $x_0(t, \varepsilon)$ .** Пусть  $h(t, \varepsilon)$  — решение уравнения в вариациях

$$\dot{h} = (1/\varepsilon) F'(x_0(t-1, \varepsilon)/\varepsilon) h(t-1) \quad (15.11)$$

с произвольной начальной функцией  $h_0(t)$  из шара единичного радиуса с центром в нуле фазового пространства  $C(-1 - \delta_0, -\delta_0)$ , где  $\delta_0$  из (15.5). Интегрируя уравнение (15.11) шагами с учетом асимптотики (15.5) — (15.9) и свойств (15.2), приходим к асимптотическому представлению

$$h(t, \varepsilon) = h_0(-\delta_0) \dot{x}_0(t-1, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (15.12)$$

справедливому равномерно по  $-\delta_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \delta_0$  и по начальным функциям  $h_0(t)$ . Аналогичную структуру имеют и решения присоединенного к (15.11) уравнения. Поэтому единичный мультиплликатор уравнения (15.11) простой, а все остальные его мультиплликаторы лежат внутри круга радиуса порядка  $\varepsilon$ .

**Теорема 15.3.** Доставляемый теоремой 15.2 цикл уравнения (15.1) единственный и экспоненциально орбитально устойчивый.

Пусть  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$  — последовательные моменты переключений цикла  $x_0(t)$  релейного уравнения (15.3). Формула (15.12) показывает, что равномерно по  $t$ , исключая некоторые достаточно малые фиксированные окрестности точек  $\tau_k$ ,  $k \geq 0$ , функция  $h(t, \varepsilon)$  сходится к решению  $h(t)$  задачи Коши

$$\dot{h} = 0, \quad h(\tau_k + 0) = \frac{\dot{x}_0(\tau_k + 0)}{\dot{x}_0(\tau_k - 0)} h(\tau_k - 0), \quad k \geq 0, \quad (15.13)$$

$$h|_{t=-\delta_0} = h_0(-\delta_0).$$

А так как (15.13) — линеаризация релейного уравнения (15.3) на цикле  $x_0(t)$ , то для периодических решений уравнений (15.1) и (15.3) установлена  $C^1$ -близость при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Можно показать, что  $C^1$ -близость, понимаемая в указанном выше смысле (ср. с [28]), имеет место для любых траекторий уравнений (15.1) и (15.3) с начальными условиями (15.4).

**15.5. Об одном уравнении из биофизики.** В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \dot{u} = [-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)] u, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha > 1 + \beta, \quad (15.14)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , возникающее при моделировании функционирования отдельного нейрона [55]. Здесь положительные функции  $f(u), g(u) \in C^2[0, \infty)$  таковы, что  $f(0) = g(0) = 1$ ,  $\beta g(u) + 1 < \alpha$  при всех  $u \geq 0$ ,

$$f, g, uf', ug', u^2f'', u^2g'' = O(1/u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Выполняя в (15.14) замену  $u = \exp(x/\varepsilon)$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приходим к релейному уравнению

$$\dot{x} = -1 + \alpha R_0(x(t-1)) - \beta R_0(x), \quad R_0(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad (15.15)$$

понятие решения которого определяется аналогично тому, как это сделано в п. 15.2. Легко проверяется, что, как и уравнение (15.3), уравнение (15.15) имеет устойчивый цикл

$$x_0(t) = (\alpha - 1)(t + 1), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad x_0(t) = \alpha - 1 - t, \quad 0 \leq t \leq \alpha - 1,$$

$$x_0(t) = -(1 + \beta)(t - \alpha + 1), \quad \alpha - 1 \leq t \leq \alpha,$$

$$x_0(t) = -1 - \beta + (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha), \quad \alpha \leq t \leq \alpha + (1 + \beta)/(\alpha - \beta - 1)$$

периода  $T_0 = \alpha + 1 + (1 + \beta)/(\alpha - \beta - 1)$ . Поэтому справедливы аналоги теорем 15.1—15.3, однако здесь модули мультиликаторов аналогичного (15.11) уравнения (за исключением простого единичного) имеют порядки  $\exp(-a/\varepsilon)$ ,  $a > 0$ .

В заключение отметим, что развитая в этой главе техника позволяет также решить и важную с прикладной точки зрения задачу о диффузионной неустойчивости релаксационного цикла уравнения (15.14). Опуская соответствующие вычисления, укажем лишь, что ответ здесь будет таким же, как и в разделе 14, т. е. диффузионная неустойчивость наступает или не наступает в зависимости от знака  $T_1$ , где  $T_1$  — поправка порядка  $\varepsilon$  к периоду цикла.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сначала еще раз коснемся истории вопроса. Раньше, конечно, были отдельные результаты о существовании релаксационных циклов в системах с запаздыванием. Наш вклад в С-теорию состоит в том, что на трудных примерах из математической экологии не только показана важная роль существования предельного объекта, но также топологии, в которой происходит к нему сходимость. Что же касается  $C^1$ -теории, то нам неизвестны работы, в которых достаточно аккуратно было бы выполнено исследование уравнений в вариациях. В связи с последним замечанием уместно еще раз напомнить, что и для систем обыкновенных уравнений эта задача, поставленная в свое время Л. С. Понtryгинным и Е. Ф. Мищенко, решена совсем недавно.

Особо отметим результаты второй главы, имеющие принципиальный характер, — впервые показана возможность равноправности всех мультипликаторов уравнения в вариациях, т. е. установлен феномен, которому непосредственно нет аналога в обычных уравнениях. С результатами второй главы связано также большинство из поставленных нами задач. Отметим еще несколько из неисследованных вопросов.

Представляет, например, существенный интерес анализ свойств релаксационных циклов системы

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \frac{\lambda}{1 + a} [1 + a(1 - N_2) - N_1(t - 1)] N_1, \\ \dot{N}_2 &= \frac{\lambda}{1 + a} [1 + a(1 - N_2) - N_1(t - 1)] N_2,\end{aligned}$$

где  $\lambda$  — большой параметр, моделирующей конкурентную борьбу двух сильно плодовитых видов — близнецов.

Еще одна из интересных задач — аналогичный вопрос для системы

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \frac{\lambda}{1 + a_1 + a_2} [1 + a_1(1 - N_2) + a_2(1 - N_3) - N_1(t - 1)] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2 [N_1 + a_{23}(N_1 - N_3) - N_2(t - h_2)] N_2, \\ \dot{N}_3 &= r_3 [N_1 + a_{32}(N_1 - N_3) - N_3(t - h_3)] N_3,\end{aligned}$$

где  $\lambda$  — также большой параметр, которая моделирует взаимодействие двух конкурирующих хищников со своей сильно плодовитой жертвой.

Мы считаем, что не может быть построена общая теория релаксационных колебаний в системах с запаздыванием. Более того, представляется, что ее построение вообще возможно только для систем, обладающих определенной неформальной внутренней логикой, что хорошо видно на примере экологических уравнений. Было бы интересно выявить новые классы дифференциально-разностных уравнений, далеко отстоящих от экологических, для которых возможно создание теории релаксационных колебаний.

Вернемся снова к экологическим уравнениям. Касаясь их общей характеристики, мы вынуждены отметить, что они принципиально нелокальны. Последнее означает, что подходы, связанные с использованием любого из

известных асимптотических методов, в большинстве случаев не позволяют получить достаточно полную информацию о характере и структуре их аттракторов. В качестве типичного примера сошлемся на исследованную в разделе 5 задачу хищник—жертва, где результаты, полученные с помощью одного из наиболее «нелинейных» асимптотических методов — теории релаксационных колебаний, приводят лишь к знанию предельного характера поведения решений, а основные события разворачиваются при умеренных значениях малтузианского коэффициента линейного роста жертвы. Совсем с иной ситуацией сталкиваемся в главе 2, где, наоборот, асимптотическая теория хорошо работает при умеренных значениях вспомогательного энергетического параметра, становясь малопригодной при его приближении к единице. Замечательно, что это проявляется даже в том случае, когда в теоретическом плане речь идет о сильно неустойчивых релаксационных циклах, которые, однако, устойчивы при промежуточных значениях упомянутого энергетического параметра. Тем самым при распространении наших результатов на другие экологические задачи (скажем, на приведенные выше) следует соблюдать осторожность, в частности, обязательно нужно широко использовать численные эксперименты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бей-Биенко Г. Я. Общая энтомология. М.: Высш. шк., 1980. 416 с.
2. Белоусов Б. П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Автоворонные процессы в системах с диффузией. Горький: ИПФ, 1981. С. 176—186.
3. Бергрэд А. Т. Смена жертвы в простой экосистеме // В мире науки. 1984. № 2. С. 64—73.
4. Болдоруев В. О. Динамика численности сибирского шелкопряда и его паразитов. Улан-Удэ: Бурят. кн. изд-во, 1969. 164 с.
5. Варли Дж. К., Градуэлл Дж. Р., Хассел М. П. Экология популяций насекомых. М.: Колос, 1978. 221 с.
6. Викторов Г. А. Проблемы динамики численности насекомых на примере вредной черепашки. М.: Наука, 1967. 271 с.
7. Викторов Г. А. Экология паразитов-энтомофагов. М.: Наука, 1976. 162 с.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
9. Воронцов А. И. Лесная энтомология. М.: Высш. шк., 1975. 367 с.
10. Гантмахер Ф. Р. О несимметрических ядрах Келлога // ДАН СССР. 1936. № 1. С. 3—5.
11. Глызин С. Д. Двухчастотные колебания фундаментального уравнения динамики популяций насекомых // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 91—116.
12. Глызин С. Д. Стационарные режимы одной конечно-разностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: ЯрГУ, 1986. С. 112—127.
13. Глызин С. Д., Колесов Ю. С. АтTRACTор билокальной модели уравнения Хатчинсона с диффузией при большом коэффициенте линейного роста // ДАН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 351—353.
14. Глызин С. Д., Колесов Ю. С. Оптимальный способ ведения рыбного хозяйства // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс: ИМК, 1989. № 3. С. 37—41.
15. Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Лойко Н. А., Самсон А. М. Применение асимптотических методов к исследованию установившихся режимов генерации в лазерах с нелинейным элементом запаздывающего типа // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 4. С. 97—120.
16. Гриценко Р. Моделирование экосистемы насекомых с учетом сверхпаразитизма // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс: ИМК, 1989. № 3. С. 42—56.
17. Егоров А. В. Дикие копытные Якутии. М.: Наука, 1974. 257 с.
18. Жаботинский А. М. Концентрационные колебания. М.: Наука, 1974. 130 с.
19. Завадский К. М. Вид и видеообразование. Л.: Наука, 1968. 404 с.
20. Кащенко С. А. Стационарные режимы в задаче хищник—жертва. Киев, 1984. 58 с. (Препр. ИМ АН УССР; № 84.)
21. Колесов А. Ю. О принципе облисти в задаче о колебаниях численности млекопитающих // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 11—21.
22. Колесов А. Ю. Об устойчивости пространственно однородного цикла уравнения Хатчинсона с диффузией // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс: ИМК, 1985. № 1. С. 93—102.
23. Колесов А. Ю. Критерий устойчивости бегущих волн параболических систем с малой диффузией // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 3. С. 175—179.
24. Колесов А. Ю. О неустойчивости циклов-уток, возникающих при прохождении состояния равновесия многомерной релаксационной системы через многообразие срыва // УМН. 1989. Т. 44, № 5. С. 165—166.
25. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные циклы дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 4. С. 790—812.
26. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные циклы в системах с запаздыванием // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 141—159.
27. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Майоров В. В. Реакция Белоусова: Математическая модель и экспериментальные факты // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. С. 43—51.
28. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотическое интегрирование системы в вариациях многомерного релаксационного цикла. I, II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 11. С. 1881—1889; № 12. С. 2036—2047.
29. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Релаксационная система в окрестности точки срыва: Сведение к регулярному случаю // УМН. 1988. Т. 43, № 2. С. 141—142.

30. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. О явлениях хаоса в трехмерных релаксационных системах // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 2. С. 153—155.
31. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф. Асимптотика релаксационных колебаний // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 1. С. 3—18.
32. Колесов Ю. С. Обзор результатов по теории устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1977. С. 82—141.
33. Колесов Ю. С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1979. С. 3—40.
34. Колесов Ю. С. Об устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 2. С. 317—321.
35. Колесов Ю. С. Асимптотика периодического решения уравнения Хатчинсона // Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино: НИВЦ АН СССР, 1980. С. 54—62.
36. Колесов Ю. С. Влияние охоты на динамику изменения численности вида // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1981. С. 129—130.
37. Колесов Ю. С. О некоторых задачах теории колебаний // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1982. С. 20—41.
38. Колесов Ю. С. Свойства решений одного класса уравнений с запаздыванием, описывающих динамику изменения численности вида с учетом возрастной структуры // Мат. сб. 1982. Т. 117. № 1. С. 86—94.
39. Колесов Ю. С. Моделирование популяций насекомых // Биофизика. 1983. Т. 28. № 3. С. 513—514.
40. Колесов Ю. С. Задача паразит-хозяин // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1984. С. 16—29.
41. Колесов Ю. С. Устойчивость и бифуркация бегущих волн // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 3—10.
42. Колесов Ю. С. Фундаментальные константы, определяющие динамику популяций в неоднородной среде // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1988. С. 105—106.
43. Колесов Ю. С. Нулевая асимптотика релаксационного цикла математической модели реакции Белоусова // Моделирование динамики популяций. Нижний Новгород, 1990. С. 28—35.
44. Колесов Ю. С. Анализ одной математической модели экологии // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 3. С. 577—580.
45. Колесов Ю. С. Релаксационные циклы дифференциально-разностного уравнения динамики популяций насекомых // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс: ИМК, 1991. № 4. С. 26—40.
46. Колесов Ю. С., Колесов А. Ю. Биологические и физические параболические системы // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс: ИМК, 1987. № 2. С. 5—25.
47. Колесов Ю. С., Колесов В. С., Федик И. И. Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка, 1979. 163 с.
48. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Роль экологической ловушки в стабилизации биологического сообщества о. Ньюфаундленд // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 93—102.
49. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1986. С. 3—13.
50. Колесов Ю. С., Швимпра Д. И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с.
51. Коломиц Н. Г., Воронцов А. И., Стадницкий Г. В. Рыжий сосновый пилильщик. Новосибирск: Наука, 1972. 148 с.
52. Кондаков Ю. П. Закономерности массовых размножений сибирского шелкопряда // Экология популяций лесных животных Сибири. Новосибирск: Наука, 1974. С. 206—265.
53. Кубышкин Е. П. К проблеме существования одновидовых ихтиоценозов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1983. С. 90—93.
54. Лэк Д. Численность животных и ее регуляция в природе. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 346 с.
55. Майоров В. В., Мыскин И. Ю. Об одной модели функционирования нейронной сети // Моделирование динамики популяций. Нижний Новгород, 1990. С. 70—78.
56. Майр Э. Популяции, виды и эволюция. М.: Мир, 1968. 445 с.
57. Матюшкин Е. Н. Рысь. М.: Лесн. пром-сть, 1974. 64 с.
58. Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 5. С. 627—654.
59. Мищенко Е. Ф., Понtryagin L. S. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР. 1955. Т. 102, № 5. С. 889—891.
60. Мищенко Е. Ф., Понtryagin L. S. Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром // Там же. 1958. Т. 120, № 5. С. 967—969.

61. Мищенко Е. Ф., Понtryагин Л. С. Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 5. С. 643—660.
62. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
63. Понtryагин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 5. С. 605—626.
64. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы // УМН. 1972. Т. 27, № 1. С. 81—146.
65. Свиржев Ю. М., Тимофеев-Ресовский Н. В. О противоположных давлениях отбора на генотип и на признак у мутации, сцепленной с полом // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 18. С. 155—170.
66. Тавровский В. А., Егоров О. В., Кривошеев В. Г., Попов М. В., Лабутин Ю. В. Млекопитающие Якутии. М.: Наука, 1971. 659 с.
67. Ушатинская Р. С., Йирковский Г. Г. Экология и физиология колорадского жука. М.: Наука, 1976. 130 с.
68. Федотов Н. Б. Особенности колебаний численности белки и ее основных пищевых конкурентов // Исследование по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1983. С. 44—54.
69. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их применение. Киев: Наук. думка, 1986. 279 с.
70. Шварц С. С. Экологические закономерности эволюции. М.: Наука, 1980. 277 с.
71. Юдович В. И. Спектральные свойства эволюционного оператора параболического уравнения с одной пространственной переменной и его конечномерных аналогов // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 497—498.
72. Яблоков А. В. Фенетика. М.: Наука, 1980. 160 с.
73. Hale J. Theory of functional differential equations. N. Y. etc.: Springer, 1977. 360 p.
74. Hoffman de Visme J. The density of prime numbers // Math. Gaz. 1961. Vol. 45. P. 13—14.
75. Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221—246.
76. Jones G. S. Asymptotic behavior and periodic solutions of a non-linear differential-difference equation // Proc. Nat. Acad. Sci. US. 1961. Vol. 47. P. 879—882.
77. Kellogg O. D. The oscillation of functional of an orthogonal set // J. Math. 1916. Vol. 38. P. 1—5.
78. Kellogg O. D. Orthogonal functions sets arising from integral equations // Ibid. 1918. Vol. 40. P. 145—154.
79. Lloyd B. Keith. Wild life's ten-year cycle. Madison: Univ. Wis. press, 1963. 270 p.
80. Wright E. M. A non-linear difference-differential equation // J. Reine und angew. Math. 1955. Vol. 194. P. 66—87.
81. Wright E. M. A functional equation in the heuristic theory of primes // Math. Gaz. 1961. Vol. 45. P. 15—16.