

## Потеря устойчивости нулевого решения в параболической краевой задаче с отклонением в краевом условии

Рассмотрим уравнение параболического типа с одним потоком:

$$u' = d\ddot{u} - \gamma u + f(u), \quad (1)$$

В дополнение к этому дифференциальному уравнению, в точках  $x = 0$  и  $x = x_0$  заданы нулевое и линейное краевые условия соответственно

$$u' \big|_{x=0} = 0,$$

$$u' \big|_{x=x_0} = \alpha u \big|_{x=0}.$$

Функция  $u = u(x, t)$ , а параметры  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ .

С помощью замен вида

$$t_1 = dt, \quad u(x, t) = w(x) \exp\left(\lambda - \frac{\gamma}{d}t\right)$$

система (1) сводится к параболическому уравнению более простого вида

$$\begin{aligned} w'' - \lambda w &= 0, \\ w'(0) &= 0, \\ w'(1) &= \alpha w(0), \end{aligned} \quad (2)$$

решение которого записывается в виде

$$w(x) = c \operatorname{ch}(\mu x),$$

где  $c$  – константа, а  $\mu^2 = \lambda$ . В случае, если  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\mu = \tau + i\omega$ , решение дифференциального уравнения (2) можно переписать в виде представленной ниже системы, выделив действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} f(\tau, \omega) = 0 \\ g(\tau, \omega) - \alpha = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Функции  $f, g$  являются четными по переменным  $\tau$  и  $\omega$  и записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(\tau, \omega) &= \tau \operatorname{cth} \tau + \omega \operatorname{ctg} \omega, \\ g(\tau, \omega) &= \tau \operatorname{sh} \tau \cos \omega - \omega \operatorname{sh} \tau \sin \omega. \end{aligned}$$

Задача исследования состояла в поиске такого значения параметра  $\alpha_{cr}$ , при которых, исходя из решения системы (3),  $\operatorname{Re}(\lambda) = \gamma$ . В таком случае, для уравнения (2) будет иметь место потеря устойчивости нулевого решения.

Поскольку найти нужные значения  $\alpha_{cr}$  с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось с

помощью специально разработанного приложения. Вычисление корней системы (3) методом дихотомии осуществлялось параллельно, на независимых потоках графического процессора. В результате исследования были получены некоторые значения параметров  $\alpha_{cr}$  и  $\lambda$ , при которых для уравнения (2) нулевое решение теряло бы свою устойчивость.

## Список литературы

- [1] *Авторы*    Источник