

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием между соседними элементами и дополнительной внутренней связью

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

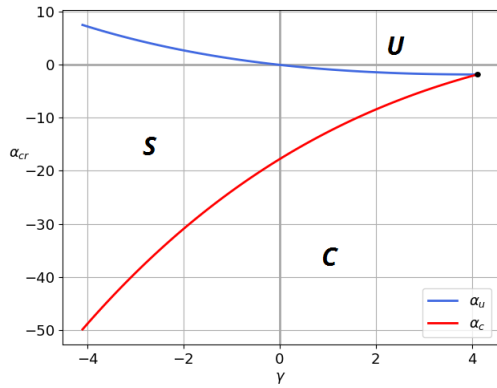
$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N}u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (2)$$

где $u_j = u_j(t)$ — гладкие функции при $t \geq 0$, величина $N \gg 1$, а параметры α, β, γ — действительные числа. Индекс $k \in \mathbb{N}$ позволяет определить дополнительную внутреннюю связь между элементами u_N и u_k .

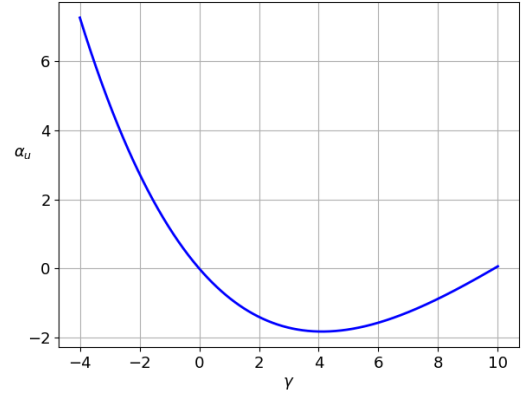
Изучим поведение нулевого состояния равновесия системы (1), (2) вблизи критических значений $\alpha = \alpha_u$ для различных значений γ при $k = 1$. Величина α_u рассчитывается по формуле

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \quad (3)$$

где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$, а $x_k = \frac{1}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right)$. Схематическая визуализация критических значений α и γ , а также график функции $\alpha_u(\gamma)$ показаны на рис. 1. Кривая α_u , соответствующая случаю дивергентной потери устойчивости нулевого состояния равновесия, показана синим цветом, а кривая α_c , соответствующая случаю колебательной потери устойчивости нулевого решения, показана красным цветом. Кривые α_u и α_c пересекаются в точке B с координатами (γ_*, α_*) , где $\gamma_* > 0$ и $\alpha_* < 0$. Так, в случае $k = 1$ ($x_0 = 0$) значение $\gamma_* \approx 4.116$, а $\alpha_* \approx -1.82$.



а) визуализация критических значений α и γ



б) график функции $\alpha_u(\gamma)$

Рис. 1: Схематическая визуализация критических зависимостей в случае $k = 1$ ($x_0 = 0$)

Кривые α_u и α_c в данном случае являются важнейшими элементами построения областей значений параметров (α, γ) , определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Так область S соответствует случаю устойчивого нулевого решения, U — случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в обла-

сти C наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

С помощью предельного перехода $N \rightarrow \infty$, систему дифференциальных уравнений (1), (2) можно свести к непрерывной краевой задаче

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (4)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(x_0, t). \quad (5)$$

Здесь функция $u(x, t)$ является гладкой при $t \geq 0$ и $x \in [0, 1]$, а величина $x_0 \in [0, 1]$ вместо индекса k , определяет отклонение во втором краевом условии. В нашем случае, поскольку величина $k = 1$, значение $x_0 = 0$.

С помощью вспомогательной функции $v(x)$ сведем задачу (4), (5) к следующей системе:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\gamma u + u^3. \end{cases}, \quad (6)$$

Для вектора $(u, v)^T$ определим следующие условия на его компоненты

$$u(0) = a, \quad v(0) = 0, \quad (7)$$

где a — действительное число.

Теорема 1. Введем в рассмотрение нечетную скалярную функцию F , определяемую по формуле

$$F(a) = v(1) - \alpha u(x_0). \quad (8)$$

Пусть $a_* \in [0, A]$ такое, что $F(a_*) = 0$. Тогда функция $u_*(x)$, удовлетворяющая условиям

$$u_*(0) = a_*, \quad u'_*(0) = 0 \quad (9)$$

будет являться решением системы (6) и краевой задачи (4), (5) соответственно.

Определим условия дивергентной потери устойчивости нулевого решения краевой задачи (4), (5), а также исследуем фазовые перестройки, проходящие в его малой окрестности нулевого состояния равновесия. Для этого с помощью функций $u(x)$ и $v(x)$, построенных методом Рунге-Кутты, и различных значений $a \in [0, A]$ найдем корни a_* уравнения

$$F(a) = 0, \quad (10)$$

которые соответствуют состояниям равновесия системы краевой задачи (4), (5).

Локальный анализ поведения системы (1), (2) в окрестности нулевого решения для $k = 1$ ($x_0 = 0$) и $\tilde{\gamma} \approx 4.039$ позволил численно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$. Тогда для любого $\gamma < \tilde{\gamma}$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных устойчивых режима.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$. Тогда для любого $\tilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима.

При изменении параметра α вблизи критических значений α_u , для любого γ такого, что $\gamma < \tilde{\gamma}$ наблюдается один и тот же сценарий поведения функции $F(a)$. Для определенности возьмем $\gamma = -2.0$ и начнем менять параметр α вблизи критического значения α_u . Численный анализ поведения функции $F(a)$ позволяет получить следующую последовательность фазовых перестроек для нулевого состояния равновесия для системы (4), (5):

1. При $\alpha < \alpha_u$, $\alpha_u \approx 2.737$, где уравнение (10) имеет единственный нулевой корень. Другими словами, нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (5) будет устойчивым. График функции $F(a)$ для данного случая при $a > 0$ изображен на рис. 2.

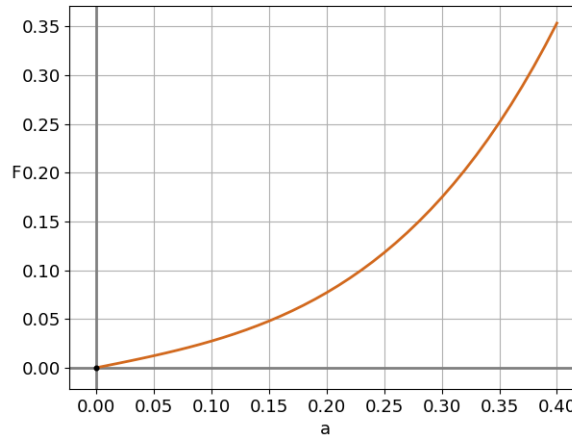
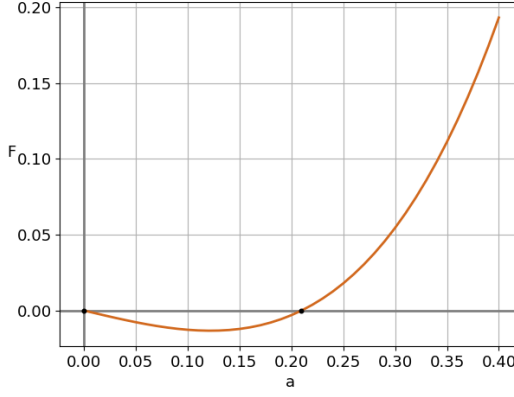
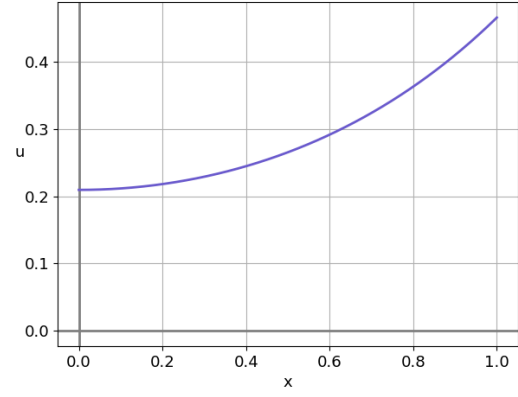


Рис. 2: График функции $F(a)$ для $\alpha = 2.5$ и $\gamma = -2.0$

2. При переходе через критическое значение α_u , для всех $\alpha > \alpha_u$ уравнение (10) имеет пару симметричных относительно нуля корней $a_0 > 0$ и $\bar{a}_0 < 0$. Это означает, что от нулевого состояния равновесия краевой задачи (4), (5), ответвляется пара устойчивых симметричных состояний равновесия, в результате чего нуль теряет свою устойчивость. Графики функций $F(a)$ для $\alpha = 2.9$ при $a > 0$ и $u(x)$ для $a_0 > 0$ показаны на рис. 3.



а) график функции $F(a)$



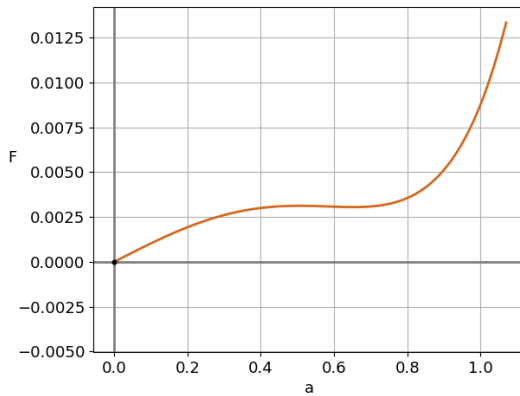
б) график функции $u(x)$ для $a^* \approx 0.21$

Рис. 3: Графики функций $F(a)$ и $u(x)$ для $\alpha = 2.9$ и $\gamma = -2.0$

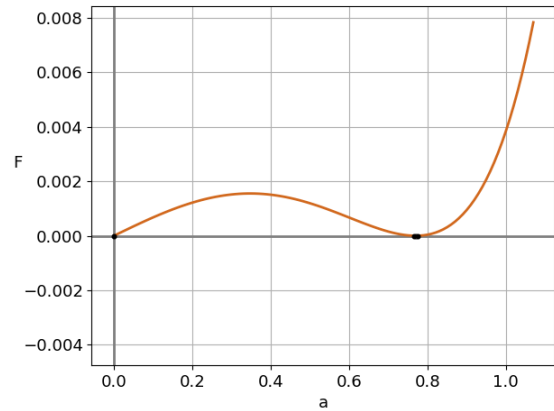
Полученный сценарий поведения функции $F(a)$ верен для любых $\gamma < \tilde{\gamma}$ и $\alpha > \alpha_c$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых значениях параметра α_u .

При изменении параметра α вблизи критических значений α_u , для любого γ тако-го, что $\tilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ наблюдается один и тот же сценарий поведения функции $F(a)$. Для определенности возьмем $\gamma = -4.1$ и начнем менять параметр α вблизи критического значения α_u . Численный анализ поведения функции $F(a)$ позволяет получить следующую последовательность фазовых перестроек для нулевого состояния равновесия для системы (4), (5):

1. При $\alpha < \alpha_1$, где $\alpha_1 \approx -1.823$, уравнение (10) имеет единственный нулевой корень. Другими словами, нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (5) будет устойчивым. График функции $F(a)$ для данного случая при $a > 0$ изображен на рис. 4а.



а) $\alpha < \alpha_1$



б) $\alpha = \alpha_1$

Рис. 4: График функции $F(a)$ для различных значений α

2. При значении $\alpha = \alpha_1$ функция $F(a)$ будет касаться оси абсцисс в точках $a_0 > 0$ и $\bar{a}_0 < 0$, симметричных относительно нуля. График функции $F(a)$ для данного случая при $a > 0$ изображен на рис. 4б.
3. В малой окрестности критического значения $\alpha_u \approx -1.82$, при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где $\alpha_2 \approx -1.81$, уравнение (10) будет иметь две пары симметричных относительно нуля корней $a_{02} > a_{01} > 0$ и $\bar{a}_{02} < \bar{a}_{01} < 0$. Это означает, что в окрестности устойчивого нулевого состояния равновесия краевой задачи (4), (5) рождается пара неустойчивых и пара устойчивых симметричных состояний равновесия, соответствующих парам корней a_{01} , \bar{a}_{01} и a_{02} , \bar{a}_{02} . Отметим, что с ростом значения α , значения a_{01} и \bar{a}_{01} будут приближаться к нулю, а a_{02} и \bar{a}_{02} — отдаляться от него. График функции $F(a)$ для $\alpha = -1.821$ при $a > 0$ показан на рис. 5. Графики функции $u(x)$ для $a_{02} > a_{01} > 0$ показаны на рис. 6.

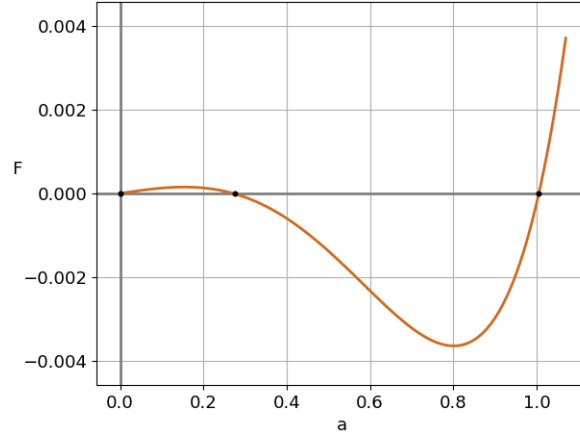


Рис. 5: График функции $F(a)$ для $\gamma = 4.1$ и $\alpha = -1.821$

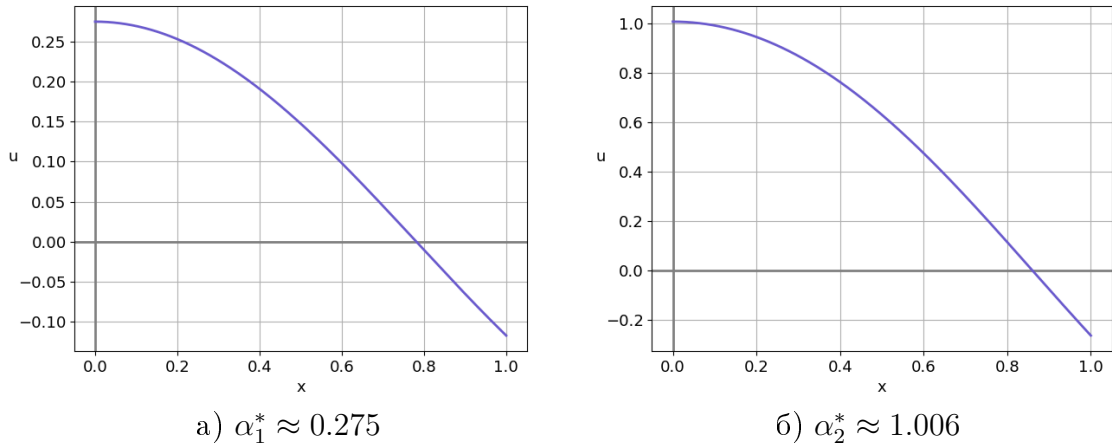


Рис. 6: График функций $u(x)$

4. При $\alpha = \alpha_2$ корни уравнения (10) a_{01} и $\overline{a_{01}}$ сливаются с нулем. Другими словами, пара неустойчивых симметричных состояний равновесия сливается с нулевым решением краевой задачи (4), (5), тем самым отбирая у него устойчивость.
5. При $\alpha > \alpha_2$ уравнение (10) имеет пару симметричных относительно нуля корней $a_{02} > 0$ и $\overline{a_{02}} < 0$. Это означает в окрестности неустойчивого нулевого решения краевой задачи (4), (5) имеется пара устойчивых состояний равновесия. Графики функций $F(a)$ для $\alpha = -1.81$ и $u(x)$ для $a_{02} > 0$ показаны на рис. 7.

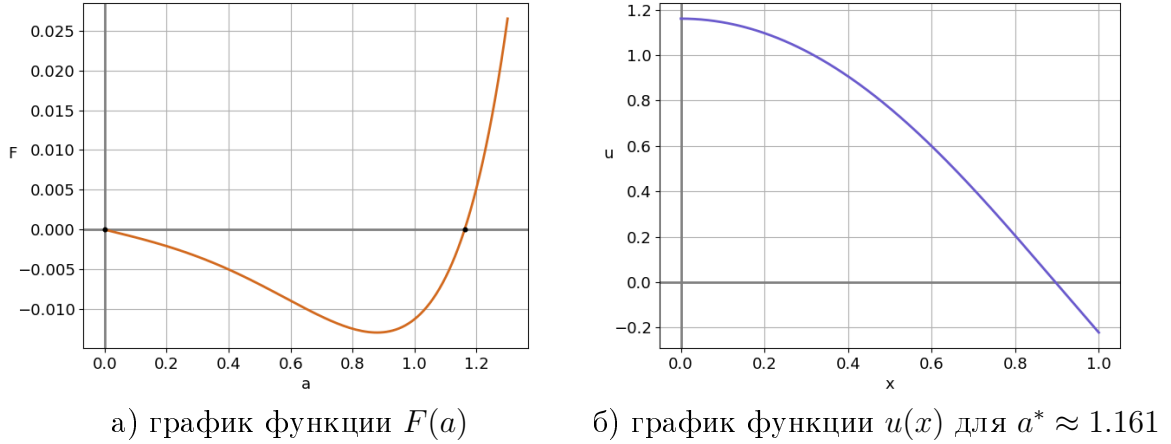


Рис. 7: Графики функций $F(a)$ и $u(x)$ для $\alpha = -1.81$ и $\gamma = 4.1$

Полученный сценарий поведения функции $F(a)$ верен для любых $\tilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ и $\alpha > \alpha_c$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых значениях параметра α_u . Начиная со значения $\gamma > \gamma_*$ фазовые перестройки будут происходить с неустойчивым нулевым состоянием равновесия краевой задачи (4), (5).

Вместе с приведенным выше анализом фазовых перестроек, численно можно доказать следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть $\gamma < \tilde{\gamma}$. Тогда на плоскости параметров (α, γ) , при переходе через кривую $\alpha_u(\gamma)$ от нулевого решения краевой задачи (4), (5) ответвляются два устойчивых симметричных состояния равновесия.

Теорема 5. Пусть $\tilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$. Тогда на плоскости параметров (α, γ) , при переходе через кривую $\alpha_u(\gamma)$ нулевое решение краевой задачи (4), (5) грубо теряет свою устойчивость: к нулевому состоянию равновесия равномерно подходит пара неустойчивых состояний равновесия и отбирает у него устойчивость.