

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу параболического типа с интегральной внутренней связью во втором краевом условии:

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha \int_0^1 u(t, y) dy. \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ — гладкая функция для времени $t \geq 0$ и пространственной координаты $x \in [0, 1]$, параметры α и γ — действительные числа, а величина $x_0 \in [0, 1)$ позволяет определить дополнительную связь в краевом условии.

Наряду с краевой задачей (1), (2) введем в рассмотрение соответствующую ей систему дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием:

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N^2} \sum_{k=1}^n u_k, \quad 1 \leq k < N, \quad (4)$$

где $u_j = u_j(t)$ гладкие функции при $t \geq 0$, величина $N \gg 1$, а индекс $k \in \mathbb{N}$ вместо параметра x_0 позволяет определить дополнительную внутреннюю связь между элементами u_N и u_k . Такие системы часто изучаются как модели связанных осцилляторов (см. например [1], [2]), в которых взаимодействие происходит не только между соседними элементами, но и с каким-нибудь внутренними элементами цепочки.

Система (3), (4), как и краевая задача (1), (2), очевидным образом имеет однородное нулевое решение $u_j(t) \equiv 0$. Представляет интерес вопрос устойчивости этого решения при переходе через мнимую ось нулевого собственного числа. Задача исследования состояла в изучении характера потери устойчивости нулевого решения системы (3), (4), и, как следствие, краевой задачи (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров

α , γ и получении асимптотических формул для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.

1 Спектральные свойства линеаризованной системы

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему дифференциальных уравнений (3), (4):

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N^2} \sum_{k=1}^n u_k, \quad 1 \leq k < N. \quad (6)$$

Для определения условий устойчивости нулевого решения выполним стандартную эйлерову замену вида

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j \quad (7)$$

где $x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}$, λ — собственное значение матрицы линеаризованной системы, а коэффициент δ определяет собственный вектор соответствующего собственного числа матрицы системы (5) с условиями (6). При ее подстановке в первое уравнение, для $j = 1$

$$\frac{\lambda - \gamma}{4N^2} = \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2N}$$

и решении этого уравнения, можно получить следующую формулу для коэффициента δ :

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N}.$$

Такой же результат можно получить для всех уравнений кроме последнего. При подстановке замены (7) в последнее уравнение, для $j = N$

$$(\lambda - \gamma) \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{1}{2} \right) = N^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{3}{2} \right) - \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(N - \frac{1}{2} \right) \right) + \\ + \alpha \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{\delta}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right),$$

можно получить выражение для параметра α :

$$\alpha = 2N \sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \frac{\delta}{2N}, \quad (8)$$

где $x_k = \frac{1}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right)$.

Для изучения потери устойчивости нулевого решения определим при каких критических значениях параметра α нулевое собственное значение переходит через мнимую ось. Подстановка $\lambda = 0$ в выражение (8) приводит к зависимости

$$\alpha_u = 2N \sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \frac{\delta}{2N}, \quad (9)$$

где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$. Исходя из полученной формулы, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (3), (4) нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость для значений, параметров α и γ , связанных формулой (9).*

Для предельного случая $N \rightarrow \infty$, линеаризованную систему (5), (6) можно свести к следующей краевой задаче:

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \quad (10)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha \int_0^1 u(t, y) dy. \quad (11)$$

Выполняя для нее также замену (7), с учетом предельного равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta = \sqrt{-\gamma + \lambda}$$

выражение (8) перепишется в виде

$$\alpha = -\gamma + \lambda,$$

а подстановка в него $\lambda = 0$ позволяет получить следующую критическую зависимость:

$$\alpha_u = -\gamma. \quad (12)$$

В связи с более простым видом (12) функции α_u для предельного случая, подсчет соответствующих критических значений осуществлялся для линеаризованной краевой задачи (10), (11).

Для системы (5), (6) изучим динамику поведения критической зависимости $\alpha_u(\gamma)$ для различных значений индекса k , где k – номер узла, с которым дополнительно связано последнее уравнение. В нашем случае количество уравнений N считалось равным 50. Отметим, что увеличение N слабо сказывается на поведении функций $\alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$.

Как видно из рис. 1, построенная критическая зависимость $\alpha_u(\gamma)$ позволяет получить области значений параметров, определяющих устойчивость нулевого решения. Так область S соответствует случаю устойчивого нулевого решения, U – случаю появления двух состояний равновесия, расположенных симметрично относительно нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

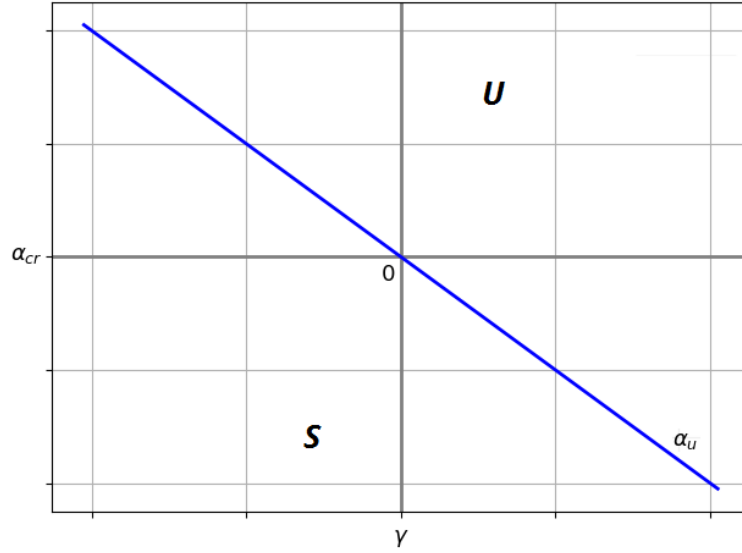


Рис. 1: Схематическая визуализация критической зависимости α_u

2 Локальный анализ системы в окрестности нулевого решения

Методами малых возмущений (см. [3], [4]) построим режим, отвечающий от нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (3), (4) для нулевого собственного значения λ матрицы соответствующей линеаризованной системы. Для этого введем в рассмотрение малый параметр ε , который косвенно характеризует переход из области S в область U по параметру α для фиксированного значения γ . Здесь ε принимает вид

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_u, \quad (13)$$

где α_u вычисляется по формуле (9).

Воспользуемся нормальной формой, которая получается в результате разложения нулевого решения системы (3), (4) по степеням малого параметра

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \quad j = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Функции $u_j = u_j(s)$ зависят от медленного времени $s = \varepsilon t$, а $u_{j,0} = \rho(s) \operatorname{ch} \delta_u x_j$, где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$, $x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}$.

Подстановка в цепочку дифференциальных уравнений (3), (4) разложения (14) с учетом (13) приводит к последовательно разрешимым системам для векторов $u_{j,0}$, $u_{j,1}$ и $u_{j,2}$:

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \quad 1 \leq k < N,$$

$$\dot{u}_{j,1} = N^2(u_{j+1,1} - 2u_{j,1} + u_{j-1,1}) + \gamma u_{j,1}, \quad (15)$$

$$u_{0,1} = u_{1,1}, \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,1}, \quad (16)$$

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,0}^3, \quad (17)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,2} + u_{k,0}. \quad (18)$$

Учитывая, что уравнение (3) содержит кубическое вычитаемое, для функций $u_{j,1}$ система (15), (16) получается однородной. Примем их значения нулевыми.

Из условий разрешимости системы (17), (18), можно получить укороченное уравнение на величину ρ

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \quad (19)$$

где $\phi_0 = 1$, а коэффициент d_0 вычисляется по формуле:

$$d_0 = \frac{5\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u}{48 \operatorname{sh} \delta_u} - \frac{3}{4}. \quad (20)$$

Для предельного случая $N \rightarrow \infty$ подстановка в краевую задачу (1), (2) нормальной формы вида

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(x, s) + \varepsilon u_1(x, s) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2(x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (21)$$

где функция $u = u(x, s)$ зависит от медленного времени $s = \varepsilon t$, приводит к цепочке последовательно разрешимых краевых задач для функций u_0 , u_1

и u_2

$$\dot{u}_0 = u_0'' + \gamma u_0,$$

$$u_0'(0, s) = 0, \quad u_0'(1, s) = \alpha_u u_0(x_0, s),$$

$$\dot{u}_1 = u_1'' + \gamma u_1, \tag{22}$$

$$u_1'(0, s) = 0, \quad u_1'(1, s) = \alpha_u u_1(x_0, s), \tag{23}$$

$$\dot{u}_2 = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{24}$$

$$u_2'(0, s) = 0, \quad u_2'(1, s) = \alpha_u u_2(x_0, s) + u_0(x_0, s). \tag{25}$$

Здесь функция u_0 будет выглядеть следующим образом

$$u_0 = \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{\gamma} x, \tag{26}$$

а функцию u_1 можно считать нулевой, исходя из однородности краевой задачи (22), (23). Из условий разрешимости системы (24), (25), можно также получить укороченное уравнение (19) на величину ρ , для которого $\phi_0 = 1$, а коэффициент d_0 рассчитывается по формуле:

$$d_0 = -\frac{5\gamma \operatorname{sh} 3\sqrt{-\gamma}}{48 \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}} - \frac{3}{4}.$$

Согласно численным результатам, для значений параметра $\gamma \geq 0$ удавалось выделить и промежутки, где значение d_0 оказывалось отрицательным, и где эта величина была положительной. Это говорит о том, что для $\gamma \geq 0$ имело место быть как дивергентная потеря устойчивости, в случае $d_0 < 0$, так и грубая, в случае $d_0 > 0$. В том случае, если значение параметра γ было отрицательным, величина d_0 всегда оказывалась положительной, т.е. происходила только грубая потеря устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (3), (4). График функции $d_0(\gamma)$ показан на рис. 2.

При условии, что $\phi_0 > 0$ и $d_0 < 0$, происходит бифуркации типа «вилка». В этом случае уравнение (19) имеет ненулевое состояние равновесия $\phi_* = \sqrt{-\frac{1}{d_0}}$, причем ρ стремится к этому состоянию равновесия при

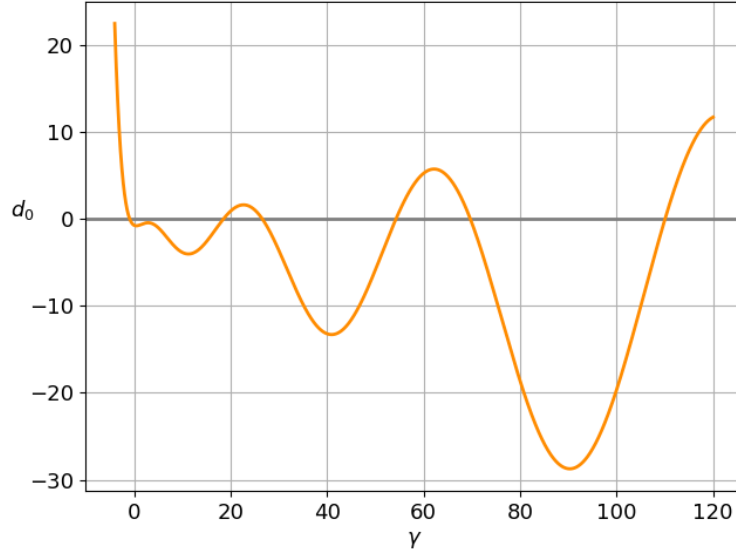


Рис. 2: График функции $d_0(\gamma)$

$s \rightarrow +\infty$. Подставляя в нормальную форму (14) полученное значение ρ , получаем асимптотическое приближение для двух пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия исходной системы (3), (4) (см. также [3], [7]):

$$u_j = \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon}{d_0}} \operatorname{ch} \delta_u x_j + O(\varepsilon). \quad (27)$$

При условии, что $\phi_0 > 0$ и $d_0 > 0$ происходит обратная бифуркация типа «вилка». В этом случае уравнение (19) имеет ненулевое состояние равновесия $\rho = \rho_*$, где $\phi_* = \sqrt{\frac{1}{d_0}}$. При подстановке полученного значения ρ в нормальную форму (14), получаем асимптотическое приближение (27) для двух пространственно неоднородных неустойчивых состояний равновесия, стягивающиеся к нулевому решению системы (3), (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и отбирающие у него устойчивость (см. также [6], [8]).

Выводы

Для краевой задачи параболического типа с дополнительной интегральной внутренней связью во втором краевом условии с помощью перехода к соответствующей ей системе дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием между соседними элементами была найдена

критическая зависимость параметров α и γ , при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. Эта функция является важнейшим элементом для построения областей значений параметров, определяющих устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений. При значениях параметра α , близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе выяснены условия появления неоднородных состояний равновесия. При значениях параметра α близких к критическим, были построены асимптотические формулы для режимов, ответвляющихся от нулевого решения.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач численного моделирования некоторых биофизических процессов (см. например [10], [9]). Вызывает также интерес распространение этих результатов и на другие задачи с дополнительной внутренней связью (см. например [5]).

Список литературы

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики. – ТМФ, 2020, т. 203 (1), с. 10—25.
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, т. 51 (8), с. 1400–1418.
- [3] Глызин С. Д. Локальные методы анализа динамических систем. — Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2006 – 91 с.
- [4] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002 – 560 с.
- [5] Кащенко С. А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистиче-

- ском уравнении с запаздыванием. – Моделирование и анализ информационных систем, 2017, т. 24 (2), с. 168–185.
- [6] Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. – Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2012 – 196 с.
- [7] Марсден Дж. Е., Мак-Кракен Д. Бифуркация рождения цикла и ее приложения – М.: Мир, 1980 — 368 с.
- [8] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла – М.: Мир, 1985 — 280 с.
- [9] Britton N. F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology. – New York: Academic Press, 1986. — 277 p.
- [10] Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics – Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 4 (4), pp. 5119–5153.