Устойчивые колебательные решения в цепочках с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью

Ивановский Л.И.

Ярославль, ЯрГУ им. П.Г Демидова

Цепочка уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$$u_0 = u_1,\ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{2}$$

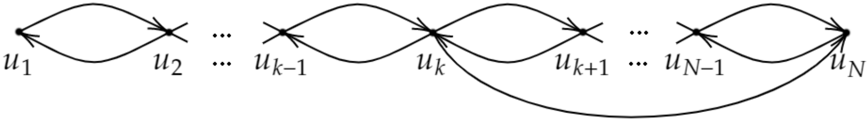
$$u_j = u_j(t), \quad t \geqslant 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Цепочка уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$$u_0 = u_1, \; u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{2}$$

$$u_j = u_j(t), \quad t \geqslant 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$



Линеаризованная в нуле система уравнений

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{3}$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{4}$$

Построение характеристического уравнения

$$u_j = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j,$$

$$x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Построение характеристического уравнения

$$u_j = e^{\lambda t}\operatorname{ch}\delta x_j,$$

$$x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

- $j \leqslant N-1:$

$$\delta = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma+\lambda}}{2N}. \tag{5}$$

Построение характеристического уравнения

$$u_j = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j,$$

$$x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

- $j \leqslant N - 1:$

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N}. \tag{5}$$

- $j = N:$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}. \tag{6}$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0$:

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_k}, . \tag{7}$$

$$\delta_u = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0:$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_k},. \qquad (7)$$

$$\delta_u = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$$

- $\lambda = \pm i\omega:$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\ \operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \qquad (8)$$

$$\delta_c = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}.$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0:$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_k},. \qquad (7)$$

$$\delta_u = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$$

- $\lambda = \pm i\omega:$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \qquad (8)$$

$$\delta_c = 2N \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}.$$

$$N = 50.$$

Предельный случай

$$N \to \infty : \qquad \delta \to \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

Предельный случай

$$N \to \infty : \qquad \delta \to \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{9}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t), \tag{10}$$

$$x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1).$$

Предельный случай

$$N \to \infty : \qquad \delta \to \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

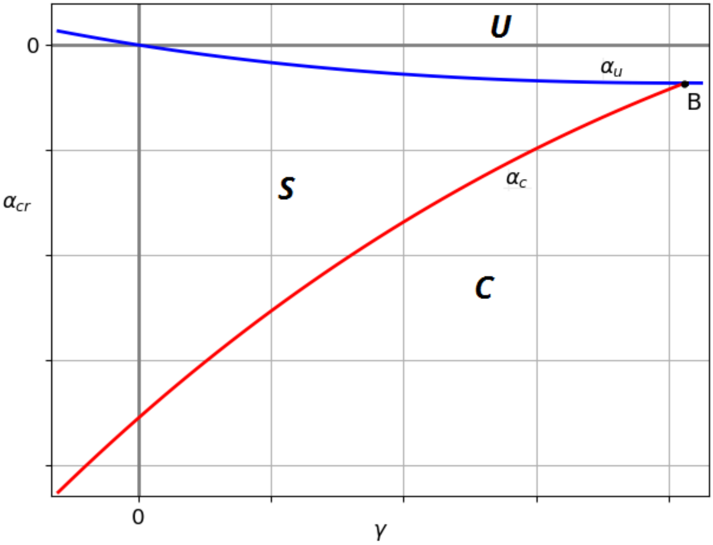
$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{9}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0, t), \tag{10}$$

$$x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1).$$

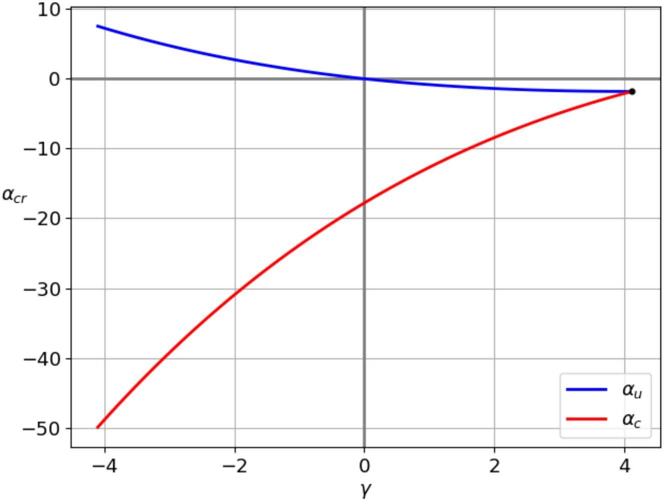
$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma+\lambda}\,\mathrm{sh}\sqrt{-\gamma+\lambda}}{\mathrm{ch}\sqrt{-\gamma+\lambda}\,x_0}. \tag{11}$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma)$, $1 \leqslant k \leqslant 17$



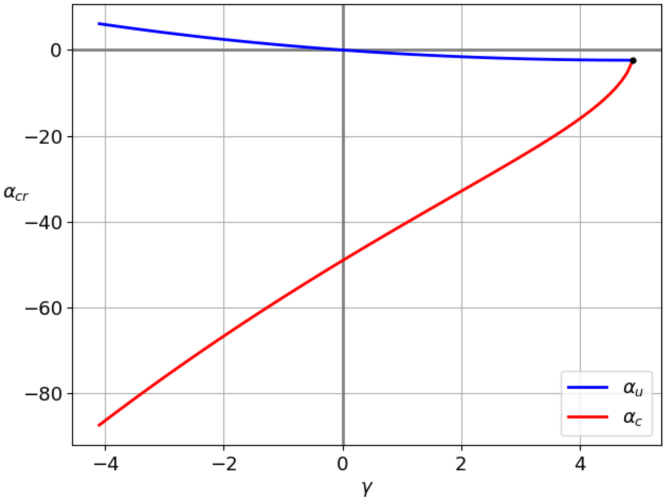
$$B = (\gamma_*, \alpha_*)$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 1$



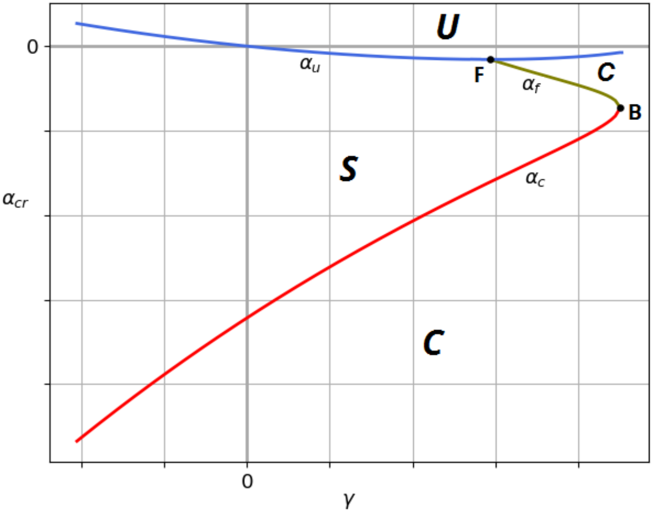
$$\gamma_* \approx 4.116$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 17$



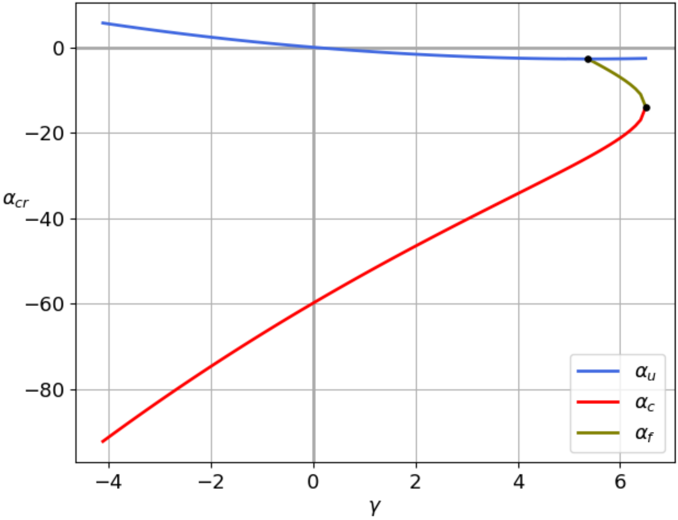
$$\gamma_* \approx 4.896$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ 18 \leqslant k \leqslant 23$



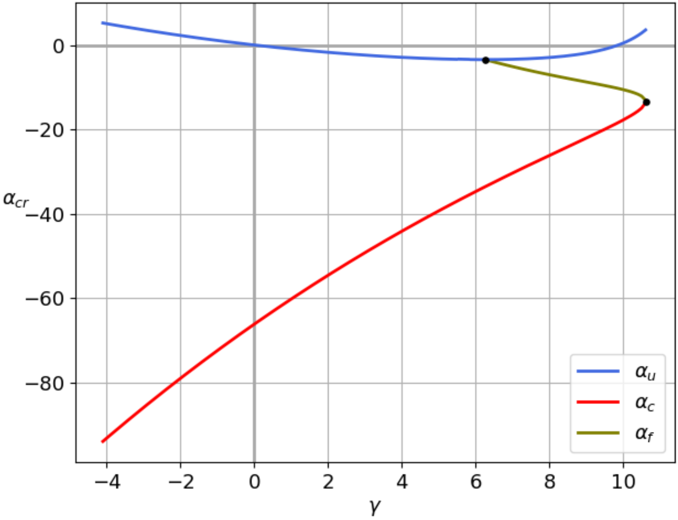
$$F = (\overline{\gamma}, \overline{\alpha})$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 20$



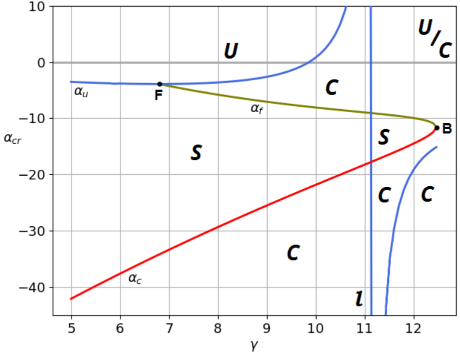
$$\overline{\gamma} \approx 5.375, \quad \gamma_* \approx 6.497$$

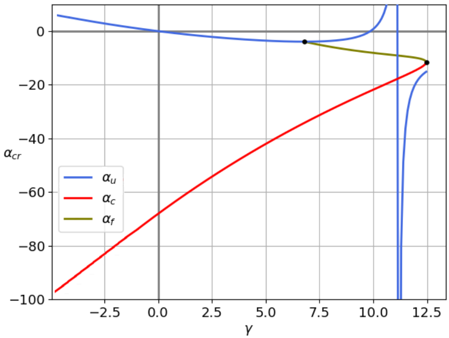
Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 23$



$$\overline{\gamma} \approx 6.258, \quad \gamma_* \approx 10.608$$

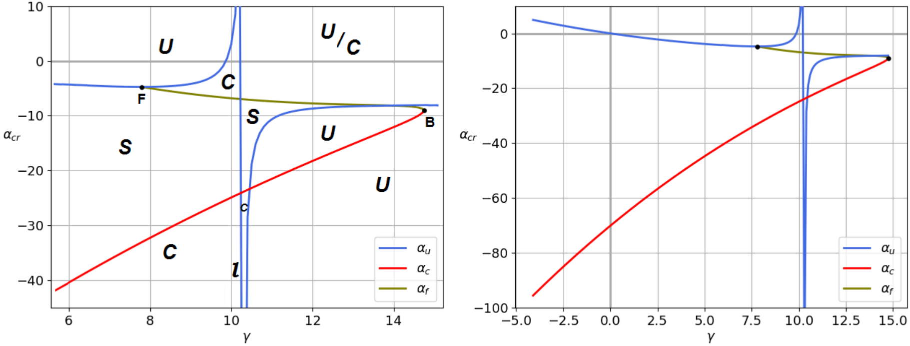
Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 24$





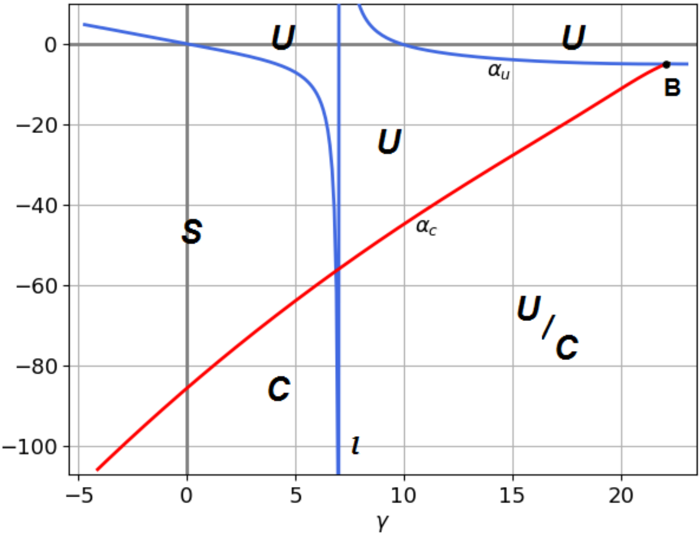
$$\overline{\gamma} \approx 6.796, \quad l \approx 9.486, \quad \gamma_* \approx 12.467$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 25$

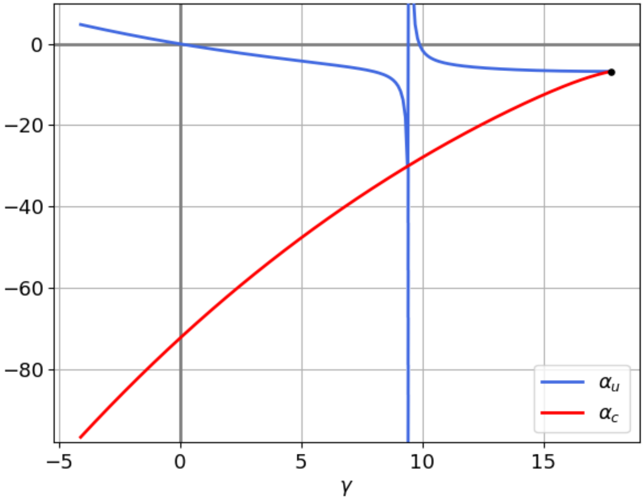


$$\overline{\gamma} \approx 7.794, \quad l \approx 10.277, \quad \gamma_* \approx 14.738$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ 26 \leqslant k \leqslant 32$

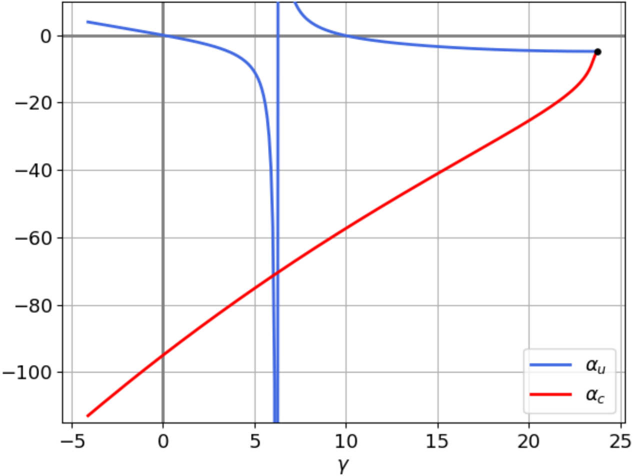


Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 26$



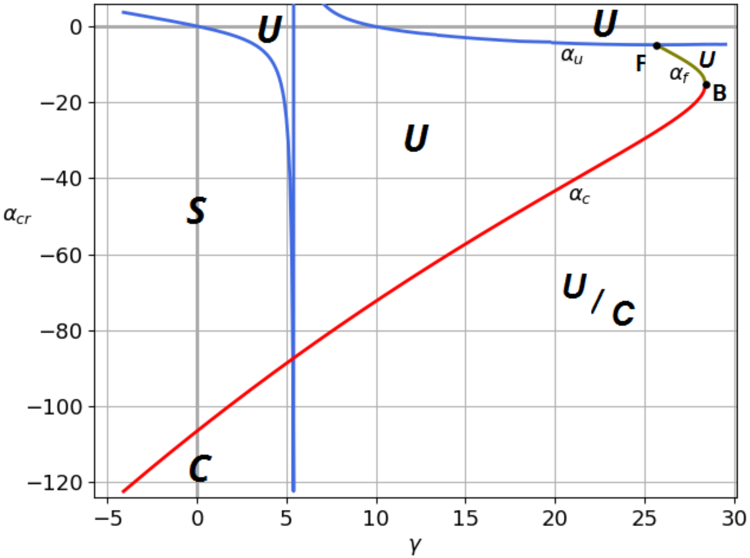
$$l \approx 9.486, \quad \gamma_* \approx 17.763$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 32$

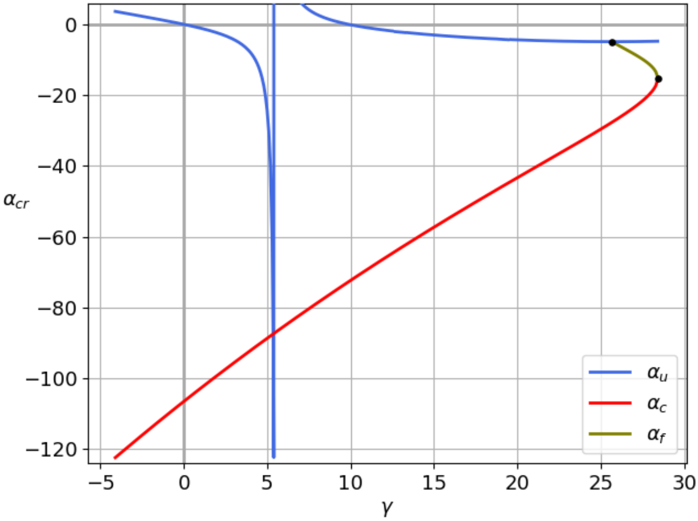


$$l \approx 6.217, \quad \gamma_* \approx 23.717$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma)$, $33 \leqslant k \leqslant 38$

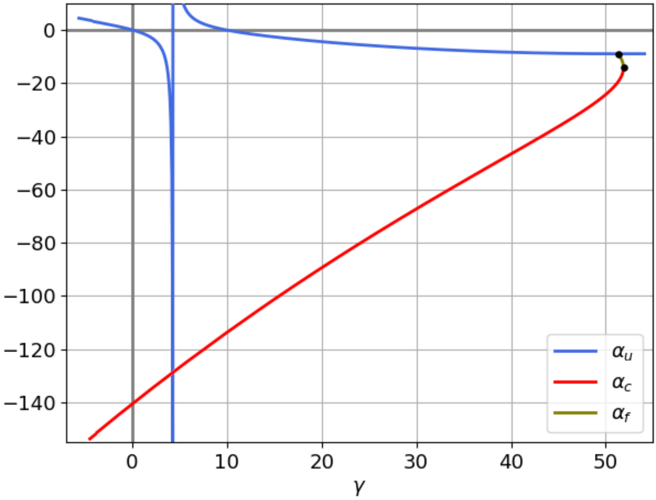


Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 34$



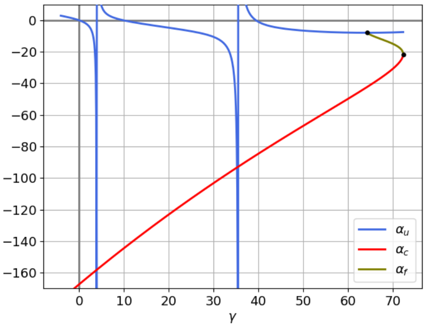
$$l \approx 5.496, \quad \overline{\gamma} \approx 25.682, \quad \gamma_* \approx 28.407$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma),\ k = 38$

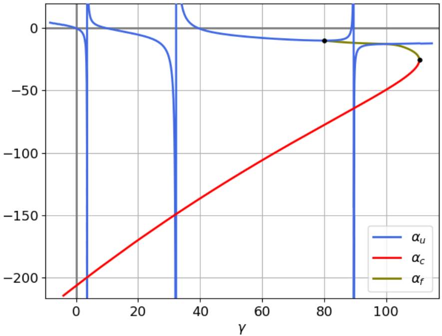


$$l \approx 4.386, \quad \overline{\gamma} \approx 51.305, \quad \gamma_* \approx 51.873$$

Критические зависимости $\alpha_{cr}(\gamma)$, $39 \leqslant k \leqslant 50$



(a) $k = 40, \quad \gamma_* \approx 72.359$



(б) $k = 42, \quad \gamma_* \approx 110.74$

Теорема

Для линеаризованной системы (3), (4) критические зависимости, рассчитываемые по формулам (7), (8), позволяют получить три области параметров (α, γ)*:* S*, для случая устойчивого нулевого решения,* U *– для случая двух устойчивых состояний равновесия, симметрично ответвляющихся от нулевого решения и области* C*, в которой наблюдается возникновение устойчивого цикла в окрестности нулевого состояния равновесия.*

Локальный анализ системы

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{12}$$

$$u_j = u_j(s), \quad s = \varepsilon t,$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0 : \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$\dot u_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \tag{13}$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \le k < N \tag{14}$$

$$u_{j,0} = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\delta_u x_j,$$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \mathrm{sh}\,\delta_u}{\mathrm{ch}\,\delta_u x_k}, \quad \delta_u = 2N\,\mathrm{arsh}\,\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,2}^3, \tag{15}$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \tag{16}$$

$$u_{j,2} = \operatorname{ch} \delta_u x_j.$$

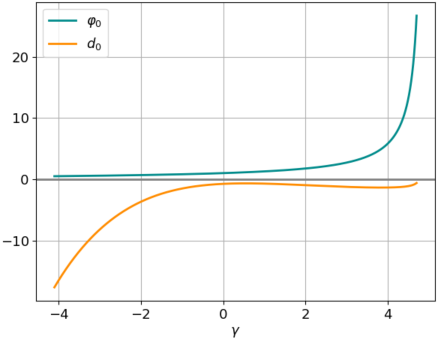
Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{17}$$

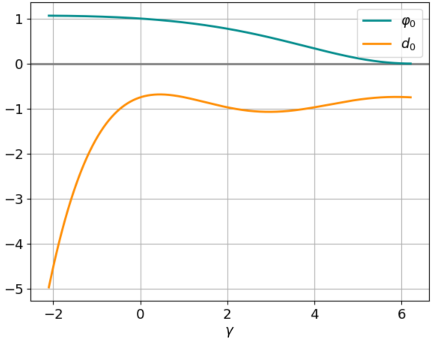
$$\phi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch} \delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k}, \tag{18}$$

$$d_0 = \frac{3\delta_u^2 \operatorname{sh} 3\delta_u - \alpha_u \delta_u \operatorname{ch} 3\delta_u x_k}{16(\delta_u \operatorname{ch} \delta_u + \operatorname{sh} \delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh} \delta_u x_k)} - \frac{3}{4}. \tag{19}$$

Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

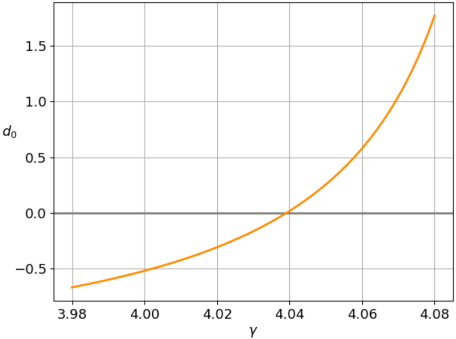


(а) $k = 17$

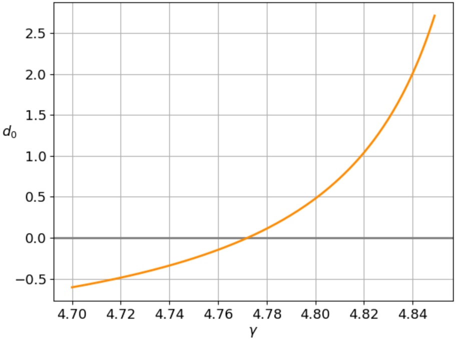


(б) $k = 32$

Графики $d_0(\gamma)$

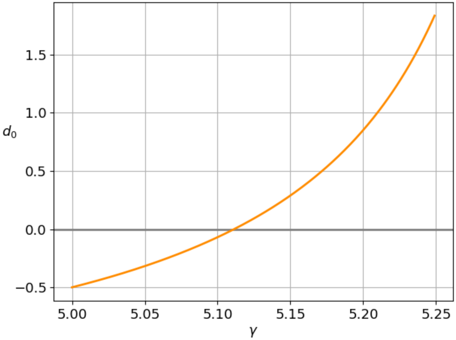


(а) $k = 1, \quad \gamma_* \approx 4.116$

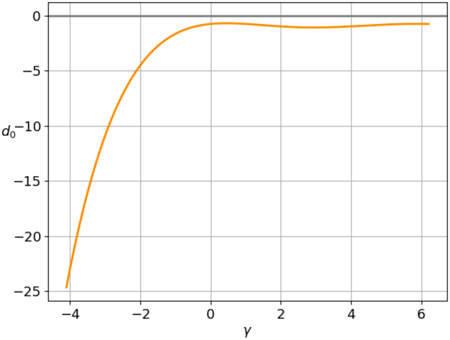


(б) $k = 17, \quad \gamma_* \approx 4.896$

Графики $d_0(\gamma)$



(а) $k = 20, \quad \overline{\gamma} \approx 5.375$



(б) $k = 32, \quad l \approx 6.217$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \tag{20}$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \leq k < N \tag{21}$$

$$u_{j,0} = z(s)e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j},$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_k}, \quad \delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,2}^3, \qquad (22)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \le k < N, \qquad (23)$$

$$u_{j,2} = e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{24}$$

$$\phi_0 = -\mathsf{Re}\left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch} \delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k}\right),$$

$$d_0 = \mathsf{Re}\left(\frac{3\delta_c(G(\chi) + G(\eta) + 2G(\overline{\delta_c}))}{2(\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k)}\right),$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{24}$$

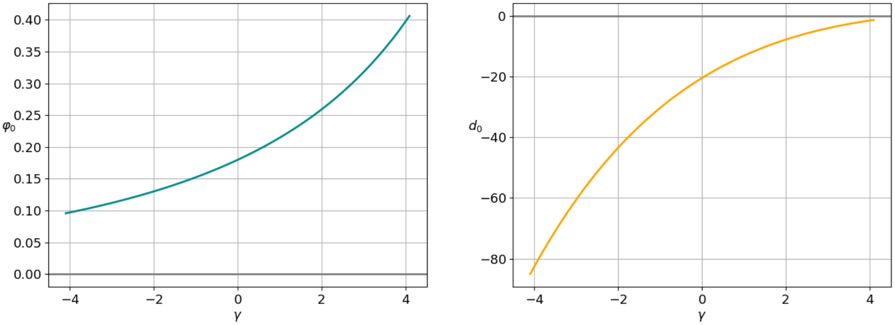
$$\phi_0 = -\mathrm{Re}\left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch} \delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k}\right),$$

$$d_0 = \mathrm{Re}\left(\frac{3\delta_c(G(\chi) + G(\eta) + 2G(\overline{\delta_c}))}{2(\delta_c \operatorname{ch} \delta_c + \operatorname{sh} \delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh} \delta_c x_k)}\right),$$

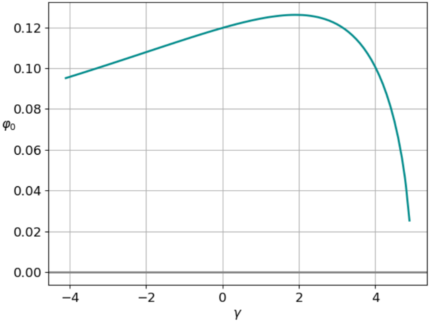
$$\chi = \delta_c + 2\mathrm{Re}\,\delta_c, \qquad \eta = \delta_c + 2\mathrm{Im}\,\delta_c,$$

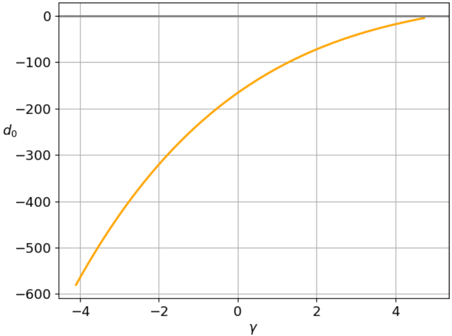
$$G(a) = \frac{\alpha_c \operatorname{ch} a x_k - a \operatorname{sh} a}{a^2 - \delta_c^2}.$$

Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$, $k = 1$ для $\alpha_{cr} = \alpha_c$

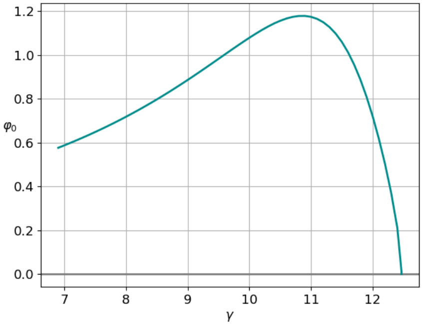


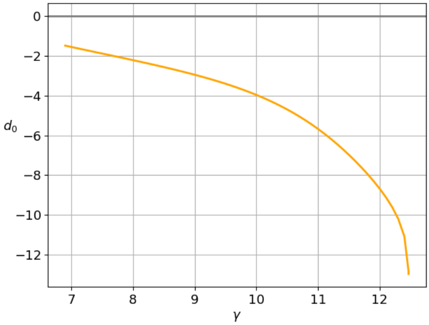
Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$, $k = 17$ для $\alpha_{cr} = \alpha_c$





Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$, $k = 24$ для $\alpha_{cr} = \alpha_f$





Теорема

Для системы дифференциальных уравнений (1), (2)
$\exists\, \Gamma_u \leqslant \gamma_* : \ \gamma < \Gamma_u$ *нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость дивергентным способом.*

Теорема

Для системы дифференциальных уравнений (1), (2)
$\exists\, \Gamma_u \leqslant \gamma_* : \ \gamma < \Gamma_u$ *нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость дивергентным способом.*

Теорема

Для системы дифференциальных уравнений (1), (2)
$\exists\, \Gamma_c \leqslant \gamma_* : \ \gamma < \Gamma_c$ *нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость колебательным способом.*

Устойчивые колебательные решения в цепочках с диффузионным взаимодействием и дополнительной внутренней связью

Ивановский Л.И.

Ярославль, ЯрГУ им. П.Г Демидова