АНАЛИЗ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Леонид Ивановский, Илья Куксёнок

Общая формулировка задачи

$$u' = \beta \ddot{u} - \gamma u(t - \tau') + F(u), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t - \tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta, \gamma > 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Общая формулировка задачи

$$u' = \beta \ddot{u} - \gamma u(t-\tau') + F(u), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t-\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta, \gamma > 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Kaschenko S.A. About bifurcations with small disturbances in logistic equation with delay // Modelling and Analysis of Information Systems, v.24(2), p. 168–185 (2017).

Нелинейная краевая задача без запаздывания

$$u' = \beta \ddot{u} - \gamma u + F(u), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u' \,|_{x=0} &= 0, \\ u' \,|_{x=1} &= \alpha\, u \,|_{x=x_0} \,. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta, \gamma > 0, \quad x_0 \in [0, 1].$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Substitutions

$$t_1 = d \times t,$$

$$u(x,t) = w(x) \exp\left(\lambda - \frac{\gamma}{d} t\right).$$

Упрощенная краевая задача

$$w'' - \lambda w = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0, \\ w'(1) &= \alpha\, w(x_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathrm{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathrm{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

$$x = 1:$$

$$\mu\,\mathrm{sh}\,\mu = \alpha\,\mathrm{ch}(\mu x_0).$$

Система уравнений

$$\lambda \in \mathbb{C}: \quad \mu = \tau + i\omega.$$

$$\begin{cases} f(\tau, \omega) = 0 \\ g(\tau, \omega) - \alpha = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

Теорема

Существует такое $\alpha = \alpha_{cr}$, для которого $\mathrm{Re}(\lambda_*) = \dfrac{\gamma}{\beta}$ и для всех остальных собственных значений (3), (4) $\mathrm{Re}(\lambda) < \dfrac{\gamma}{\beta}$

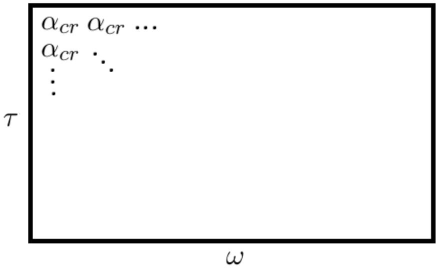
Колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

Теорема

Существует такое $\alpha = \alpha_{cr}$, для которого $\mathrm{Re}(\lambda_*) = \dfrac{\gamma}{\beta}$ и для всех остальных собственных значений (3), (4) $\mathrm{Re}(\lambda) < \dfrac{\gamma}{\beta}$

Численное исследование

Algorithm



$$\omega \to \tau_* \to \alpha_*$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_*) = \frac{\gamma}{\beta} = \tau_*^2 - \omega^2$$

Алгоритм

$$\alpha = \alpha_{cr} : \quad |\alpha_* - \alpha| < \varepsilon$$

Алгоритм

$$\alpha = \alpha_{cr} : \quad |\alpha_* - \alpha| < \varepsilon$$

$$\alpha_* = \tau_*^2 - \omega^2$$
$$\alpha = \tau^2 - \omega^2$$

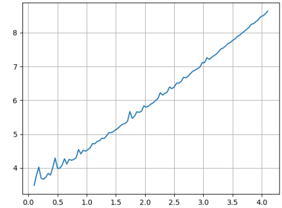
Алгоритм

$$\alpha = \alpha_{cr} : \quad |\alpha_* - \alpha| < \varepsilon$$

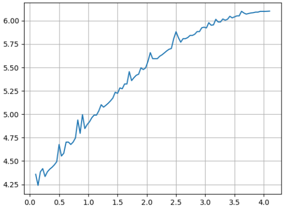
$$\alpha_* = \tau_*^2 - \omega^2$$
$$\alpha = \tau^2 - \omega^2$$

$$\mathrm{Re}(\lambda) < \mathrm{Re}(\lambda_*) + \varepsilon$$

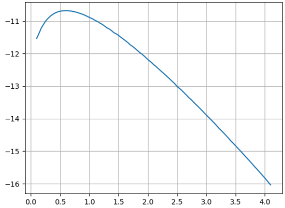
Результаты



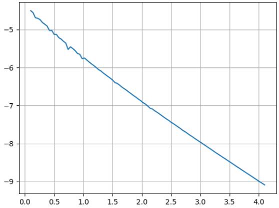
$x_0 = 0.0$



$x_0 = 0.15$



$x_0 = 0.45$



$x_0 = 0.6$

$\beta = 1.0$

Нелинейная краевая задача с запаздыванием в граничном условии

$$\dot{u} = u'' - \gamma u - u^3, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} u'\,|_{x=0} = 0, \\ u'\,|_{x=1} = \alpha\, u(1, t - \tau). \end{gathered} \tag{9}$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0.$$

Нормальная форма

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j+1}{2}} u_j(t,s,x),\, s = \varepsilon t \tag{10}$$

$$u_0(x,t) = z(s)e^{i\omega t}w(x) + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{w(x)} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} &: \dot{u}_0 = u_0'' + u_0 \\ \varepsilon &: \dot{u}_1 = u_1'' + u_1 + f(u_0) \\ \varepsilon^{3/2} &: \dot{u}_2 = u_2'' + u_2 + g(u_0, u_1) \end{aligned} \tag{12}$$

Нормальная форма

$$\dot{z} = \phi z + dz|z|^2 \tag{13}$$

Теорема

При $Re(\phi) > 0$, $Re(d) < 0 \, \exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ наблюдается экспоненциально-орбитально устойчивый цикл, асимптотика которого описывается формулой 13, в которой $z(s) = \sqrt{-\frac{Re(\phi)}{Re(d)}} \exp\left(i\left(Im(\phi) - \frac{Im(d)Re(\phi)}{Re(d)}\right)s + i\gamma\right)$

Квазианалитическое решение

Положим

$$g = -\gamma + i\omega, \tag{14}$$

Тогда

$$(8, 9) \quad \to \quad \begin{cases} g^{1/2}\operatorname{sh} g^{1/2} - \alpha \exp\left(-i\omega\tau\right) \operatorname{ch} g^{1/2} = 0 & \text{if } \tau \neq 0 \\ g^{1/2}\operatorname{sh} g^{1/2} - \alpha \operatorname{ch} g^{1/2} = 0 & \text{if } \tau = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

Квазианалитическое решение

Получим спектр собственных чисел

$$\omega = -i(\gamma + g), \tag{16}$$

Где g может быть найдено численно из (15)