

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. П. Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Преображенская Маргарита Михайловна

**БИФУРКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
Колесов Андрей Юрьевич

Ярославль 2017

Содержание

Введение	3
1 Квазинормальная форма одного класса сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями и ее асимптотические свойства	19
1.1 Построение квазинормальной формы	20
1.2 Анализ квазинормальной формы	24
1.3 Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега – де Вриза	32
1.4 Выводы к главе 1	44
2 Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями	46
2.1 Постановка задачи	46
2.2 Формулировка результата	47
2.3 Доказательство существования bursting-цикла	52
2.4 Анализ свойств устойчивости	66
2.5 Анализ случаев 3 и 4	67
2.6 Выводы к главе 2	70
3 Релаксационные циклы в уравнении с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа	71
3.1 Постановка задачи	71
3.2 Анализ вспомогательного уравнения	73
3.3 Построение асимптотики решения	83
3.4 Существование, единственность и устойчивость периодического решения	92
3.5 Выводы к главе 3	93
Заключение	95
Литература	97

Введение

В диссертационной работе изучается качественное поведение решений сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа. Для этого применяются методы большого параметра при исследовании релаксационных колебаний и методы малого параметра при исследовании окрестности состояния равновесия в случае бесконечномерного вырождения.

Актуальность темы исследования

Для изучаемого класса нелинейных дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа с двумя запаздываниями, представляющего собой феноменологическую модель нейронного типа, — установлено наличие двух важных эффектов. Первый из них состоит в том, что в некоторой малой окрестности состояния равновесия локальными асимптотическими методами доказано наличие бифурцирующих из него сосуществующих устойчивых периодических режимов. При этом удается определить механизм их накопления. Вторым важным качественным результатом получен путем привлечения метода большого параметра. На этом пути доказано наличие высокоамплитудных периодических решений, содержащих любое наперед заданное количество всплесков на периоде, чередующихся с близкими к нулю значениями (состоянием рефрактерности). Таким образом, для изучаемого класса уравнений было проведено комплексное исследование, выявившее ряд интересных свойств как с точки зрения качественных свойств изучаемых динамических систем, так и с точки зрения моделирования особенностей осциллятора нейронного типа.

В начале 80-х годов для задач об устойчивости состояний равновесия сингулярно возмущенных уравнений, в которых при устремлении малого параметра к нулю реализуется бесконечномерное вырождение, Ю. С. Колесовым был разработан метод квазинормальных форм. Значительный вклад в разработку и обоснование этого метода внесен А. Ю. Колесовым и С. А. Кащенко. Объектом метода квазинормальных форм являются модели, пространство состояний которых имеет бесконечную размерность. В настоящий момент имеются результаты для краевых задач гиперболического, параболического типов, а так же задач с большим запаздыванием.

Суть метода состоит в следующем. Сначала определяются значения параметров задачи, при которых реализуется бесконечномерное вырождение. Затем

проводится формальная нормализация, результатом которой является так называемая квазинормальная форма. В первом приближении она не содержит малого параметра и представляет собой либо уравнение в частных производных с подходящим краевым условием, либо счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Второй этап связан с получением результатов о соответствии устойчивых режимах квазинормальной формы и исходной задачи и обоснование свойств устойчивости.

Первой работой в этой области является статья А. Б. Васильевой, С. А. Кащенко, Ю. С. Колесова, Н. Х. Розов [4], где для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа построена квазинормальная форма. Впоследствии в [31] это исследование было продолжено Ю. С. Колесовым, а в [19, 20, 25], С. А. Кащенко была построена квазинормальная форма для сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием, кроме того, для уравнений с двумя запаздываниями квазинормальная форма строилась И. С. Кащенко в работах [16–18, 53].

Алгоритмическая часть процедуры нормализации изложена, например, в монографиях [26, 30, 36, 39], где рассмотрены различные примеры применения метода квазинормальных форм. В ряде модельных ситуаций метод обоснован для параболических (см. [36, 39]) и гиперболических (см. [26, 30]) краевых задач.

В случае изучения релаксационных колебаний основная идея состоит в переходе от исходного уравнения к предельному релейному уравнению при устремлении большого параметра к бесконечности. На этом пути возникают следующие подзадачи. Во-первых, определение подходящего предельного объекта, построение которого связано с построением замены в исходном уравнении. Во-вторых, выделение класса задач, в которых в качестве предельного объекта рассматривается полученное релейное уравнение. В-третьих, выяснение условий существования релаксационных циклов. В-четвертых, доказательство близости решений предельного релейного и исходного уравнений и определение их устойчивости.

Метод большого параметра появился как инструмент изучения обыкновенных дифференциальных уравнений, а в последствии получил развитие в применении к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом.

Один из первых результатов в области изучения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений был получен А. А. Дородницыным в работе [15] 1947 г. В этой работе для уравнения Ван дер Поля асимптотически вычислен предельный цикл. Среди прочих стоит отметить работы Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягина [37] 1955 г. и Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова [38] 1975 г. Полностью завершенная теория для обыкновенных дифференциальных уравнениях изложена в монографии Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесова, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова [36], вышедшей в 1995 г.

Идея о сведении сингулярно возмущенного уравнения к релейному предложена в книге Ю. С. Колесова, В. С. Колесова, И. И. Федика [32]. Завершенный

вид идея приняла в работе Ю. С. Колесова, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова [26] 1998 г.

В настоящей работе рассматриваются две задачи, которые объединены общим подходом к их решению. В обеих задачах речь идет о моделировании нейронной активности, поэтому коротко остановимся на работе нервной клетки.

В процессе функционирования нейрона наступает момент, когда мембранный потенциал претерпевает резкий скачек, достигает положительного максимума, а затем так же стремительно убывает и достигает минимума, который ниже исходного значения. Этот процесс называется спайком, впервые был описан в модели Ходжина и Хаксли [49].

Кроме спайковой активности при изменении мембранного потенциала отмечают bursting-эффект — чередование несколько подряд идущих спайков с относительно спокойными участками изменения мембранного потенциала (см. работу Coombes S., Bresloff P. C. [46]). Такое поведение обнаружено как во многих электрически возбудимых нейробиологических системах, так и в некоторых химических реакциях (см., например, работы Chay T. R., Rinze J. [45], Izhikevich E. [52]). Обычно для математического моделирования этого эффекта используют сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными (см. работы Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I. [55], Ermentrout G. B., Kopell N. [47]). В настоящей работе используется другой подход к решению данной задачи, который был предложен в работах С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова [6, 8, 11] и заключается в рассмотрении сингулярно возмущенной модели с релаксационным поведением, содержащей запаздывание по времени. (Принципиальный характер носит наличие двух запаздываний).

Основной идеей, используемой при моделировании электрической активности нервных клеток является замена этих клеток в каком-то смысле эквивалентными им электрическими схемами. Чем больше свойств биологической нервной клетки имеет соответствующая схема, тем более удачной феноменологической моделью она считается. Полученный генератор обычно описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальным уравнением с запаздываниями. Эта модель должна при подходящем выборе параметров иметь импульсные решения с одним или несколькими высокоамплитудными импульсами на периоде. Одним из важных дополнительных свойств такой модели является наличие у нее сосуществующих устойчивых импульсных режимов. Модель с запаздываниями была предложена в статье [24] С. А. Кащенко, В. В. Майрова, И. Ю. Мышкина 1995 г. и развита позднее в 2013 г. в работе [7] С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова. Она основана на уравнении балансов токов. Именно эта модель изучается в настоящей работе.

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является исследование локальных и нелокальных свойств двух классов сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Для одного класса сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих нейронную активность, в случае бесконечного вырождения доказано, что при подходящем выборе параметров реализуется феномен буферности, состоящий в наличии у этого уравнения механизма накопления любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов вида бегущих волн.
2. Получена максимально широкая область параметров некоторого класса сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями из нейродинамики, при которых существует периодическое экспоненциально орбитально устойчивое решение, имеющее любое наперед заданное количество подряд идущих всплесков на периоде, чередующихся с участками, где решение асимптотически мало. Таким образом, разобраны основные варианты, в которых реализуется bursting-эффект для рассматриваемой нейромодели, тем самым, полностью завершено исследование, начатое в статье [6].
3. Впервые в широкой области параметров для одного специального класса нелинейных дифференциально-разностных уравнений из нейродинамики с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа полностью изучен вопрос существования и устойчивости периодических решений с одним асимптотически высоким всплеском на периоде.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами в области нелинейной динамики для решения широкого круга задач.

Методология и методы исследования

При исследовании задач диссертационной работы используются методы большого и малого параметра, метод квазинормальных форм, метод шагов, методы функционального анализа. Кроме того, в дополнение проведенных исследований выполнен численный эксперимент.

Положения, выносимые на защиту

1. Для сингулярно возмущенного дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа в случае бесконечномерного вырождения построен квазинормальная форма, представляющая собой краевую задачу типа Кортевега – де Вриза. Доказана теорема о соответствии между автомодельными циклами и торами квазинормальной формы и решениями исходной задачи.
2. На основе применения вторичной квазинормализации к краевой задаче типа Кортевега – де Вриза установлено, что в исходном уравнении при подходящем выборе параметров у уравнения существует любое наперед заданное конечное число устойчивых циклов с определенным механизмом их накопления.
3. Для некоторого класса сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями из нейродинамики получены условия на параметры, при которых существует периодическое экспоненциально орбитально устойчивое решение, имеющее любое наперед заданное количество подряд идущих всплесков на периоде, чередующихся с участками, где решение асимптотически мало.
4. Доказано существование и устойчивость периодического решения с одним асимптотически высоким всплеском на периоде одного специального класса нелинейных дифференциально-разностных уравнений из нейродинамики с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа.

Обоснованность и достоверность

Результаты работы строго математически доказаны.

Апробация работы

Основные результаты и положения диссертации докладывались на трех научных семинарах:

1. «Нелинейная динамика и синергетика», ЯрГУ (октябрь, декабрь, 2016);
2. «Качественная теория дифференциальных уравнений», МГУ (декабрь, 2016);
3. «Проблемы современной математики», НИЯУ МИФИ (январь, 2017).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама, Ярославль (октябрь, 2015);
2. Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование, МИФИ (апрель, 2016);
3. International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016, Nizhny Novgorod (июль, 2016);
4. XVIII International Conference, School Foundations, Advances in Nonlinear Science, Minsk (сентябрь, 2016);
5. XXVII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (сентябрь, 2016).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 4 работы, входящие в перечень ВАК:

1. Преображенская М. М. Применение метода квазинормальных форм к математической модели отдельного нейрона // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21, № 5. — С. 38–48.
2. Преображенская М. М. Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 4. — С. 337–350.
3. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Preobrazhenskaia M. M. Existence and stability of periodic solutions of quasi-linear Korteweg – de Vries equation // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — V. 788. — P. 012016.
4. Преображенская М. М. Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 186–204.

Прочие работы:

5. Преображенская М. М. Релаксационные циклы одного класса уравнений с двумя запаздываниями из нейродинамики // О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете. Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 6. — С. 846–847.

6. Преображенская М. М. Численный эксперимент по выявлению феномена буферности в квазилинейном уравнении Кортевега – де Фриза // О работе семинара «Нелинейная динамика». Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21, № 6. — С. 187–188.
7. Преображенская М. М. Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями // Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама. Ярославль. — 2015. — С. 63.
8. Преображенская М. М. Существование и устойчивость периодических решений квазилинейного уравнения Кортевега – де Фриза // V Международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование»: сборник докладов. Москва. — 2016. — С. 90.
9. Preobrazhenskaia M. M. Existence and stability of bursting cycles in a neuron model with two delays // International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016. Nizhny Novgorod: — 2016. — P. 32.
10. Кащенко С. А., Преображенская М. М. Двумерные торы обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза // XXVII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Крымский федеральный университет им. Вернадского. — 2016. — С. 42.
11. Kashchenko S. A., Preobrazhenskaia M. M. Two-Dimensional Toruses in Generalized Korteweg-de Vries Equation // XVIII International Conference. School Foundations. Advances in Nonlinear Science. Minsk. Saint Petersburg Publishing House of SPbPU. — 2016. — P. 52.

Структура диссертации. Основные результаты

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 101 страница. Библиография включает 58 наименований.

В первой и второй главах исследуется модель функционирования нейрона, предложенная в [6], — некоторое дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями, правая часть которого зависит от большого параметра. При этом в первой главе проводится локальный анализ свойств решений данного уравнения, бифурцирующего из состояния равновесия, а во второй главе строится периодическое решение со специальными свойствами. Специфика состоит в том, что решение обладает несколькими подряд идущими асимптотически высокими всплесками на периоде, которые чередуются с состоянием

относительного спокойствия (то есть функция решения асимптотически близка к нулю). Такое поведение мембранного потенциала в нейродинамике принято называть *bursting-эффектом*. Третья глава посвящена исследованию системы дифференциально-разностных уравнений, моделирующей активность кольцевой нейронной сети. При определенных предположениях данную систему удастся свести к сингулярно возмущенному дифференциально-разностному уравнению с двумя запаздываниями, аналогичному тому, которое было рассмотрено в предыдущих двух главах.

Таким образом, диссертационная работа объединена общим классом сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями, которые изучаются с помощью локального метода квазинормальных форм и метода большого параметра.

Перейдем к более подробному описанию содержания глав диссертационной работы.

Глава 1

Объектом исследования первой главы служит скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left(f(u(t - h_1)) - bg(u(t - h_2)) \right) u, \quad (1)$$

моделирующее поведение отдельного нейрона. Здесь функция $u(t) > 0$ характеризует мембранный потенциал нейрона, параметр λ отвечает за скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, h_1, h_2, b — положительные параметры. Функции $f(u), g(u)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$. Это уравнение впервые было введено в [6] на основе модели отдельного нейрона, описанной в книге [22]. Позднее оно было рассмотрено в ряде работ, например, в [5, 13].

Предполагается, что функции $f(u), g(u)$ удовлетворяют следующим трём условиям.

Условие 1. Считаем, что $f'(u) < 0, g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того, выполняются равенства $f(0) = 1, g(0) = 0, \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -a$, где $a = \text{const} > 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1$.

Монотонность функций $f(u)$ и $g(u)$ обеспечивает существование и единственность решения $u = u_0(a, b) > 0$ уравнения $f(u) - bg(u) = 0$.

Условие 2. Предполагаем, что при фиксированном параметре $a > 0$ уравнение

$$\psi(b) = f'(u)|_{u=u_0(a,b)} + bg'(u)|_{u=u_0(a,b)} = 0$$

имеет на полуоси $b \in \mathbb{R}_+$ единственное решение $b = b_* > 0$ и $\psi'(b_*) > 0$.

Для формулировки последнего условия требуются функции

$$V_1(v, b) = \frac{a+1}{2f'(u)u} \left(f(u(1+v)) - f(u) - f'(u)uv/(a+1) \right) \Big|_{u=u_0(a,b)},$$

$$V_2(v, b) = -\frac{b}{2f'(u)u} \left(g(u(1+v)) - g(u) - g'(u)uv \right) \Big|_{u=u_0(a,b)}.$$

Тейлоровские разложения этих функций в точке $v = 0$ начинаются с квадратичных слагаемых. В частности, справедливы равенства

$$V_j(v, b_*) = a_{j2}v^2 + a_{j3}v^3 + O(v^4), \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Условие 3. Считаем, что $d = 4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}) < 0$.

При сформулированных ограничениях ставится вопрос об автоколебательных режимах уравнения (1), бифурцирующих из состояния равновесия $u = u_0(a, b)$ при изменении параметров b , h_1 , h_2 . При этом исследуется сингулярно возмущенный случай, когда

$$\frac{h_2}{h_1} = \varepsilon h, \quad h = \text{const} > 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

При подходящем выборе параметров b и h к уравнению (1) применяется известный метод квазинормальных форм. Для удобства последующего анализа вводится новая неизвестная функция v с помощью замены $u = (1+v)u_0(a, b)$. При этом параметр b в главе выбирается специальным образом, зависящий от малого параметра μ . После указанной замены ряда нормировок, сделанных в первой главе, уравнение (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} = - \Big(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) v(t - \varepsilon h) + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) v(t - 1) + \Delta_1(v(t - \varepsilon h), \mu) + \\ + \Delta_2(v(t - 1), \mu) \Big) (1 + v), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta_j(v, \mu) = (1 - 2\mu)V_j(v, b(\mu))$, $j = 1, 2$.

Далее, рассматривается характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) e^{-\varepsilon h \lambda} + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) e^{-\lambda} = 0, \quad (4)$$

отвечающее нулевому состоянию равновесия уравнения (3). Анализ данного характеристического уравнения проведен в статье [12]. Отметим, что в случае $h < \pi$ все его корни распадаются на две группы. К первой группе относятся некритические корни, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \text{Re } \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Ко второй группе относятся все оставшиеся корни $\lambda_n(\varepsilon, \mu)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения (4), являющиеся комплексными и при $\varepsilon = \mu = 0$, обращающиеся в соответствующие корни $\lambda_n = i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения $e^{-\lambda} = -1$. Как показано в статье [12], для этих корней справедливы следующие асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n(1 + \varepsilon(h - 2) + \varepsilon^2(h - 2)^2) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - h) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \\ \varepsilon, \mu \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

которые позволяют увязать порядки малости μ и ε . Параметры h и μ выбираются следующим образом

$$h = 1 - h_0\varepsilon, \quad \mu = \mu_0\varepsilon^3, \quad h_0, \mu_0 = \text{const} > 0. \quad (6)$$

Далее, вводятся два новых времени:

$$\tau = (1 + \tilde{\sigma})t, \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon + \varepsilon^2(1 - h_0) + \varepsilon^3(2h_0 - 1), \quad s = \varepsilon^3t, \quad (7)$$

где вид τ следует из формулы (5). В результате замен и с учетом равенств (2) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon(1 + \tilde{\sigma})v_\tau + \varepsilon^4v_s = & -\left(\left(\frac{1}{2} - \mu_0\right)v(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + (1 - 2\mu_0\varepsilon^3)(a_{12}v^2(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + \right. \\ & + a_{13}v^3(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + \dots) + \left(\frac{1}{2} + \mu_0\right)v(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + (1 - 2\mu_0\varepsilon^3) \times \\ & \left. \times (a_{22}v^2(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + a_{23}v^3(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + \dots)\right)(1 + v), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tilde{s} = \varepsilon^4(1 - h_0\varepsilon)$, $\tilde{\tau} = \varepsilon(1 - h_0\varepsilon)(1 + \tilde{\sigma})$.

Главная асимптотика возможных автоколебательных режимов получившегося уравнения отыскивается в виде ряда

$$v = \xi(s, \tau)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s, \tau)\varepsilon^{\frac{k+3}{2}}, \quad (9)$$

где ξ — подлежащая определению функция, которая удовлетворяет условию антипериодичности

$$\xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau). \quad (10)$$

Результатом применения метода квазинормальных форм является краевая задача

$$\begin{aligned} \xi_s = 2h_0\xi_{\tau\tau} + \frac{1}{3}\xi_{\tau\tau\tau} + 4\mu_0\xi + (4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}))\xi^3, \\ \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть μ и h удовлетворяют условиям (6), а квазинормальная форма (11) допускает периодическое решение типа бегущей волны

$$\xi = \xi_0(y), \quad y = \alpha s + \tau, \quad \xi_0(y + 1) = -\xi_0(y), \quad \alpha = \text{const}, \quad (12)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (12) отвечает цикл уравнения (3) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенством, получающимся из построенного выше отрезка ряда

(9) при учете формул (12) и равенств (7), связывающих переменные s и τ с исходной переменной t .

Квазинормальная форма (11) после нормировок времени, указанных в главе 1, преобразуется к виду

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \alpha\xi_{\tau\tau} + \beta\xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau), \quad (13)$$

и далее рассматривается при дополнительных условиях $\alpha = \varepsilon\kappa$, $\beta = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\kappa = \text{const} > 0$. Таким образом, предметом дальнейшего исследования выбрана краевая задача типа Кортевега – де Вриза

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \varepsilon\kappa\xi_{\tau\tau} + \varepsilon\xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau). \quad (14)$$

Здесь s выполняет роль времени, а τ — пространственной переменной. В качестве фазового пространства взято соболевское пространство W_2^3 антипериодических функций.

К краевой задаче (14) повторно применяется метод квазинормальных форм.

Теорема 1.3. *По каждому натуральному n можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ и при параметре κ , удовлетворяющем условию*

$$\kappa < \frac{1}{2\nu_n^2 - \nu_1^2}, \quad (15)$$

где $\nu_n = (2n - 1)^3\pi^3$ у задачи (14) существует устойчивая бегущая волна, задающаяся равенством

$$\xi = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(y) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $y = (2n - 1)\pi x + \nu_n(\varepsilon)t$, $\nu_n(\varepsilon) = (2n - 1)^3\pi^3 + O(\varepsilon)$. Торы размерности два и выше системы (14) неустойчивы.

Причем количество этих бегущих волн $K(\kappa)$ удовлетворяет неравенству

$$K(\kappa) \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi^2\kappa} + 1} + 1 \right) \right\rceil. \quad (16)$$

(Здесь $\lceil \cdot \rceil$ означает целую часть.)

Из оценки (16) видно, что $K(\kappa)$ неограниченно растет с уменьшением параметра κ . Применяя известные результаты о соответствии (см. [26, 27]) можно сделать вывод о том, что в рамках исходного уравнения (1) при подходящем выборе параметров реализуется феномен буферности, состоящий в наличии у уравнения любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов с механизмом накопления описанным выше.

Вторая часть первой главы посвящена изучению обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза

$$u_t + u_{xxx} + \Phi(u)u_x = \gamma u_{xx} + F(u) \quad (\gamma > 0) \quad (17)$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + T) = u(t, x). \quad (18)$$

Относительно функций $\Phi(u)$ и $F(u)$ предполагается, что

$$\Phi(u) = \delta + \alpha u + \beta u^2 + O(|u|^3), \quad F(u) = au + bu^2 + cu^3 + O(|u|^4).$$

Исследуется вопрос о поведении всех решений краевой задачи (17), (18) с достаточно малыми (по норме W_3^2) периодическими по пространственной переменной начальными условиями. Важную роль при этом играет расположение корней характеристического (волнового) уравнения

$$\lambda_k = ik^3 + a. \quad (19)$$

В силу (18) величина k в (19) принимает счетное число значений $k = 2\pi n/T$ ($n \in \mathbb{Z}$). При $a < 0$ имеем $\operatorname{Re} \lambda_k = a < 0$, поэтому все решения (17), (18) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же $a > 0$, то $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ и задача перестает быть локальной. Здесь предполагаем, что параметр a и коэффициент диффузии γ являются достаточно малыми, то есть

$$a = \varepsilon a_0, \quad \gamma = \varepsilon \gamma_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (20)$$

При нулевой правой части в (17) и при $\Phi(u) = \alpha u$ получаем классическое уравнение Кортевега – де Вриза [54], а при $\Phi(u) = \alpha u + \beta u^2$ – так называемое [33] модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, а если еще и $\gamma \neq 0$, то имеем [33, 40, 44] уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса.

Сперва при $\gamma = 0$ и изучается вопрос о построении в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия периодических решений и инвариантных торов различной размерности. Условие (20) малости a открывает путь к использованию методов бифуркационного анализа [1, 2, 21]. При $\varepsilon \rightarrow 0$ бесконечно много корней характеристического уравнения (19) стремятся к мнимой оси. Тем самым, в задаче об устойчивости нулевого решения (17), (18) реализуется критический случай бесконечной размерности. С помощью методов локальных инвариантных интегральных многообразий (см. например, [3, 35, 42]) и методов нормальных форм (см. например, [14, 43]) анализ исследуемого уравнения сводится к изучению специальной конечномерной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены результаты о существовании в малой окрестности нуля периодических решений и инвариантных торов различных размерностей.

Глава 2

Вторая глава посвящена исследованию класса уравнений, аналогичного уравнению (1). Рассматривается скалярное нелинейное дифференциально-раз-

ностного уравнения с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left(f(u(t-h)) - bg(u(t-1)) \right) u. \quad (21)$$

Здесь смысл функции $u(t) > 0$ и большого параметра λ тот же, что и в предыдущей главе, параметр $h \in (0, 1)$ фиксирован, $b = \text{const} > 0$. Предполагаем, что функции $f(u)$, $g(u)$ класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладают свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad uf'(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \quad a = \text{const} > 0; \\ g(0) = 0; \quad g(u) - 1, \quad ug'(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Условия (22) наложены на функции f и g с целью применения метода большого параметра.

В статье [12] доказано, что уравнение (21) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с одним всплеском на периоде. Задача, изучаемая во второй главе, состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n необходимо подобрать фигурирующие в (21), (22) параметры a , b , h , такие, что при всех достаточно больших λ уравнение (21) будет иметь специальный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Специфика заключается в том, что функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких всплесков, а все остальное время она асимптотически мала.

Для удобства последующего анализа в рассматриваемом уравнении (21) делается замена $u = \exp(\lambda x)$, которая приводит его к виду

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon) - bG(x(t-1), \varepsilon), \quad (23)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Из свойств (22) функций f и g следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -a, & x > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем для уравнения (23) предельный объект — релейное уравнение с двумя запаздываниями:

$$\dot{x} = R(x(t-h)) - bH(x(t-1)). \quad (24)$$

Для его исследования зафиксируем $\sigma_0 > 0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$, $q_1 > q_2$ и определим класс начальных функций

$$\begin{aligned} S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{ \varphi \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \\ \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя метод шагов, конструктивно найдем решение. При фиксированном n (числе всплесков на периоде решения уравнения (21)) выделяются четыре случая ограничений на параметр h :

$$\frac{1}{(n+1)(2+a+\frac{1}{a})} < h < \frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+2+\frac{1}{a}},$$

$$\frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+2+\frac{1}{a}} < h < \frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+1+\frac{1}{a}},$$

$$\frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+1+\frac{1}{a}} < h < \frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+1},$$

$$\frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})+1} < h < \frac{1}{n(2+a+\frac{1}{a})},$$

для которых существует требуемое решение. Простейший из этих случаев был разобран в статье [6], остальные рассматриваются в рамках второй главы.

Доказана следующая лемма.

Лемма 2.1. *В каждом из упомянутых четырех случаев выбора параметра h и при $b-1 > a > 0$ решение релейного уравнения (30) с начальной функцией (25) совпадает с одной и той же кусочно линейной T_* -периодической функцией x_* .*

Основным результатом главы является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Существует достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и некоторых $\sigma_0, a, b, h > 0$ уравнение (23) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий равенствам*

$$x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*.$$

Глава 3

В третьей главе рассматривается предложенная в статье [7] система нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{u}_j = \left(\lambda f(u_j(t-1)) + bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j) \right) u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (26)$$

моделирующая кольцевую цепь нейронов с синаптической связью. Здесь $u_j(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, связанных в кольцо, $\lambda \gg 1$ — как и раньше, большой параметр, характеризующий скорость протекания электрических процессов, $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое

значение, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, слагаемые $bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)u_j$ моделируют синаптическое взаимодействие. Относительно функций $f(u)$, $g(u)$ предполагается, что они из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f(0) = 1; \quad f(u) + a, uf'(u), u^2 f''(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty; \quad g(0) = 0; \\ g(u) > 0 \quad \forall u > 0; \quad g(u) - 1, ug'(u), u^2 g''(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

В третьей главе ставится задача отыскания периодического решения системы (26) такого, что функции u_j имеют один всплеск на периоде с разностью фаз равной $\Delta = \text{const} > 0$.

На неизвестные функции u_j накладывается дополнительное ограничение: $u_j = u(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, m$, которое означает, что решение ищется в виде дискретных волн. Эта замена позволяет перейти от системы (26) к следующему уравнению:

$$\dot{u} = \left(\lambda f(u(t-1)) + bg(u(t-\Delta)) \ln(u_*/u) \right) u. \quad (28)$$

Это уравнение представляет самостоятельный интерес, поскольку является задачей с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа.

Так же, как в предыдущей главе, в уравнении (28) осуществляется переход к логарифмической шкале $u = \exp(\lambda x)$. Кроме того, вместо большого параметра λ вводится в рассмотрение малый параметр $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Таким образом, задача сведена к поиску периодического решения следующего уравнения с двумя запаздываниями:

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + b(c-x)G(x(t-\Delta), \varepsilon), \quad (29)$$

аналогичного уравнению (23), где, как и прежде, $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$. Период решения уравнения (29) должен быть равен $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$, что следует из условия $u_0 = u_m$.

Для полученного уравнения (29) задача состоит в следующем. Необходимо подобрать параметры a, b, c, Δ , такие, что при всех достаточно малых ε уравнение (29) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x = x_*(t, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_* > 0.$$

При этом, требуем, чтобы функция $x_*(t, \varepsilon)$ на отрезке времени длины периода имела один промежуток положительности и один промежуток отрицательности. Это с учетом сделанной экспоненциальной замены

$$u_j = \exp \left(x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon) \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

и будет означать, что функции u_j обладают одним всплеском на периоде с разностью фаз Δ .

Из условий (27) следует, что при устремлении ε к нулю, как и во второй главе, функции $F(x, \varepsilon)$ и $G(x, \varepsilon)$ стремятся к кусочно постоянным функциям:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -a, & x > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, удастся перейти к аналогичному (24) предельному релейному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + b(c-x)H(x(t-\Delta)). \quad (30)$$

Для исследования полученного уравнения (30) в качестве класса начальных функций рассматривается тот же класс (25) начальных функций, что и в предыдущей главе.

С использованием метода шагов конструктивно находится решение. Естественным образом выделяются шесть случаев ограничений на параметры, которые приводятся в работе во втором пункте третьей главы.

Итак, справедливы следующие утверждения:

Лемма 3.1. *В каждом из упомянутых шести случаев выбора параметров a, b, c, Δ решение релейного уравнения (30) с начальной функцией (25) совпадает с одной и той же кусочно линейной T_* -периодической функцией x_* .*

Теорема 3.1. *Существует достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и некоторых $\sigma_0, a, b, c, \Delta > 0$ уравнение (29) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(\cdot, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий равенствам*

$$x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*.$$

Глава 1

Квазинормальная форма одного класса сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями и ее асимптотические свойства

В данной главе рассматривается скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями, которое моделирует поведение отдельного нейрона. При некоторых дополнительных предположениях к этому уравнению применяется известный метод квазинормальных форм. Суть его заключается в формальной нормализации Пуанкаре – Дюлака, получении квазинормальной формы и последующем применении теорем о соответствии. В данном случае результатом применения квазинормальных форм является счетная система дифференциально-разностных уравнений, которую удастся свернуть в краевую задачу типа Кортевега – де Вриза. Исследование этой краевой задачи позволяет сделать вывод о поведении решений исходного уравнения. А именно, при подходящем выборе параметров в рамках данного уравнения реализуется феномен буферности, состоящий в наличии бифуркационного механизма, обеспечивающего рождение сколь угодно большого числа устойчивых циклов.

Вторая часть настоящей главы посвящена обобщенному уравнению Кортевега – де Вриза с периодическими по пространственной переменной краевыми условиями. Для различных значений параметров в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия строятся асимптотики периодических решений и инвариантных торов.

1.1 Построение квазинормальной формы

1.1.1 Постановка задачи

Объектом исследования данной главы служит скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left(f(u(t - h_1)) - bg(u(t - h_2)) \right) u, \quad (1.1)$$

моделирующее поведение отдельного нейрона. Здесь $u(t) > 0$ — нормированный мембранный потенциал нейрона, параметр λ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, h_1, h_2, b — положительные параметры. Функции $f(u), g(u)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$. Это уравнение впервые было введено в [5, 13] на основе модели с одним запаздыванием, описанной в [22, 23, 34]. Позднее (1.1) было рассмотрено в ряде работ, например, в [6].

Как и в статье [13] предположим, что функции $f(u), g(u)$ удовлетворяют следующим трём условиям.

Условие 1. Считаем, что $f'(u) < 0, g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того, выполняются равенства $f(0) = 1, g(0) = 0, \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -a$, где $a = \text{const} > 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1$.

Монотонность функций $f(u)$ и $g(u)$ обеспечивает существование и единственность решения $u = u_0(a, b) > 0$ уравнения $f(u) - bg(u) = 0$.

Условие 2. Предполагаем, что при фиксированном параметре $a > 0$ уравнение

$$\psi(b) \equiv f'(u)|_{u=u_0(a,b)} + bg'(u)|_{u=u_0(a,b)} = 0$$

имеет на полуоси $b \in \mathbb{R}_+$ единственное решение $b = b_* > 0$ и $\psi'(b_*) > 0$.

Перед формулировкой последнего условия введем функции

$$V_1(v, b) = \frac{a+1}{2f'(u)u} \left(f(u(1+v)) - f(u) - f'(u)uv/(a+1) \right) \Big|_{u=u_0(a,b)},$$

$$V_2(v, b) = -\frac{b}{2f'(u)u} \left(g(u(1+v)) - g(u) - g'(u)uv \right) \Big|_{u=u_0(a,b)}.$$

Тейлоровские разложения этих функций в точке $v = 0$ начинаются с квадратичных слагаемых. В частности, справедливы равенства

$$V_j(v, b_*) = a_{j2}v^2 + a_{j3}v^3 + O(v^4), \quad j = 1, 2. \quad (1.2)$$

Условие 3. Считаем, что $d \equiv 4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}) < 0$.

При сформулированных ограничениях поставим вопрос об автоколебательных режимах уравнения (1.1), бифурцирующих из состояния равновесия $u = u_0(a, b)$ при изменении параметров b, h_1, h_2 .

Остановимся на выборе параметров. Как и в статье [13] будем интересоваться сингулярно возмущенным случаем, когда

$$\frac{h_2}{h_1} = \varepsilon h, \quad h = \text{const} > 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

На выборе параметра h остановимся позднее. Также будем считать, что параметр b меняется в окрестности критического значения $b = b_*$, о котором говорится в условии 2.

1.1.2 Дополнительные построения

Для последующего применения метода квазинормальных форм при сформулированных выше условиях приведем задачу к более удобному виду. С этой целью положим

$$b = b_* + \alpha(\mu), \quad |\mu| \ll 1, \quad (1.3)$$

где μ — вспомогательный малый параметр, а функция $\alpha(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, определяется из уравнения

$$\psi(\alpha, \mu) \equiv \frac{f'(u)}{(b_* + \alpha)g'(u)} \Big|_{u=u_0(a, b_* + \alpha)} + \frac{1 - 2\mu}{1 + 2\mu} = 0.$$

Подставим в уравнение (1.1) соотношение (1.3) и перейдем к новой переменной v , полагая $u = u_*(\mu)(1 + v)$, где $u_*(\mu) = u_0(a, b_* + \alpha(\mu))$. В результате после нормировок

$$\frac{\varepsilon}{\kappa_*(\mu)} \mapsto \varepsilon, \quad h\kappa_*(\mu) \mapsto h, \quad \text{где } \kappa_*(\mu) \equiv -\frac{2f'(u_*(\mu))u_*(\mu)}{1 - 2\mu} > 0,$$

рассматриваемое уравнение преобразуется к более удобному виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} = - \Big(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) v(t - \varepsilon h) + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) v(t - 1) + \Delta_1(v(t - \varepsilon h), \mu) + \\ + \Delta_2(v(t - 1), \mu) \Big) (1 + v), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Delta_j(v, \mu) = (1 - 2\mu)V_j(v, b_* + \alpha(\mu))$, $j = 1, 2$.

Вернемся к определению до сих пор невыбранного параметра h . С этой целью рассмотрим характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) e^{-\varepsilon h \lambda} + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) e^{-\lambda} = 0, \quad (1.5)$$

отвечающее нулевому состоянию равновесия уравнения (1.4). Анализ данного характеристического уравнения проведен в статье [12]. Отметим, что в случае $h < \pi$ все его корни распадаются на две группы. К первой группе относятся

некритические корни, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Ко второй группе относятся все оставшиеся корни $\lambda_n(\varepsilon, \mu)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения (1.5), являющиеся комплексными и при $\varepsilon = \mu = 0$, обращающиеся в соответствующие корни $\lambda_n = i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения $e^{-\lambda} = -1$. Как показано в статье [12], для этих корней справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n(1 + \varepsilon(h - 2) + \varepsilon^2(h - 2)^2) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - h) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

которые позволяют увязать порядки малости μ и ε . Для наших последующих целей будем считать выполненными следующие соотношения

$$h = 1 - h_0\varepsilon, \quad \mu = \mu_0\varepsilon^3, \quad h_0, \mu_0 = \text{const} > 0. \quad (1.7)$$

Отметим, что при таком выборе параметров $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu)$ имеет порядок ε^3 .

1.1.3 Применение метода квазинормальных форм

Изложим алгоритмическую часть метода квазинормальных форм.

Сначала подставим в уравнение (1.4) равенства (1.7) и выполним в нем замену времени

$$\tau = (1 + \tilde{\sigma})t, \quad s = \varepsilon^3 t, \quad \tilde{\sigma} = \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3, \\ \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1 - h_0, \quad \sigma_3 = 2h_0 - 1, \quad (1.8)$$

где поправки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ к собственным частотам ω_n заимствованы из формул (1.6). В результате замен и с учетом равенств (1.2) приходим к уравнению

$$\varepsilon(1 + \tilde{\sigma})v_\tau + \varepsilon^4 v_s = -\left(\left(\frac{1}{2} - \mu_0\right)v(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + (1 - 2\mu_0\varepsilon^3) \cdot \right. \\ \cdot (a_{12}v^2(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + a_{13}v^3(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + \dots) + \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \mu_0\right)v(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + (1 - 2\mu_0\varepsilon^3)(a_{22}v^2(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + \right. \\ \left. + a_{23}v^3(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + \dots)\right)(1 + v), \quad (1.9)$$

где $\tilde{s} = \varepsilon^4(1 - h_0\varepsilon)$, $\tilde{\tau} = \varepsilon(1 - h_0\varepsilon)(1 + \tilde{\sigma})$.

Теперь будем искать главную асимптотику возможных автоколебательных режимов получившегося уравнения в виде ряда

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(s, \tau) \varepsilon^{\frac{k+3}{2}}. \quad (1.10)$$

Здесь $v_k(s, \tau)$ — подлежащие определению 2-периодические по τ функции, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем начальное приближение $v_0(s, \tau) = \xi(s, \tau)$ удовлетворяет условию антипериодичности

$$\xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (1.11)$$

где ξ пока неизвестная функция. Причина, по которой ξ выбирается антипериодической, становится понятной из формулы (1.6), в силу которой ξ должна раскладываться в ряд Фурье по гармоникам $e^{i\omega_n\tau}$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность дальнейших действий такова. Подставляем выражения (1.10) в (1.9), раскладываем функции $v(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau})$, $v(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma})$ в ряд Тейлора по запаздываниям \tilde{s} , $\tilde{\tau}$, ε^3 , $\tilde{\sigma}$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося равенства для v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. В результате приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных уравнений

$$\frac{1}{2}(v_k(s, \tau) + v_k(s, \tau - 1)) = F_k(s, \tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

где неоднородность $F_k(s, \tau)$ — 2-периодическая по τ функция.

Как показано в [12], анализ этих уравнений проводится следующим образом. Разобьем функцию $F_k(s, \tau)$ на два слагаемых $F_k^{(1)}(s, \tau) + F_k^{(2)}(s, \tau)$ таких, что выполняются равенства $F_k^{(1)}(s, \tau + 1) \equiv -F_k^{(1)}(s, \tau)$, $F_k^{(2)}(s, \tau + 1) \equiv F_k^{(2)}(s, \tau)$, где

$$F_k^{(1)}(s, \tau) = \frac{F_k(s, \tau) - F_k(s, \tau - 1)}{2}, \quad F_k^{(2)}(s, \tau) = \frac{F_k(s, \tau) + F_k(s, \tau - 1)}{2}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Система (1.12) разрешима в классе 2-периодических функций при выполнении условия $F_k^{(1)}(s, \tau) \equiv 0$. В этом случае решение системы может быть найдено как $v_k(s, \tau) = F_k^{(2)}(s, \tau)$.

При $k = 0$ и $k = 1$ получаем, что в (1.12) неоднородность $F_k(s, \tau) \equiv 0$, поскольку $v_0(s, \tau) = \xi(s, \tau)$ антипериодическая. Для простоты последующего анализа целесообразно положить

$$v_1(s, \tau) \equiv 0. \quad (1.13)$$

Выбор поправок σ_1 , σ_2 , σ_3 гарантирует разрешимость в классе 2-периодических функций уравнений (1.12) вплоть до номера $k = 5$. Таким образом, следуя изложенному выше алгоритму и учитывая (1.11), (1.13), находим

$$v_2(s, \tau) \equiv 0, \quad v_3(s, \tau) = -(a_{12} + a_{22})\xi^2, \quad v_4(s, \tau) \equiv 0, \quad v_5(s, \tau) = (4a_{12} + 1)\xi\xi_\tau.$$

Далее, при $k = 6$ из условия разрешимости можно сделать вывод, что функция ξ является решением краевой задачи

$$\xi_s = 2h_0\xi_{\tau\tau} + \frac{1}{3}\xi_{\tau\tau\tau} + 4\mu_0\xi + (4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}))\xi^3, \\ \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (1.14)$$

которую будем называть квазинормальной формой задачи (1.4). При этом 1-периодическая составляющая $F_6^{(2)}(s, \tau)$ нелинейности $F_6(s, \tau)$ равна 0, откуда заключаем, что

$$v_6(s, \tau) \equiv 0.$$

Остановимся на соответствии между автоколебательными режимами квазинормальной формы (1.14) и уравнения (1.4). В формулируемом ниже утверждении в качестве фазового пространства краевой задачи (1.14) возьмем пространство антипериодических функций $\xi(s, \tau)$ класса $W_2^3[0, 1]$, а фазовым пространством самого уравнения (1.4) будем считать $C[-1, 0]$.

Теорема 1.1. *Пусть μ и h удовлетворяют условиям (1.7), а квазинормальная форма (1.14) допускает периодическое решение типа бегущей волны*

$$\xi = \xi_0(y), \quad y = \alpha s + \tau, \quad \xi_0(y + 1) = -\xi_0(y), \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad (1.15)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (1.15) отвечает цикл уравнения (1.4) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенством, получающимся из построенного выше отрезка ряда (1.10) при учете формул (1.15) и равенств (1.8), связывающих переменные s и τ с исходной переменной t .

Доказательство этого факта базируется на результатах, изложенных в работах [26, 27].

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.14). После нормировок $\frac{1}{3}s \mapsto s$, $-\tau \mapsto \tau$, $\sqrt{-d}\xi \mapsto \xi$, где d определено в условии 3, задача (1.14) преобразуется к виду

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \alpha\xi_{\tau\tau} + \beta\xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau), \quad (1.16)$$

где $\alpha = 6h_0$, $\beta = 12\mu_0$. Из условия теоремы 1.1 становится ясно, что интерес представляют периодические решения задачи (1.16).

1.2 Анализ квазинормальной формы

Полученную систему (1.16) будем изучать при дополнительных условиях $\alpha = \varepsilon\kappa$, $\beta = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\kappa = \text{const} > 0$. Таким образом, предметом

дальнейшего исследования выбрана система

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \varepsilon \kappa \xi_{\tau\tau} + \varepsilon \xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau). \quad (1.17)$$

Здесь s выполняет роль времени, а τ — пространственной переменной. В качестве фазового пространства взято соболевское пространство $W_2^3[0, 1]$ с дополнительным условием антипериодичности.

Поставим вопрос существования и устойчивости инвариантных торов системы (1.17) различной размерности.

1.2.1 Вторичная квазинормализация

Возможные автоколебательные решения задачи (1.17) будем искать в виде ряда

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(s, \theta, \tau) \varepsilon^{\frac{2k+1}{2}}, \quad (1.18)$$

где $\xi_0(s, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\theta) e^{iy_k} + \bar{z}_k(\theta) e^{-iy_k})$, $y_k = \nu_k^3 s + \nu_k \tau$, $\nu_k = (2k-1)\pi$, $\theta = \varepsilon s$, $z_k(\theta)$ — пока произвольные комплекснозначные функции, которые предстоит определить. Выбранная функция $\xi_0(s, \theta, \tau)$ по переменным s, τ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = 0.$$

Функцию ξ_1 будем искать в виде тригонометрического ряда переменных y_k , $k = 1, 2, \dots$. Подставим (1.18) в (1.17) и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, в результате чего получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial \tau^3} = F(s, \theta, \tau), \quad \xi_1(s, \theta, \tau + 1) = -\xi_1(s, \theta, \tau) \quad (1.19)$$

для неизвестной функции ξ_1 с неоднородностью

$$F(s, \theta, \tau) \equiv \kappa \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau^2} + \xi_0 - \frac{\partial \xi_0}{\partial \theta} - \xi_0^3, \quad (1.20)$$

где θ считаем параметром.

Учитывая в (1.20) явную форму функции ξ_0 , приходим к выводу, что правая часть (1.20) представляет собой тригонометрический ряд, содержащий гармоники вида $e^{\pm i(y_k + y_l + y_m)}$ и $e^{\pm i(y_k + y_l - y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$. В том же виде будем искать и функцию ξ_1 . Однако, последнее возможно тогда и только тогда, когда неоднородность F не содержит первых гармоник e^{iy_k} , $k = 1, 2, \dots$. Поэтому приравняем коэффициенты при указанных гармониках к нулю. В результате для

имеющихся в запасе комплексных амплитуд $z_k(\theta)$ получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z}_k = (1 - \kappa\nu_k^2)z_k - 6 \sum_{l=1}^{\infty} z_k |z_l|^2 + 3z_k |z_k|^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.21)$$

которая и является квазинормальной формой задачи (1.17).

Отметим, что функция ξ_1 может быть найдена из задачи (1.19) в виде тригонометрического ряда, содержащего гармоники $e^{\pm i(y_k + y_l + y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, и $e^{\pm i(y_k + y_l - y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, $l \neq m \neq k$. Связано это с тем, что здесь выполняются соответствующие условия нерезонансности $(\nu_k^3 + \nu_l^3 + \nu_m^3) - (\nu_k + \nu_l + \nu_m)^3 \neq 0$, $k, l, m = 1, 2, \dots$; $(\nu_k^3 + \nu_l^3 - \nu_m^3) - (\nu_k + \nu_l - \nu_m)^3 \neq 0$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, $l \neq m$.

Для удобства последующего анализа выполним в квазинормальной форме (1.21) замены $z_k = \sqrt{\eta_k} e^{i\psi_k}$, $\tau \rightarrow \frac{\tau}{2}$, где η_k и ψ_k — вещественные переменные. В результате приходим к системе

$$\dot{\eta}_k = (1 - \kappa\nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l + 3\eta_k)\eta_k, \quad \dot{\psi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

В дальнейшем будем работать с отщепляющейся от (1.22) системой для η_k , имеющей вид

$$\dot{\eta}_k = (1 - \kappa\nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l + 3\eta_k)\eta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

1.2.2 Анализ амплитудной системы

Справедлива следующая

Лемма 1.2. *У системы (1.23) отсутствуют состояния равновесия с бесконечным числом ненулевых координат.*

Для доказательства леммы обозначим сумму ряда в (1.23) через $A = \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l$ и предположим, что $\sum_{l=1}^{\infty} \eta_l$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых и при этом A — конечное число. Ненулевые координаты η_k состояния равновесия удовлетворяют уравнению

$$1 - \kappa\nu_k^2 - 6A + 3\eta_k = 0. \quad (1.24)$$

Выразим η_k из этого уравнения

$$\eta_k = \frac{1}{3}(6A + \kappa\nu_k^2 - 1). \quad (1.25)$$

Тогда, учитывая последнее равенство, получаем, что

$$A = \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{\infty} (6A + \kappa \nu_l^2 - 1) = +\infty,$$

поскольку общее слагаемое ряда $\sum_{l=1}^{\infty} (6A + \kappa \nu_l^2 - 1)$ не стремится к нулю.

Таким образом, приходим к противоречию, а это означает, что $\sum_{l=1}^{\infty} \eta_l$ содержит конечное число ненулевых слагаемых. Лемма 1.2 доказана.

Фиксируем произвольные натуральные p , $n_1 < n_2 < \dots < n_p$ и поставим вопрос о существовании и устойчивости у системы (1.23) состояний равновесия $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ с координатами

$$\eta_{n_m} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, p; \quad \eta_k = 0 \text{ при } k \neq n_m, \quad m = 1, \dots, p. \quad (1.26)$$

Подставляя соотношения (1.26) в систему (1.23), для отыскания компонент η_{n_m} , $m = 1, \dots, p$, получаем линейную неоднородную систему

$$1 - \kappa \nu_{n_m}^2 - 6 \sum_{l=1}^p \eta_{n_l} + 3\eta_{n_m} = 0, \quad m = 1, \dots, p. \quad (1.27)$$

Непосредственная проверка показывает, что эта система имеет единственное решение $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots)$, где

$$\hat{\eta}_{n_m} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2p-1} \left(p - \kappa \sum_{l=1}^p \nu_{n_l}^2 \right) + \kappa \nu_{n_m}^2 - 1 \right),$$

$$\hat{\eta}_k = 0 \text{ при } k \neq n_m, \quad m = 1, \dots, p. \quad (1.28)$$

Заметим, что по смыслу переменных η_k нам интересен случай, когда все $\hat{\eta}_{n_m}$, $m = 1, \dots, p$, положительны. Последнее имеет место в том и только том случае, когда κ удовлетворяет неравенству

$$\kappa < \frac{1}{2 \sum_{l=1}^p \nu_{n_l}^2 - (2p-1) \min_{1 \leq m \leq p} \nu_{n_m}^2}.$$

Исследуем теперь состояние равновесия (1.28) на устойчивость. С этой целью обозначим правую часть в (1.23) через $f(\eta) = (f_1(\eta), \dots, f_k(\eta), \dots)$, где

$$f_k(\eta) \equiv \left(1 - \kappa \nu_k^2 - 6 \sum_{l=1, l \neq k}^{\infty} \eta_l - 3\eta_k \right) \eta_k.$$

Частные производные функций $f_k(\eta)$, $k = 1, 2, \dots$, с учетом равенства (1.27) выглядят следующим образом

$$\frac{\partial f_k(\hat{\eta})}{\partial \eta_j} = \begin{cases} -6\eta_{n_m}, & k = n_m, m = 1, \dots, p, j \neq k, \\ -3\eta_{n_m}, & k = n_m, m = 1, \dots, p, j = k, \\ 0, & k \neq n_m, m = 1, \dots, p, j \neq k, \\ B_{k,n_1,\dots,n_p}, & k \neq n_m, m = 1, \dots, p, j = k, \end{cases}$$

где $B_{k,n_1,\dots,n_p} = 1 - \kappa\nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^p \eta_{n_l}$. Тогда система в вариациях на интересующем нас состоянии равновесия имеет вид $\dot{h} = J_{n_1,\dots,n_p} h$, где J_{n_1,\dots,n_p} — матрица Якоби функции $f(\eta)$.

В дальнейшем удобно исследовать состояния равновесия в двух случаях: $p = 1$ и $p \geq 2$. Пусть сначала $p = 1$ и фиксировано натуральное n . Тогда состояние равновесия (1.28) системы (1.23) принимает вид

$$\eta_n = \frac{1}{3}(1 - \kappa\nu_n^2), \quad \eta_k = 0 \text{ при } k \neq n \quad (1.29)$$

и существует при $\kappa < \frac{1}{\nu_n^2}$. Оператор J_n имеет собственные значения $\lambda_n = -3\eta_n$, $\lambda_k = B_{k,n} = 2\kappa\nu_n^2 - \kappa\nu_k^2 - 1$, $k \neq n$. Требуя, чтобы все собственные значения были отрицательными, получаем условие устойчивости состояния равновесия (1.29)

$$\kappa < \frac{1}{2\nu_n^2 - \nu_1^2}. \quad (1.30)$$

Теперь пусть $p \geq 2$. Рассмотрим конечномерный оператор

$$\hat{J}_{n_1,\dots,n_p} = \begin{pmatrix} -3\eta_{n_1} & -6\eta_{n_1} & \dots & -6\eta_{n_1} \\ -6\eta_{n_2} & -3\eta_{n_2} & \dots & -6\eta_{n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -6\eta_{n_p} & -6\eta_{n_p} & \dots & -3\eta_{n_p} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственные значения этого оператора являются собственными значениями оператора J_{n_1,\dots,n_p} . Характеристический многочлен оператора \hat{J}_{n_1,\dots,n_p} имеет вид

$$P(\lambda) = \left(1 - \sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda}\right) \prod_{l=1}^p (3\eta_{n_l} - \lambda).$$

Поскольку $3\eta_{n_l}$ не является собственным значением матрицы \hat{J}_p , уравнение $P(\lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$1 - \sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda} = 0,$$

которое в силу следующей леммы имеет хотя бы один положительный корень.

Лемма 1.3. Пусть натуральное $p \geq 2$ и вещественные $\alpha_k, \beta_k > 0$, $k = 1, \dots, p$, — произвольно фиксированы, причем $\beta_i \neq \beta_j$ для $i \neq j$. Тогда уравнение

$$1 - \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{\beta_k - 1} = 0$$

имеет хотя бы один положительный корень.

Докажем лемму 1.3. Введем функцию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}.$$

Будем считать, что числа β_k упорядочены по возрастанию. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)$ на отрезке $[\beta_i; \beta_{i+1}]$. Числа α_k , $k = 1, \dots, p$, положительны, поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow \beta_i + 0} \frac{\alpha_i}{\beta_i - \lambda} = -\infty.$$

Остальные слагаемые суммы $\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}$ при $\lambda \rightarrow \beta_i + 0$ остаются конечными. Поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow \beta_i + 0} \varphi(\lambda) = -\infty.$$

Аналогичным образом

$$\lim_{\lambda \rightarrow \beta_{i+1} + 0} \frac{\alpha_i}{\beta_i - \lambda} = +\infty.$$

А это значит, что на промежутке $[\beta_i; \beta_{i+1}]$ функция φ пробегает все множество значений от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, найдется корень больше нуля. Лемма 1.3 доказана.

Это уравнение при $p \geq 2$ имеет хотя бы один положительный корень. Связано это с положительностью чисел η_{n_m} , $m = 1, \dots, p$, и с тем, что на каждом интервале $(\eta_{n_m}, \eta_{n_{m+1}})$, $m = 1, \dots, p-1$, сумма $\sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda}$ пробегает все множество значений от $-\infty$ до $+\infty$.

Отсюда следует, что состояние равновесия (1.28) системы (1.23) с количеством ненулевых координат $p \geq 2$ неустойчиво. Таким образом, для системы (1.23) устойчивы лишь состояния равновесия (1.29) с одной ненулевой координатой при значениях параметра \varkappa , удовлетворяющих (1.30). Отсюда следует, что система (1.22) обладает устойчивыми циклами при соответствующих \varkappa , а ее торы размерности два и выше неустойчивы. Добавим, что из (1.30) вытекает, что количество устойчивых циклов неограниченно растет при уменьшении параметра \varkappa .

В [6] получен следующий результат.

Теорема 1.2. Любому состоянию равновесия амплитудной системы (1.23) с количеством ненулевых положительных координат равным p для задачи (1.17) соответствует инвариантный тор размерности p с теми же свойствами устойчивости.

Из приведенных выше исследований и теоремы 1.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.3. По каждому натуральному n можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ и при параметре \varkappa , удовлетворяющем условию (1.30), у задачи (1.17) существует устойчивая бегущая волна, задаваемая равенством

$$\xi = \sqrt{\varepsilon} \xi_0(y) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $y = (2n - 1)\pi x + \nu_n(\varepsilon)t$, $\nu_n(\varepsilon) = (2n - 1)^3 \pi^3 + O(\varepsilon)$. Торы размерности два и выше системы (1.17) неустойчивы.

Отметим, что из условия (1.30) следует, что число $K(\varkappa)$ устойчивых циклов краевой задачи (1.17) удовлетворяет неравенству

$$K(\varkappa) \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi^2 \varkappa} + 1} + 1 \right) \right\rceil. \quad (1.31)$$

(Здесь $\lceil \cdot \rceil$ означает целую часть.) Как уже было сказано выше, $K(\varkappa)$ неограниченно растет с уменьшением параметра \varkappa .

Итак, мы доказали, что в амплитудной системе (1.23) с уменьшением значения параметра \varkappa количество устойчивых состояний равновесия неограниченно растет. В свою очередь, каждому такому состоянию равновесия в квазинормальной форме (1.22) соответствует одномерный инвариантный тор (цикл). Как показано в книге [30], каждому этому циклу отвечает устойчивый цикл краевой задачи (1.17) вида бегущей волны. Из нашего анализа в частности, из оценки (1.31) следует, что количество таких циклов неограниченно растет при $\varkappa \rightarrow 0$, причем при $\varkappa = 0$ их количество счетно. При этом каждой бегущей волне (1.15) соответствует устойчивый цикл в уравнении (1.1), асимптотика которого описана в теореме 1.1. А это означает, что в рамках исходного уравнения (1.1) реализуется явление буферности.

Указанные циклы обладают установленными свойствами устойчивости не только при малых значениях параметра $0 < \varepsilon \ll 1$, но и при $\varepsilon \sim 1$. Однако проверить это удастся лишь с помощью компьютерного моделирования. Проиллюстрируем полученные результаты.

1.2.3 Численный эксперимент

Для описания соответствующего численного эксперимента фиксируем произвольное натуральное N и заменим частные производные по τ в (1.17) при-

ближенными равенствами (см. [4])

$$\left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}(s, \tau) \right|_{\tau=k/N} \approx N^2(\xi_{k+1} - 2\xi_k + \xi_{k-1}), \quad (1.32)$$

$$\left. \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau^3}(s, \tau) \right|_{\tau=k/N} \approx \frac{N^3}{2}(\xi_{k+2} - 2\xi_{k+1} + 2\xi_{k-1} - \xi_{k-2}), \quad (1.33)$$

где $\xi_k = \xi(s, \tau)|_{\tau=k/N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Локальная погрешность формул (1.32), (1.33) имеет порядок $O(\frac{1}{N^2})$.

В результате замены в (1.1) частных производных по τ для переменных $\xi_k(s, \tau)$ после нормировки времени $N^3\tau/2 \mapsto \tau$ приходим к системе

$$\dot{\xi}_k = -(\xi_{k+2} - 2\xi_{k+1} + 2\xi_{k-1} - \xi_{k-2}) + \frac{2\varepsilon\kappa}{N}(\xi_{k+1} - 2\xi_k + \xi_{k-1}) + \frac{2\varepsilon\xi_k}{N^3} - \frac{2\xi_k}{N^3},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad \xi_{-1} = -\xi_{N-1}, \quad \xi_{-2} = -\xi_{N-2}, \quad \xi_{N+1} = -\xi_1, \quad \xi_N = -\xi_0.$$

Численный анализ модели проводился с помощью пакета программ *tracer* 3.7, разработанного Д. С. Глызиным (использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности с шагом 10^{-3}), при $N = 25$, $\kappa = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1$ и начальных условиях

$$\xi_{0k} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{(2j+1)\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.34)$$

Отметим, что начальные условия (1.34) заимствованы из теоретического анализа, а именно начальное условие определяется первым слагаемым функции (1.18) при $\varepsilon = 1$, $z_k(\tau) = \bar{z}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $s = 0$, $\tau = \frac{j}{N}$, $j = 1, \dots, N$. В результате численного исследования удалось обнаружить пять устойчивых циклов, проекции которых на (ξ_4, ξ_5) для значений параметра $k = 0, \dots, 4$ изображены на рисунке 1.

Из (1.31) следует, что количество $K(\kappa)$ одновременно существующих устойчивых циклов задачи (1.17) при $\kappa = 10^{-3}$ удовлетворяет оценке $K(\kappa) \leq 5$. Отсюда можно сделать вывод о том, что полученная в предыдущих главах теория хорошо прогнозирует результат в том числе для $\varepsilon \sim 1$. Причем в этом случае количество одновременно существующих устойчивых циклов совпадает с их числом, ожидаемым из теории для малого ε . Таким образом, на качественном уровне полученные результаты сохраняются при $\varepsilon \sim 1$.

Тем самым, с помощью численного эксперимента удалось выяснить что задача (1.17) обладает свойством буферности в том числе и при $\varepsilon \sim 1$.

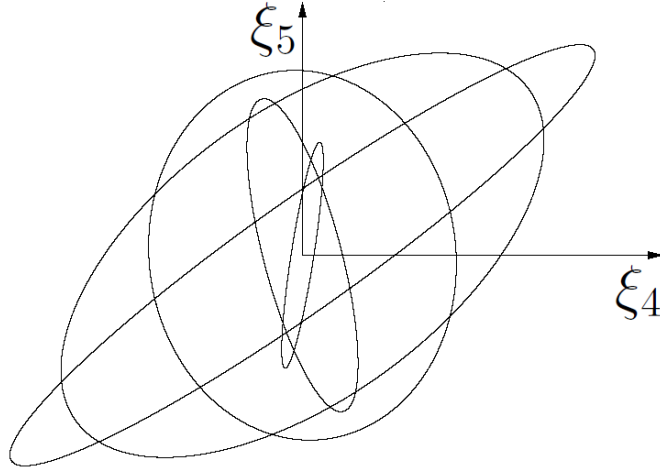


Рис. 1.1: Проекции циклов на плоскость (ξ_4, ξ_5) при значениях параметра $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

1.3 Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега – де Вриза

В этом разделе обобщены результаты, полученные для краевой задачи (1.17) и рассмотрено уравнение

$$u_t + u_{xxx} + \Phi(u)u_x = \gamma u_{xx} + F(u) \quad (\gamma > 0) \quad (1.35)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + T) = u(t, x) \quad (1.36)$$

и с несколько более общей нелинейностью. Относительно функций $\Phi(u)$ и $F(u)$ предполагаем, что

$$\Phi(u) = \delta + \alpha u + \beta u^2 + O(|u|^3), \quad F(u) = au + bu^2 + cu^3 + O(|u|^4).$$

Краевая задача (1.35), (1.36) отличается от (1.17) наличием дополнительного слагаемого $\Phi(u)u_x$. Такая краевая задача могла бы получиться в качестве квазинормальной формы задачи (1.1) при иных условиях, наложенных на функции f и g . Поэтому имеет смысл рассматривать вторичную квазинормализацию для более широкого класса уравнений типа Кортевега – де Вриза.

Как и в предыдущем разделе будем исследовать вопрос о поведении всех решений краевой задачи (1.35), (1.36) с достаточно малыми (по норме W_2^3) периодическими по пространственной переменной начальными условиями. Важную роль при этом играет расположение корней характеристического (волнового) уравнения

$$\lambda_k = ik^3 + a. \quad (1.37)$$

В силу (1.36) величина k в (1.37) принимает счетное число значений $k = 2\pi n/T$ ($n \in \mathbb{Z}$). При $a < 0$ имеем $\text{Re } \lambda_k = a < 0$, поэтому все решения (1.35), (1.36) из

некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же $a > 0$, то $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ и задача перестает быть локальной. Здесь предполагаем, что параметр a и коэффициент диффузии γ являются достаточно малыми, то есть

$$a = \varepsilon a_0, \quad \gamma = \varepsilon \gamma_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.38)$$

Отметим еще, что слагаемое δu_x в (1.35) можно исключить заменой $x \rightarrow x - \delta t$, поэтому ниже считаем, что $\delta = 0$. При нулевой правой части в (1.35) и при $\Phi(u) = \alpha u$ получаем классическое уравнение Кортевега – де Вриза [54], а при $\Phi(u) = \alpha u + \beta u^2$ – так называемое [33] модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, а если еще и $\gamma \neq 0$, то имеем [33, 40, 44] уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса.

Сперва положим $\gamma = 0$ и изучим вопрос о построении в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия периодических решений и инвариантных торов различной размерности. Условие (1.38) малости a открывает путь к использованию методов бифуркационного анализа [1, 2, 21]. При $\varepsilon \rightarrow 0$ бесконечно много корней характеристического уравнения (1.37) стремятся к мнимой оси. Тем самым в задаче об устойчивости нулевого решения (1.35), (1.36) реализуется критический случай бесконечной размерности. Напомним, что для исследования локальной динамики уравнений с конечномерным критическим случаем используются хорошо известные методы локальных инвариантных интегральных многообразий (см. например, [3, 35, 42]) и методы нормальных форм (см. например, [14, 43]). С их помощью анализ исследуемого уравнения сводится к изучению специальной конечномерной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для краевой задачи (1.35), (1.36) (при условии (1.38)) сведение к конечномерной системе ОДУ невозможно. Однако, как будет показано ниже, применяя формализм метода нормальных форм, можно получать результаты о существовании в малой окрестности нуля периодических решений и инвариантных торов различных размерностей.

В разделах 2 и 3 рассматривается наиболее простая ситуация, когда $b = 0$ и функция u удовлетворяет условию

$$M(u) = 0, \quad (1.39)$$

где

$$M(u) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t, x) dx. \quad (1.40)$$

При этом в разделе 2.1 речь идет о периодических решениях, а в разделе 2.2 строится асимптотика инвариантных торов. В разделе 2.3 происходит отказ от условия равенства нулю среднего значения функции u , а в разделе 2.4 рассматривается общий случай, когда $b \neq 0$.

1.3.1 Построение асимптотики периодических решений краевой задачи (1.35), (1.36) при условиях (1.38), $\gamma = b = 0$

Фиксируем произвольное натуральное $n_0 \neq 0$ и положим $k_0 = 2\pi n_0/T$. Тогда линейная краевая задача

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad u(t, x + T) = u(t, x) \quad (1.41)$$

имеет периодическое решение

$$u = \xi \exp(ik_0 x + ik_0^3 t) + \bar{\xi} \exp(-ik_0 x - ik_0^3 t),$$

где через ξ обозначена произвольная комплексная постоянная.

Рассмотрим наиболее простой случай. Предположим дополнительно, что для решений (1.35), (1.36) выполняется условие (1.39).

Периодические решения нелинейной краевой задачи (1.35), (1.36), (1.39) будем искать в виде формального ряда

$$u = \sqrt{\varepsilon} (\xi(\tau) \exp(ik_0 x + ik_0^3 t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ik_0 x - ik_0^3 t)) + \varepsilon u_2(t, x, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, \tau) + \dots, \quad (1.42)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, а функции $u_j(t, x, \tau)$ периодичны по первым двум аргументам. Подставим (1.42) в (1.35) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда на втором шаге для функции $u_2(t, x, \tau)$ получаем равенство

$$u_2(t, x, \tau) = u_{20}(\tau) \exp(ik_0 x + ik_0^3 t) + c\bar{c},$$

в котором $u_{20}(\tau) = \xi^2(\tau)\alpha/6k_0^2$. Здесь и ниже через $c\bar{c}$ обозначено слагаемое, комплексно сопряженное к предыдущему.

Далее, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получаем уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций приходим к уравнению для определения неизвестной амплитуды $\xi = \xi(\tau)$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_0 \xi + \Delta \xi |\xi|^2, \quad (1.43)$$

где $\Delta = 3c - i\beta k_0 - i\alpha^2/6k_0$. Отметим, что $\operatorname{Re} \Delta = 3c$.

Уравнение (1.43) определяет поведение решений краевой задачи (1.35), (1.36), (1.39) в достаточно малой окрестности решения $u \equiv 0$. Например, при условии

$$a_0 \operatorname{Re} \Delta < 0 \quad (1.44)$$

уравнение (1.43) имеет периодическое решение $\xi_*(\tau) = \rho_* \exp(i\varphi_* \tau)$, где $\rho_* = \sqrt{-a_0/\operatorname{Re} \Delta}$; $\varphi_* = \operatorname{Im} \Delta$. Это решение для (1.43) устойчиво при $a_0 > 0$ и неустойчиво при $a_0 < 0$.

Стандартные построения приводят к доказательству следующего результата.

Теорема 1.4. При условиях $b = 0$ и (1.44) уравнение (1.35) имеет асимптотическое орбитально устойчивое периодическое решение $u_*(t, x, \varepsilon)$, для которого верна формула

$$u_*(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \rho_* \exp \left(ik_0 x + i(k_0^3 + \varepsilon \varphi_* + o(\varepsilon))t \right) + c\bar{c} + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (1.45)$$

Для доказательства данного утверждения могут быть использованы два способа. В первом из них применяется следующая схема: сначала исходная краевая задача (1.35), (1.36) линеаризуется при условиях (1.38), (1.39) на приближенном периодическом решении (1.45); затем в получившейся линейной краевой задаче выполняются гладкие периодические замены так, что к ней оказывается применим известный принцип усреднения. Другой способ связан со сведением исследуемой задачи к ОДУ третьего порядка и применении при условии (1.39) известного метода бифуркации Андронова-Хопфа.

1.3.2 Торы в уравнении (1.35) при условиях (1.38) и $\gamma = b = 0$

Распространим приведенный выше формализм построения периодических решений на более сложный случай.

Построение асимптотики двумерных инвариантных торов

Фиксируем произвольно два положительных числа k_1 и k_2 ($k_1 \neq k_2$). Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^2 \xi_j(\tau) \exp(ik_j x + ik_j^3 t) + \sum_{j=1}^2 \bar{\xi}_j(\tau) \exp(-ik_j x - ik_j^3 t) \right) + \varepsilon u_2(t, x, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, \tau) + \dots \quad (1.46)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $\xi_{1,2}(\tau)$ — (неизвестные) комплексные «амплитуды», функции $u_j(t, x, \tau)$ ($j = 2, 3, \dots$) являются тригонометрическими многочленами по первым двум аргументам и выполнено условие

$$M(u_j) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots), \quad (1.47)$$

где

$$M(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t, x, \tau) dx.$$

Подставим (1.46) в (1.35). Производя стандартные действия, сначала находим, что

$$\begin{aligned} u_2(t, x, \tau) = & \sum_{j=1}^2 (u_{2j}\xi_j^2 \exp(2ik_jx + 2ik_j^3t) + c\bar{c}) + \\ & + u_{23}\xi_1\xi_2 \exp(i(k_1 + k_2)x + i(k_1^3 + k_2^3)t) + c\bar{c} + \\ & + u_{24}\xi_1\bar{\xi}_2 \exp(i(k_1 - k_2)x + i(k_1^3 - k_2^3)t) + c\bar{c}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Для u_{2j} ($j = 1, \dots, 4$) имеем формулы

$$u_{2j} = \alpha/(6k_j^2), \quad j = 1, 2; \quad u_{23} = u_{24} = \alpha/(3k_1k_2).$$

После этого, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, из условия разрешимости (в указанном классе функций) относительно u_3 получающегося уравнения, приходим к уравнениям для определения $\xi_{1,2}(\tau)$:

$$\begin{cases} d\xi_1/d\tau = a_0\xi_1 + \xi_1(\Delta_1|\xi_1|^2 + |\Delta_2|\xi_2|^2), \\ d\xi_2/d\tau = a_0\xi_2 + \xi_2(\Delta_3|\xi_1|^2 + \Delta_4|\xi_2|^2). \end{cases} \quad (1.49)$$

Для Δ_j ($j = 1, \dots, 4$) получаем равенства

$$\Delta_1 = 3c - (\alpha k_1 u_{21} + \beta k_1)i, \quad \Delta_2 = 6c - 2(\alpha k_1 u_{23} + \beta k_1)i,$$

$$\Delta_3 = 6c - 2(\alpha k_2 u_{23} + \beta k_2)i, \quad \Delta_4 = 3c - (\alpha k_2 u_{22} + \beta k_2)i.$$

Ответ на вопрос о существовании простейшего двумерного инвариантного тора в уравнении (1.35) связан с вопросом о существовании решения системы (1.49) вида $\xi_j = \rho_j \exp(i\varphi_j\tau)$ ($\tau > 0$). Из (1.49) тогда получаем систему двух вещественных уравнений для определения ρ_1 и ρ_2 , отличных от нуля:

$$\begin{cases} a_0 + 3c\rho_1^2 + 6c\rho_2^2 = 0, \\ a_0 + 6c\rho_1^2 + 3c\rho_2^2 = 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Отсюда находим решение

$$\rho_{1*} = \rho_{2*} = \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{a_0}{c}}. \quad (1.51)$$

Для φ_j тогда имеем:

$$\varphi_{1*} = \rho_{1*}^2(\operatorname{Im} \Delta_1 + \operatorname{Im} \Delta_2), \quad \varphi_{2*} = \rho_{2*}^2(\operatorname{Im} \Delta_3 + \operatorname{Im} \Delta_4),$$

откуда

$$\varphi_{1*} = \frac{a_0 k_1}{9c}(\alpha u_{21} + 2\alpha u_{23} + \beta), \quad \varphi_{2*} = \frac{a_0 k_2}{9c}(\alpha u_{22} + 2\alpha u_{23} + \beta). \quad (1.52)$$

Теорема 1.5. Пусть ρ_{1*} и ρ_{2*} — вещественные простые корни системы (1.50). Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1.35) имеет двумерный инвариантный тор $u_0(t, x, \tau)$, для которого

$$u_0(t, x, \tau) = \sqrt{\varepsilon}\rho_{1*} \exp\left(ik_1x + i(k_1^3 + \varepsilon\varphi_{1*} + o(\varepsilon))t\right) + c\bar{c} + \\ + \sqrt{\varepsilon}\rho_{2*} \exp\left(ik_2x + i(k_2^3 + \varepsilon\varphi_{2*} + o(\varepsilon))t\right) + c\bar{c} + \varepsilon u_2 + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где ρ_{j*} , φ_{j*} ($j = 1, 2$) определены равенствами (1.51), (1.52), а функция u_2 — (1.48).

Конечно, можно изучать разложение торov в асимптотические ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с любой степенью точности.

Построение семейств многомерных инвариантных торov

Фиксируем произвольно натуральное N ($N > 2$) и произвольный набор положительных чисел k_1, \dots, k_N ($k_j \neq k_s$ при $j \neq s$). Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^N (\xi_j(\tau) \exp(ik_jx + ik_j^3t) + c\bar{c}) + \\ + \varepsilon u_2(t, x, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, \tau) + \dots, \quad (1.53)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а функции $u_j(t, x, \tau)$ являются тригонометрическими многочленами по первым двум аргументам и, согласно (1.47), выполнены условия $M(u_j(t, x, \tau)) = 0$. Подставляя (1.53) в (1.35) и производя стандартные действия, сначала находим, что

$$u_2(t, x, \tau) = \sum_{j,s=1}^N \left(u_{1js} \xi_j \xi_s \exp(i(k_j + k_s)x + i(k_j^3 + k_s^3)t) + c\bar{c} \right) + \\ + \sum_{j,s=1, j \neq s}^N \left(u_{2js} \xi_j \bar{\xi}_s \exp(i(k_j - k_s)x + i(k_j^3 - k_s^3)t) + c\bar{c} \right). \quad (1.54)$$

Тогда на следующем шаге приходим к системе уравнений относительно $\xi_j(\tau)$:

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = a_0 \xi_j + \xi_j \sum_{s=1}^N \Delta_{js} |\xi_s|^2 \quad (j = 1, \dots, N). \quad (1.55)$$

Явные формулы для величин u_{1jm} , u_{2jm} и Δ_{jm} достаточно громоздки, поэтому их не приводим. По аналогии с теоремой 1.5 имеет место утверждение.

Теорема 1.6. Пусть система (1.55) имеет решение вида $\xi_{j*} = \rho_{j*} \exp(i\varepsilon\varphi_{j*}t)$ ($j = 1, \dots, N$) и $\rho_{j*} > 0$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1.35) имеет N -мерный инвариантный тор с асимптотикой

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^N (\xi_{j*} \exp(ik_j x + ik_j^3 t) + c\bar{c}) + \varepsilon u_2 + O(\varepsilon^{3/2})$$

при указанных ξ_{j*} , а функция u_2 задана равенством (1.54).

Отметим, что вопрос о существовании решений системы (1.55) вида $\xi_j = \rho_j \exp(i\varphi_j \tau)$ эквивалентен вопросу о разрешимости в классе положительных решений системы уравнений

$$\rho_j(a_0 + \sum_{s=1}^N \operatorname{Re} \Delta_{js} \rho_s^2) = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Важно подчеркнуть, что относительно простой вид системы (1.55) обусловлен отсутствием главных резонансных соотношений, то есть выполнением следующего утверждения.

Лемма 1.4. Системы уравнений

1. $k_{j1} + k_{j2} = k_{j3}, k_{j1}^3 + k_{j2}^3 = k_{j3}^3;$
2. $k_{j1} + k_{j2} + k_{j3} = k_{j4}, k_{j1}^3 + k_{j2}^3 + k_{j3}^3 = k_{j4}^3.$

неразрешимы в классе нетривиальных решений (при $k_j \neq k_s$ для $j \neq s$).

1.3.3 Построение периодических решений и инвариантных торов уравнения (1.35) при условии $\gamma = b = 0$ и без учета условия (1.47)

Сначала в первом пункте приведем известные результаты общего характера, а затем применим эти результаты для исследования краевой задачи (1.35), (1.36).

Нормальная форма для критического случая одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения

Напомним здесь хорошо известные результаты о локальной динамике в малой окрестности нулевого состояния равновесия системы нелинейных уравнений вида

$$\dot{w} = (A + \varepsilon B)w + \Phi(w). \quad (1.56)$$

Здесь $w \in R^n$, A и B — квадратные $n \times n$ матрицы, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, нелинейная вектор-функция $\Phi(w)$ достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости выше первого. Предполагаем, что матрица A имеет нулевое собственное значение ($Ag_0 = 0, g_0 \neq 0$) и пару чисто мнимых ($Ag_1 = i\omega g_1, \omega > 0$). Все остальные собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части. Тогда ([14]) при всех достаточно малых ε система (1.56) имеет трехмерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, поведение решений на котором определяет поведение всех решений (1.56) (из окрестности нулевого решения). На этом многообразии систему (1.56) можно с точностью до слагаемых более высокого порядка малости записать в виде специальной системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы [14]. Ее удобно записать для одной вещественной переменной η и одной комплексной — ξ :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \alpha_1 \varepsilon \eta + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 |\xi|^2 + \alpha_4 \eta^3 + \alpha_5 \eta |\xi|^2, \\ \dot{\xi} = \beta_1 \varepsilon \xi + \beta_2 \eta \xi + \xi(\beta_3 |\xi|^2 + \beta_4 \eta^2). \end{cases} \quad (1.57)$$

Решения (1.56) и (1.57) связаны соотношением

$$w = \eta(t, \varepsilon)g_0 + \xi(t, \varepsilon)g_1 \exp(i\omega t) + c\bar{c} + \dots, \quad (1.58)$$

где через \dots обозначен формальный ряд по степеням ε, η, ξ , начиная с квадратичных слагаемых, с $(2\pi/\omega)$ -периодической зависимостью от t . Все коэффициенты α_i и β_i определяются путем подстановки (1.58) в (1.56) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, η и ξ .

Построение периодических решений уравнения (1.35) при условии $\gamma = b = 0$ и без учета условия (1.47)

Без граничных условий (1.47) структура периодических решений (1.35) сложнее, чем в разделе 2. Фиксируем, как и выше, произвольно натуральное $n_0 \neq 0$ и положим $k_0 = 2\pi n_0/T$. Отметим, что краевая задача (1.41) имеет нулевое и пару чисто мнимых корней $\pm ik_0^3$ характеристического уравнения. Уравнение (1.41), в частности, имеет $(2\pi/k_0)$ -периодическое решение

$$u = \eta + \xi \exp(ik_0 x + ik_0^3 t) + c\bar{c}.$$

Формально не будем учитывать другие периодические решения (1.41).

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \eta(t, \varepsilon) + \xi(t, \varepsilon) \exp(ik_0 x + ik_0^3 t) + c\bar{c} + u_2(\eta, \xi, x, t) + u_3(\eta, \xi, x, t) + \dots, \quad (1.59)$$

где u_2 содержит квадратичные по ξ, η слагаемые, u_3 — кубические и т. д., и зависимость функции $u_j(\eta, \xi, x, t)$ от x и t — периодическая.

Главные свойства функций $\eta = \eta(t, \varepsilon)$ и $\xi = \xi(t, \varepsilon)$ заключаются в следующем. Во-первых, η и ξ являются достаточно малыми, а значит, можно рассматривать ряды по их степеням. Во-вторых, их производные по t согласно (1.57) также являются малыми и выражаются через малые величины η , ξ и ε .

Положим в (1.35) вместо u выражение (1.59). В получившемся формальном тождестве заменим $\dot{\eta}$ и $\dot{\xi}$ согласно системе (1.57) с неизвестными коэффициентами α_j и β_j . Будем затем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε , η и ξ . В результате получим, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 = a_0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = c, \quad \alpha_5 = 6c, \\ \beta_2 = -i\alpha k_0, \quad \beta_3 = 3c - i(\alpha^2/(6k_0) + \beta k_0), \quad \beta_4 = 3c - i\beta k_0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Подставляя $\xi = \rho \exp(i\varphi)$ в (1.57) для поиска периодических решений и учитывая полученные значения коэффициентов (1.60), приходим к отщепляющейся от (1.57) амплитудной системе

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \eta(a_0\varepsilon + c\eta^2 + 6c\rho^2), \\ \dot{\rho} = \rho(a_0\varepsilon + 3c\rho^2 + 3c\eta^2). \end{cases} \quad (1.61)$$

При этом φ связано с ρ и η формулой

$$\dot{\varphi} = -\alpha k_0 \eta + (\alpha^2/(6k_0) + \beta k_0)\rho^2 - \beta k_0 \eta^2.$$

Нас интересуют состояния равновесия системы (1.61). Таким образом, зависимость искомых ρ и η от ε уточняется из системы

$$\begin{cases} \eta(a_0\varepsilon + c\eta^2 + 6c\rho^2) = 0, \\ \rho(a_0\varepsilon + 3c\rho^2 + 3c\eta^2) = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Отсюда получаем четыре варианта решений:

$$\begin{aligned} \eta_*^{(1)} &= 0, & \rho_*^{(1)} &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{a_0}{3c}}; \\ \eta_{\pm}^{(2)} &= \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{a_0}{5c}}, & \rho_*^{(2)} &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{2a_0}{15c}}; \\ \eta_*^{(3)} &= 0, & \rho_*^{(3)} &= 0; \\ \eta_{\pm}^{(4)} &= \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{a_0}{c}}, & \rho_*^{(4)} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при $a_0 > 0$, $c < 0$ состояния равновесия $(\eta_*^{(1)}, \rho_*^{(1)})$, $(\eta_*^{(4)}, \rho_*^{(4)})$ устойчивы, а $(\eta_{\pm}^{(2)}, \rho_*^{(2)})$, $(\eta_{\pm}^{(3)}, \rho_*^{(3)})$ — неустойчивы.

Таким образом, при условии $a_0 > 0$, $c < 0$ получаем три различных периодических решения системы (1.57):

$$1) \quad \eta_*(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad \xi_*(t, \varepsilon) = \rho_*^{(1)} \exp(i\varphi_* t), \quad \text{где } \varphi_* = \varepsilon \left(\frac{\alpha^2}{6k_0} + \beta k_0 \right) \frac{a_0}{3c};$$

$$2, 3) \quad \eta_{\pm}(t, \varepsilon) = \eta_{\pm}^{(2)}, \quad \xi_{\pm}(t, \varepsilon) = \rho_*^{(2)} \exp(i\varphi_{\pm} t), \quad \text{где } \varphi_{\pm} = \mp \sqrt{\varepsilon} \alpha k_0 \sqrt{-\frac{a_0}{5c}} + O(\varepsilon).$$

Для уравнения (1.35) тогда получаем асимптотику еще двух периодических решений $u_{\pm}(t, x, \varepsilon)$ отличных от решений (1.45):

$$u_{\pm}(t, x, \varepsilon) = \eta_{\pm}(t, \varepsilon) + \xi_{\pm}(t, \varepsilon) \exp(ik_0x + ik_0^3t) + c\bar{c} + O(\varepsilon).$$

Таким образом, отказ от краевых условий (1.47) может приводить к появлению еще двух периодических решений.

Торы для уравнения (1.35) при условии $\gamma = b = 0$ и без учета условия (1.47)

Речь пойдет о построении невырожденных инвариантных торов уравнения (1.35) в виде формального ряда

$$u = \eta(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^N (\xi_j(t, \varepsilon) \exp(ik_jx + ik_j^3t) + c\bar{c}) + \dots, \quad (1.63)$$

где $k_j \neq 0$ и $k_j \neq k_s$ при $j \neq s$ а через \dots обозначены квадратичные, кубические и т.д. слагаемые по ε , η , ξ_j , являющиеся по t и x тригонометрическими многочленами. Соответствующая нормальная форма — аналог (1.57) — имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \alpha_1\varepsilon\eta + \alpha_2\eta^2 + \sum_{s=1}^N \alpha_{3s}|\xi_s|^2 + \alpha_4\eta^3 + \eta \sum_{s=1}^N \alpha_{5s}|\xi_s|^2, \\ \dot{\xi}_j = \beta_{1j}\varepsilon\xi_j + \beta_{2j}\eta\xi_j + \xi_j \left(\sum_{s=1}^N \beta_{3js}|\xi_s|^2 + \beta_{4j}\eta^2 \right) \quad (j = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (1.64)$$

Подставляя (1.63) в (1.35) и производя стандартные действия, находим последовательно все коэффициенты системы (1.64). В результате имеем равенства ($j = 1, \dots, N$)

$$\alpha_1 = \beta_{1j} = a_0, \quad \alpha_2 = \alpha_{3j} = 0, \quad \alpha_4 = c, \quad \alpha_{5j} = 6c, \quad \beta_{2j} = -i\alpha k_j,$$

$$\beta_{3js} = 6c - 2i\beta k_j \text{ при } s \neq j, \quad \beta_{3jj} = 3c - i(\alpha^2/(6k_j) + \beta k_j), \quad \beta_{4j} = 3c - i\beta k_j.$$

Тем самым, вопрос о существовании решений системы (1.64) в виде $\xi_j = \rho_j \exp(i\varphi_j t)$ эквивалентен вопросу о существовании и разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} \eta(a_0\varepsilon + 6c \sum_{s=1}^N \rho_s^2 + c\eta^2) = 0, \\ \rho_j(a_0\varepsilon + 6c \sum_{s=1}^N \rho_s^2 - 3c\rho_j^2 + 3c\eta^2) = 0 \quad (j = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (1.65)$$

Отсюда, полагая $\rho_j > 0$, находим для системы (1.64) при $a_0 > 0$, $c < 0$ три периодических решения:

$$1) \quad \eta_*(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad \xi_{j*}(t, \varepsilon) = \rho_{j*} \exp(i\varphi_{j*}t),$$

$$\text{где } \rho_{j*} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{a_0}{3(2N-1)c}}, \quad \varphi_{j*} = \varepsilon \left(\frac{\alpha^2}{6k_j} + (2N-1)\beta k_j \right) \frac{a_0}{3(2N-1)c};$$

$$2, 3) \quad \eta_{\pm}(t, \varepsilon) = \pm \sqrt{-\frac{a_0}{(4N+1)c}}, \quad \xi_{j\pm}(t, \varepsilon) = \rho_{j*} \sqrt{\varepsilon} \exp(i\varphi_{j\pm}t),$$

$$\text{где } \rho_{j*} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{2a_0}{3(4N+1)c}}, \quad \varphi_{j\pm} = \mp \sqrt{\varepsilon} \alpha k_j \sqrt{-\frac{a_0}{(4N+1)c}} + O(\varepsilon).$$

В частности при $N = 2$ имеем

$$\begin{cases} \eta(a_0\varepsilon + 6c(\rho_1^2 + \rho_2^2) + c\eta^2) = 0, \\ \rho_1(a_0\varepsilon + 3c\rho_1^2 + 6c\rho_2^2 + 3c\eta^2) = 0, \\ \rho_2(a_0\varepsilon + 6c\rho_1^2 + 3c\rho_2^2 + 3c\eta^2) = 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

При $\eta = 0$ получаем $\rho_j = \rho_{j0} \sqrt{\varepsilon}$, где ρ_{j0} совпадает с решением системы (1.50).

При $\eta \neq 0$ имеем $\eta = \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{a_0}{9c}}$; $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{-\frac{2a_0}{27c}}$. Количество решений (1.66) больше, чем у системы (1.50), а значит, и двумерных инвариантных торов в (1.35) может быть существенно больше.

Грубым решением (удовлетворяющим условию невырожденности) называется простое решение системы для нахождения амплитуд.

Теорема 1.7. Пусть $b = 0$ и система (1.65) имеет грубое решение η_* , ρ_{j*} ($\rho_{j*} > 0$, $j = 1, \dots, N$). Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1.35) имеет асимптотический по невязке N -мерный инвариантный тор

$$u_* = \eta_* + \sum_{j=1}^N \left(\rho_{j*} \exp(ik_j x + i(k_j^3 + \varphi_{j*})t) + c\bar{c} \right) + O(\varepsilon).$$

1.3.4 Построение периодических решений и инвариантных торов уравнения (1.35) при условии $\gamma = 0$ и $b \neq 0$ и без учета условия (1.47)

Асимптотика периодических решений уравнения (1.35) при $\gamma = 0$ и $b \neq 0$

Особо отметим, что роль параметров α и β в вопросе о существовании периодических решений и инвариантных торов сказывается только в виде присутствия произведения $\alpha\beta$ в коэффициенте при кубических слагаемых. Ниже будет показано, что роль слагаемого bu^2 более значима.

Подставим формальный ряд (1.59) в (1.35) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях η , ξ и ε , в результате чего получаем следующие формулы для коэффициентов нормальной формы (1.57)

$$\alpha_1 = \beta_1 = a_0, \quad \alpha_2 = b, \quad \alpha_3 = 2b, \quad \alpha_4 = c, \quad \alpha_5 = 6c,$$

$$\beta_2 = 2b - i\alpha k_0, \quad \beta_3 = 3c + \frac{\alpha b}{2k_0^2} + i\left(\frac{b^2}{3k_0^3} - \frac{\alpha^2}{6k_0} - k_0\beta\right), \quad \beta_4 = 3c - i\beta k_0.$$

Как и ранее в полученной нормальной форме перейдем к полярным координатам по переменной $\xi = \rho \exp(i\varphi t)$. Таким образом, переходим к аналогичной (1.62) системе для поиска амплитуд

$$\begin{cases} \dot{\eta} = a_0\varepsilon\eta + b\eta^2 + 2b\rho^2 + c\eta^3 + 6c\eta\rho^2, \\ \dot{\rho} = \rho\left(a_0\varepsilon + 2b\eta + \rho^2(3c + \alpha b/(2k_0^2)) + 3c\eta^2\right), \end{cases} \quad (1.67)$$

откуда при $a_0 > 0$ получаем грубое решение

$$\rho_* = \frac{a_0\varepsilon}{2\sqrt{2}|b|} + O(\varepsilon^2), \quad \eta_* = -\frac{a_0\varepsilon}{2b} + O(\varepsilon^2). \quad (1.68)$$

При этом для φ_* имеем формулу

$$\varphi_* = \frac{\alpha k_0 a_0 \varepsilon}{2b} + O(\varepsilon^2).$$

Теорема 1.8. Пусть система (1.67) имеет грубое решение (1.68). Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1.35) имеет асимптотическое по невязке периодическое решение

$$u = \eta_* + \rho_* \exp(ik_0 x + i(k_0^3 + \varphi_*)t) + c\bar{c} + O(\varepsilon^2).$$

Отметим, что динамические свойства системы (1.57) изучались многими авторами. Наиболее полно результаты на эту тему приведены в работе [14].

Асимптотика инвариантных торов уравнения (1.35) при $\gamma = 0$ и $b \neq 0$

Так же как в пункте 4.3 для фиксированного конечного набора положительных попарно различных чисел k_j ($j = 1, \dots, N$) рассмотрим ряд (1.63). Подставим его в уравнение (1.35), на этот раз полагая, что $b \neq 0$, и, производя стандартные вычисления, найдем коэффициенты соответствующей нормальной формы (1.64):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_{1j} = a_0, \quad \alpha_2 = b, \quad \alpha_{3j} = 2b, \quad \alpha_4 = c, \quad \alpha_{5j} = 6c, \\ \beta_{2j} = 2b - i\alpha k_j, \quad \beta_{3jj} = 3c + \frac{\alpha b}{2k_j^2} + i\left(\frac{b^2}{3k_j^3} - \frac{\alpha^2}{6k_j} - \beta k_j\right), \\ \beta_{3js} = 6c - \frac{4b\alpha}{3(k_j^2 - k_s^2)} + i\left(\frac{8b^2}{3k_j(k_j^2 - k_s^2)} - 2\beta k_j\right) \text{ при } s \neq j, \quad \beta_{4j} = 3c - i\beta k_j. \end{aligned}$$

Таким образом, вопрос о существовании решений системы (1.64) в виде $\xi_j = \rho_j \exp(i\varphi_j t)$ сводится к вопросу о разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} a_0\varepsilon\eta + 2b \sum_{s=1}^N \rho_s^2 + b\eta^2 + c\eta^3 + 6c\eta \sum_{s=1}^N \rho_s^2 = 0, \\ \rho_j(a_0\varepsilon + 2b\eta + \sum_{s=1}^N \operatorname{Re} \beta_{3js} \rho_s^2 + 3c\eta^2) = 0 \quad (j = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (1.69)$$

В частности при $N = 2$ получаем систему

$$\begin{cases} a_0\varepsilon\eta + 2b(\rho_1^2 + \rho_2^2) + b\eta^2 + c\eta^3 + 6c\eta(\rho_1^2 + \rho_2^2) = 0, \\ \rho_1(a_0\varepsilon + 2b\eta + \operatorname{Re} \beta_{311}\rho_1^2 + \operatorname{Re} \beta_{312}\rho_2^2 + 3c\eta^2) = 0, \\ \rho_2(a_0\varepsilon + 2b\eta + \operatorname{Re} \beta_{321}\rho_1^2 + \operatorname{Re} \beta_{322}\rho_2^2 + 3c\eta^2) = 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Отметим, что когда η и ρ_j имеют порядок ε , для решения этой системы приходим к равенствам

$$\eta_* = -\frac{a_0}{2b}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \rho_{1*} = \rho_{12*}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \rho_{2*} = \rho_{21*}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (1.71)$$

где

$$\rho_{js*} = \frac{a_0}{2\sqrt{2}|b|} \sqrt{\frac{3c - 4\alpha b/(3(k_j^2 - k_s^2)) - \alpha b/(2k_s^2)}{6c - \alpha b/(2k_j^2) - \alpha b/(2k_s^2)}}.$$

Для φ_j получаем асимптотические равенства

$$\varphi_{1*} = \frac{\alpha k_1 a_0 \varepsilon}{2b} + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_{2*} = \frac{\alpha k_2 a_0 \varepsilon}{2b} + O(\varepsilon^2).$$

Теорема 1.9. Пусть система (1.70) имеет грубое решение (1.71). Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (1.35) имеет асимптотический по невязке с точностью до $O(\varepsilon^2)$ 2-мерный инвариантный тор

$$u_* = \eta_* + \sum_{j=1}^2 \left(\rho_{j*} \exp(ik_j x + i(k_j^3 + \varphi_{j*})t) + c\bar{c} \right).$$

Система (1.64) даже при $N = 2$ может иметь существенно более сложную динамику [14]. По таким решениям системы (1.64) можно выписать асимптотические по невязке решения исходной краевой задачи.

1.4 Выводы к главе 1

Подведем итоги первой главы. В результате применения метода квазинормальных форм к сингулярно возмущенному дифференциально-разностному уравнению в случае, близком к бесконечномерному вырождению, получена краевая задача типа Кортевега – де Вриза, для которой доказаны результаты о

соответствии. Эта задача была рассмотрена в сингулярно возмущенном случае. На основе применения к ней вторичной квазинормализации сделан вывод о том, что в исходном уравнении при подходящем выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется феномен буферности, состоящий в наличии у этого уравнения механизма накопления любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов вида бегущих волн. Кроме того, для краевой задачи типа Кортевега – де Вриза был проведен численный эксперимент, в результате которого было установлено, что задача обладает свойством буферности в том числе и при $\varepsilon \sim 1$.

В последней части главы рассмотрено некоторое обобщение краевой задачи (1.17). Исследована локальная динамика обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза. На основе методов бифуркационного анализа изучен вопрос о существовании, асимптотике и устойчивости периодических решений и торов.

Глава 2

Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями

В настоящем разделе приводится продолжение исследования, начатого в статье [6] С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова, где в качестве модели функционирования отдельного нейрона предложено сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вольтеровского типа с двумя запаздываниями. Данное уравнение хорошо моделирует так называемый bursting-эффект, характерный для изменения мембранного потенциала нейрона. Для рассматриваемого уравнения удастся установить существование bursting-цикла, а именно устойчивого периодического решения, содержащего любое наперед заданное количество всплесков на периоде. Продолжение исследования состоит в доказательстве данного факта для области параметров, не рассмотренной в указанной статье. Настоящая глава исчерпывающим образом описывает существование и устойчивость bursting-цикла в изучаемом уравнении.

2.1 Постановка задачи

В статье [6] для моделирования функционирования отдельного нейрона предложено скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left(f(u(t-h)) - bg(u(t-1)) \right) u. \quad (2.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр λ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, параметр $h \in (0, 1)$ фиксирован, $b = \text{const} > 0$. Предполагаем, что функции $f(u)$, $g(u)$ класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладают свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; \quad f(u) + a, uf'(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \quad a = \text{const} > 0; \\ g(0) &= 0; \quad g(u) - 1, ug'(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Типовым примером таких функций является

$$f(u) = \frac{1-u}{1+c_1u}, \quad g(u) = \frac{c_2u}{1+u}, \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Общая постановка задачи состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n необходимо подобрать фигурирующие в (2.1), (2.2) параметры a , b , h , такие что при всех достаточно больших λ уравнение (2.1) будет иметь специальный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Специфика заключается в том, что функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких всплесков, а все остальное время она асимптотически мала.

Сформулированная задача предполагает четыре случая решения, один из которых был разобран в статье [6], остальные рассматриваются в рамках настоящей работы.

2.2 Формулировка результата

Так же как в работе [6] для удобства последующего анализа в рассматриваемом уравнении (2.1) сделаем замену $u = \exp(\lambda x)$, которая приводит его к виду

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon) - bG(x(t-1), \varepsilon), \quad (2.4)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = \lambda^{-1}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Из свойств (2.2) функций f и g следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) &= R(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x), \\ R(x) &= \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 0, \\ -a, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда вытекает, что полученное уравнение (2.4) допускает предельный объект — релейное уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = R(x(t-h)) - bH(x(t-1)). \quad (2.6)$$

Для уравнений (2.4) и (2.6) можно рассмотреть четыре случая. Для описания этих случаев введем в рассмотрение величины $t_0 = h(1 + a^{-1})$ и $T_0 = h(2 + a + a^{-1})$ и зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Упомянутые случаи состоят в следующем.

$$\text{Случай 1 : } 1 \in (t_0 + h + nT_0, (n + 1)T_0). \quad (2.7)$$

$$\text{Случай 2 : } 1 \in (t_0 + nT_0, t_0 + h + nT_0). \quad (2.8)$$

$$\text{Случай 3 : } 1 \in (h + nT_0, t_0 + nT_0). \quad (2.9)$$

$$\text{Случай 4 : } 1 \in (nT_0, h + nT_0). \quad (2.10)$$

Первый из этих случаев рассмотрен в статье [6], оставшиеся три исследованы в настоящей работе.

Начнем с изучения предельного объекта (2.6). С этой целью фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем) и определим множество начальных функций

$$\varphi(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \text{ при } t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (2.11)$$

Обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.6) с произвольной начальной функцией (2.11). Кроме того, предположим, что на параметры a , b и h , фигурирующие в (2.1), (2.2), наложены ограничения

$$b > 1 + a, \quad \frac{1}{n(2 + a + a^{-1}) + 2 + a^{-1}} < h < \frac{1}{n(2 + a + a^{-1}) + 1 + a^{-1}}. \quad (2.12)$$

Отметим, что указанное ограничение на параметр h отвечает случаю 2. Этот случай возьмем за основу и рассмотрим более подробно, а для остальных в конце только приведем полученный результат.

Найдем решение релейного уравнения (2.6) конструктивно. При интегрировании уравнения (2.6) следует учитывать, что его правая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию и, в силу (2.5), меняет свое значение только в том случае, когда $x(t - h)$ или $x(t - 1)$ меняют знак. На отрезке $[-\sigma_0, -\sigma_0 + h]$ обе функции $\varphi(t - h)$ и $\varphi(t - 1)$ отрицательны, а это значит, что с учетом (2.5), (2.11) на указанном отрезке $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0$, откуда

$$x_\varphi(t) = t \text{ при } t \in [-\sigma_0, 0]. \quad (2.13)$$

Заметим, что, учитывая (2.11) и (2.13), на отрезке $[0, 1]$ функция $H(x(t - 1)) \equiv 0$. Отсюда получаем для $x_\varphi(t)$ вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = R(x(t - h)), \\ x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Данное уравнение исследуется в статье [28], где показано, что оно имеет решение, совпадающее при всех начальных функциях (2.11) с одной и той же

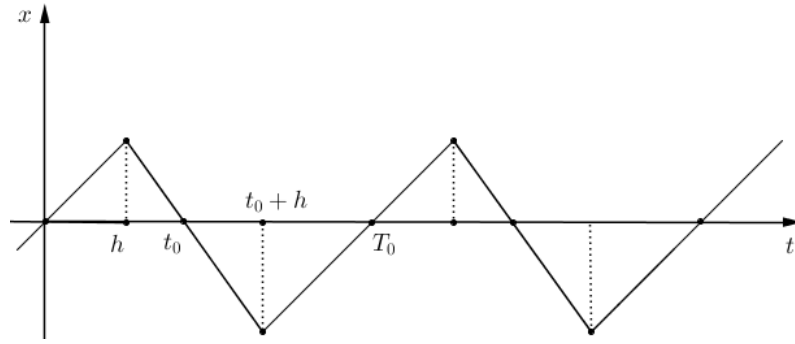


Рис. 2.1: Решение (2.15) задачи (2.14).

T_0 -периодической функцией $x_0(t)$, заданной равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ h - a(t - h) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ -ah + t - t_0 - h & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (2.15)$$

График функции $x_0(t)$ можно увидеть на рис. 2.1.

Поясним теперь геометрический смысл случаев 1–4 (см. (2.7)–(2.10)). Отрезок длины периода функции $x_0(t)$ разбивается на четыре участка, причем две положительные фазы $(nT_0, h + nT_0)$, $(h + nT_0, t_0 + nT_0)$ и две отрицательные фазы $(t_0 + h + nT_0, (n+1)T_0)$, $(t_0 + nT_0, t_0 + h + nT_0)$ заданы различными линейными функциями. Для последующего построения решения $x_\varphi(t)$ имеет значение, на какую из четырех фаз цикла функции $x_0(t)$ попадает значение $t = 1$. Связано это с тем, что в зависимости от того, куда попадает $t = 1$, периодические решения уравнения (2.6) имеют различную конфигурацию.

Вернемся к построению решения $x_\varphi(t)$ уравнения (2.4). Имея ввиду все вышесказанное, получаем, что

$$x_\varphi(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [0, 1]. \quad (2.16)$$

Перейдем к рассмотрению следующего участка $t \in [1, nT_0 + t_0 + h]$. При данных значениях t обе функции $x_\varphi(t - h)$ и $x_\varphi(t - 1)$ положительны, а значит, с учетом (2.15) получаем на отрезке $[1, nT_0 + t_0 + h]$ для функции $x_\varphi(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -a - b, \\ x|_{t=1} = x_0(1). \end{cases} \quad (2.17)$$

Проинтегрировав данную задачу, получаем, что ее решением является функция

$$x_1(t) = -(a + b)(t - 1) + x_0(1). \quad (2.18)$$

Далее, так же как и в статье [6], нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, которая является решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - bH(x_0(t)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (2.19)$$

Как показано в статье [6], y_0 задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b-1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - bt_0, & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$y_0(t) = k(T_0 - bt_0) + y_0(t - kT_0) \text{ при } kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассматривая очередной отрезок $[nT_0 + t_0 + h, 1 + h]$, заметим, что $x_\varphi(t - h) = x_0(t - h) < 0$ при указанных значениях t , а это означает, что здесь $R(x(t - h)) = 1$. Следовательно, для функции $x_\varphi(t)$ на участке $[nT_0 + t_0 + h, 1 + h]$ получаем задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - bH(x_0(t - 1)), \\ x|_{t=nT_0+t_0+h} = x_1(nT_0 + t_0 + h), \end{cases} \quad (2.21)$$

откуда находим решение

$$x_2(t) = y_0(t - 1) - (n + 1)T_0 + 1. \quad (2.22)$$

Таким образом, $x_\varphi(t) = x_2(t)$ при $t \in [nT_0 + t_0 + h, 1 + h]$. Обратим внимание, что в предположении

$$x_\varphi(t - h) < 0 \quad (2.23)$$

формула (2.22) сохраняется на отрезке $t \in [nT_0 + t_0 + h, 2]$. Однако, это условие действительно выполняется в силу того, что $(n + 1)T_0 > 1$ и $y_0(t - 1) < 0$ при $t > 1$.

Далее, рассматривая значения $t \leq 2$, будем считать дополнительно, что

$$x_\varphi(t - 1) < 0. \quad (2.24)$$

С учетом этой оценки получаем, что при $t \geq 2$ функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=2} = y_0(1) - (n + 1)T_0 + 1$, откуда

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad T_* = (n + 1)(bt_0 + T_0). \quad (2.25)$$

Отметим, что априорные требования (2.23), (2.24) выполнены на отрезке $2 \leq t \leq T_*$, длина которого положительна в силу ограничений на параметры (2.12).

Вернемся теперь к параметру σ_0 , чья оценка сверху до сих пор не была уточнена. Для того, чтобы функция $x_\varphi(t + T_*)$ принадлежала множеству начальных функций (2.11) необходимо, чтобы на отрезке $[T_* - 1 - \sigma_0, T_* - \sigma_0]$ функция $x_\varphi(t)$ была отрицательна, то есть должно выполняться $T_* - 1 - \sigma_0 > nT_0 + t_0$, что влечет за собой ограничение

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 + (n + 1)bt_0 - 1, \quad (2.26)$$

которое везде ниже считаем выполненным.

Таким образом, изложенные выше построения для функции $x_\varphi(t)$ будут повторяться на промежутках $kT_* - \sigma_0 \leq t \leq (k + 1)T_* - \sigma_0$, $k \in \mathbb{N}$, а это значит, что верна следующая

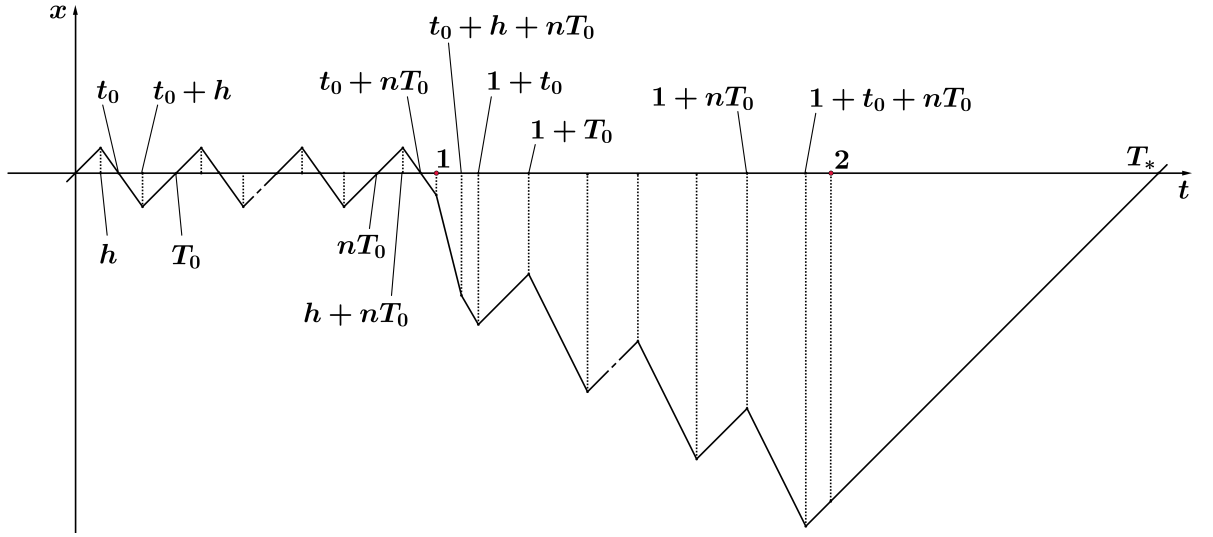


Рис. 2.2: Решение (2.27) предельного релейного уравнения (2.6).

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие (2.8), тогда каждое решение $x_\varphi(t)$ уравнения (2.6) с начальной функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям (2.11), совпадает с одной и той же периодической кусочно-линейной функцией $x_*(t)$, которая задается равенствами

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t), & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ x_1(t), & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + h + nT_0, \\ x_2(t), & \text{при } t_0 + h + nT_0 \leq t \leq 2, \\ t - T_*, & \text{при } 2 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t) \quad (2.27)$$

(где $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ определены формулами (2.15), (2.18), (2.22)).

Далее, сформулируем результат, касающийся связи между периодическими решениями релейного уравнения (2.6) и уравнения (2.4).

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (2.8), тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.4) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \quad (2.28)$$

Для доказательства данной теоремы потребуются некоторые дополнительные конструкции. Как и в статье [6], фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$$

замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (2.29)$$

Далее, зафиксировав произвольную функцию $\varphi(t) \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$, рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq \sigma_0$, уравнения (2.4) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Предположим, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ имеет не менее $(2n+2)$ -х положительных корней и обозначим $(2n+2)$ -й корень через $t = T_\varphi$. И кроме того, зададим оператор последований Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, определяя его равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.30)$$

Дальнейший план доказательства такой же, как в статье [6]. Устанавливаются асимптотические равенства для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t . Из них следует, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор Π_ε определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проводится оценка нормы производной по Фреше оператора Π_ε , из которой следует, что он является сжимающим.

2.3 Доказательство существования bursting-цикла

2.3.1 Построение асимптотики на отрезке $[-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$

Построение асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (2.4) начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Заметим, что с учетом ограничений (2.29) на функцию $\varphi(t)$ и свойств (2.2) функции g равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ выполняется равенство

$$G(\varphi(t - 1), \varepsilon) = O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (2.31)$$

Таким образом, на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ в правой части уравнения (2.4) можно отбросить соответствующее слагаемое и рассматривать аналогичную (2.14) вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x(t - h), \varepsilon), \\ x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \end{cases} \quad (2.32)$$

которая уже изучена в статьях [6, 28].

Как и в [6], перед тем как воспользоваться асимптотическими равенствами, описывающими решение задачи (2.32), которые были получены в [28], уточним ограничения на σ_0 . Величина параметра σ_0 не должна превосходить половины длины каждой из четырех фаз периода решения (2.15) предельного релейного уравнения (2.6). Отсюда вытекает требование

$$2\sigma_0 < \min(h, ha, h/a), \quad (2.33)$$

более сильное, чем (2.26). Кроме того, предположим, что

$$2\sigma_0 < 1 - nT_0 - h. \quad (2.34)$$

Далее, вернемся к асимптотическому анализу решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (2.4). Объединяя равенство (2.31) с известными асимптотическими формулами из [28], приходим к следующим фактам, аналогичным тем, что приведены в статье [6].

1. На промежутках $-\sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, справедливы асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - kT_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.35)$$

где здесь и далее через Δ_φ обозначаются различные остатки, модули которых имеют экспоненциальный порядок малости (то есть порядок $\exp(-\frac{q}{\varepsilon})$, $q = \text{const} > 0$) равномерно по t и φ .

2. На отрезках времени $h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h + \varepsilon v_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.36)$$

где функция $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается равенством

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds \quad (2.37)$$

и обладает свойствами (см. [28]):

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_0(\tau) &= -a\tau + c_0 + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$c_0 = \int_1^0 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_{+\infty}^1 \frac{f(u) + a}{u} du.$$

3. При $h + \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, имеют место формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h - a(t - h - kT_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.39)$$

а на отрезке $h + \sigma_0 + nT_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, длина которого в силу (2.34) положительна, справедливо равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h - a(t - h - nT_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (2.40)$$

4. На отрезках $t_0 + h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаются аналогичные (2.36) асимптотические равенства

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -ah + \varepsilon w_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-t_0-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= -a\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} \left(f(\exp(-as + c_0)) + a \right) ds; \\ w_0(\tau) &= -a\tau + c_0 + O(\exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ w_0(\tau) &= \tau + O(\exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.42)$$

5. При $t_0 + h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0 - \sigma_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ задается соотношениями

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (k+1)T_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (2.43)$$

2.3.2 Построение асимптотики на отрезке $[1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0]$

На следующем этапе, предполагая дополнительно, что

$$2\sigma_0 < nT_0 + t_0 + h - 1, \quad (2.44)$$

обратимся к отрезку $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Ограничения (2.34), (2.44) гарантируют, что отрезок $[1 - h - \sigma_0, 1 - h + \sigma_0]$ вложен в интервал $(nT_0, nT_0 + t_0)$, на котором построенное решение задано известными формулами (2.35)–(2.40). Отсюда получаем, что

$$x_\varphi(t - h, \varepsilon) \geq q, \quad q = \text{const} > 0, \quad \text{при } t \in [1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0]. \quad (2.45)$$

Кроме того, значения $t - 1$ здесь принадлежат отрезку $[-\sigma_0, \sigma_0]$, который в силу (2.33) вложен в $[-\sigma_0, h - \sigma_0]$, где решение x_φ задано уже известным соотношением (2.35). Таким образом, получаем

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = t - 1 + \omega_1(t, \varepsilon) \quad \text{при } t \in [1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0],$$

где ω_1 (а также ω_2 , ω_3 , которые встретятся чуть ниже) — известные экспоненциально малые по модулю добавки.

Тем самым на отрезке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -a - bg(\exp([t - 1 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon)) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1-\sigma_0} = x_0(1 - \sigma_0) + \varepsilon c_0 + \omega_3(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.46)$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + \varepsilon v_1(\tau) \Big|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.47)$$

где функция $v_1(\tau)$ задается равенством

$$v_1(\tau) = -a\tau + c_0 - b \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (2.48)$$

а $\Delta_\varphi(t, \varepsilon)$ — подлежащий определению остаток.

Подставляя соотношения (2.47), (2.48) в (2.46), приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_\varphi = bG_\varphi(t, \varepsilon), \\ \Delta_\varphi|_{t=1-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.49)$$

где

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon), \quad (2.50)$$

при $x_1 = \exp((t-1)/\varepsilon)$, $x_2 = \exp([t-1 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon)$;

$$g_\varphi(\varepsilon) = a\sigma_0 + \varepsilon c_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (2.51)$$

Таким образом, для доказательства равномерной по t и φ экспоненциальной малости Δ_φ достаточно установить аналогичные свойства для функции (2.50) и начального условия (2.51).

Начнем с анализа $g_\varphi(\varepsilon)$. Из того, что $g(0) = 0$ (см. (2.2)) следует, что $\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = O(\exp \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Отсюда получаем для функции $v_1(\tau)$ справедливость соотношения

$$v_1(\tau) = -a\tau + c_0 + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.52)$$

из которого следует, что выражение из правой части (2.51)

$$a\sigma_0 + \varepsilon c_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-\sigma_0/\varepsilon)).$$

Из последнего соотношения и из известных свойств ω_3 получаем требуемую экспоненциальную малость величины $g_\varphi(\varepsilon)$.

Далее, перейдем к оценке функции $G_\varphi(t, \varepsilon)$. Из свойств (2.2) производной функции g следует, что

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1 + x^2) |g'(x)| < \infty. \quad (2.53)$$

Используя теорему Лагранжа о среднем значении для функции g и факт (2.53), получаем, что

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \text{ при всех } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (2.54)$$

Применяя последнее неравенство к функции (2.50), приходим к оценке

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_1 \exp((t-1)/\varepsilon) |\exp([\omega_1(t-1, \varepsilon)]/\varepsilon) - 1|}{1 + \exp(2(t-1)/\varepsilon) (1 + O([\omega_1(t-1, \varepsilon)]/\varepsilon))} + |\omega_2(t, \varepsilon)|.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$\frac{\exp u}{1 + \exp(2u)} \leq M \exp(-|u|), \quad M = \text{const} > 0,$$

следует, что справедлива оценка

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-|t-1|/\varepsilon) |\omega_1(t-1, \varepsilon)| + |\omega_2(t, \varepsilon)|$$

при $t \in [1 - \sigma_0; 1 + \sigma_0]$, (2.55)

где M_2 — некоторая универсальная, не зависящая от t , φ , ε , положительная константа. Остается заметить, что (2.55) обеспечивает требуемую равномерную по t и φ экспоненциальную малость функции $G_\varphi(t, \varepsilon)$.

2.3.3 Построение асимптотики на отрезке $[1 + \sigma_0, nT_0 + t_0 + h - \sigma_0]$

Перейдем к отрезку $1 + \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + t_0 + h - \sigma_0$, длина которого положительна в силу (2.44). Отметим, что здесь обе функции $x_\varphi(t-h, \varepsilon)$, $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ близки к положительным функциям $x_0(t-h)$, $x_0(t-1)$, так как аргументы $t-h$ и $t-1$ функции x_φ принадлежат отрезкам: $t-h \in [1-h+\sigma_0, nT_0+t_0-\sigma_0] \subset [nT_0, nT_0+t_0-\sigma_0]$, $t-1 \in [\sigma_0, nT_0+t_0+h-1-\sigma_0] \subset [\sigma_0, h-\sigma_0]$. Отсюда получаем, что в силу свойств (2.2) функций f и g уравнение (2.4) примет вид $\dot{x} = -a - b + \omega_1(t, \varepsilon)$, где ω_1 и ниже ω_2 обозначают некоторые уже известные экспоненциально малые добавки.

Далее, для того чтобы снабдить полученное уравнение начальным условием, необходимо вычислить значение построенной на предыдущем этапе функции $x_\varphi(t, \varphi)$ в точке $1 + \sigma_0$. Для этого потребуется знать поведение функции (2.48) при $\tau \rightarrow +\infty$. Путем нетрудных рассуждений можно получить, что

$$\int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds = \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du, \quad \int_0^\tau g(\exp s) ds = \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + \tau + O(\exp(-\tau)),$$

откуда следует асимптотическое представление

$$v_1(\tau) = -(a+b)\tau + c_0 - d_0 + O(\exp(-\tau)) \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (2.56)$$

где

$$d_0 = \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du.$$

Учитывая (2.56) при определении начального условия, убеждаемся, что на отрезке $1 + \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + t_0 + h - \sigma_0$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -a - b + \omega_1(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1+\sigma_0} = x_0(1) - (a + b)\sigma_0 + \varepsilon(c_0 - bd_0) + \omega_2(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.57)$$

Отсюда получаем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_1(t) + \varepsilon(c_0 - bd_0) + \Delta_\varphi(t, \varepsilon) \text{ при } t \in [1 + \sigma_0, nT_0 + t_0 + h - \sigma_0]. \quad (2.58)$$

2.3.4 Построение асимптотики на отрезке

$$[nT_0 + t_0 + h - \sigma_0, nT_0 + t_0 + h + \sigma_0]$$

Обратимся к отрезку $nT_0 + t_0 + h - \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + t_0 + h + \sigma_0$. Ограничения (2.34), (2.44) гарантируют, что при указанных t аргумент $t - 1$ функции x_φ попадает внутрь интервала $(0, t_0)$, на котором она задана известными формулами (2.35)–(2.39) при $k = 0$. Отсюда получаем, что при $t \in [nT_0 + t_0 + h - \sigma_0, nT_0 + t_0 + h + \sigma_0]$ выполняется оценка

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \geq q, \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.59)$$

Значения $t - h$ здесь принадлежат отрезку $[nT_0 + t_0 - \sigma_0, nT_0 + t_0 + \sigma_0]$, который в силу (2.33), (2.44) вложен в $[h + \sigma_0 + nT_0, 1 - \sigma_0]$, где решение x_φ задано уже известным соотношением (2.40). Таким образом, получаем

$$x_\varphi(t - h, \varepsilon) = x_0(t - h) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon),$$

где здесь ω_1 и ниже ω_2, ω_3 — очередные известные экспоненциально малые по модулю остатки.

Тем самым, учитывая свойства (2.2) функции g , и используя для определения начального условия найденную на предыдущем этапе формулу (2.58), получаем на отрезке $nT_0 + t_0 + h - \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + t_0 + h + \sigma_0$ задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -b - f\left(\exp([x_0(t - h) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon)\right) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=nT_0+t_0+h-\sigma_0} = x_1(nT_0 + t_0 + h - \sigma_0) + \varepsilon(c_0 - bd_0) + \omega_3(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.60)$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_1(nT_0 + t_0 + h) + \varepsilon v_2(\tau)|_{\tau=(t-nT_0-t_0-h)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.61)$$

где функция $v_2(\tau)$ задается равенством

$$v_2(\tau) = -(a+b)\tau + c_0 - bd_0 + \int_{-\infty}^{\tau} f(\exp(-as + c_0))ds, \quad (2.62)$$

а $\Delta_\varphi(t, \varepsilon)$ — предстоящий определению остаток.

Подставляя соотношения (2.61), (2.62) в (2.60) приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t, \varepsilon), \\ \Delta_\varphi|_{t=nT_0+t_0+h-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.63)$$

где теперь

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = f(x_1) - f(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon) \text{ при } x_1 = \exp([x_0(t-h) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon), \\ x_2 = \exp([x_0(t-h) + \varepsilon c_0]/\varepsilon); \quad (2.64)$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = (a+b)\sigma_0 + \varepsilon(c_0 - bd_0) - \varepsilon v_2(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (2.65)$$

Оценка правых частей в (2.63) проводится по той же схеме, что в пункте 3.2 для задачи (2.49). Для функции v_2 устанавливаются свойства

$$v_2(\tau) = -(a+b)\tau + c_0 - bd_0 + O(\exp(a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.66)$$

$$v_2(\tau) = -(b-1)\tau - bd_0 + O(\exp(-a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty \quad (2.67)$$

аналогичные свойствам (2.52), (2.56) функции v_1 . Используя (2.66), можно установить, что

$$(a+b)\sigma_0 + \varepsilon(c_0 - bd_0) - \varepsilon v_2(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-a\sigma_0/\varepsilon)).$$

Из последнего соотношения и из известных свойств ω_3 получаем требуемую экспоненциальную малость величины $g_\varphi(\varepsilon)$.

Далее, перейдем к оценке функции $G_\varphi(t, \varepsilon)$. Имея в виду оценки

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1+x^2)|f'(x)| < \infty, \quad (2.68)$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \text{ при всех } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \quad (2.69)$$

для функции f , аналогичные оценкам (2.53), (2.54) для g , приходим к выводу, что при интересующих нас t

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-|x_0(t-h) + \varepsilon c_0|/\varepsilon) |\omega_1(x_0(t-h) + \varepsilon c_0, \varepsilon)| + \\ + |\omega_2(t, \varepsilon)|, \quad (2.70)$$

где M_2 — некоторая универсальная, не зависящая от t , φ , ε , положительная константа. Отсюда заключаем, что $G_\varphi(t, \varepsilon)$ обладает требуемой равномерной по t и φ экспоненциальной малостью.

2.3.5 Построение асимптотики на отрезке $[nT_0 + t_0 + h + \sigma_0, 1 + t_0 - \sigma_0]$

Перейдем к рассмотрению отрезка $nT_0 + t_0 + h + \sigma_0 \leq t \leq 1 + t_0 - \sigma_0$, длина которого положительна в силу (2.34). Здесь функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ больше нуля, поскольку аргумент $t-1$ функции x_φ принадлежит отрезку $[nT_0 + t_0 + h - 1 + \sigma_0, t_0 - \sigma_0]$, который вложен в $[\sigma_0, t_0 - \sigma_0]$, где функция x_φ близка к положительной функции x_0 . Отсюда приходим к выводу, что при указанных t выполняется оценка (2.59).

Из аналогичных соображений при интересующих нас t

$$x_\varphi(t-h, \varepsilon) \leq -q, \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.71)$$

Таким образом, учитывая свойства (2.2) функций f и g , получаем, что уравнение (2.4) примет вид $\dot{x} = 1 - b + \omega_1(t, \varepsilon)$, где ω_1 — некоторая известная экспоненциально малая добавка.

Далее, для того чтобы снабдить полученное уравнение начальным условием, необходимо вычислить значение построенной на предыдущем этапе функции $x_\varphi(t, \varphi)$ в точке $nT_0 + t_0 + h + \sigma_0$. Привлекая с этой целью асимптотическое равенство (2.67), убеждаемся, что здесь имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - b + \omega_1(t, \varepsilon), \\ x|_{t=nT_0+t_0+h+\sigma_0} = x_1(nT_0 + t_0 + h) - (b-1)\sigma_0 - \varepsilon b d_0 + \omega_2(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.72)$$

Отсюда получаем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_2(t) - \varepsilon b d_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon) \quad \text{при } t \in [nT_0 + t_0 + h + \sigma_0, 1 + t_0 - \sigma_0]. \quad (2.73)$$

2.3.6 Построение асимптотики на отрезке $[1 + t_0 - \sigma_0, nT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0]$

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$. Будем считать, что при указанных t выполнена априорная оценка (2.71). Что касается функции $x_\varphi(t-1)$, то на рассматриваемом отрезке для нее справедлива серия асимптотических равенств (2.35)–(2.43), в которых необходимо заменить t на $t-1$.

В силу вышесказанного получаем с учетом (2.2), что на интересующем нас промежутке времени исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 1 - bG(x_\varphi(t-1, \varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (2.74)$$

Асимптотическое исследование уравнения (2.74) проведем, используя метод математической индукции. Для этого нам понадобятся отрезки

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= [nT_0 + t_0 + h + \sigma_0, 1 + t_0 - \sigma_0], \\ \Lambda_k &= [kT_0 + 1 + \sigma_0, kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0], \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Шаг индукции будет состоять в переходе от отрезка Λ_k к отрезку Λ_{k+1} .

Зафиксируем номер k , $0 \leq k \leq n-1$, и предположим, что на Λ_k уже получено асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_2(t) + \varepsilon b \alpha_k + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.76)$$

где α_k — некоторая константа. Отметим, что база индукции выполняется, так как при $k=0$ равенство вида (2.76) справедливо в силу (2.73) и в этом случае $\alpha_0 = -d_0$. Таким образом, остается убедиться в справедливости аналогичного (2.76) представления при $t \in \Lambda_{k+1}$.

Построение асимптотики на отрезках

$[kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0, kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0]$, $k = 1, \dots, n-1$

Рассмотрим отрезок $kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0$, длина которого в силу (2.33) меньше h . Функция $x_\varphi(t-h)$ здесь известна и для нее выполняется априорная оценка (2.71). Функция $x_\varphi(t-1)$ тоже известна и задается равенством (2.39) при замене в нем t на $t-1$, поскольку аргумент $t-1$ функции x_φ принадлежит отрезку $[kT_0 + t_0 - \sigma_0, kT_0 + t_0 + \sigma_0]$, который вложен в отрезок $[kT_0 + h + \sigma_0, kT_0 + t_0 + h - \sigma_0]$. Таким образом, используя равенство (2.76) для определения начального условия, в данном случае получаем задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - bg \left(\exp([x_0(t-1) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon) \right) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=kT_0+1+t_0-\sigma_0} = x_2(kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0) + \varepsilon b \alpha_k + \omega_3(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.77)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — очередные известные экспоненциально малые остатки.

Решение задачи (2.77) будем искать в виде

$$x_\varphi(t) = x_2(kT_0 + 1 + t_0) + \varepsilon b \alpha_k + \varepsilon v_3(\tau) \Big|_{\tau=(t-1-t_0-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.78)$$

где $x_2(t)$, напомним, определяется равенством (2.22), функция $v_3(\tau)$ задается равенством

$$v_3(\tau) = -(b-1)\tau - b \int_{-\infty}^{\tau} \left(g(\exp(-as + c_0)) - 1 \right) ds, \quad (2.79)$$

а $\Delta_\varphi(t, \varepsilon)$ — предстоящий определению остаток. Подставляя далее (2.78), (2.22), (2.79) в (2.77), для Δ_φ приходим к аналогичной задачам (2.49) и (2.63) задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_\varphi = bG_\varphi(t, \varepsilon), \\ \Delta_\varphi|_{t=nT_0+t_0+h-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.80)$$

где теперь

$$\begin{aligned} G_\varphi(t, \varepsilon) &= g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon), \text{ при } x_1 = \exp([x_0(t-1) + \varepsilon c_0]/\varepsilon), \\ &x_2 = \exp([x_0(t-1) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon); \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = (1 - b)\sigma_0 - \varepsilon v_3(\tau) \Big|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (2.82)$$

Как и раньше в аналогичных задачах (2.63), (2.80), доказательство равномерной по t , φ малости Δ_φ сводится к проверке соответствующих свойств для функции (2.81) и начального условия (2.82).

Остановимся на асимптотических свойствах функции v_3 . Нетрудно убедиться, что

$$v_3(\tau) = -(b - 1)\tau + O(\exp(a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.83)$$

$$v_3(\tau) = \tau - (d_0 + c_0)b/a + O(\exp(-a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.84)$$

Из асимптотического равенства (2.83) следует

$$(1 - b)\sigma_0 - \varepsilon v_3(\tau) \Big|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-a\sigma_0/\varepsilon)),$$

откуда получаем требуемую экспоненциальную малость величины (2.82).

Далее, используя свойство (2.54), установленное в пункте 3.2, получаем при $t \in [kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0, kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0]$ неравенство

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-|x_0(t - 1) + \varepsilon c_0|/\varepsilon) |\omega_1(x_0(t - 1) + \varepsilon c_0, \varepsilon)| + |\omega_2(t, \varepsilon)|, \quad (2.85)$$

аналогичное неравенству (2.55). Здесь M_2 снова обозначает некоторую универсальную положительную константу. Полученное неравенство (2.85) обеспечивает равномерную по t , φ экспоненциальную малость $G_\varphi(t, \varepsilon)$, а значит, и остатка Δ_φ в (2.78).

Построение асимптотики на отрезках

$[kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0, (k + 1)T_0 + 1 - \sigma_0]$, $k = 1, \dots, n - 1$

Перейдем к отрезку $kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0 \leq t \leq kT_0 + 1 + T_0 - \sigma_0$. При указанных t для $x_\varphi(t - 1)$ справедливо неравенство

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) \leq -q, \quad q = \text{const} > 0, \quad (2.86)$$

верное в силу того, что $t - 1 \in [kT_0 + t_0 + \sigma_0, kT_0 + T_0 - \sigma_0]$, а на этом отрезке функция x_φ известна и задана асимптотическими равенствами (2.39), (2.41), (2.43). Таким образом, с учетом (2.2) при интересующих нас t уравнение (2.74) преобразуется к виду

$$\dot{x} = 1 + \omega_1(t, \varepsilon). \quad (2.87)$$

Далее, снабдив полученное уравнение начальным условием

$$x \Big|_{t=kT_0+1+t_0+\sigma_0} = x_2(kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0) + \varepsilon b\alpha_k + \omega_2(\varepsilon),$$

найдем его решение стандартным методом шагов, рассматривая последовательные отрезки времени длины h . В результате чего получаем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0) + x_2(kT_0 + 1 + t_0) + \varepsilon b\alpha_k + \varepsilon v_3(\tau) \Big|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(t, \varepsilon).$$

Отсюда, используя асимптотические свойства (2.84) функции v_3 , приходим к формуле

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_2(t) + \varepsilon b(\alpha_k - (d_0 + c_0)/a) + \Delta_\varphi(t, \varepsilon) \\ \text{при } t \in [kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0, kT_0 + 1 + T_0 - \sigma_0]. \quad (2.88)$$

Построение асимптотики на отрезках

$[(k+1)T_0 + 1 - \sigma_0, (k+1)T_0 + 1 + \sigma_0]$, $k = 1, \dots, n-1$

На отрезке $(k+1)T_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_0 + 1 + \sigma_0$ функция $x_\varphi(t-1)$ задается известными асимптотическими равенствами (2.35) (с соответствующей заменой t на $t-1$ и k на $k+1$). Таким образом, принимая во внимание равенство (2.88) для снабжения уравнения (2.74) начальным условием, приходим к выводу, что при указанных t имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - bg \left(\exp \left((t-1 - (k+1)T_0 + \omega_1(t, \varepsilon))/\varepsilon \right) \right) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=(k+1)T_0+1-\sigma_0} = x_2((k+1)T_0 + 1 - \sigma_0) + \varepsilon b(\alpha_k - (d_0 + c_0)/a) + \omega_3(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.89)$$

Её решение будем искать в виде

$$x_\varphi(t) = x_2((k+1)T_0 + 1) + \varepsilon b(\alpha_k - (d_0 + c_0)/a) + \varepsilon v_4(\tau) \Big|_{\tau=(t-1-(k+1)T_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.90)$$

где функция $v_4(\tau)$ задается равенством

$$v_4(\tau) = \tau - b \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (2.91)$$

а $\Delta_\varphi(t, \varepsilon)$ — подлежащий определению остаток. Отметим, что функция (2.91) обладает следующими асимптотическими свойствами

$$v_4(\tau) = \tau + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.92)$$

$$v_4(\tau) = -(b-1)\tau - bd_0 + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.93)$$

Дальнейшая последовательность действий та же, что в аналогичных местах предыдущих пунктов. Подставляя (2.90), (2.91) в (2.89), для Δ_φ приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_\varphi = bG_\varphi(t, \varepsilon), \\ \Delta_\varphi|_{t=(k+1)T_0+1-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.94)$$

где теперь

$$\begin{aligned} G_\varphi(t, \varepsilon) &= g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ \text{при } x_1 &= \exp([t - 1 - (k + 1)T_0]/\varepsilon), \\ x_2 &= \exp([t - 1 - (k + 1)T_0 + \omega_1(t, \varepsilon)]/\varepsilon); \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon v_4(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (2.96)$$

Как и раньше, остается проверить, что функция (2.95) и начальное условие (2.96) экспоненциально малы равномерно по t , φ .

Из асимптотического равенства (2.92) следует

$$-\sigma_0 - \varepsilon v_4(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O(\exp(-\sigma_0/\varepsilon)),$$

откуда получаем требуемую экспоненциальную малость величины (2.96).

Далее, снова используя свойство (2.54), получаем при $t \in [(k + 1)T_0 + 1 - \sigma_0, (k + 1)T_0 + 1 + \sigma_0]$ аналогичное неравенствам (2.85), (2.55) неравенство

$$\begin{aligned} |G_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-|t - 1 - (k + 1)T_0|/\varepsilon) \times \\ &\times |\omega_1(t - 1 - (k + 1)T_0, \varepsilon)| + |\omega_2(t, \varepsilon)|, \end{aligned} \quad (2.97)$$

обеспечивающее равномерную по t , φ экспоненциальную малость $G_\varphi(t, \varepsilon)$, значит, и остатка Δ_φ в (2.90).

Построение асимптотики на отрезках

$[(k + 1)T_0 + 1 + \sigma_0, (k + 1)T_0 + 1 + t_0 - \sigma_0]$, $k = 1, \dots, n - 1$

Наконец перейдем к отрезку $(k + 1)T_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq (k + 1)T_0 + 1 + t_0 + \sigma_0$, замыкающему индукционный переход от Λ_k к Λ_{k+1} . При интересующих нас t для $x_\varphi(t - 1)$ справедливо неравенство (2.59). Таким образом, учитывая (2.71) получаем, что уравнение (2.74) примет вид

$$\dot{x} = 1 - b + \omega_1(t, \varepsilon). \quad (2.98)$$

Далее, как и в пункте 3.6.2, дополним полученное уравнение (2.98) начальным условием

$$x_\varphi(t, \varepsilon), \quad t \in [(k + 1)T_0 + 1 - \sigma_0 - h, (k + 1)T_0 + 1 - \sigma_0]$$

и найдем его решение

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= (1 - b)t - (1 - b)((k + 1)T_0 + 1 + \sigma_0) + x_2((k + 1)T_0 + 1) + \\ &+ \varepsilon b(\alpha_k - (d_0 + c_0)/a) + \varepsilon v_4(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \omega_2(t, \varepsilon), \end{aligned}$$

которое нетрудно упростить, используя асимптотические свойства (2.93) функции v_4 . Таким образом, приходим к формуле

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_2(t) + \varepsilon b\alpha_{k+1} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (2.99)$$

где

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - d_0 - (d_0 + c_0)/a. \quad (2.100)$$

Это означает, что сделан шаг индукции, состоящий в переходе от Λ_k к Λ_{k+1} . При этом для постоянных $\alpha_k, k = 0, \dots, n-1$, справедливо равенство

$$\alpha_k = -d_0 - k(d_0 + (d_0 + c_0)/a), \quad (2.101)$$

вытекающее из рекуррентной формулы (2.100) и начального условия $\alpha_0 = -d_0$.

Отметим, что из формул (2.76), (2.78), (2.88), (2.90) следует, что априорная оценка (2.71) действительно выполнена, а значит, все построения индукционного перехода от Λ_k к Λ_{k+1} обретают законную силу.

2.3.7 Построение асимптотики на отрезке $[nT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0, T_* - \sigma_0/2]$

Заметим, что на отрезке $nT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0$ справедливы рассуждения, проведенные для отрезка $kT_0 + 1 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq kT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0$ в процессе индукционного перехода, поэтому при указанных t для решения x_φ верна формула (2.78).

Наконец, рассмотрим отрезок $nT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$. Предположим, что здесь выполняются априорные оценки (2.71), (2.86), тогда, согласно (2.2), уравнение (2.4) примет вид (2.87). Дополним данное уравнение начальным условием

$$x_\varphi(t, \varepsilon), \quad nT_0 + t_0 + \sigma_0 \leq t \leq nT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0,$$

и, интегрируя методом шагов, найдем решение

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_* + \varepsilon b \alpha_n + \Delta(t, \varepsilon) \quad \text{при } t \in [nT_0 + 1 + \sigma_0, T_* - \sigma_0/2], \quad (2.102)$$

где постоянная α_n задается равенством (2.101). Остается заметить, что в силу формулы (2.102) нужные априорные оценки действительно выполняются на требуемом отрезке.

2.3.8 Завершение построения асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$

Итак, подытоживая работу, сделанную в пунктах 3.1-3.7, приходим к выводу о том, что из асимптотических формул (2.35), (2.36), (2.39), (2.40), (2.41), (2.43), (2.47), (2.58), (2.61), (2.73), (2.76), (2.78), (2.88), (2.90), (2.102) для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ следует равномерная по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ оценка

$$\max_{t \in [-\sigma_0, T_* - \sigma_0/2]} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad (2.103)$$

где $x_*(t)$ — функция (2.27).

Вернемся к $(2n + 2)$ -му положительному корню $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ и оператору последований Пуанкаре (2.30), введенным в пункте 2.2. Из (2.103) и ограничений (2.33), (2.34), (2.44), наложенных на σ_0 , следует, что указанный корень T_φ принадлежит отрезку $nT_0 + 1 + t_0 + \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$. А значит, учитывая (2.102), получаем, что T_φ определяется однозначно и задается равномерным по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ равенством

$$T_\varphi = T_* - \varepsilon b \alpha_n + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (2.104)$$

Таким образом, из равенств (2.103), (2.104) заключаем, что оператор (2.30) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, причем равномерно по φ

$$\max_{t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (2.105)$$

Остается показать, что при некоторых специально подобранных значениях параметров σ_0, q_1, q_2 выполняется включение

$$\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2). \quad (2.106)$$

Рассмотрим множество функций $\hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.29) нестрогих равенств строгими. В силу (2.105) требуемое включение (2.106) будет выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2). \quad (2.107)$$

Справедливости же включения (2.107) добьемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2 , накладывая на них условие

$$q_1 > - \min_{t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t), \quad 0 < q_2 < - \max_{t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t). \quad (2.108)$$

Напомним также, что на параметр σ_0 уже наложено ограничение (2.26), которое обеспечивает выполнение свойств $x_*(\sigma_0) = -\sigma_0$, $x_*(t) < 0$ при $t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$.

Подведем некоторый итог. Оператор Π_ε является компактным, и в силу условий (2.26), (2.33), (2.34), (2.44), (2.108), наложенных на параметры σ_0, q_1, q_2 , преобразует в себя замкнутое ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда, используя принцип Шаудера, получаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Кроме того, решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (2.4) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (2.103)–(2.105) удовлетворяет свойствам (2.28).

2.4 Анализ свойств устойчивости

Вторая часть обоснования теоремы 2.1, а именно, доказательство единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (2.27), проводится тем же образом, что в статье [6]. Для полноты изложения доказательства приведем здесь рассуждения, описанные там.

Из явной формулы (2.30) для оператора Π_ε вытекает, что он является непрерывно дифференцируемым по φ , причем его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varepsilon)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) \gamma_0 = \gamma(t + T_\varphi, \varepsilon) - \frac{\gamma(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]. \quad (2.109)$$

Здесь функция $\gamma_0(t)$ представляет производный элемент пространства

$$C_0 = \{\gamma_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \gamma_0(-\sigma_0) = 0\},$$

а через $\gamma(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= A(t, \varepsilon) \gamma(t - h) + B(t, \varepsilon) \gamma(t - 1), \\ A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} (f'(\exp x) \exp x) \Big|_{x=x_\varphi(t-h, \varepsilon)/\varepsilon}, \\ B(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} (bg'(\exp x) \exp x) \Big|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

с начальной функцией γ_0 , $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Так же как и в [6] из явной формулы (2.109) следует, что вопрос оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varepsilon)$ в пространстве C_0 с нормой $\|\gamma_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\gamma_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $\gamma(t, \varepsilon)$ уравнения (2.110). Удастся показать, что для этого решения при $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ выполняется неравенство вида

$$\max_t |\gamma(t)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|\gamma_0\| \quad (2.111)$$

с некоторыми не зависящими от ε , φ , γ_0 постоянными M , $q > 0$.

В [6] данное неравенство сперва доказывается на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$, а затем методом шагов распространяется на отрезок $h - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$. Интегрируя явным образом уравнение (2.110), получаем, что при $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$ для $\gamma(t, \varepsilon)$ справедливо равенство

$$\gamma(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t A(s, \varepsilon) \gamma_0(s - h) ds + \int_{-\sigma_0}^t B(s, \varepsilon) \gamma_0(s - 1) ds. \quad (2.112)$$

Используя, что при указанных t выполняется $x_\varphi(t - h, \varepsilon) = \varphi(t - h)$, а равенство $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ справедливо даже на более широком промежутке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, и учитывая свойства (2.29) и (2.2), убеждаемся, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon). \quad (2.113)$$

Принимая во внимание (2.113) в (2.112), приходим к выводу, что неравенство (2.111) справедливо при $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$.

Далее, с целью применения метода шагов разобьем промежуток $[h - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ времени на отрезки

$$[(k+1)h - \sigma_0, (k+2)h - \sigma_0], \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad \text{и} \quad [(k_0+2)h - \sigma_0, T_\varphi],$$

где $k_0 = \lfloor (T_\varphi - 2h)/h \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ — целая часть. Опираясь, на равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические формулы

$$\max_{h-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| = O(1/\varepsilon), \quad \max_{1-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| = O(1/\varepsilon)$$

и свойства (2.113), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |\gamma(t, \varepsilon)| &\leq |\gamma((k+1)h - \sigma_0, \varepsilon)| + \int_{(k+1)h - \sigma_0}^t |A(s, \varepsilon)| \cdot |\gamma(s - h, \varepsilon)| ds + \\ &+ \int_{(k+1)h - \sigma_0}^t |B(s, \varepsilon)| \cdot |\gamma(s - 1, \varepsilon)| ds, \quad t \leq (k+1)h - \sigma_0 \end{aligned}$$

и из уже полученных оценок вида (2.111) на отрезках с номерами $j = 0, 1, \dots, k-1$ вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая установленное выше неравенство (2.111) в (2.109), приходим к оценке

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon).$$

Остается добавить, что эта оценка обеспечивает как сжимаемость оператора последования Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Теорема 2.1 полностью доказана.

2.5 Анализ случаев 3 и 4

В этой части главы рассмотрим случаи 3 и 4, для которых выполнены соотношения (2.9) и (2.10) соответственно.

В этой ситуации нетрудно доказать лемму 2.1 и теорему 2.1, в которых условие (2.8) заменено на (2.9) или (2.10).

Удастся доказать аналогичные леммы и теоремы для соответствующих решений релейного уравнения (2.6) и уравнения (2.4). Приведем здесь лишь формулы периодических решений $x_*(t)$ предельного релейного уравнения (2.6) в каждом случае.

Обозначим через t_1 $(2n+1)$ -й положительный корень уравнения $x_*(t) = 0$ — первый корень, больший 1, а через T_* , как и раньше, корень с номером $2n+$

2. В случае 3 для периодического решения релейного уравнения справедливы формулы

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ x_1(t) & \text{при } 1 \leq t \leq t_1 + h, \\ x_2(t) & \text{при } t_1 + h \leq t \leq t_1 + 1, \\ t - T_* & \text{при } t_1 + 1 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t), \quad (2.114)$$

где $x_0(t)$, $x_1(t)$ задаются равенствами (2.15), (2.18), а для x_2 , t_1 , T_* справедливы следующие представления

$$x_2(t) = y_0(t - 1) - at_0 + (t_1 - 1)(b - 1), \quad (2.115)$$

$$t_1 = (b + h + a(nT_0 + h))/(a + b), \quad (2.116)$$

$$T_* = t_1 + at_0 + b - 1 - nb(T_0 - t_0). \quad (2.117)$$

Случай 4 разбивается на два следующих подслучая.

$$\text{Случай 4.1 : } 1 \in (nT_0, h + nT_0 - h/b). \quad (2.118)$$

$$\text{Случай 4.2 : } 1 \in (h + nT_0 - h/b, h + nT_0). \quad (2.119)$$

Связанно это с тем, что в процессе построения решения методом шагов оказывается важным знак $x_*(nT_0 + h)$. При этом значение $(2n+1)$ -ого положительного корня решения в случае 4.1

$$t_1 = \frac{b - nT_0}{b - 1}, \quad (2.120)$$

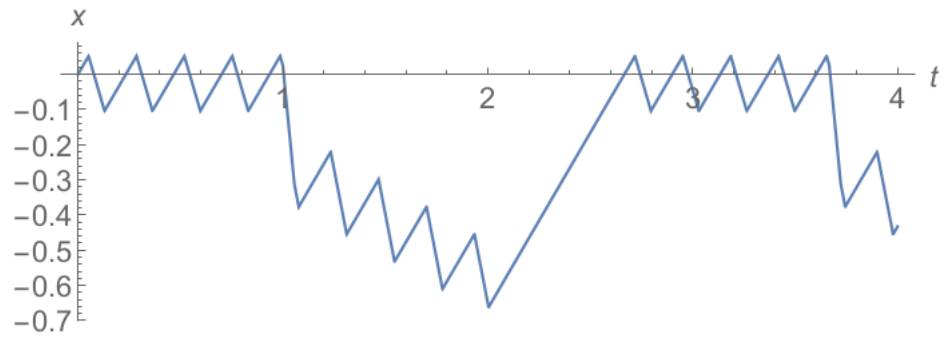
а в случае 4.2 задается равенством (2.116). Таким образом, в случае 4 для периодического решения релейного уравнения справедливы формулы

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t), & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ (1 - b)t + b - nT_0 & \text{при } 1 \leq t \leq nT_0 + h, \\ x_1(t) & \text{при } nT_0 + h \leq t \leq t_1 + h, \\ x_2(t) & \text{при } t_1 + h \leq t \leq t_1 + 1, \\ t - T_* & \text{при } t_1 + 1 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t), \quad (2.121)$$

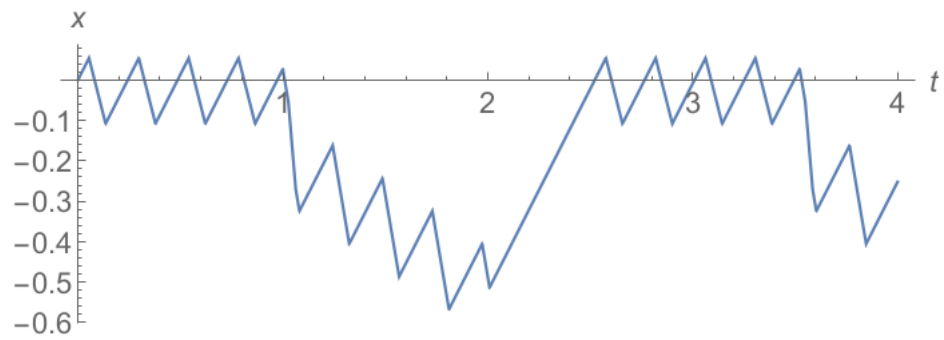
где $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ по-прежнему задаются равенствами (2.15), (2.18), (2.115), t_1 определяется одним из равенств (2.116), (2.120), а

$$T_* = y_0(t_1) - at_0 + t_1b - b + 2.$$

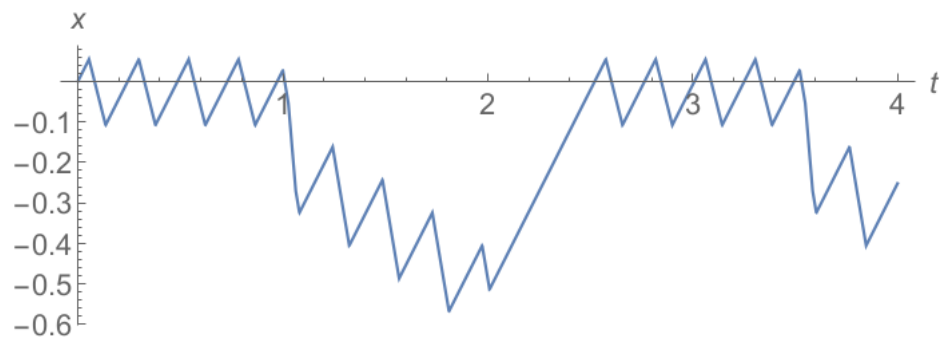
Графики решений релейного уравнения (2.6) в случаях 3, 4.1, 4.2 изображены на рис. 3, рис. 4 и рис. 5 соответственно.



(a) Случай 3 (2.9).



(b) Случай 4.1 (2.118).



(c) Случай 4.2 (2.119).

Рис. 2.3: Графики решений (2.114), (2.121) релейного уравнения (2.6) в случаях 3 и 4.

2.6 Выводы к главе 2

Подводя итоги главы, отметим, что релаксационный цикл

$$u_*(t, \lambda) = \exp(x_*(t, \varepsilon)/\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda}$$

исходного уравнения имеет на промежутке длины периода любое наперед заданное число асимптотически высоких всплесков, то есть является bursting-циклом в каждом из рассмотренных случаев выбора параметров задачи. На основании доказанных в главе леммы и теоремы можно утверждать, что получена максимально широкая область параметров задачи, в которой для естественным образом определенного класса начальных функций доказано существование и единственность периодического экспоненциально орбитального устойчивого решения уравнения (2.1). Таким образом, в настоящей главе разобраны основные варианты, в которых реализуется bursting-эффект для модели (2.1), тем самым, полностью завершено исследование, начатое в статье [6].

Глава 3

Релаксационные циклы в уравнении с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа

3.1 Постановка задачи

В данной главе рассматривается аналогичное изученному в предыдущей главе уравнение, которое возникает при математическом моделировании кольцевой нейронной сети с синаптической связью. Используется подход к моделированию химических синапсов, предложенный в статье [7], в основе которого лежит реализация идеи быстрой пороговой модуляции.

Быстрая пороговая модуляция (fast threshold modulation) — это специальный способ связи динамических систем, для которого характерно скачкообразное изменение правых частей дифференциальных уравнений при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения (см. [48, 50, 51, 56–58]).

Несколько иная математическая модель цепочки нейронов с синаптической связью была предложена в статье [7] и имеет вид

$$\dot{u}_j = \left(\lambda f(u_j(t-1)) + bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j) \right) u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad u_0 = u_m. \quad (3.1)$$

Здесь $u_j(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, связанных в кольцо, $\lambda \gg 1$ — большой параметр, характеризующий скорость протекания электрических процессов, $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое значение, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, слагаемые $bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j) u_j$ моделируют синаптическое взаимодействие. Относительно функций $f(u)$, $g(u)$ предполагаем, что

они из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f(0) = 1; \quad f(u) + a, uf'(u), u^2 f''(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty; \quad g(0) = 0; \\ g(u) > 0 \quad \forall u > 0; \quad g(u) - 1, ug'(u), u^2 g''(u) = O(u^{-1}) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Будем искать периодическое решение системы (3.1) такое, что функции u_j будут иметь один всплеск на периоде с разностью фаз равной $\Delta = \text{const} > 0$.

Причины, описанные в статье [7], по которым для исследования выбрана система (3.1), состоят в следующем. Во-первых, связующие слагаемые $bg(u_{j-1})u_j \ln(u_*/u_j)$ меняют знак с «+» на «-» при увеличении потенциалов u_j и при прохождении их через критическое значение u_* . Во-вторых, для системы (3.1) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием, что будет продемонстрировано во втором разделе настоящей статьи.

Анализ сингулярно возмущенной системы (3.1) основан на следующих двух математических идеях.

Первая идея состоит в поиске периодического решения системы (3.1) в виде дискретной бегущей волны. Этот способ представления решения сформулирован, например, в статьях [5, 7, 11]. Основная идея состоит в замене переменных

$$u_j = u(t + (j - 1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

которая приводит к задаче о поиске периодического решения уравнения с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа:

$$\dot{u} = \left(\lambda f(u(t - 1)) + bg(u(t - \Delta)) \ln(u_*/u) \right) u. \quad (3.4)$$

Период решения уравнения (3.4) должен быть равен $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$, что следует из условия $u_0 = u_m$.

Вторая идея описывается в [5, 7–10, 28, 29, 41] и связана с переходом в (28) к логарифмической шкале, то есть с заменой $x = (1/\lambda) \ln u$, кроме того, вместо большого параметра λ вводится в рассмотрение малый параметр $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Эта замена позволяет перейти к близкому к релейному уравнению

$$\dot{x} = F(x(t - 1), \varepsilon) + b(c - x)G(x(t - \Delta), \varepsilon), \quad (3.5)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$.

Для полученного уравнения (3.5) задача состоит в следующем. Необходимо подобрать параметры a, b, c, Δ , такие, что при всех достаточно малых ε уравнение (3.5) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x = x_*(t, \varepsilon)$ периода $T_*(\varepsilon)$, где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_* > 0.$$

При этом, требуем, чтобы функция $x_*(t, \varepsilon)$ на отрезке времени длины периода имела один промежуток положительности и один промежуток отрицательности. Это с учетом сделанной экспоненциальной замены

$$u_j = \exp \left(x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon) \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

и будет означать, что функции u_j обладают одним всплеском на периоде с разностью фаз Δ .

3.2 Анализ вспомогательного уравнения

Из свойств (3.2) функций f и g следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x), \quad (3.6)$$

$$R(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 0, \\ -a, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Далее, исследуем предельное релейное уравнение

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + b(c-x)H(x(t-\Delta)), \quad (3.7)$$

для чего определим класс начальных функций. Так же, как в работах [7, 28, 41], фиксируем постоянные $\sigma_0 > 0$, $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$, оценки на которые будут уточнены позднее, и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$ (см. рис. 3.1), определенное следующим образом:

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{\varphi \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0] : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \quad \forall t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0\}. \quad (3.8)$$

Через $x_\varphi(t)$, $t \geq -1-\sigma_0$, обозначим решение уравнения (3.7) с произвольной начальной функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей (3.8).

Будем интересоваться периодическим решением $x_\varphi(t)$. Обозначим период через T_φ и дополнительно предположим, что на интервале $(0, T_\varphi)$ функция $x_\varphi(t)$ имеет ровно один ноль t_φ .

Построим решение методом шагов. Отметим, что в зависимости от знаков $x(t-1)$ и $x(t-\Delta)$ уравнение (3.7) принимает одну из четырех форм:

$$\dot{x} = 1 \text{ при } x(t-1) < 0, \quad x(t-\Delta) < 0; \quad (A)$$

$$\dot{x} = -a \text{ при } x(t-1) > 0, \quad x(t-\Delta) < 0; \quad (B)$$

$$\dot{x} = 1 + b(c-x) \text{ при } x(t-1) < 0, \quad x(t-\Delta) > 0; \quad (C)$$

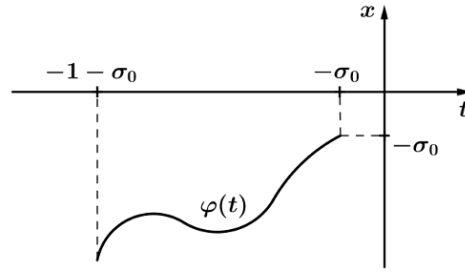


Рис. 3.1: Вид начальной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей (3.8).

$$\dot{x} = -a + b(c - x) \text{ при } x(t - 1) > 0, \quad x(t - \Delta) > 0. \quad (D)$$

Обозначим через $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t)$ решение задачи Коши для уравнения из случая (A) с начальным условием $x|_{t=\tilde{t}} = \tilde{x}$, где \tilde{t} , \tilde{x} — некоторые известные константы. Введем аналогичные обозначения для случаев (B), (C) и (D). Таким образом, получаем в каждом случае решение соответствующей задачи Коши:

$$(A): \quad x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv t - \tilde{t} + \tilde{x};$$

$$(B): \quad x_B(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv -at + a\tilde{t} + \tilde{x};$$

$$(C): \quad x_C(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv (\tilde{x} - 1/b - c) \exp(-b(t - \tilde{t})) + 1/b + c;$$

$$(D): \quad x_D(\tilde{t}, \tilde{x}; t) \equiv (\tilde{x} + a/b - c) \exp(-b(t - \tilde{t})) - a/b + c.$$

В начале рассмотрим случай, когда

$$I. \quad 0 < \Delta < 1. \quad (3.9)$$

На первом этапе рассмотрим отрезок $[-\sigma_0, \Delta]$. На этом промежутке аргументы $x(t - 1)$, $x(t - \Delta)$ функций R и H совпадают с функциями $\varphi(t - 1)$, $\varphi(t - \Delta)$, которые принимают отрицательные значения, следовательно, здесь имеем дело с задачей Коши (A) при $\tilde{t} = \tilde{x} = -\sigma_0$. Таким образом,

$$x_\varphi(t) = t \text{ при } t \in [-\sigma_0, \Delta]. \quad (3.10)$$

Отметим, что по построению $x_\varphi(0) = 0$, а значит, в силу периодичности выполняется $x_\varphi(T_\varphi) = 0$. Таким образом, с учетом (3.10) и предположения о том, что t_φ — единственный корень уравнения $x_\varphi(t)$ на интервале $(0, T_\varphi)$, функция $x_\varphi(t)$ устроена так, как показано на рисунке 3.2, то есть положительна на интервале $(0, t_\varphi)$, а на (t_φ, T_φ) — отрицательна. Кроме того, поскольку речь идет о периодическом решении $x_\varphi(t)$, то дополнительно требуем, во-первых, чтобы выполнялось условие

$$T_\varphi - t_\varphi > 1, \quad (3.11)$$

а во-вторых, точка T_φ , отвечающая длине периода, должна попадать на промежуток, где решение описывается формулой $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t)$.

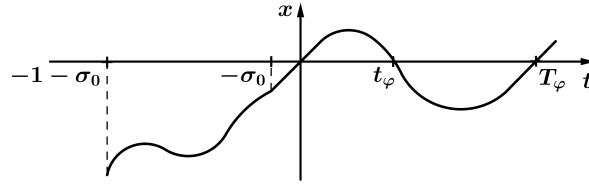


Рис. 3.2: Предполагаемый вид решения $x_\varphi(t)$ уравнения (3.7) с начальной функцией, удовлетворяющей (3.8).

Дальнейшее построение решения $x_\varphi(t)$ зависит от взаимного расположения на оси Ot точек $1, \Delta, t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta$ переключения релейных функций $R(x(t-1))$, $H(x(t-\Delta))$ и первых двух нулей t_φ, T_φ решения $x_\varphi(t)$. Что касается значений $1, \Delta, t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta$, то, принимая во внимание предположение (3.9), для них возможны две ситуации:

- I.1. когда интервалы $(1, \Delta), (t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta)$ не пересекаются (рис. 3.3(a)),
- I.2. и когда пересекаются (рис. 3.3(b)).

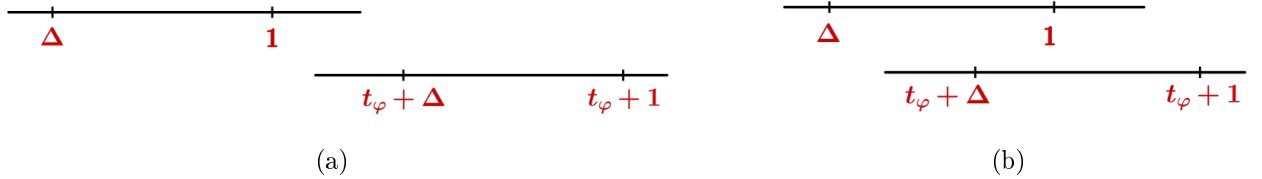


Рис. 3.3: Случаи взаимного расположения точек переключения релейных функций $R(x(t-1))$ и $H(x(t-\Delta))$.

В первой ситуации t_φ может попасть на один из двух участков: $(\Delta, 1), (1, t_\varphi + \Delta)$. Тогда с учетом возможного расположения значения T_φ получаем пять вариантов расположения соответствующих точек:

- I.1.1.1 $t_\varphi \in (\Delta, 1), T_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta)$ (рис. 3.4(a));
- I.1.1.2 $t_\varphi \in (\Delta, 1), T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1)$ (рис. 3.4(c));
- I.1.1.3 $t_\varphi \in (\Delta, 1), T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 3.4(e));
- I.1.2.1 $t_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta), T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, t_\varphi + 1)$ (рис. 3.4(g));
- I.1.2.2 $t_\varphi \in (1, t_\varphi + \Delta), T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 3.4(i)).

Во второй ситуации t_φ может принадлежать только интервалу $(\Delta, t_\varphi + \Delta)$, а T_φ — одному из трех промежутков. Таким образом, добавляются еще три случая:

- I.2.1 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta), T_\varphi \in (t_\varphi + \Delta, 1)$ (рис. 3.4(k));

I.2.2 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi \in (1, t_\varphi + 1)$ (рис. 3.4(m));

I.2.3 $t_\varphi \in (\Delta, t_\varphi + \Delta)$, $T_\varphi > t_\varphi + 1$ (рис. 3.4(o)).

Если предположение (3.9) заменить обратным

$$\text{II. } 1 < \Delta, \quad (3.12)$$

то получим еще восемь возможных случаев расположения точек переключения релейных функций и нулей решения, аналогичных приведенным (рис. 3.4(b), 3.4(d), 3.4(f), 3.4(h), 3.4(j), 3.4(l), 3.4(n), 3.4(p)). Отметим, что в этой ситуации в качестве множества $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ начальных функций следует рассматривать класс

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{\varphi \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \ \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0\}, \quad (3.13)$$

аналогичный (3.8), но определенный на отрезке $[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Связано это с тем, что длина отрезка, на котором заданы начальные функции совпадает с наибольшим запаздыванием рассматриваемого уравнения. При этом предположение (3.11) заменяется на

$$T_\varphi - t_\varphi > \Delta. \quad (3.14)$$

Далее, остается выбрать из полученных шестнадцати случаев те, в которых функция $x_\varphi(t)$ является T_φ -периодической. Это означает, что выполняется условие (3.11) (в случае I.) или (3.14) (в случае II.) и T_φ находится как решение уравнения $x_A(\tilde{t}, \tilde{x}; t) = 0$, при некоторых начальных условиях $\tilde{t} > 0, \tilde{x} < 0$. Оба эти условия соблюдаются в случаях I.1.1.3, I.1.2.2, I.2.3, II.1.1.3, II.1.2.2, II.2.3. В каждом случае наложим на параметры a, b, c, Δ ограничения, обеспечивающие требуемый порядок точек переключения и нулей решения $x_\varphi(t)$, необходимый знак функции $x_\varphi(t)$ в точках переключения, подходящую монотонность участков решения, заданных экспонентами. Ниже перечислены ограничения на параметры для каждого случая.

I.1.1.3:

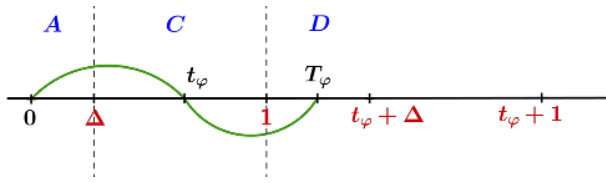
$$0 < \Delta < 1, \quad \frac{1}{b} + c < 0,$$

$$1 - \Delta < \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{b c + 1} \right) + \Delta < 1, \quad \exp(b\Delta - b) \left(-\frac{1}{b} - c + \Delta \right) + \frac{1}{b} + c < 0, \\ \frac{(bc + 1)((a + 1) \exp b - (bc - b\Delta + 1) \exp(b\Delta)) \exp(-2b\Delta)}{b(bc - b\Delta + 1)} + c < \frac{a}{b};$$

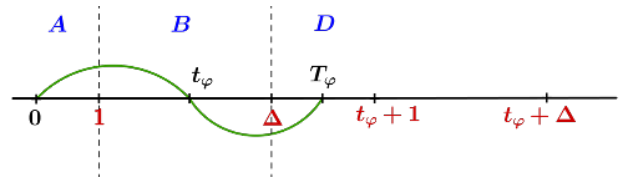
I.1.2.2:

$$0 < \Delta < 1, \quad c < \frac{a}{b},$$

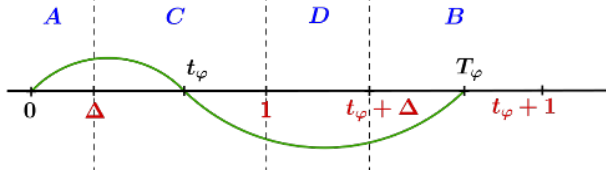
$$b \exp(b\Delta) (\exp(b\Delta) - 1)(bc - a) < 0, \quad \exp(b(\Delta - 1)) \left(-\frac{1}{b} - c + \Delta \right) + \frac{1}{b} + c > 0;$$



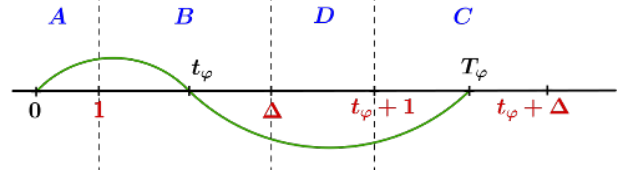
(a) I.1.1.1



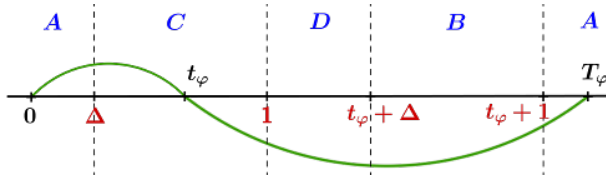
(b) II.1.1.1



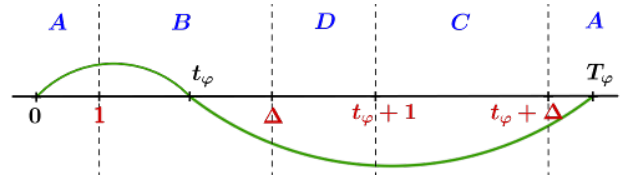
(c) I.1.1.2



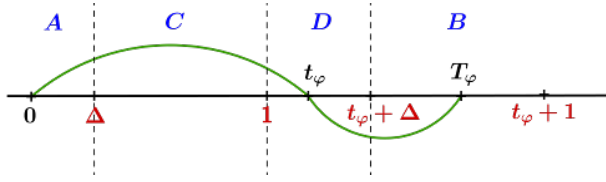
(d) II.1.1.2



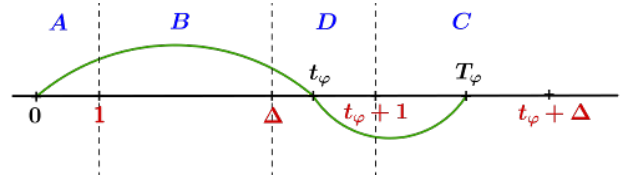
(e) I.1.1.3



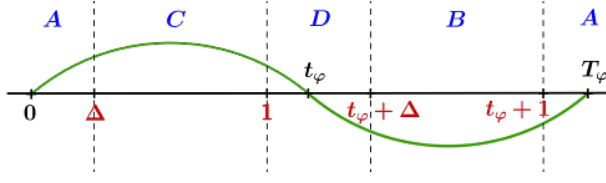
(f) II.1.1.3



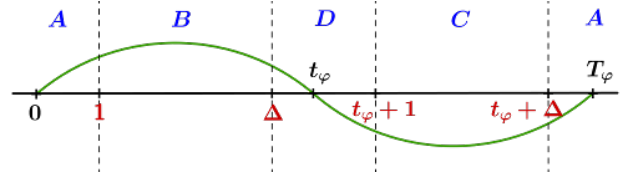
(g) I.1.2.1



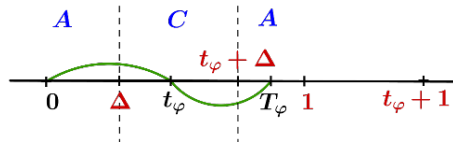
(h) II.1.2.1



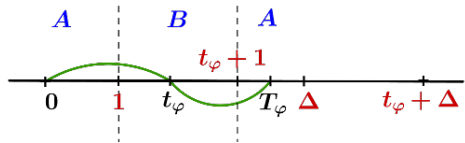
(i) I.1.2.2



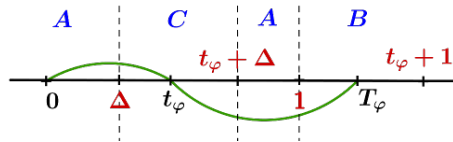
(j) II.1.2.2



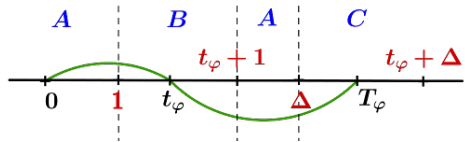
(k) I.2.1



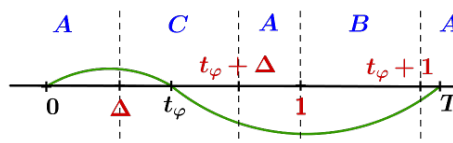
(l) II.2.1



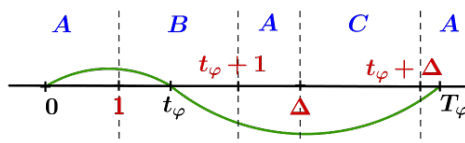
(m) I.2.2



(n) II.2.2



(o) I.2.3



(p) II.2.3

Рис. 3.4: Случаи взаимного расположения значений $1, \Delta, t_\varphi + 1, t_\varphi + \Delta, t_\varphi, T_\varphi$.

I.2.3:

$$0 < \Delta < 1, \quad \frac{1}{b} + c < 0$$

$$\Delta < \frac{1}{b} \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{b c + 1} \right) + \Delta < 1 - \Delta, \quad b(bc + 1) \exp(b\Delta) (\exp(b\Delta) - 1) < 0,$$

$$b(c \exp(-b\Delta) - c + 2 \Delta - 1) + \ln \left(\frac{bc - b\Delta + 1}{bc + 1} \right) + \exp(-b\Delta) - 1 > 0;$$

II.1.1.3:

$$\frac{1}{a} + 1 < \Delta < \frac{1}{a} + 2,$$

$$\exp \left(b \left(-\frac{1}{a} + \Delta - 2 \right) \right) \left(a \left(\frac{1}{b} - \Delta + 1 \right) - c + 1 \right) + c < \frac{a}{b},$$

$$- (1 + a) \exp \left(\left(2 + \frac{1}{a} \right) b \right) + (1 + bc) \exp \left(b \left(1 + \frac{1}{a} + \Delta \right) \right) + \\ + \exp(b\Delta) (b - bc + a(1 + b - b\Delta)) < 0;$$

II.1.2.2:

$$1 < \Delta < \frac{1}{a} + 1, \quad c < \frac{a}{b},$$

$$(\exp b - 1) (bc - a) < 0, \quad bc (\exp(b\Delta) - 1) + \exp(b\Delta) - \exp b(a + 1) + a < 0;$$

II.2.3:

$$\frac{1}{a} + 2 < \Delta < a + \frac{1}{a} + 2,$$

$$\frac{1}{b} + c < \exp \left(-\frac{(a + 1)b}{a} \right) \left(a + \frac{1}{a} + 2 + \frac{1}{b} + c - \Delta \right).$$

В качестве доказательства совместности условий в каждом случае приведем пример набора констант, удовлетворяющих данным условиям:

I.1.1.3 $\Delta = 0.7, a = 4, b = 30, c = -0.3;$

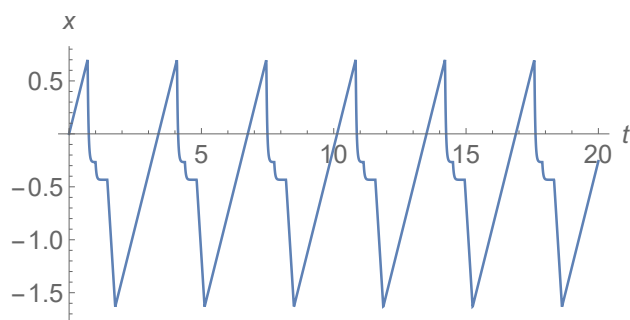
I.1.2.2 $\Delta = 0.7, a = 9, b = 6, c = -0.1;$

I.2.3 $\Delta = 0.35, a = 4, b = 20, c = -1;$

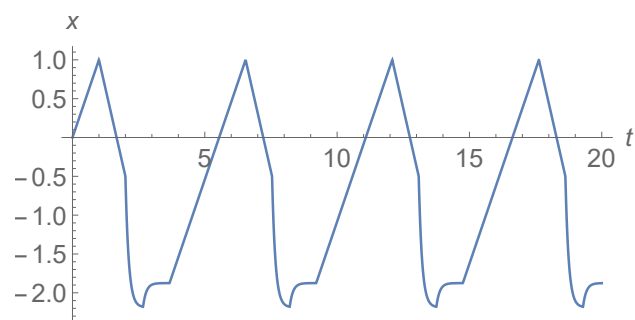
II.1.1.3 $\Delta = 2, a = 3/2, b = 8, c = -2;$

II.1.2.2 $\Delta = 3, a = 1/4, b = 5, c = -2;$

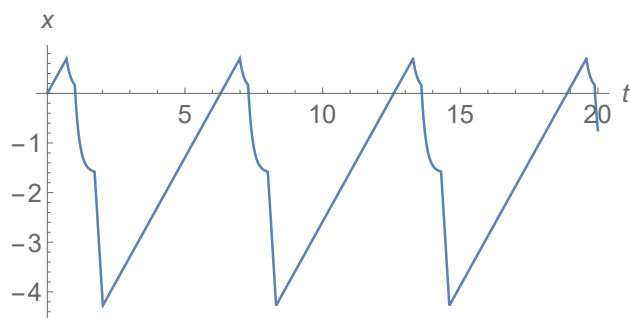
II.2.3 $\Delta = 3, a = 8, b = 8, c = -2.$



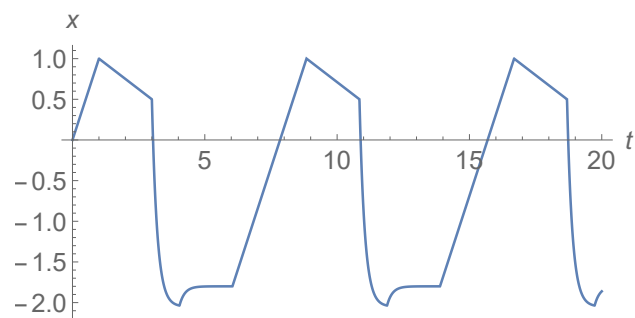
(a) I.1.1.3



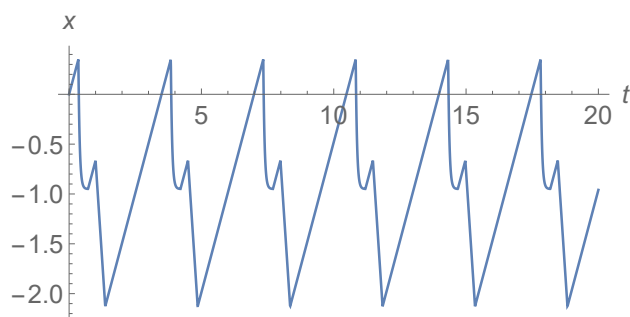
(b) II.1.1.3



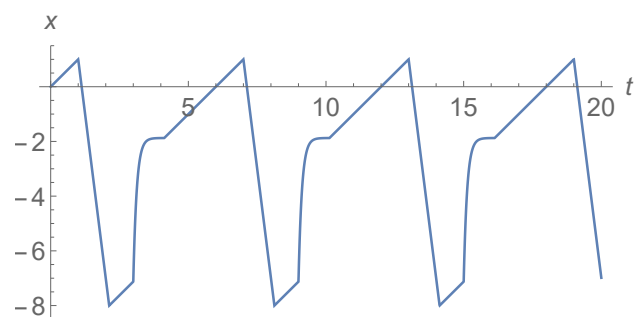
(c) I.1.2.2



(d) II.1.2.2



(e) I.2.3



(f) II.2.3

Рис. 3.5: Графики решений релейного уравнения в разных случаях выбора параметров a, b, c, Δ .

Графики соответствующих решений релейного уравнения (3.7) изображены на рисунке 3.5.

Таким образом, получаем, что справедлива следующая

Лемма 3.1. *В каждом из приведенных выше случаев выбора параметров a, b, c, Δ решение релейного уравнения (3.7) с начальной функцией (3.8) совпадает с одной и той же кусочно линейной T_* -периодической функцией x_* , имеющей один нуль t_* на интервале $(0, T_*)$. Причем $x_*(t) > 0$ при $t \in (0, t_*)$ и $x_*(t) < 0$ при $t \in (t_*, T_*)$.*

Во всех случаях ограничений на параметры на каждом участке между точками переключения решение $x_\varphi(t)$ определяется однозначно из соответствующей задачи А, В, С или D с начальным условием $x|_{t=\tilde{t}} = \tilde{x}$, где \tilde{t} — это начало очередного промежутка, а начальное значение \tilde{x} выбирается из соображений непрерывности решения. Ниже приведены формулы для функции x_* в каждом случае выбора параметров a, b, c, Δ .

I.1.1.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, \Delta], \\ x_{C_1}(t) & \text{при } t \in [\Delta, 1], \\ x_{D_1}(t) & \text{при } t \in [1, t_* + \Delta], \\ x_{B_1}(t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, t_* + 1], \\ x_{A_1}(t) & \text{при } t \in [t_* + 1, T_*], \end{cases} \quad (3.15)$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$\begin{aligned} x_{C_1}(t) &= x_C(\Delta, \Delta; t), \quad x_{D_1}(t) = x_D(1, x_{C_1}(1); t), \\ x_{B_1}(t) &= x_B(t_* + \Delta, x_{D_1}(t_* + \Delta); t), \quad x_{A_1}(t) = x_A(t_* + 1, x_{B_1}(t_* + 1); t), \\ t_* &= -\frac{1}{b} \ln \frac{1/b + c}{1/b + c - \Delta} + \Delta, \quad T_* = t_* + 1 - x_{B_1}(t_* + 1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

I.1.2.2 Для $x_*(t)$ и T_* справедливы те же формулы, что в случае I.1.1.3, но при

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{a/b - c}{x_{C_1}(1) + a/b - c} \right) + 1.$$

I.2.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, \Delta], \\ x_{C_1}(t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + \Delta], \\ x_{A_2}(t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, 1], \\ x_{B_2}(t) & \text{при } t \in [1, t_* + 1], \\ x_A(t_* + 1, x_{B_2}(t_* + 1); t) & \text{при } t \in [t_* + 1, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$x_{A_2}(t) = x_A(t_* + \Delta, x_{C_1}(t_* + \Delta); t), \quad x_{B_2}(t) = x_B(1, x_{A_2}(1); t),$$

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{-1/b - c}{\Delta - 1/b - c} \right) + \Delta, \quad T_* = t_* + 1 - x_{B_2}(t_* + 1).$$

II.1.1.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, 1], \\ x_{B_3}(t) & \text{при } t \in [1, \Delta], \\ x_{D_2}(t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + 1], \\ x_{C_2}(t) & \text{при } t \in [t_* + 1, t_* + \Delta], \\ x_A(t_* + \Delta, x_{C_2}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$x_{B_3}(t) = x_B(1, 1; t), \quad x_{D_2}(t) = x_D(\Delta, x_{B_3}(\Delta); t),$$

$$x_{C_2}(t) = x_C(t_* + 1, x_{D_2}(t_* + 1); t),$$

$$t_* = 1 + 1/a, \quad T_* = t_* + \Delta - x_{C_2}(t_* + \Delta).$$

II.1.2.2 Для $x_*(t)$ и T_* справедливы те же формулы, что в случае II.1.1.3, но при

$$t_* = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{a/b - c}{x_{B_3}(\Delta) + a/b - c} \right) + 1.$$

II.2.3

$$x_*(t) = \begin{cases} x_A(0, 0; t) & \text{при } t \in [0, 1], \\ x_{B_3}(t) & \text{при } t \in [1, t_* + 1], \\ x_{A_3}(t) & \text{при } t \in [t_* + 1, \Delta], \\ x_{C_3}(t) & \text{при } t \in [\Delta, t_* + \Delta], \\ x_A(t_* + \Delta, x_{C_3}(t_* + \Delta); t) & \text{при } t \in [t_* + \Delta, T_*], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_*) \equiv x_*(t),$$

где

$$x_{A_3}(t) = x_A(t_* + 1, x_{B_3}(t_* + 1); t), \quad x_{C_3}(t) = x_C(\Delta, x_{A_3}(\Delta); t),$$

$$t_* = 1 + 1/a, \quad T_* = t_* + \Delta - x_{C_3}(t_* + \Delta).$$

В частности в случае I.1.1.3 явные формулы для решения $x_*(t)$ имеют вид

$$x_A(0, 0; t) \equiv t, \quad (3.17)$$

$$x_{C_1}(t) \equiv (\Delta - 1/b - c) \exp(-b(t - \Delta)) + 1/b + c, \quad (3.18)$$

$$x_{D_1}(t) \equiv (x_{C_1}(1) + a/b - c) \exp(-b(t - 1)) - a/b + c, \quad (3.19)$$

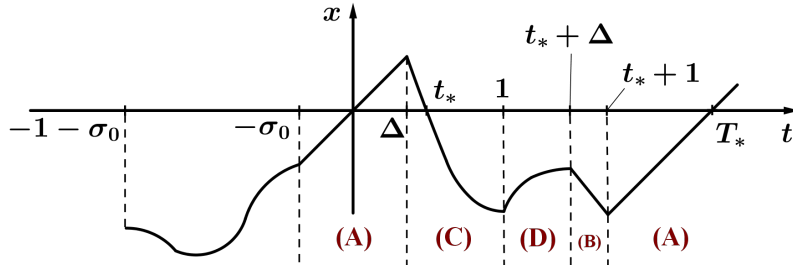


Рис. 3.6: Функция x_* в случае I.1.1.3.

$$x_{B_1}(t) \equiv -a(t - t_* - \Delta) + x_{D_1}(t_* + \Delta), \quad (3.20)$$

$$x_{A_1}(t) \equiv t - t_* - 1 - a(1 - \Delta) + x_{D_1}(t_* + \Delta). \quad (3.21)$$

Схематичный график функции x_* изображен на рисунке 3.6.

Теперь наложим ограничения на до сих пор не выбранный параметр σ_0 из (3.8), (3.13). Будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min\{T_* - t_* - 1, T_* - t_* - \Delta\}, \quad (3.22)$$

которое обеспечивает принадлежность функции $x_\varphi(t + T_*)$ множеству (3.8) (или (3.13)).

Проделанный выбор параметров позволяет сформулировать утверждение о существовании и устойчивости периодического решения уравнения (3.5).

Теорема 3.1. *При выполнении сформулированных ограничений на параметры a, b, c, Δ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (3.5) обладает единственным орбитально экспоненциально устойчивым циклом $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, который удовлетворяет предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \quad (3.23)$$

Общая схема доказательства дается в статьях [7, 28, 41]. Для ее изложения введем некоторые обозначения. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(t) \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq \sigma_0$, уравнения (3.5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Предположим, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ имеет не менее 2-х положительных корней и обозначим 2-й корень через $t = T_\varphi$. Кроме того, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, определяя его равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \quad (\text{или} \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0). \quad (3.24)$$

Дальнейший план доказательства такой же, как в упомянутых статьях и в главе 2. Для его реализации устанавливаются равномерные по φ и t асимптотические равенства для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t . Из них следует, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор Π_ε

определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя, что позволяет использовать известный принцип Шаудера. Затем выполняется оценка нормы производной Фреше оператора Π_ε , из которой следует, что он является сжимающим на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и, тем самым, неподвижная точка в этом множестве единственна.

3.3 Построение асимптотики решения

В качестве примера построим асимптотику в случае I.1.1.3.

Зафиксируем параметр $\alpha \in (1/2, 1)$. Построение асимптотики решения будет выполняться шагами по промежуткам изменения t . Рассмотрению подлежат девять отрезков:

1. $[-\sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]$,
2. $[\Delta - \varepsilon^\alpha, \Delta + \varepsilon^\alpha]$,
3. $[\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha]$,
4. $[1 - \varepsilon^\alpha, 1 + \varepsilon^\alpha]$,
5. $[1 + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha]$, где $t_\varphi(\varepsilon)$ — первый положительный корень уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$,
6. $[t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha]$,
7. $[t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha]$,
8. $[t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha]$,
9. $[t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha, T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0/2]$, $T_\varphi(\varepsilon)$ — второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$.

Введем обозначение для констант:

$$d_1 = \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du, \quad (3.25)$$

$$d_2 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du. \quad (3.26)$$

Отметим, что в силу свойств (3.2) функции f соответствующие несобственные интегралы сходятся.

Кроме того, чтобы конструктивно описать построение асимптотики решения уравнения (3.5), потребуются четыре функции:

$$w_1(\tau) = \tau + b(c - \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (3.27)$$

$$w_2(\tau) = \dot{x}_{C_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds, \quad (3.28)$$

$$w_3(\tau) = \dot{x}_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + b(c - x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)) \int_{-\infty}^{\tau} \left(g(\exp((1 + bc)s)) - 1 \right) ds, \quad (3.29)$$

$$w_4(\tau) = -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} + \int_{-\infty}^{\tau} \left(f(\exp((1 + bc)s)) + a \right) ds. \quad (3.30)$$

Сформулируем утверждение, описывающее асимптотическое поведение введенных функций (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) при $\tau \rightarrow -\infty$ и $\tau \rightarrow +\infty$.

Лемма 3.2. *Для функций w_1, w_2, w_3, w_4 справедливы следующие асимптотические равенства:*

$$w_1(\tau) = \tau + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.31)$$

$$w_1(\tau) = \dot{x}_{C_1}(\Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty; \quad (3.32)$$

$$w_2(\tau) = \dot{x}_{C_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + O(\exp(\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.33)$$

$$w_2(\tau) = \dot{x}_{D_1}(1)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty; \quad (3.34)$$

$$w_3(\tau) = \dot{x}_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 + O(\exp(-(1 + bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.35)$$

$$w_3(\tau) = -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} + O(\exp((1 + bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty; \quad (3.36)$$

$$w_4(\tau) = -a\tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} + O(\exp(-(1 + bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.37)$$

$$w_4(\tau) = \tau + bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1 + bc} + O(\exp((1 + bc)\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (3.38)$$

Равенства (3.31), (3.33), (3.35), (3.37) вытекают непосредственно из свойств (3.2) функций f и g . Отметим, что коэффициент $1 + bc$ в показателе экспонент в формулах (3.35), (3.37) отрицателен в силу наложенных ограничений на параметры в рамках рассматриваемого случая I.1.1.3.

Для доказательства равенства (3.32) представим интеграл в правой части (3.27) в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + \int_0^{\tau} g(\exp s) ds.$$

Первый интеграл после замены $u = \exp s$ преобразуется в $\int_0^1 \frac{g(u)}{u} du$, который в силу (3.2) равен конечному числу. Для второго, учитывая свойства (3.2), верно

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} g(\exp s) ds &= \tau + \int_0^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds - \int_{\tau}^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds = \\ &= \tau + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + O(\exp(-\tau)). \end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла в правой части (3.27) верно асимптотическое представление:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \tau + d_1 + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (3.39)$$

Подставляя (3.39) в формулу (3.27) для функции $w_1(\tau)$, получаем:

$$w_1(\tau) = (1 + bc - b\Delta)\tau + bd_1(c - \Delta) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

В полученном равенстве коэффициент $1 + bc - b\Delta$ при τ совпадает с функцией в правой части уравнения задачи Коши (C) при $t = \Delta$, а значит, равен производной функции $x_{C_1}(t)$ в точке $t = \Delta$. Таким образом, справедливость формулы (3.32) установлена. Раскладывая интеграл из (3.34) в сумму и используя свой-

ства (3.2) функции f , получаем асимптотическое представление при $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds &= \int_{-\infty}^0 (f(\exp s) - 1) ds + \int_0^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds = \\
&= \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_0^{\tau} (f(\exp s) + a) ds + \int_0^{\tau} (-a - 1) ds = \\
&= \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_0^{+\infty} (f(\exp s) + a) ds - \int_{\tau}^{+\infty} (f(\exp s) + a) ds - (a + 1)\tau = \\
&= \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du + O(\exp(-\tau)) - (a + 1)\tau = \\
&= -(a + 1)\tau + d_2 + O(\exp(-\tau)).
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что функция $x_{D_1}(t)$ является решением задачи (D), а значит, для ее производной в точке $t = 1$ верно $\dot{x}_{D_1}(1) = -a + b(c - x_{D_1}(1)) = \dot{x}_{C_1}(1) - a - 1$, получаем для функции (3.28) при $\tau \rightarrow +\infty$ асимптотическую формулу (3.34).

Асимптотические равенства (3.36) и (3.38) устанавливаются аналогичным образом.

Лемма 3.2 доказана.

Перейдем к построению асимптотики решения уравнения (3.5).

Лемма 3.3. Уравнение (3.5) с произвольной начальной функцией φ из класса (3.8) имеет решение $x_{\varphi}(t, \varepsilon)$ с асимптотикой

1. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [-\sigma_0, \Delta - \varepsilon^{\alpha}]$;
2. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ при $t \in [\Delta - \varepsilon^{\alpha}, \Delta + \varepsilon^{\alpha}]$;
3. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = x_{C_1}(t) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [\Delta + \varepsilon^{\alpha}, 1 - \varepsilon^{\alpha}]$;
4. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = x_{C_1}(1) + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [1 - \varepsilon^{\alpha}, 1 + \varepsilon^{\alpha}]$;
5. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t) + \varepsilon(b d_1(c - \Delta) + d_2) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [1 + \varepsilon^{\alpha}, t_{\varphi}(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^{\alpha}]$, где $t_{\varphi}(\varepsilon)$ — первый положительный корень уравнения $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = 0$, который лежит при этом на интервале $(\Delta + \varepsilon^{\alpha}, 1 - \varepsilon^{\alpha})$ (см. п. 3);
6. $x_{\varphi}(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t_{\varphi}(\varepsilon) + \Delta) + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-t_{\varphi}(\varepsilon)-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_{\varphi}(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^{\alpha}, t_{\varphi}(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^{\alpha}]$;

7. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} \right) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha]$;
8. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1) + \varepsilon w_4(\tau) \Big|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha]$;
9. $x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{A_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1 + bc} \right) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha, T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0/2]$, где $T_\varphi(\varepsilon)$ — второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$, для которого справедлива формула

$$T_\varphi(\varepsilon) = t_\varphi(\varepsilon) + 1 - x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon)) + O(\varepsilon). \quad (3.40)$$

Все остатки здесь равномерны по φ .

Докажем лемму 3.3.

1. Рассмотрим сперва отрезок $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$. Считаем, что наряду с ограничением (3.22) выполняется условие $\sigma_0 < \Delta$. Здесь $t - 1$ и $t - \Delta$ принадлежат отрезкам, вложенным в $[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, где функции $x(t - 1, \varepsilon)$, $x(t - \Delta, \varepsilon)$ совпадают с функциями $\varphi(t - 1)$, $\varphi(t - \Delta)$. Согласно (3.8), это означает, что $x(t - 1, \varepsilon) < -q_2$, $x(t - \Delta, \varepsilon) < -q_2$, следовательно, учитывая условия (3.2), получаем, что

$$F(x(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \quad (3.41)$$

$$G(x(t - \Delta, \varepsilon), \varepsilon) = O(\exp(-q_2/\varepsilon)).$$

Таким образом, на рассматриваемом отрезке имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0,$$

откуда приходим к равномерному по φ асимптотическому равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon)) \quad \text{при } t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]. \quad (3.42)$$

Здесь и далее q обозначает подходящую положительную константу, точное значение которой неважно.

Рассматривая отрезок $[\Delta - \sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]$, получаем аналогичную предыдущей задаче Коши, но с остатками порядка $O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ в нелинейности:

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \quad x|_{t=\Delta-\sigma_0} = \Delta - \sigma_0 + O(\exp(-q/\varepsilon)).$$

Таким образом, на указанном промежутке для решения справедлива формула

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O(\exp(-q/\varepsilon)) \quad \text{при } t \in [\Delta - \sigma_0, \Delta - \varepsilon^\alpha]. \quad (3.43)$$

2. Теперь рассмотрим отрезок $[\Delta - \varepsilon^\alpha, \Delta + \varepsilon^\alpha]$, на котором решение релейного уравнения терпит излом. На этом участке для функции $F(x(t-1, \varepsilon), \varepsilon)$ сохраняется формула (3.41), а функция $G(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)$ с учетом (3.42) принимает вид:

$$G(x(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) = g\left(\exp \frac{t-\Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right).$$

На текущем участке имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + b(c-x) \cdot g\left(\exp \frac{t-\Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q_2/\varepsilon)), \\ x|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = \Delta - \varepsilon^\alpha + O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (3.44)$$

Решение задачи (3.44) будем искать в виде:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\Delta)/\varepsilon} + \delta(t, \varepsilon), \quad (3.45)$$

где функция $w_1(\tau)$ задается равенством (3.27), а $\delta(t, \varepsilon)$ — здесь и далее подлежащий определению остаток.

Докажем, что остаток $\delta(t, \varepsilon)$ является равномерно по φ и t экспоненциально малым. Подставляя (3.45), (3.27) в (3.44) и учитывая асимптотические свойства функции w_1 из леммы 3.2, получаем задачу Коши для остатка δ :

$$\begin{aligned} \dot{\delta} = & b(c-\Delta) \cdot \left(g\left(\exp \frac{t-\Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) - g\left(\exp \frac{t-\Delta}{\varepsilon}\right) \right) - \\ & - \left(b(t-\Delta) + \varepsilon b^2(c-\Delta) \int_{-\infty}^{(t-\Delta)/\varepsilon} g(\exp s) ds + \delta(t, \varepsilon) \right) \cdot \\ & \cdot g\left(\exp \frac{t-\Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right), \quad (3.46) \end{aligned}$$

$$\delta|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = -\varepsilon b(c-\Delta) \int_{-\infty}^{-\varepsilon^{\alpha-1}} g(\exp s) ds + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (3.47)$$

Принимая во внимание неравенство

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2| \text{ при всех } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (3.48)$$

асимптотические свойства интеграла $\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds$ и то, что t изменяется на отрезке длины, пропорциональной ε^α , получаем асимптотику правых частей равенств (3.46) и (3.47):

$$\begin{cases} \dot{\delta} = -\delta \cdot g\left(\exp \frac{t - \Delta + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^\alpha), \\ \delta|_{t=\Delta-\varepsilon^\alpha} = O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})). \end{cases} \quad (3.49)$$

Из вида задачи Коши (3.49) следует, что $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ равномерно по φ .

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})) \quad \text{при } t \in [\Delta - \varepsilon^\alpha, \Delta + \varepsilon^\alpha]. \quad (3.50)$$

3. На очередном участке $t \in [\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha]$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + b(c - x) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x|_{t=\Delta+\varepsilon^\alpha} = \Delta + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon \exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})). \end{cases} \quad (3.51)$$

Будем искать решение в виде:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(t) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + \delta(t, \varepsilon), \quad (3.52)$$

где, как и раньше, $\delta(t, \varepsilon)$ — подлежащий определению остаток. Подставляя (3.52) в (3.51) получаем, что уравнение для производной преобразуется к виду

$$\dot{x}_{C_1}(t) + \dot{\delta}(t, \varepsilon) = 1 + b(c - x_{C_1}(t) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + \delta(t, \varepsilon)) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \quad (3.53)$$

а для начального условия, принимая во внимание асимптотическое равенство (3.32), получаем

$$x_{C_1}(\Delta + \varepsilon^\alpha) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + \delta|_{t=\Delta+\varepsilon^\alpha} = \Delta + \dot{x}_{C_1}(\Delta)\varepsilon^\alpha + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon \exp(-\varepsilon^{\alpha-1})). \quad (3.54)$$

Отсюда, учитывая в (3.53), что функция $x_{C_1}(t)$ является решением задачи Коши (C), а в (3.54), раскладывая функцию $x_{C_1}(\Delta + \varepsilon^\alpha)$ в ряд по степеням ε^α , получаем задачу Коши для остатка δ :

$$\begin{cases} \dot{\delta} = b\delta + O(\varepsilon), \\ \delta|_{t=\Delta+\varepsilon^\alpha} = O(\varepsilon^{2\alpha}), \end{cases} \quad (3.55)$$

откуда следует, что равномерно по φ и t выполняется $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\alpha})$, а значит, для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к формуле

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(t) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \quad \text{при } t \in [\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha]. \quad (3.56)$$

4. Далее, рассмотрим отрезок $t \in [1 - \varepsilon^\alpha, 1 + \varepsilon^\alpha]$. Здесь для поиска решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(\exp \frac{t-1 + O(\exp(-q/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + b(c-x) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x|_{t=1-\varepsilon^\alpha} = x_{C_1}(1 - \varepsilon^\alpha) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (3.57)$$

Отыскиваем решение в виде:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(1) + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \delta(t, \varepsilon), \quad (3.58)$$

где функция w_2 описывается формулой (3.28), а δ — очередной остаток, подлежащий определению. Раскладывая $x_{C_1}(1 - \varepsilon^\alpha)$ в ряд по ε^α и действуя тем же образом, что в пункте 2, получаем для остатка δ асимптотическую оценку $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\alpha})$, откуда

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{C_1}(1) + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [1 - \varepsilon^\alpha, 1 + \varepsilon^\alpha]. \quad (3.59)$$

5. Рассмотрим очередной промежуток $t \in [1 + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha]$, где $t_\varphi(\varepsilon)$ — корень уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$, лежащий на интервале $(\Delta + \varepsilon^\alpha, 1 - \varepsilon^\alpha)$ (см. п. 3). На данном промежутке задача Коши для поиска решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (3.5) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a + b(c-x) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x|_{t=1+\varepsilon^\alpha} = x_{C_1}(1) + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (3.60)$$

Тем самым, вид отыскиваемого решения следующий:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t) + \varepsilon(bd_1(c - \Delta) + d_2) + \delta(t, \varepsilon). \quad (3.61)$$

Так же как в пункте 3 подставим (3.61) в (3.60), воспользуемся асимптотическими свойствами (3.34), разложим функцию $x_{D_1}(1 + \varepsilon^\alpha)$ из начального условия в ряд по степеням ε^α и получим задачу Коши для остатка δ , из вида которой следует его требуемая малость. Таким образом,

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t) + \varepsilon(bd_1(c - \Delta) + d_2) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [1 + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha]. \quad (3.62)$$

6. На отрезке $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha]$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ отыскивается из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} = -a + b(c-x) \cdot g\left(\exp \frac{x_{C_1}(t - \Delta) + \varepsilon b d_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha})}{\varepsilon}\right) + \\ + O(\exp(-q/\varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$x|_{t=t_\varphi(\varepsilon)+\Delta-\varepsilon^\alpha} = x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha) + \varepsilon(bd_1(c - \Delta) + d_2) + O(\varepsilon^{2\alpha}). \quad (3.64)$$

Вид отыскиваемого решения:

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta) + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-\Delta)/\varepsilon} + \delta(t, \varepsilon), \quad (3.65)$$

где функция w_3 задана равенством (3.29).

Производя необходимые действия убеждаемся, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta) + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-\Delta)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$$

при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha]$. (3.66)

7. На следующем отрезке $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha]$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -a + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x|_{t=t_\varphi(\varepsilon)+\Delta+\varepsilon^\alpha} = x_{D_1}(t_\varphi(\varepsilon) + \Delta) + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (3.67)$$

Будем искать решение в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} \right) + \delta(t, \varepsilon). \quad (3.68)$$

Обычным образом строя задачу Коши для остатка $\delta(t, \varepsilon)$, доказываем его малость и получаем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1}{1 + bc} \right) + O(\varepsilon^{2\alpha})$$

при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + \Delta + \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha]$. (3.69)

8. На предпоследнем шаге рассмотрим отрезок $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha]$. Здесь задача Коши для функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f \left(\exp \frac{x_{C_1}(t-1) + \varepsilon bd_1(c - \Delta) + O(\varepsilon^{2\alpha})}{\varepsilon} \right) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x|_{t=t_\varphi(\varepsilon)+1-\varepsilon^\alpha} = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha) - \frac{\varepsilon d_1}{1 + bc} + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (3.70)$$

Ее решение отыскивается в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1) + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-1)/\varepsilon} + \delta(t, \varepsilon), \quad (3.71)$$

где w_4 — функция (3.30), δ — неизвестный остаток. Действуя, как при доказательстве предыдущих пунктов, удастся доказать справедливость асимптотическая оценки $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\alpha})$. Таким образом,

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1) + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-t_\varphi(\varepsilon)-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$$

при $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 - \varepsilon^\alpha, t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha]$. (3.72)

9. В заключение рассмотрим отрезок $t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha, T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0/2]$, где T_φ — второй корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$, для которого справедлива формула

$$T_\varphi(\varepsilon) = t_\varphi(\varepsilon) + 1 - x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon)) + O(\varepsilon). \quad (3.73)$$

Задача Коши здесь имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x|_{t=t_\varphi(\varepsilon)+1+\varepsilon^\alpha} = x_{B_1}(t_\varphi(\varepsilon) + 1) + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon^{2\alpha}), \end{cases} \quad (3.74)$$

решение, которой определяется формулой

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{A_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1 + bc} \right) + \delta(t, \varepsilon). \quad (3.75)$$

Доказывая, как и выше, что $\delta(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2\alpha})$, получаем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_{A_1}(t) + \varepsilon \left(bd_1(c - \Delta) + d_2 - \frac{d_1 + d_2}{1 + bc} \right) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \\ \text{при } t \in [t_\varphi(\varepsilon) + 1 + \varepsilon^\alpha, T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0/2]. \quad (3.76)$$

Тем самым, построена асимптотика решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с начальной функцией $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ (см. (3.8)) и лемма 3.3 доказана. Причем из формул леммы 3.3 следует, что для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и корня $T_\varphi(\varepsilon)$ верны равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ оценки

$$\max_{t \in [-\sigma_0, T_* - \sigma_0/2]} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad T_\varphi(\varepsilon) = T_* + O(\varepsilon), \quad (3.77)$$

где $x_*(t)$, напомним, — функция (3.15), а T_* — это период функции x_* , заданный формулой (3.16).

3.4 Существование, единственность и устойчивость периодического решения

Следующий шаг наших рассуждений состоит в доказательстве существования, единственности и устойчивости периодического решения.

Из равенств (3.77) заключаем, что оператор (3.24) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, причем равномерно по φ

$$\max_{t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (3.78)$$

Для доказательства включения

$$\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2) \quad (3.79)$$

так же, как в статьях [7, 28, 41], наложим на параметры q_1, q_2 ограничения

$$q_1 > - \min_{t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t), \quad 0 < q_2 < - \max_{t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]} x_*(t) \quad (3.80)$$

и рассмотрим множество функций $\hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (3.8) нестрогих равенств строгими. В силу (3.78) требуемое включение (3.79) будет выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (3.81)$$

что верно в силу (3.80).

Таким образом, оператор Π_ε является компактным и преобразует в себя замкнутое ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда, используя принцип Шаудера, получаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. А значит, решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (3.5) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, является периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (3.77), (3.78) удовлетворяет свойствам (3.23).

Единственность и устойчивость периодического решения $x_*(t, \varepsilon)$ доказываются стандартным образом так же, как в предыдущей главе на основе оценки (2.109) производной Фреше оператора Π_ε , получаемой исходя из вида решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. [7, 28, 41]). Отсюда следует, что

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad (3.82)$$

где, напомним,

$$C_0 = \{\gamma_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \gamma_0(-\sigma_0) = 0\},$$

а M и q — некоторые положительные константы.

Оценка (3.82), во-первых, обеспечивает сжимаемость оператора последования Π_ε , следовательно, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, а во-вторых, экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Теорема 3.1 полностью доказана.

3.5 Выводы к главе 3

Задаваемая в лемме 3.3 асимптотика устойчивого периодического решения уравнения (3.5) порождает бегущие волны в системе (3.1) при условии, что

$$T_*(\varepsilon) = m\Delta/k. \quad (3.83)$$

Здесь, напомним, $T_*(\varepsilon)$ обозначает период функции $x_*(t, \varepsilon)$, m — число уравнений в системе (3.1), $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что в силу (3.23) верно представление

$T_*(\varepsilon) = T_* + O(\varepsilon)$, а из формул (3.16)–(3.20) следует справедливость равенства

$$T_* = -\frac{1}{b} \ln \frac{1/b + c}{1/b + c - \Delta} + 1 + a(-a\Delta + a/b - c + (1/b + c) \exp(-b\Delta) - \frac{(1/b + c)(1 + a)}{1 + bc - b\Delta} \exp(-b(2\Delta - 1))). \quad (3.84)$$

Доказательство существования бегущей волны может быть выполнено тем же способом, что в статье [7].

Подводя итог отметим, что результаты данной главы исчерпывающим образом дополняют исследование, проделанное в работе [7], расширяя область значений параметров, при которых уравнение (3.4) имеет экспоненциально орбитально устойчивое решение. В частности, доказано, что для уравнения (3.5) можно выделить ровно шесть случаев значений параметров a , b , c , Δ , при которых существует устойчивое периодическое решение с одним промежутком положительности и одним промежутком отрицательности на периоде, причем длина отрицательной фазы не меньше наибольшего из запаздываний уравнения (3.5). Таким образом, полностью изучен вопрос существования и устойчивости периодических решений указанного вида для уравнения (3.4) в широкой области параметров.

Заключение

В диссертационной работе методами большого параметра изучены релаксационные колебания в двух классах сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений вольтеровского типа, а также методами малого параметра исследована окрестность состояния равновесия одной из этих задач в случае бесконечномерного вырождения.

Выделим основные полученные в работе результаты. Отметим сначала три результата первой главы.

1. В первой главе в результате применения метода квазинормальных форм к сингулярно возмущенному дифференциально-разностному уравнению в случае, близком к бесконечномерному вырождению, получена краевая задача типа Кортевега – де Вриза с антипериодическим краевым условием, для грубых решений которой доказаны результаты о соответствии. Эта задача была рассмотрена в сингулярно возмущенном случае. На основе применения к ней вторичной квазинормализации сделан вывод о том, что в исходном уравнении при подходящем выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется феномен буферности, состоящий в наличии у этого уравнения механизма накопления любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов вида бегущих волн.
2. Для краевой задачи типа Кортевега – де Вриза был проведен численный эксперимент, в результате которого было установлено, что задача обладает свойством буферности в том числе и при $\varepsilon \sim 1$.
3. Помимо этого в первой главе сделано некоторое обобщение указанной краевой задачи. Исследована локальная динамика обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза. На основе методов бифуркационного анализа изучен вопрос о существовании, асимптотике и устойчивости периодических решений и торов.

Во второй главе для некоторого класса сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями из нейродинамики получена максимально широкая область параметров задачи, при которых существует периодическое экспоненциально орбитально устойчивое решение, имеющее любое наперед заданное количество подряд идущих всплесков на периоде, чередующихся с участками,

где решение асимптотически мало. Таким образом, разобраны основные варианты, в которых реализуется bursting-эффект для рассматриваемой во второй главе нейромодели, тем самым, полностью завершено исследование, начатое в статье [6].

Объектом изучения третьей главы является один специальный класс нелинейных дифференциально-разностных уравнений из нейродинамики с дополнительной внутренней запаздывающей обратной связью порогового типа. Главным результатом главы является теорема о существовании и устойчивости периодического решения рассматриваемого уравнения с асимптотически высоким всплеском на периоде. Отметим, что результаты данной главы исчерпывающим образом дополняют исследование, проделанное в работе [7], расширяя область значения параметров задачи, при которых существует экспоненциально орбитально устойчивое решение с одним асимптотически высоким всплеском на периоде. В частности доказано, что для рассматриваемого уравнения можно выделить ровно шесть случаев значений параметров a , b , c , Δ , при которых существует решение, обладающее указанными свойствами.

Литература

- [1] Бибииков Ю. Н. Бифуркация типа Хопфа для квазипериодических движений // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 9. — С. 1539–1544.
- [2] Бибииков Ю. Н. Бифуркация устойчивого инвариантного тора из состояния равновесия // Матем. заметки. — 1990. — Т. 48, № 1. — С. 15–19.
- [3] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений // М.: Наука. — 1979.
- [4] Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. — 1986. — Т. 130, № 4. — С. 488–499.
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Дискретные автоволны в нейронных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 5. — С. 840–858.
- [6] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 5. — С. 684–701.
- [7] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 10. — С. 1227–1244.
- [8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 7. — С. 919–932.
- [9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 12. — С. 1675–1692.
- [10] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 155–170.
- [11] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. — 2015. — Т. 70, № 3. — С. 3–76.

- [12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 1. — С. 76–89.
- [13] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в нейродинамике // Доклады академии наук. — 2012. — Т. 443, № 2. — С. 1–5.
- [14] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей // М.: Институт компьютерных исследований. — 2002.
- [15] Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // Прикл. матем. и механ. — 1947. — Т. 11, № 3. — С. 313–328.
- [16] Кащенко И. С. Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием // Известия вузов «ПНД». — 2008. — Т. 16, № 4. — С. 137–146.
- [17] Кащенко И. С. Исследование динамики уравнения с двумя большими разнорядковыми запаздываниями // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». — 2016. — Т. 5, № 1. — С. 32–37.
- [18] Кащенко И. С. Локальная динамика уравнения с двумя большими различными по порядку запаздываниями // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 470, № 6. — С. 632–636.
- [19] Кащенко С. А. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 5, — С. 18–34.
- [20] Кащенко С. А. Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 6. — С. 1343–1355.
- [21] Кащенко С. А. Нормальная форма для уравнения Кортеверга – де Вриза – Бюргерса // ДАН. — 2016. — Т. 468, № 4. — Р. 1–4.
- [22] Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти // М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ. — 2009.
- [23] Кащенко С. А., Майоров В. В. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Матем. моделирование. — 1993. — Т. 5, № 12 — С. 13–25.
- [24] Кащенко С. А., Майоров В. В., Мышкин И. Ю. Распространение волн в простейших кольцевых нейронных структурах // Матем. моделирование. — 1995. — Т. 7, № 12. — С. 3–18.

- [25] Кащенко С. А. Уравнение Гинзбурга-Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 457–465.
- [26] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. — 1998. — Т. 222. — С. 3–191.
- [27] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Тр. МИАН. — 2007. — Т. 259. — С. 106–133.
- [28] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2099–2112.
- [29] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — V. 216. — Р. 126–153.
- [30] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений // М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2004.
- [31] Колесов Ю. С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 27–34.
- [32] Колесов Ю. С., Колесов В. С., Федик И. И. Автоколебания в системах с распределенными параметрами // Киев: Наук. думка. — 1979.
- [33] Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие // Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект». — 2010.
- [34] Майоров В. В., Мышкин И. Ю. Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Матем. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 64–76.
- [35] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике // М.: Наука. — 1973.
- [36] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах // Москва, «Физико-математическая литература». — 1995.

- [37] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // Докл. АН СССР. — Т. 102, № 5. — С. 889–891.
- [38] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения малым параметром и релаксационные колебания // М: Наука. — 1975.
- [39] Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией // М.: Физматлит. — 2005.
- [40] Николенко Н. В. Инвариантные, асимптотически устойчивые торы возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза // УМН. — 1980. — Т. 35, № 5. — С. 121–180.
- [41] Преображенская М. М. Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 4. — С. 351–366.
- [42] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Мир. — 1970.
- [43] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла // М.: Мир. — 1985.
- [44] Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. — 1948. — V. 1. — P. 171–199.
- [45] Chay T. R., Rinzel J. Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model // Biophys. J. — 1985. — V. 47, № 3. — P. 357–366.
- [46] Coombes S., Bresloff P. C. (editors, 2005) Bursting: the genesis of rhythm in nervous system // World Scientific Publishing Company. — 2005.
- [47] Ermentrout G. B., Kopell N. Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation // SIAM J. Appl. Math. — 1986. — V. 46, № 2. — P. 233–253.
- [48] FitzHugh R. A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical J. — 1961. — V. 1. — P. 445–466.
- [49] Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // Journal of Physiology. — 1952. — V. 117. — P. 500–544.
- [50] Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // Ann. N. Y. Acad. of Sci. — 1948. — V. 50. — P. 221–246.

- [51] Izhikevich E.M. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting // MIT Press. — 2010.
- [52] Izhikevich E. Neural excitability, spiking and bursting // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2000. — V. 10, № 6. — P. 1171–1266.
- [53] Kashchenko I. Normalization of a system with two large delays // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — V. 24, № 8. — P. 1440021.
- [54] Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new tipe of long stationary waves // Phil. Mag. — 1895. — V. 39. — P. 422–443.
- [55] Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I. Dynamical Principles in Neuroscience // Rev. Mod. Phys. — 2006. — V. 78., № 4. — P. 1213–1265.
- [56] Somers D., Kopell N. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // J. Math. Biol. — 1995 — V. 33. — P. 261–280.
- [57] Somers D., Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation // Biol. Cybern. — 1993. — V. 68. — P. 393–407.
- [58] Terman D. An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics // Tutorials in Mathematical Biosciences I, Lecture Notes in Mathematics. — 2005. — V. 1860. — P. 21–68.