

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Бифуркационные особенности одного класса краевых задач параболического типа со специальными краевыми условиями

Аспирант:
Ивановский Л.И.

Научный руководитель:
д. ф.-м.н., профессор Глызин С.Д.

Объекты и цели исследования

Объектами исследования являются устойчивые режимы динамических систем

Цель исследования заключается в изучении поведения устойчивых режимов системы дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и краевой задачи со специальными краевыми условиями

Задачи исследования

- Для нелинейной динамической системы с импульсными воздействиями выделить области с разными бифуркационными сценариями, и изучить перестройки, происходящие в фазовом пространстве модельного отображения.
- Для краевой задачи со специальными краевыми условиями выявить критические зависимости параметров, при которых происходит потеря устойчивости нулевого решения. При значениях параметров, близких к критическим, определить условия появления неоднородных состояний равновесия и циклов.

Положения, выносимые на публичное представление

- 1 Области с разными бифуркационными сценариями в случае цепочки и кольца осцилляторов с диффузионным взаимодействием и кольца односторонне связанных осцилляторов.
- 2 Перестройки, происходящие в фазовом пространстве модельного отображения динамической системы с импульсными воздействиями.
- 3 Критические зависимости параметров, при которых происходит потеря устойчивости нулевого решения краевой задачи со специальными краевыми условиями.
- 4 Уравнения амплитуды колебаний нулевого состояния равновесия в случае дивергентной и колебательной потери устойчивости.

Система связанных осцилляторов

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)]u_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}, \quad d, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda \gg 1, \quad \alpha > 1 + \beta;$$

$$u_j = u_j(t) > 0, \quad f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+),$$

$$f(0) = g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) < \alpha, \quad \forall u \in \mathbb{R}_+;$$

$$f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u), \quad u \rightarrow +\infty.$$

- $a_1 = 1, a_2 = 2; \quad u_0 = u_1, u_3 = u_4.$
- $a_1 = 1, a_2 = 2; \quad u_0 = u_3, u_1 = u_4.$
- $a_1 = 0, a_2 = 1; \quad u_1 = u_4.$

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda)$$

$$\dot{u} = \lambda(-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u))u$$

$$T_*(\lambda):\quad \lim_{\lambda\rightarrow\infty} T_*(\lambda)=T_0=\alpha+1+(\beta+1)/(\alpha-\beta-1).$$

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} << 1,$$

$$u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m},$$

$$\dot{x} = -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right).$$

Система с импульсными воздействиями

$$\dot{y}_j = d(e^{y_{j+1}} + a_1 e^{-y_j} - e^{y_j} - a_1 e^{y_{j-1}}), \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (2)$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0),$$

$$y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1 + \beta) y_j(\alpha-0),$$

$$y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0).$$

- $y_0 = y_3 = 0$
- $y_0 = y_3 = -(y_1 + y_2)$
- $y_3 = -(y_1 + y_2)$

Модельное отображение

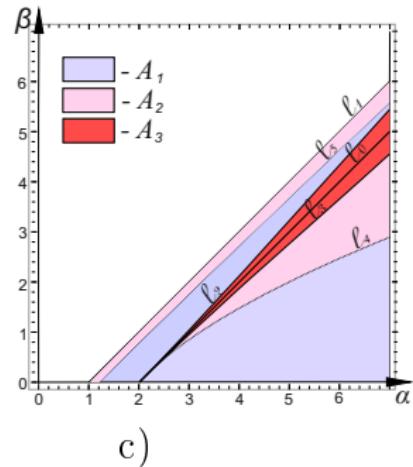
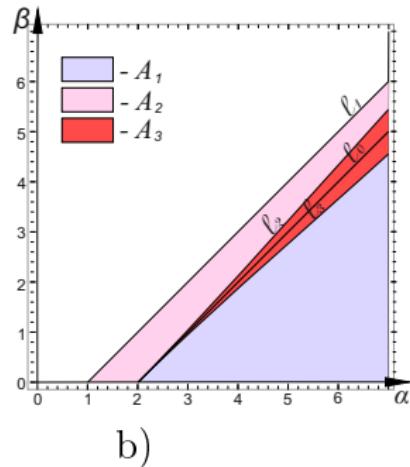
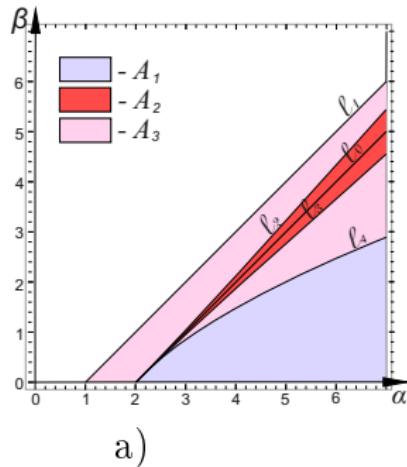
$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(T_0, z_1, z_2) \\ y_2(T_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$y_1(-0, z_1, z_2) = z_1, \quad y_2(-0, z_1, z_2) = z_2$$

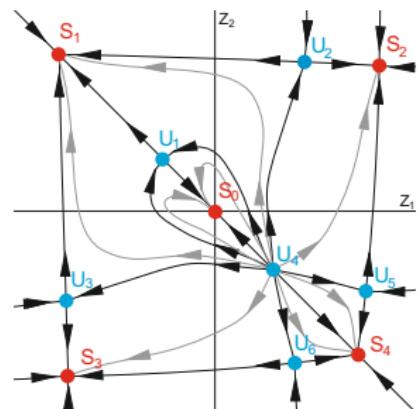
Теорема

Любой грубой неподвижной точке z отображения (3), в системе (2) и как следствие в системе (1), соответствует цикл периода T_0 с теми же свойствами устойчивости.

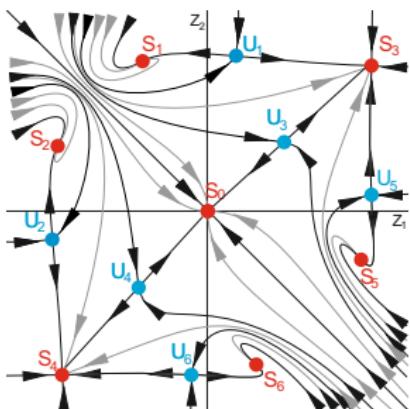
Области параметров, соответствующие различным бифуркационным сценариям



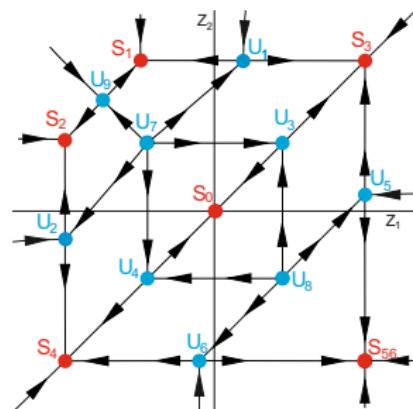
Случай цепочки связанных осцилляторов



a) $(\alpha, \beta) \in A_1$

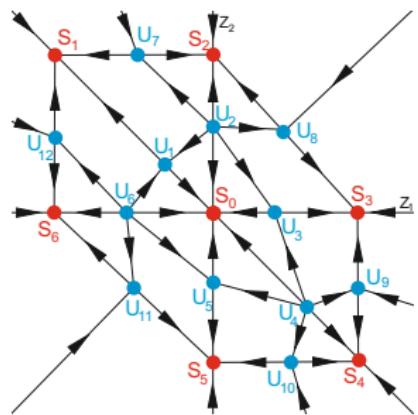


b) $(\alpha, \beta) \in A_2$

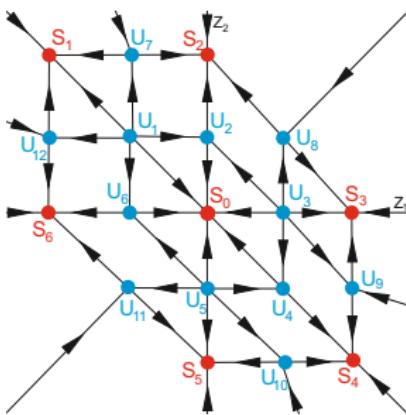


c) $(\alpha, \beta) \in A_3$

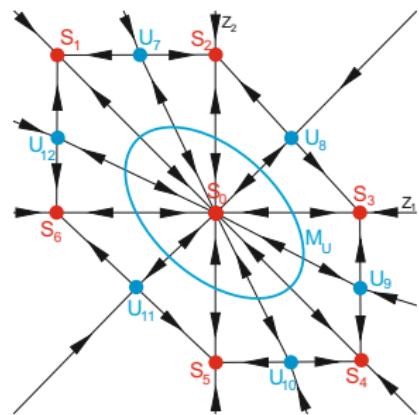
Случай кольца осцилляторов с диффузионным взаимодействием



a) $(\alpha, \beta) \in A_1$

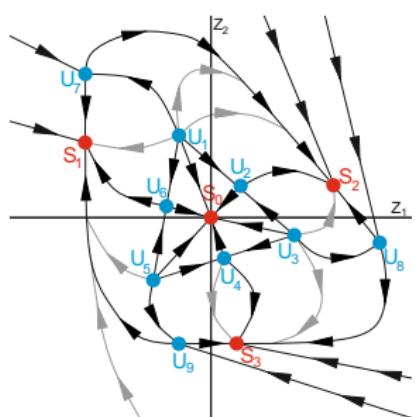


b) $(\alpha, \beta) \in A_2$

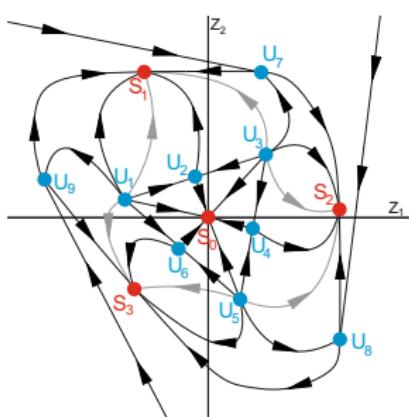


c) $(\alpha, \beta) \in A_3$

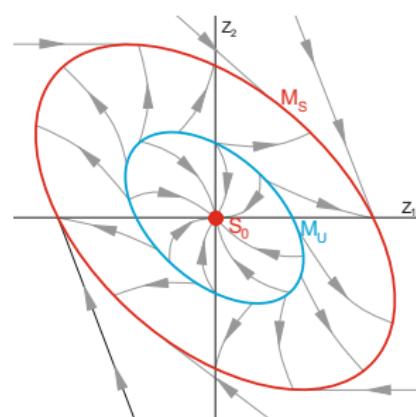
Случай кольца однонаправленно связанных осцилляторов



a) $(\alpha, \beta) \in A_1$



b) $(\alpha, \beta) \in A_2$



c) $(\alpha, \beta) \in A_3$

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - \delta u^3, \quad (4)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = F(u) \quad (5)$$

$$t \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad \delta \in \{0, 1\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- $F(u) = \alpha u(x_0, t), \quad \delta = 1; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0, 1].$
- $F(u) = \alpha u(x_0, t) + \beta u^3(x_0, t), \quad \delta = 0; \quad \beta \in \mathbb{R}.$
- $F(u) = \alpha \int_0^1 u(y, t) dy, \quad \delta = 1.$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \quad (6)$$

$$u'(0, t) = 0,$$

- $u'(1, t) = \alpha u(x_0, t).$
- $u'(1, t) = \alpha \int_0^1 u(y, t) dy.$

Задача на собственные значения

$$u(x, t) = e^{\lambda t} v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \quad (7)$$

$$v'(0) = 0,$$

- $v'(1) = \alpha v(x_0).$
- $v'(1) = \alpha \int_0^1 v(y) dy.$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \quad c \in \mathbb{R}, \mu = \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

- $\lambda = 0 : \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = \begin{cases} -\gamma, & \text{при } F(u) = \alpha \int_0^1 u(t, y) dy, \\ \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

- $\lambda = i\omega : \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}. \quad (9)$$

Моделирование линейной краевой задачи

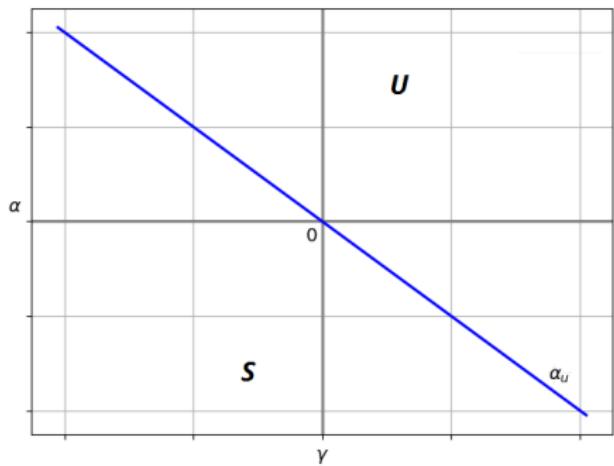
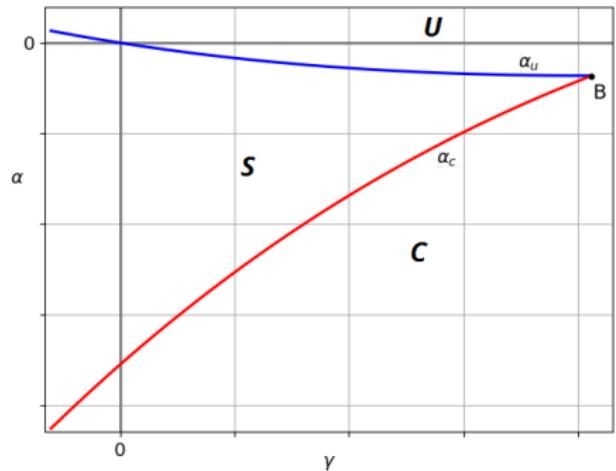
$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$u_0 = u_1,$$

- $u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n} u_k, \quad k \in [1, n].$

- $u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^n u_k.$

Схематическая визуализация кривых α_u и α_c



Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_2 + O(\varepsilon^2), \quad (11)$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|, \quad \varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0 \quad (12)$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - \delta u_0^3, \quad (13)$$

$$u'_0(0, t) = 0, \quad u'_2(0, t) = 0.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\lambda = 0 : \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$$

$$u_0 = \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x.$$

- $u'_0(1, t) = \alpha_u u_0(x_0, t), \quad u'_2(1, t) = \alpha_u u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t).$
- $u'_0(1, t) = \alpha_u u_0(x_0, t), \quad u'_2(1, t) = \alpha_u u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t) + \beta u_0^3(x_0, t).$
- $u'_0(1, t) = \alpha_u \int_0^1 u_0(s, y) dy, \quad u'_2(1, t) = \alpha_u \int_0^1 u_2(t, y) dy + \int_0^1 u_0(s, y) dy.$

$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{14}$$

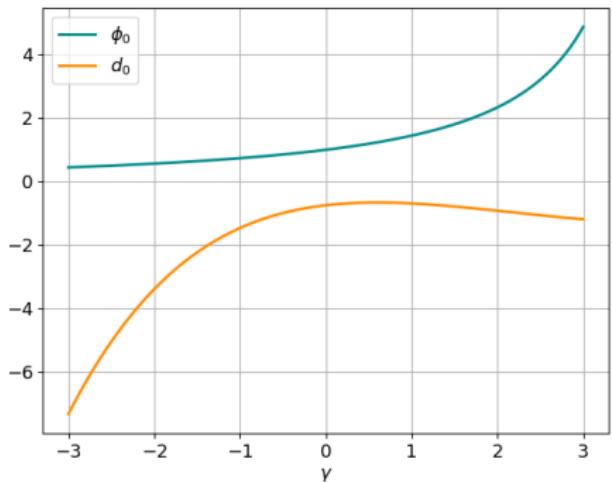
$$u = \pm \sqrt{\varepsilon \left| \frac{\phi_0}{d_0} \right|} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + O(\varepsilon).$$

Случай нелинейной краевой задачи с линейным отклонением

$$\phi_0 = \frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0},$$

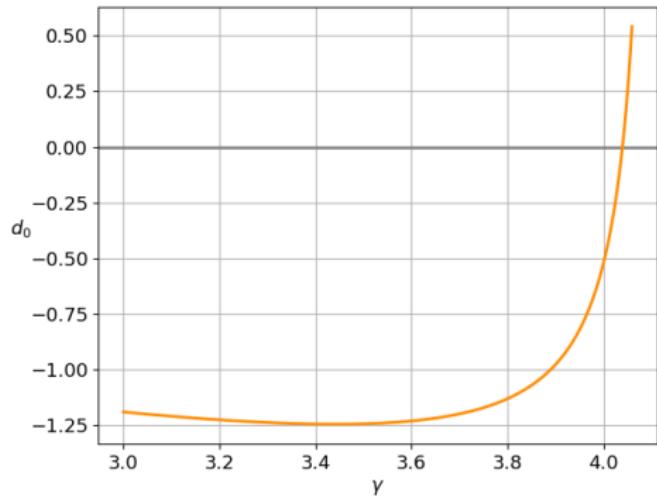
$$d_0 = \frac{-3\gamma \operatorname{sh} 3\mu - 12 \operatorname{sh} \mu - 12\mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u \mu \operatorname{ch} 3\mu x_0 + 12\alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0}{16(\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)}.$$

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



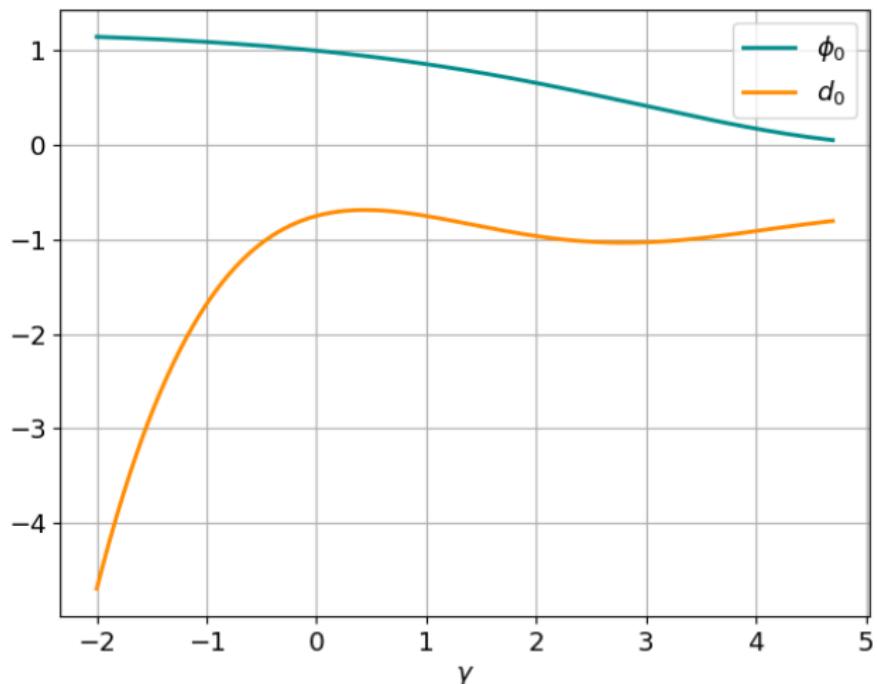
a)

$$x_0 = 0$$



b)

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



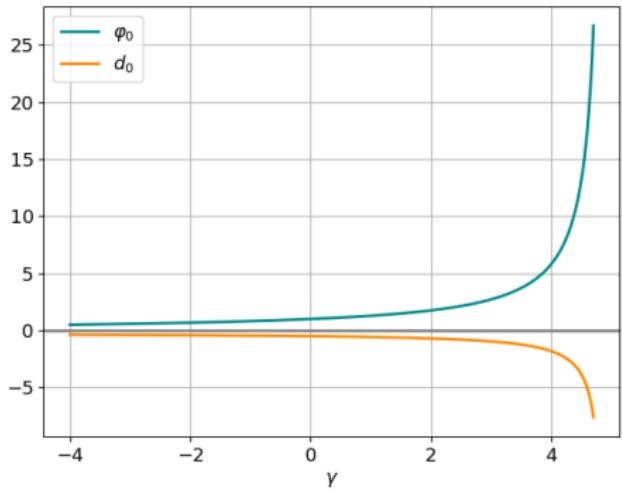
$$x_0 = 0.67$$

Случай линейной краевой задачи с нелинейным отклонением

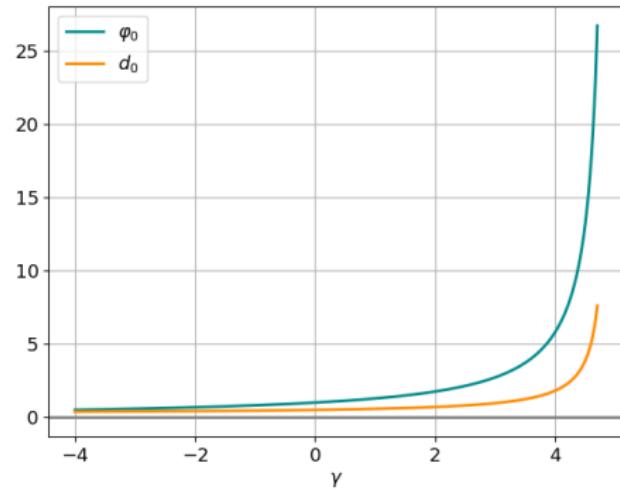
$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0, \quad d_0 = Q \beta \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0,$$

$$Q = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



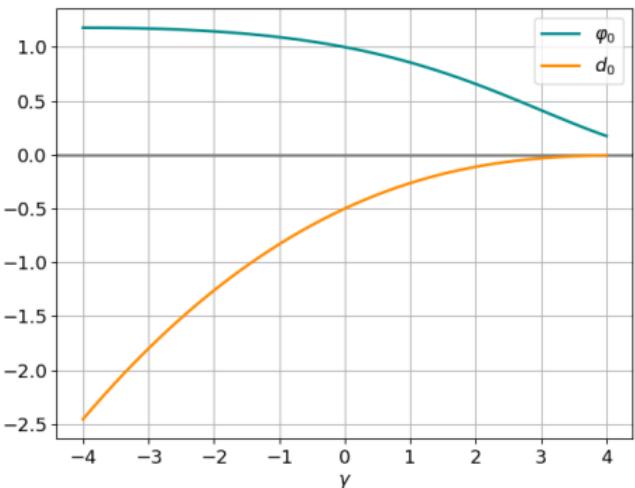
a) $\beta = -0.5$



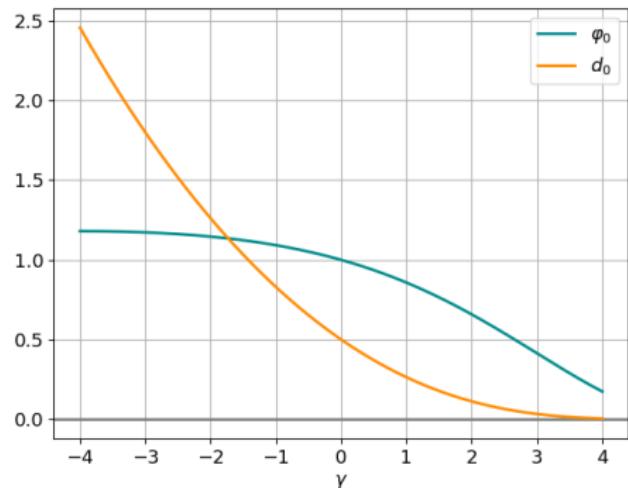
b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.33$$

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -0.5$

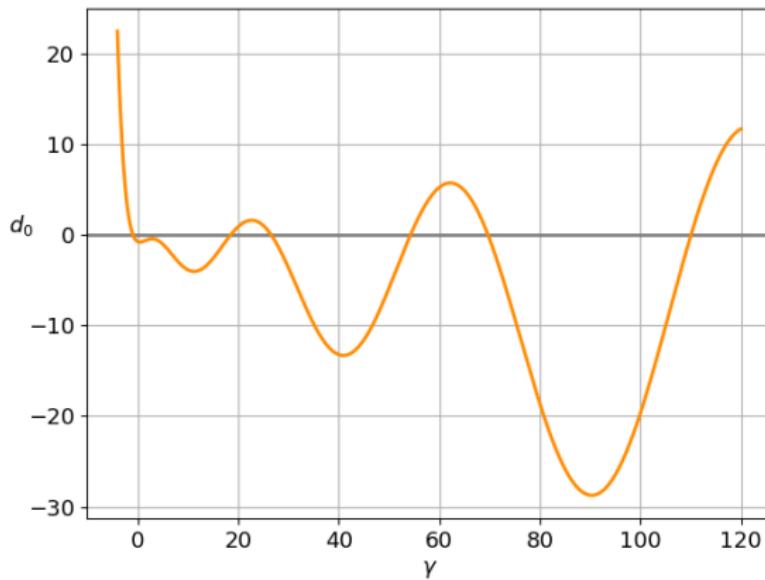


b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.67$$

Случай нелинейной краевой задачи с с интегральным отклонением

$$\phi_0 = 1, \quad d_0 = -\frac{5\gamma \operatorname{sh} 3\sqrt{-\gamma}}{48 \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}} - \frac{3}{4}.$$



Случай колебательной потери устойчивости

$$\lambda = i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t} \operatorname{ch} \mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \mu x}.$$

$$u'_0(1, t) = \alpha_c u_0(x_0, t),$$

- $u'_2(1, t) = \alpha_c u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t).$
- $u'_2(1, t) = \alpha_c u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t) + \beta u_0^3(x_0, t).$

$$z' = \phi_0 z + d_0 z |z|^2, \tag{15}$$

$$u = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\phi_0}{d_0}} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x + O(\varepsilon).$$

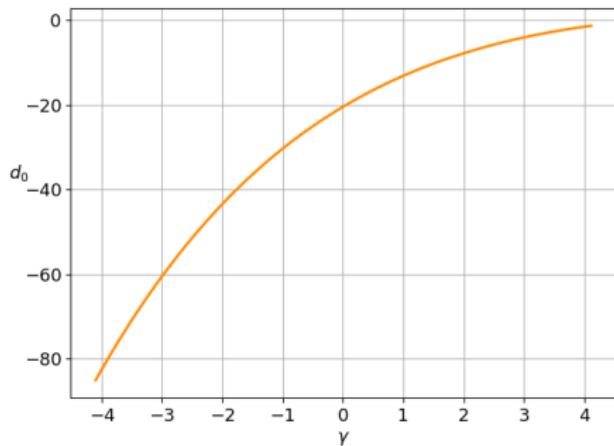
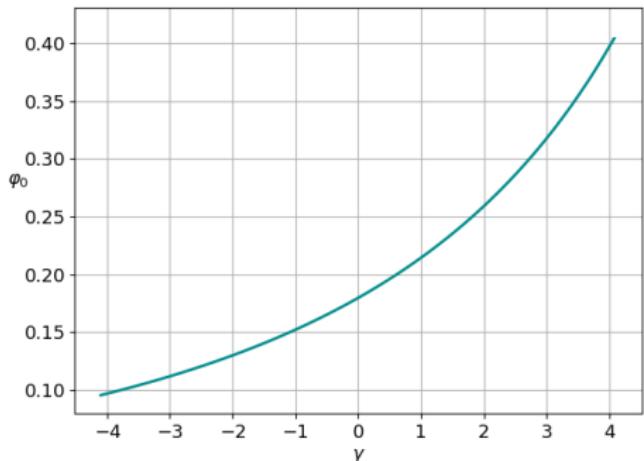
Случай нелинейной краевой задачи с линейным отклонением

$$\phi_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0} \right),$$

$$d_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{3\mu(G(\mu + 2 \operatorname{Re} \mu) + G(\mu + 2i \operatorname{Im} \mu) + 2G(\bar{\mu}))}{2(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)} \right),$$

$$G(y) = \frac{\alpha_c - y \operatorname{sh} y}{y^2 + \gamma - i\omega}.$$

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



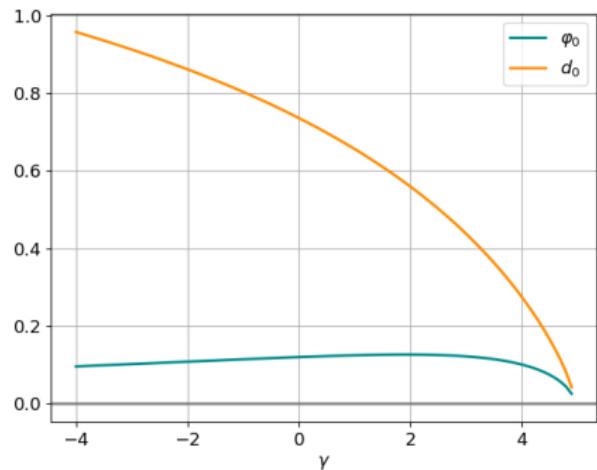
$$x_0 = 0$$

Случай линейной краевой задачи с нелинейным отклонением

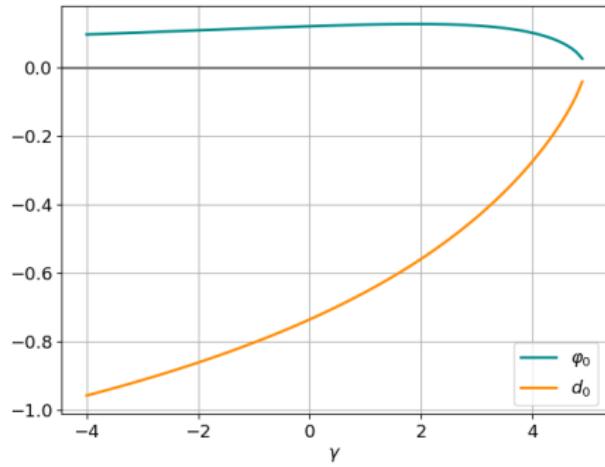
$$\phi_0 = -\operatorname{Re} \left(\frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0} \right),$$

$$d_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{3\beta\mu(\operatorname{ch}(\mu + 2\operatorname{Re}\mu)x_0 + \operatorname{ch}(\mu + 2i\operatorname{Im}\mu)x_0 + 2\operatorname{ch}\bar{\mu}x_0)}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh} \mu x_0} \right).$$

Графики $\phi_0(\gamma)$, $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -1.0$



b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.33$$

Заключение

- Для нелинейной динамической системы с импульсными воздействиями выделены области параметров, с разными бифуркационными сценариями. В каждой области изучены перестройки, происходящие в фазовом пространстве модельного отображения.
- Для краевой задачи со специальными краевыми условиями найдены критические значения параметров, при которых происходит потеря устойчивости нулевого решения. При значениях параметров близких к критическим на основе нормальной формы были определены условия появления неоднородных состояний равновесия и циклов.

Значимость проведенных исследований

Полученные результаты могут быть использованы в области нелинейной динамики, математической биологии и теоретической физики. Дополнительно найденные устойчивые режимы нелинейной динамической системы с импульсными воздействиями могут быть использованы при моделировании ассоциативной памяти компьютера. Анализ устойчивости нулевого решения краевой задачи со специальными краевыми условиями позволит модифицировать некоторые модели популяции живых существ.

Список работ, опубликованных аспирантом

- 1 Ивановский Л.И., Самсонов С.О. Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием / Л.И. Ивановский, С.О. Самсонов // Модел. и анализ информ. систем. - 2014. - Т. 21, № 6. - С. 179-181.
- 2 Ivanovsky L.I. Stable regimes of dynamic systems with impulsive influences / L.I. Ivanovsky // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2017. - Vol. 38, No. 5. - P. 921-925.
- 3 Ивановский Л.И., Самсонов С.О. Динамика одного двумерного отображения и устойчивые режимы сингулярно возмущенной системы нейронного типа / Л.И. Ивановский, С.О. Самсонов // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. - 2015. - № 2. - С. 121-132.
- 4 Ивановский Л.И. Динамические свойства одного класса импульсных систем / Л.И. Ивановский // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. - 2015. - № 3. - С. 126-131.
- 5 Ивановский Л.И. Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями / Л.И. Ивановский // Динамические системы. - 2016. - Т. 6 (34), № 2. - С. 113-132.
- 6 Ивановский Л.И. Устойчивые режимы одного класса динамических систем с импульсными воздействиями / Л.И. Ивановский // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. - 2017. - № 4. - С. 35-42.

Свидетельства о государственной регистрации



Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова»

Бифуркационные особенности одного класса краевых задач параболического типа со специальными краевыми условиями

Аспирант:
Ивановский Л.И.

Научный руководитель:
д. ф.-м.н., профессор Глызин С.Д.