В. Ф. Камбулов, С. А. Тарасов, Н. Б. Федоров, А. Н. Чикин, Об одной модели автоколебательной системы с распределенными параметрами, *Матем. моделирование*, 2000, том 12, номер 12, 3–10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **12** номер **12** год **2000**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© *В.Ф.Камбулов, С.А.Тарасов, Н.Б.Федоров, А.Н.Чикин*

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова

Рассматривается автогенератор с LCR-распределенными параметрами в цепи обратной связи, которая индуктивно взаимодействует с отрезком длинной линии. При сильной связи между генератором и отрезком линии построена математическая модель изучаемой системы. На основе специального варианта метода Крылова-Боголюбова-Митропольского проведен расчет параметров автоколебаний. Доказано, что включение в систему добротной «настроенной» дополнительной линии приводит к вырождению явления многоцикличности в базовом генераторе и к бифуркации стабильных, близких к гармоническим, автоколебаний на основной частоте самовозбуждения. Теоретические выводы подтверждены экспериментально.

ON A MODEL OF AUTO OSCILLATING SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

V.F.Kambulov, S.A.Tarasov, N.B.Fedotov, A.N.Chikin

Yaroslavl Demidov State University

The subject of the information is a self-excited oscillator with LCR-distributed parameters the feedback circuit, which inductively interacts with a segment of a long line. Having achieved tight binding between the oscillator and the segment of a line a mathematical model of the system under consideration was built. Using special variant of the Krilov-Bogolubov-Mitropolski method calculation of oscillation parameters was performed. It is demonstrated that introduction of property «adjusted» auxiliary line leads to negative feedback (degeneration) of mono cyclicity in the base-model oscillator and bifurcation of stable, close to harmonic motion auto oscillation on the fundamental frequency of self-excitation. Theoretical conclusions are supported by experiments.

Введение

В теории нелинейных колебаний хорошо известна и исследована автоколебательная система: одноконтурный генератор Ван-дер-Поля, индуктивно взаимодействующий с пассивным колебательным контуром [1]. Подобная система может найти применение, например, для стабилизации частоты генератора. Авторами настоящей работы построена одна из возможных моделей распределенного аналога данного дискретного устройства, однако в качестве базового генератора был использован автогенератор с отрезком длинной линии в цепи обратной связи [2,3]. Интерес к изучению именно такой системы вызван рядом обстоятельств: 1) новизной рассматриваемого объекта; 2) определенными проблемами его математического моделирования; 3) математическими трудностями анализа поставленной задачи, что привело к необходимости дальнейшего развития специального варианта асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского; 4) использованием на практике исследуемого устройства, например, для генерации стабильных автоколебаний, близких к гармоническим.

Отметим, что базовый генератор с отрезком длинной линии в цепи обратной связи изучался в ряде работ [2,3], основной результат которых – обнаружение и анализ явления многоцикличности (реализация из набора возможных устойчивых циклов какого-либо одного, задаваемого начальными условиями). Очевидно, такой генератор нестабилен (из-за флуктуаций происходят переходы с одного режима на другой), и тем самым сужаются границы его применимости на практике. Однако, как показал проведенный в настоящей работе анализ, использование в системе «настроенной» добротной дополнительной линии позволяет «фиксировать» и стабилизировать режим автоколебаний на основной частоте генерации, что согласуется с известными классическими результатами для аналогичных дискретных устройств.

Цель настоящей статьи – построение математической модели LCR-распределенной системы, сильно индуктивно взаимодействующей с отрезком длинной линии, исследование бифурцирующих в ней автоколебаний, сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

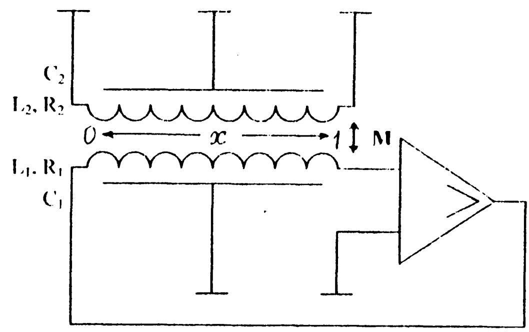

Рис.1.

1. Постановка задачи

Рассмотрим блок-схему автогенератора, представленную на рис.1. Можно показать, что математической моделью данной системы служит краевая задача вида

$$u_{1tt} + r_1 u_{1t} + M_1 u_{2tt} = u_{1xx}, \tag{1}$$

$$u_{2tt} + r_2 u_{2t} + M_2 u_{1tt} = a u_{2xx}, \tag{2}$$

$$u_{1x}\big|_{x=1} = 0, \quad u_2\big|_{x=0} = u_2\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u_1\big|_{x=0} + k_0 u_1\big|_{x=1} - u_1^3\big|_{x=1} = 0, \tag{4}$$

где $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, $r_1 = R_1\sqrt{C_1/L_1}$, $r_2 = R_2\sqrt{L_1C_1}/L_2$, $M_1=(MC_2)/(L_1C_1)$, $M_2=(MC_1)/(L_2C_2)$ соответственно нормированные переменные составляющие напряжений, активные потери и коэффициенты взаимоиндукций линий; $a=(L_1C_1)/(L_2C_2)$. В краевом условии (4) k_0 – бифуркационный параметр, физический смысл которого – коэффициент активного элемента.

Предположим, что основная (цепь обратной связи) и дополнительная линии «настроены» (a=1), сильно индуктивно связаны, и активные потери в них малы. При этом положим

$$r_1=\varepsilon,\quad r_2=\varepsilon r,\quad M_1=m_1^2,\quad M_2=m_2^2\varepsilon, \tag{5}$$

где ε – малый положительный параметр, а r, m_j^2, j=1,2 сравнимы с единицей. Тогда, как следует из результатов работы [3]

$$k_0=1+\varepsilon^2\gamma. \tag{6}$$

Кратко поясним выбор порядков малых параметров в равенствах (5) и (6). Во-первых, в качестве малого параметра ε выбран параметр, характеризующий нормированные активные потери в основной линии. Во-вторых, последующие соотношения в (5) следуют из условия сильной связи и использования более добротной по сравнению с основной дополнительной линии. В третьих, равенство (6) – следствие кратности корней характеристического уравнения для линеаризованной краевой задачи, описывающей базовый генератор.

Отметим, что линеаризованная краевая задача (1)-(4) при ε=0 распадается на две задачи:

$$u_{1tt}+m_1^2u_{2tt}=u_{1xx},\qquad u_{1x}\big|_{x=1}=0,\quad u_1\big|_{x=0}+u_1\big|_{x=1}=0, \tag{7}$$

$$u_{2tt}=u_{2xx},\quad u_2\big|_{x=0}=u_2\big|_{x=1}=0, \tag{8}$$

причем характерные особенности однородной задачи (7) заключается в том, что, во-первых, она имеет счетное число линейно независимых периодических решений

$$\exp(\pm i\omega_n t)\cos\omega_n x,\qquad \omega_n=\pi(2n-1),\qquad n=1,2,\ldots; \tag{9}$$

во-вторых, в силу кратности корней ω_n собственным числам $-\omega_n^2$, n=1,2... оператора

$$Av=\frac{d^2v}{dx^2},\quad v'(1)=0,\quad v(0)+v(1)=0 \tag{10}$$

кроме собственных функций $\cos\omega_n x$ отвечают также присоединенные функции $(x-1)\sin\omega_k x/2\omega_n$. Однако краевая задача (8) имеет только счетное число линейно независимых решений вида

$$\exp(\pm i\omega_n t)\sin\omega_n x,\qquad \omega_k=\pi k,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{11}$$

Несложный анализ показывает, что увеличение бифуркационного параметра k_0 приводит к самовозбуждению автогенератора только на частотах ω_κ, отвечающих нечетным номерам k. На частотах ω_κ, соответствующих четным номерам k, генератор не возбуждается.

2. Построение укороченной системы уравнений

Используя результаты предыдущего пункта, для построения автоколебаний краевой задачи (1)-(4) применим следующую модификацию метода Крылова-Боголюбова-Митропольского [2-5]. Будем полагать, что

$$u_1(t,\tau,x)=\varepsilon u_{10}(t,\tau,x)+\varepsilon^2u_{11}(t,\tau,x)+\varepsilon^3u_{12}(t,\tau,x)+\ldots, \tag{12}$$

$$u_2(t,\tau,x)=\varepsilon^2u_{20}(t,\tau,x)++\varepsilon^3u_{21}(t,\tau,x)+\ldots, \tag{13}$$

$$u_{10}=\sum_{n=1}^{\infty}(z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\overline{z_n}(\tau)\exp(-i\omega_n t))\cos\omega_n x, \tag{14}$$

$$u_{20}=\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\overline{y_n}(\tau)\exp(-i\omega_n t))\sin\omega_n x, \tag{15}$$

где $\tau=\varepsilon t$, а комплексные «амплитуды z_n, y_n таковы, что сходятся ряды с общими членами $\omega_n^2|z_n|^2$, $\omega_n^2|y_n|^2$. Подставим (12), (13) с учетом (5), (6) в краевую задачу (1)-(4) и приравняем затем коэффициенты при ε^2, ε^3. Для нахождения 2-периодических по t функций u_{11}, u_{12}, u_{21} приходим к краевым задачам

$$u_{11tt}-u_{11xx}+2u_{10t\tau}+u_{10t}+m_1^2u_{20tt}=0, \tag{16}$$

$$u_{11x}\big|_{x=1}=0,\quad u_{11}\big|_{x=0}+u_{11}\big|_{x=1}=0, \tag{17}$$

$$u_{12tt}-u_{12xx}+2u_{11t\tau}+u_{11t}+u_{10\tau\tau}+u_{10\tau}+m_1^2(2u_{20t\tau}+u_{21tt})=0, \tag{18}$$

$$u_{12x}\big|_{x=1}=0,\qquad u_{12}\big|_{x=0}+u_{12}\big|_{x=1}+\gamma u_{10}\big|_{x=1}-u_{10}^3\big|_{x=1}=0, \tag{19}$$

$$u_{21tt}-u_{21xx}+2u_{20t\tau}+ru_{20t}+m_2^2(u_{11tt}+2u_{10t\tau})=0, \tag{20}$$

$$u_{21}\big|_{x=0}=u_{21}\big|_{x=1}=0. \tag{21}$$

Путь исследования выписанных выше краевых задач следующий. Сначала рассматриваем краевую задачу (16), (17). При условии разрешимости в классе 2-периодических по t функций частное решение краевой задачи (16), (17) имеет вид

$$u_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}(2\dot z_n+z_n)c_n(x)\exp(i\omega_n t)+(2\dot{\bar z}_n+\bar z_n)\bar c_n(x)\exp(-i\omega_n t), \tag{22}$$

где точка означает дифференцирование по τ, а

$$c_n(x)=\frac{i}{2}(x-1)\sin\omega_n x.$$

Следующий шаг – рассмотрение краевой задачи (20), (21). Подставляя формулу (22) в уравнение (20), после некоторых преобразований убеждаемся, что условия разрешимости краевой задачи (20), (21) в классе 2-периодических по t функций имеют вид

$$\dot y_n+\frac{r}{2}y_n+\frac{m_2^2\omega_n}{4}\dot z_n+\frac{m_2^2\omega_n}{8}z_n=0,\qquad n=1,2,\ldots, \tag{23}$$

а ее решение

$$u_{21}=m_2^2\sum_{n=1}^{\infty}(\dot z_n\exp(i\omega_n t)D_n(x)+\dot{\bar z}_n\exp(-i\omega_n t)\overline{D}_n(x)),\qquad D_n(x)=ix\sin\omega_n x. \tag{24}$$

И наконец, подставляя (22), (24) в уравнение (18) и проделывая необходимые преобразования, приходим к выводу, что условия разрешимости краевой задачи (18), (19) в классе 2-периодических по t функций представимы в виде

$$\ddot{z}_n + \left(1 - \frac{i\omega_n m_1^2 m_2^2}{2}\right)\dot{z}_n + 2im_1^2 \dot{y}_n - 2(\gamma - 1/8)z_n + 2f_n = 0. \tag{25}$$

Здесь f_n – коэффициент при $\exp(i\omega_n t)$ в разложении Фурье функции w^3, где

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \exp(-i\omega_n t). \tag{26}$$

Учитывая, что в реальных системах число частот самовозбуждения генератора всегда конечно, положим его равным N. После этого окончательно получаем укороченную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{z}_n + \left(1 - \frac{i\omega_n m_1^2 m_2^2}{2}\right)\dot{z}_n + 2im_1^2 \dot{y}_n - 2(\gamma - 1/8)z_n + 2\sum_{P_n} z_m z_k z_s + \\ + 2\sum_{Q_n} z_m z_k \bar{z}_s + 2\sum_{R_n} z_m \bar{z}_k \bar{z}_s = 0, \tag{27}$$

$$\dot{y}_n + \frac{r}{2} y_n + \frac{\omega_n m_2^2}{4}\dot{z}_n + \frac{\omega_n m_2^2}{8} z_n = 0, \tag{28}$$

где

$$P_n = \{(m,k,s) : \omega_n = \omega_m + \omega_k + \omega_s, \quad m,k,s \le N\},$$

$$Q_n = \{(m,k,-s)(m,-s,k)(-s,m,k) : \omega_n = \omega_m + \omega_k - \omega_s, \quad m,k,s \le N\},$$

$$Q_n = \{(m,-k,-s)(-k,m,-s)(-k,-s,m) : \omega_n = \omega_m - \omega_k - \omega_s, \quad m,k,s \le N\},$$

3. Исследование укороченной системы уравнений

Как отмечалось в [3], исследование укороченной системы уравнений (27), (28) в случае произвольного N имеет принципиальные технические трудности. Однако, как показывает эксперимент [3], анализ малого числа уравнений (N=1–3) приводит к результатам, которые не только качественно правильно описывают поведение автоколебательной системы, но и с достаточной степенью точности количественно удовлетворяют экспериментальным данным. Отметим, что при $N \to \infty$ можно «свернуть» систему укороченных уравнений в одно скалярное уравнение (см., например, [2]). Однако полученные на этом пути результаты требуют обязательной экспериментальной проверки, так как, во-первых, не учитываются инерционные свойства активного элемента, а во-вторых, фактически априори предполагается применимость телеграфных уравнений во всем диапазоне частот.

Рассмотрим случай N=1. Тогда из (27,28) приходим к следующей системе уравнений:

$$\ddot{z}_1 + \left(1 - \frac{i\omega_n m_1^2 m_2^2}{2}\right)\dot{z}_1 + 2im_1^2 \dot{y}_1 - 2(\gamma - 1/8)z_1 + 6z_1|z_1|^2 = 0, \tag{29}$$

$$\dot{y}_1 + \frac{r}{2}\pi y_1 + \frac{1}{4}\pi m_2^2 \dot{z}_1 + \frac{1}{8}\pi m_2^2 z_1 = 0. \tag{30}$$

Полагая в ней $\gamma > 1/8$ и

$$z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \qquad y_1 = \delta_1 \exp(i\Psi_1),$$

непосредственно проверяется, что у системы (29), (30) имеет место состояние равновесия

$$\rho_1 = ((\gamma - 1/8)/3)^{1/2}, \qquad \delta_1 = \frac{\pi m_2^2}{4r}\rho_1. \tag{31}$$

Далее, для исследования устойчивости состояния равновесия (31) применялся критерий Льенара-Шипара с привлечением численного анализа. На рис.2 представлена область 1 значений параметров γ и $\mu = m_1^2 m_2^2$, при которых состояние равновесия (31) асимптотически устойчиво, т.е. орбитально асимптотически устойчиво периодическое решение исходной краевой задачи, реализуемое на частоте ω_1. Отметим, что здесь, как и в эксперименте, r равнялось значению 0.26.

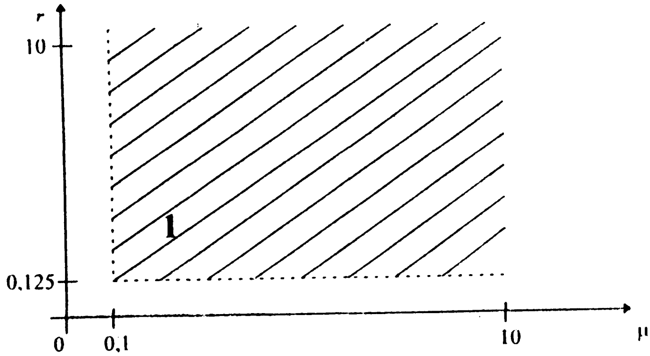

Рис.2.

Рассмотрим теперь случай N=2. Из системы (27), (28) приходим к уравнениям вида

$$\ddot{z}_1 + \left(1 - \frac{i\omega_1 m_1^2 m_2^2}{2}\right)\dot{z}_1 + 2i\dot{y}_1 m_1^2/\omega_1 - 2(\gamma - 1/8)z_1 + 6z_1|z_1|^2 + 12z_1|z_2|^2 + 6\bar{z}_1^2 z_2 = 0, \tag{32}$$

$$\ddot{z}_2 + \left(1 - \frac{i\omega_2 m_1^2 m_2^2}{2}\right)\dot{z}_2 + 2i\dot{y}_2 m_1^2/\omega_2 - 2(\gamma - 1/8)z_2 + 2z_1^3 + 6z_2|z_2|^2 + 12z_2|z_1|^2 = 0, \tag{33}$$

$$\dot{y}_1 + \frac{r}{2}y_1 + \frac{\omega_1 m_2^2}{4}\dot{z}_1 + \frac{\omega_1 m_2^2}{8}z_1 = 0, \tag{34}$$

$$\dot{y}_2 + \frac{r}{2}y_2 + \frac{\omega_2 m_2^2}{4}\dot{z}_2 + \frac{\omega_1 m_2^2}{8}z_2 = 0. \tag{35}$$

Исследование системы (32)-(35) показывает, что у нее имеются три семейства состояний равновесия, однако все они неустойчивы. Аналогичный результат получаем для случаев N=3 и N=4. Более того, проведенный далее анализ позволяет выявить следующее обстоятельство: для произвольного конечного N не выполняются необходимые условия устойчивости состояний равновесия системы (27), (28).

Для доказательства этого утверждения сначала находим состояния равновесия у системы (27), (28). Затем, линеаризуя ее на полученных состояниях равновесия и выделяя действительную и мнимую части, в результате приходим к векторным равенствам:

$$\dot{Z}_N = A_N Z_N, \tag{36}$$

где A_N – матрица $6N\times6N$. Несложный, но громоздкий анализ показывает, что при всех $N\geq2$

$$\mathrm{sp}A>0,$$

причем неравенство (37) выполняется для всех состояний равновесия системы (27), (28).

Таким образом, в заключение можно сделать важный для теории и практики вывод, что введение а автоколебательную систему указанным ранее способом дополнительной добротной LCR-линии разрушает многоцикличность (буферность) и приводит к реализации единственного, близкого к гармоническому, периодического режима на частоте ω_1.

4. К вопросу о переходных процессах в изучаемой модели

Сразу отметим, что опираясь на методику, используемую в [2], можно доказать однозначную разрешимость начальной задачи Коши для исходной краевой задачи (1)-(4). Однако, учитывая полученные выше результаты, интерес представляют лишь те переходные процессы в краевой задаче (1)-(4) или соответственно в системе укороченных уравнений (27), (28), которые «переходят» в физически реализуемое при $\tau\to\infty$ состояние равновесия (31). В связи с этим вернемся к системе (29), (30) и выделим в ней действительную и мнимую части. Далее, составлялась разностная схема и применялся метод Рунге-Кутта для численного решения полученных уравнений. На рис.3 представлены графики 1, 2 соответственно для $\rho_1=\rho_1(\tau)$, $\delta_1=\delta_1(\tau)$, отражающие один из возможных вариантов реализации переходного процесса при достаточно малых начальных условиях и характерных значениях параметров автоколебательной системы.

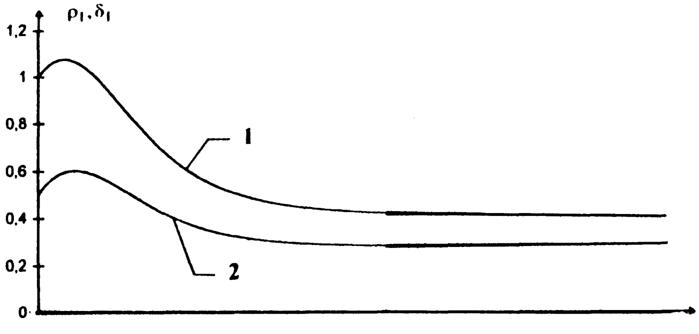

Рис.3

В заключение отметим, что здесь мы специально кратко остановились на этом вопросе, так как на практике информация о переходных процессах в генераторе имеет достаточно важное значение, например, для оценки времени установления стационарных режимов.

5. Экспериментальная часть

Для оценки теоретических результатов был использован базовый автогенератор, принципиальная схема которого представлена в [3]. В качестве дополнительной линии применялся отрезок длинной линии, выполненной в виде прямого соленоида. Суммарные распределенные индуктивность, емкость и сопротивление соответственно равнялись L_2=6.77 мГн, C_2=715.07 пФ, R_2=17 Ом. Напомним, что цепь обратной связи, выполненная также в виде прямого соленоида, имела L_1=55.16 мГн, C_2=87.67 пФ, R_1=540 Ом. Таким образом, были выполнены требования к дополнительной линии в плане ее «настроенности» и добротности. Проведенные эксперименты полностью подтвердили полученные теоретические результаты. При увеличении коэффициента усиления k_0 (возрастания параметра γ) при любых достаточно малых начальных условиях в системе реализовывался единственный периодический режим, близкий к гармоническому (см. рис.4), причем в эксперименте кроме параметров автоколебаний (амплитуды, частоты) определялось время протекания переходного процесса. Экспериментальные данные с хорошей степенью точности (15%) совпали с результатами теории.

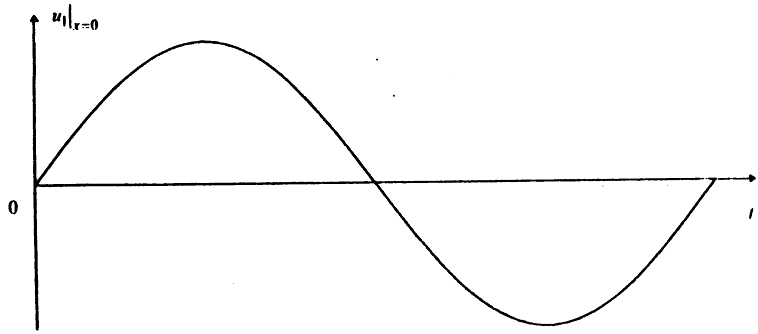

Рис.4.

Заключение

В заключение сформулируем основные выводы, отражающие результаты работы.

1. Построена математическая модель автоколебательной системы, состоящей из базового LCR-генератора и отрезка добротной LCR-линии, сильно взаимодействующей с цепью обратной связи автогенератора.

2. Получил дальнейшее развитие специальный вариант асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского, позволивший провести анализ бифурцирующих автоколебаний.

3. Выявлено, что в системе с ростом коэффициента усиления реализуется единственный периодический режим, близкий к гармоническому, и тем самым вырождается многоцикличность (буферность), которая имела место в базовом автогенераторе.

4. Проанализированы переходные процессы в изучаемой модели, что позволило оценить время установления стационарных колебаний.

5. Теоретические результаты подтверждены экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *И.М.Капчинский.* Методы теории колебаний в радиотехнике. – М.: Госэнергоиздат, 1954, 352с.
2. *В.Ф.Камбулов, А.Ю.Колесов.* Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Математическое моделирование, 1996, т.8, №1, с.93-102.
3. *В.Ф.Камбулов, А.Ю.Колесов.* О специфике генерируемых колебаний в автогенераторе с малым затуханием в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника, 1997, т.42, №8, с.1019-1024.
4. *Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: 1974, 503с.
5. *Е.А.Гребенников.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: 1986, 255с.

Поступила в редакцию 12.01.2000.