

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия в одной краевой задаче с линейным отклонением в краевом условии

Ивановский Л.И.

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Научный центр РАН в Черногловке

leon19unknown@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается краевая задача с линейным отклонением в краевом условии. Для нее изучаются вопросы колебательной и дивергентной потери устойчивости нулевого состояния равновесия соответствующей динамической системы, представляющей собой цепочку из связанных осцилляторов. При численном исследовании особое внимание уделяется значениям начальных параметров, при которых нулевое решение краевой задачи меняет свою устойчивость.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу с линейным отклонением в одном из краевых условий

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u'(1, t) = \alpha u(x_0, t),$$

где параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, а $x_0 \in [0, 1]$.

Наша задача состояла в поиске критических значений параметра $\alpha_{cr}(\gamma)$, при которых нулевое состояние равновесия, одно из решений краевой задачи (1), (2), теряет свою устойчивость. Для нулевого состояния равновесия представляют интерес случаи колебательной и дивергентной потери устойчивости.

2. Аналитическое исследование

Критическую величину $\alpha_{cr}(\gamma)$ можно искать двумя способами. Один из них заключается в построении характеристического уравнения, которое получается путем подстановки в задачу (1), (2) эйлеровой замены. В результате такой подстановки получается

довольно сложное трансцендентное уравнение, для которого можно найти такое значение параметра α , что все корни соответствующего характеристического многочлена будут лежать в левой комплексной полуплоскости, а одна пара будет находиться на мнимой оси. В таком случае будет иметь место бифуркация Андронова-Хопфа в фазовом пространстве краевой задачи (1), (2) и, как следствие, колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия. В то же время, если все собственные числа будут лежать на вещественной оси слева от нулевого корня соответствующего характеристического многочлена, то можно говорить о дивергентной потере устойчивости тривиального решения.

Для изучения фазового портрета краевой задачи (1), (2) используется нормальная форма, которая получается в результате разложения решения по степеням малого параметра

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_2 + O(\varepsilon^2). \quad (3)$$

Малый параметр ε косвенно характеризует собой отклонение от положения равновесия. Для нормальной формы (3) функция u_0 принимает вид

$$u_0 = z(s)e^{\lambda t}w(x),$$

где параметр $s = \varepsilon t$ — медленное время, а λ — собственное значение с нулевой действительной частью. Подстановка разложения (3) в уравнение (1) приводит к системе последовательно разрешимых краевых задач следующего вида

$$\sqrt{\varepsilon} : w'' + (\gamma - \lambda)w = 0 \quad (4)$$

$$w'(0) = 0, \quad (5)$$

$$w'(1) = \alpha_{cr} w(x_0),$$

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} : \frac{\partial u_0}{\partial s} + \dot{u}_2 = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3 \quad (6)$$

$$u_2'(0, t) = 0, \quad (7)$$

$$u_2'(1, t) = \alpha u_2(x_0, t) + u_0(x_0, t).$$

Граничные условия для каждой краевой задачи формируются путем подстановки формулы (3) в краевые условия (2).

Доказательство того факта, что при определенных значениях параметров α и γ все собственные значения линеаризованного дифференциального уравнения (1) будут расположены должным образом, оказывается весьма трудным. Оно заключается в решении

трансцендентного уравнения вида

$$\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + \lambda} = \alpha_{cr} \operatorname{ch}(\sqrt{-\gamma + \lambda} x_0),$$

в случае колебательной потери устойчивости тривиального решения, при $\lambda = i\omega$ и уравнения вида

$$F(\gamma, \alpha_{cr}, x_0) = 0,$$

$$F(\gamma, \alpha_{cr}, x_0) = \begin{cases} \sqrt{\gamma} \sin \sqrt{\gamma} + \alpha_{cr} \cos(\sqrt{\gamma} x_0), & \text{для } \gamma \geq 0, \\ \sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_{cr} \operatorname{ch}(\sqrt{-\gamma} x_0), & \text{для } \gamma < 0. \end{cases}$$

при $\lambda = 0$, в случае дивергентной потери устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (4), (5). В этой связи, поскольку использование одного лишь аналитического аппарата затруднено, представляется естественным применить несколько иной способ получения критической величины $\alpha_{cr}(\gamma)$.

Решая краевую задачу (6), (7) с помощью метода вариации произвольной постоянной, можно получить уравнение на амплитуду колебаний нулевого решения линеаризованной задачи (1), (2), которое будет выглядеть следующим образом:

$$z' = \phi z + dz|z|^2 \quad (8)$$

Исходя из этого, была выведена следующая теорема.

Теорема 1. *В случае $Re(\phi) > 0$, $Re(d) < 0$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в фазовом пространстве краевой задачи (1), (2) наблюдается экспоненциально-орбитально устойчивый цикл.*

Таким образом для исследования динамики фазового портрета вокруг нулевого состояния равновесия достаточно изучить зависимость действительных частей ϕ и d уравнения (8) от значений параметров исходной краевой задачи (1), (2).

3. Результаты численного исследования

Рассмотрим цепочку из n связанных осцилляторов, численно моделирующую краевую задачу (1), (2)

$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

При этом краевые условия заменяются на

$$u_0 = u_1,$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n} u_k. \quad (10)$$

Значение индекса $k \in [1, n]$ соответствующего осциллятора u_k определяется, исходя из значения сдвига x_0 в краевых условиях (2).

Численный способ получения критической величины $\alpha_{cr}(\gamma)$ состоит в решении линейаризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с краевыми условиями (10), для которой значение α при заданном параметре γ выбирается из условий устойчивости или неустойчивости нулевого состояния равновесия. Исследование осуществлялось с помощью специально разработанного приложения. Все трудоемкие расчеты для поставленной задачи были выполнены параллельно, на большом количестве независимых потоков с помощью технологий параллельных вычислений на центральном процессоре компьютера. При численном моделировании уравнения (1), количество осцилляторов n считалось равным 50. Графическая визуализация численных экспериментов для определенных значений параметра x_0 изображена на рис. 1.

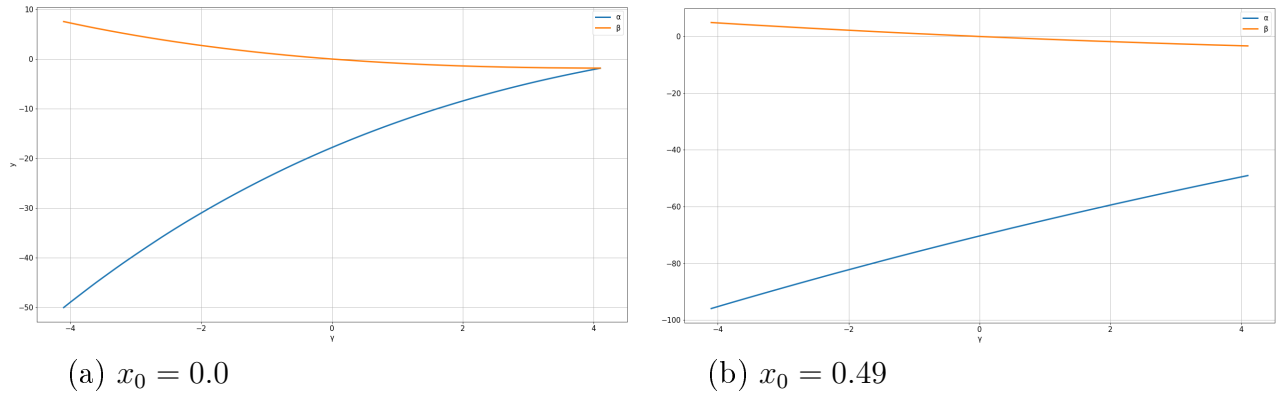


Рис. 1: Критические значения параметров α и γ .

Зависимости $\alpha_c(\gamma)$ и α_u отражают собой критические значения параметров α и γ , при которых происходит колебательная и дивергентная потеря устойчивости соответственно. Кривые α_c и α_u , изображенные на рис. 1., являются важнейшими элементами для построения областей значений параметров, определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия краевой задачи (9), (10). Схематичное изображение этих областей показано на рис. 2.

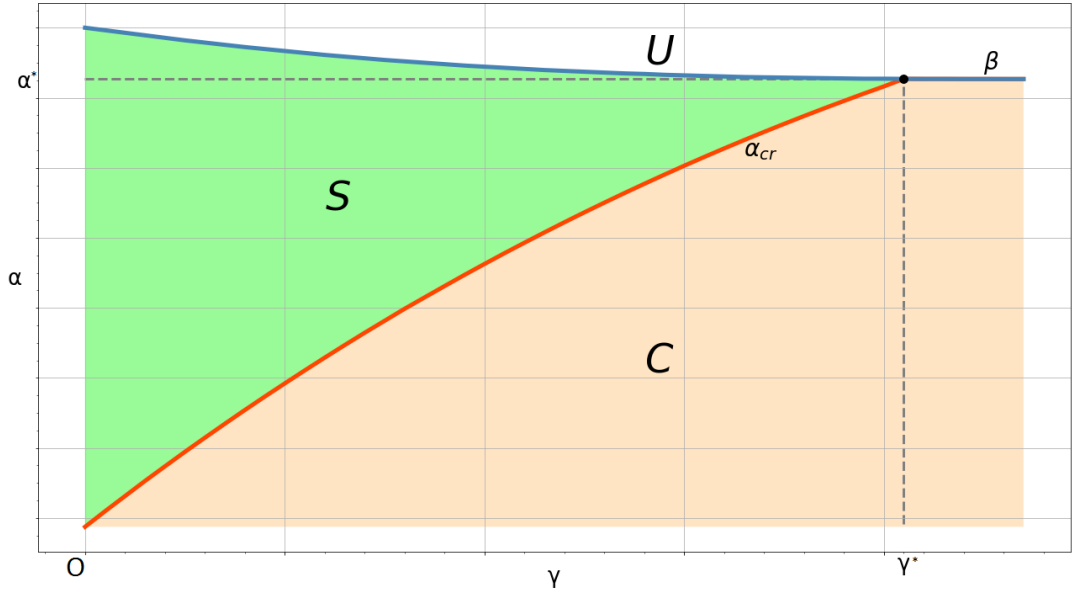


Рис. 2: Разбиение области параметров, соответствующие разным состояниям устойчивости нулевого состояния равновесия.

Области S соответствует значениям параметров, при которых тривиальное решение устойчиво, U — неустойчиво, а C соответствует случаю появления устойчивого цикла вокруг нулевого состояния равновесия с амплитудой колебаний, описываемой уравнением (8).

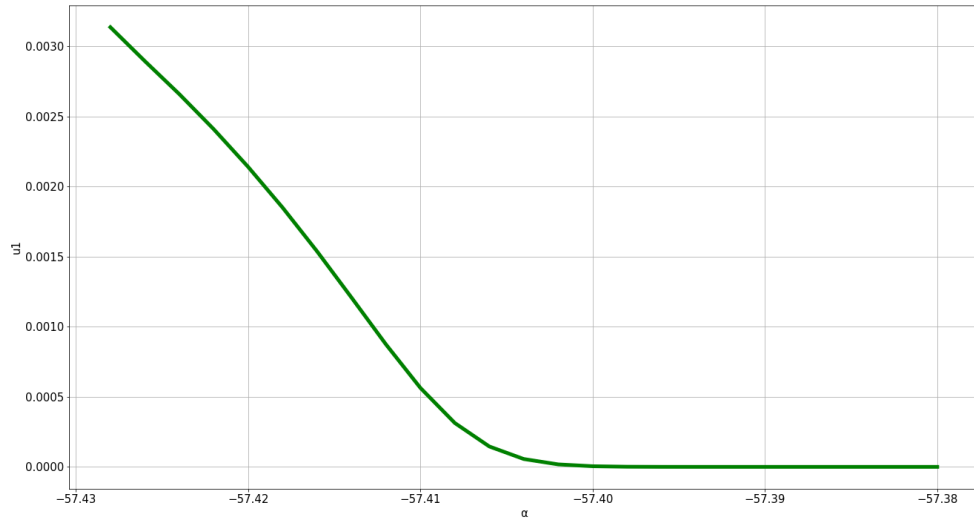


Рис. 3: Амплитуда колебаний нулевого решения ($x_0 = 0.49$, $\gamma = 2.4$).

Как показано на рис. 2, кривые α_c и α_u пересекаются в точке с координатами (γ_*, α_*) , где $\gamma_* > 0$. При увеличении значения параметра x_0 эти кривые продолжают пересекаться, а точка их пересечения смещается вправо по оси γ . Как следствие, была сформулирована следующая теорема.

Теорема 2. $\forall \gamma < \gamma_*$ нулевое состояние равновесия краевой задачи (9), (10) будет асимптотически устойчивым, в случае если $\alpha > \alpha_c$ и $\alpha < \alpha_u$.

Таким образом, в результате численного исследования были получены критические значения α и γ , для которых нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость. Для этих параметров были выделены три области, соответствующие разным состояниям устойчивости тривиального решения системы (9), (10) и, как следствие, краевой задачи (1), (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Список литературы

- [1] Кащенко С.А. “О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), с. 168 – 185.
- [2] L. Ivanovsky, I. Kuksenok. “Oscillating Loss of Stability of Trivial Solution for Boundary-Value Problem with Linear Deviate in Boundary Condition”, *Conference Abstracts of In-ternational Student Conference “Science and Progress-2017”*, p. 102.