

# БИФУРКАЦИИ НУЛЕВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОТКЛОНЕНИЕМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Ивановский Л.И.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Ивановский Леонид Игоревич – аспирант 4 года обучения факультета Информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, лаборант-исследователь ОПСи НЦЧ РАН.

[leon19unknown@gmail.com](mailto:leon19unknown@gmail.com)

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u'(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u'(1, t) = \alpha u(x_0, t),$$

где параметры  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ , а  $x_0 \in [0, 1]$ . Наряду с краевой задачей (1), (2) рассмотрим также систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) - \gamma u_j - u_j^3, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

численно моделирующую эту задачу. При этом краевые условия заменяются на

$$u_0 = u_1, \quad (4)$$

$$u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k.$$

Значение индекса  $k \in [1, N]$  соответствующего осциллятора определяется, исходя из значения сдвига  $x_0$  в краевых условиях (2).

Наша задача состояла в поиске критических значений параметра  $\alpha_{cr}(\gamma)$ , при которых для системы (3) с условиями (4) изменяется устойчивость нулевого решения краевой задачи (1), (2). Эту величину можно искать двумя способами. Один из них состоит в построении характеристического уравнения, которое получается путем подстановки в задачу (1), (2) эйлеровой замены вида  $e^{\lambda t} v(x)$ . В результате подстановки получается довольно сложное трансцендентное уравнение, для которого можно найти такое значение  $\alpha$ , что все корни соответствующего характеристического многочлена будут лежать в левой комплексной полуплоскости, а одна пара будет находиться на мнимой оси. В таком случае будет иметь место колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (1), (2). Доказательство того факта, что все собственные числа линеаризованного уравнения (1), кроме находящихся на мнимой оси, будут расположены в левой комплексной полуплоскости оказывается весьма трудным. В связи с этим, представляется естественным несколько иной путь исследования, который состоит в решении линеаризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) с условиями (4), для которой значение  $\alpha$  выбирается из условий устойчивости или неустойчивости нулевого состояния равновесия. Поскольку найти нужные значения  $\alpha_{cr}(\gamma)$ , с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось численно, с помощью специально разработанного приложения. Все трудоемкие расчеты для поставленной задачи были выполнены параллельно, на большом количестве независимых потоков с помощью технологий параллельных вычислений.

В результате были получены области значений параметров  $\gamma$  и  $\alpha$ , для каждой из которых были изучены свойства устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (1), (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

**Ключевые слова:** фазовые перестройки, нелинейная краевая задача, нулевое состояние равновесия, осцилляторы.

## Список литературы

- [1] Кашенко С.А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем, т. 24, №2, с. 168 – 185 (2017).