АНАЛИЗ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Леонид Ивановский, Илья Куксёнок

Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t-\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \tau,\ \gamma \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= 0, \\ u'(1,t) &= \alpha\, u(x_0, t-\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \tau,\ \gamma \geqslant 0, \quad x_0 \in [0,1].$$

Кащенко С.А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием // Модел. и. анализ информ. систем, №24(2), с. 168–185 (2017).

Нелинейная краевая задача без запаздывания

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u' \,|_{x=0} = 0, \\ u' \,|_{x=1} = \alpha\, u \,|_{x=x_0} \ . \end{gathered} \tag{4}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \gamma \geqslant 0, \quad x_0 \in [0, 1].$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Упрощенная краевая задача

$$u(x,t) = w(x)\,\mathsf{exp}\,(\lambda - \gamma t)$$

Упрощенная краевая задача

$$u(x,t) = w(x)\,\mathsf{exp}\,(\lambda - \gamma t)$$

$$w'' - \lambda w = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0, \\ w'(1) &= \alpha\, w(x_0) e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathrm{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

Граничные условия

$$w(x) = c\,\mathsf{ch}(\mu\, x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

$$x = 1:$$

$$\mu\,\mathrm{sh}\,\mu = \alpha\,\mathrm{ch}(\mu x_0) \tag{7}$$

Колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

Теорема

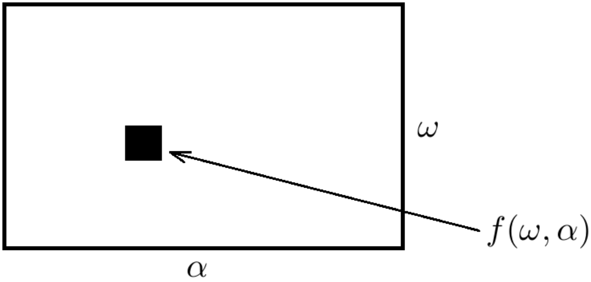
Существует такое $\alpha = \alpha_{cr}$, *для которого* $Re(\lambda_*) = \gamma$ *и для всех остальных собственных значений задачи (5), (6)* $Re(\lambda) < \gamma$.

Численное исследование

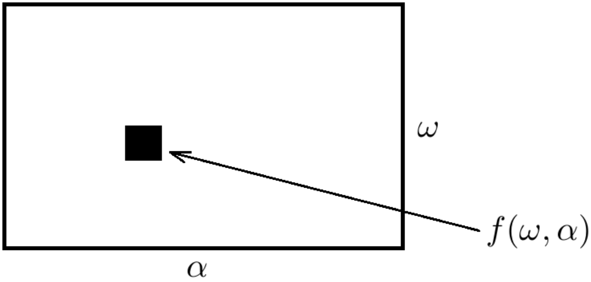
python™

NVIDIA®
CUDA®

Алгоритм



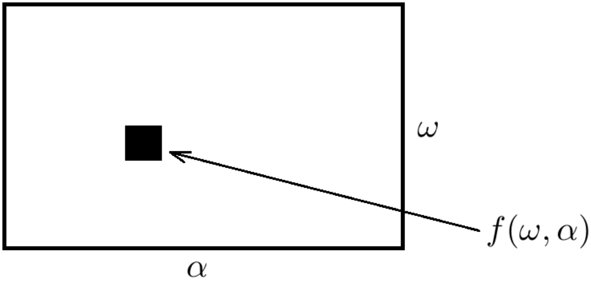
Алгоритм



$$\mu = \pm\sqrt{\lambda} = \sqrt{-\gamma + i\omega}$$

$$f(\omega, \alpha) = \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0) \tag{8}$$

Алгоритм

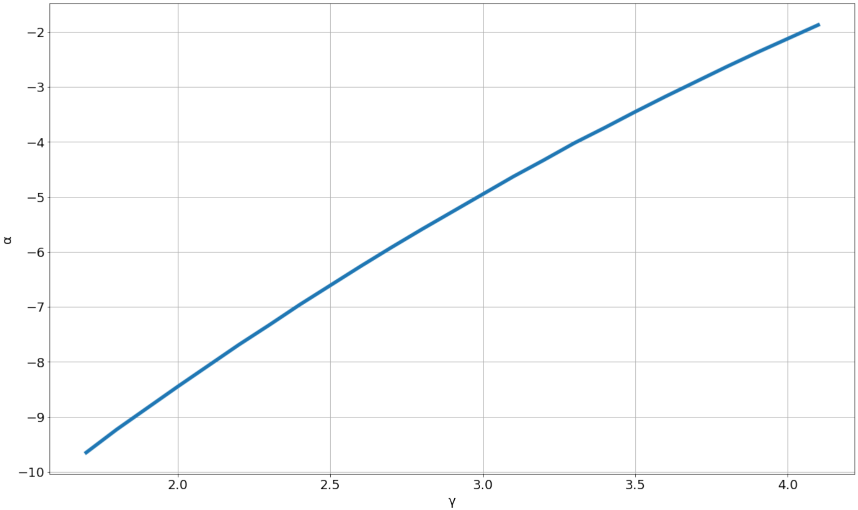


$$\mu = \pm\sqrt{\lambda} = \sqrt{-\gamma + i\omega}$$

$$f(\omega, \alpha) = \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0) \tag{8}$$

$$\alpha_{cr} : \ f(\omega, \alpha_{cr}) = 0.$$

Результаты



Динамическая система

$$\dot{u}_j = p^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) - \gamma\, u_j - v_j^3, \qquad j = \overline{1, p}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1, \\ u_{p+1} &= u_p + \frac{\alpha}{p}\, u_k. \end{aligned}$$

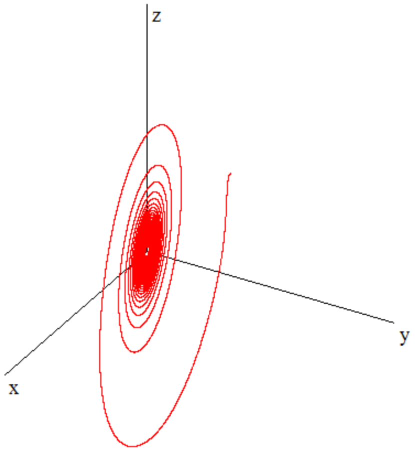
Динамическая система

$$\dot{u}_j = p^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) - \gamma\, u_j - v_j^3, \qquad j = \overline{1,p}, \tag{9}$$

$$u_0 = u_1,$$
$$u_{p+1} = u_p + \frac{\alpha}{p}\, u_k.$$

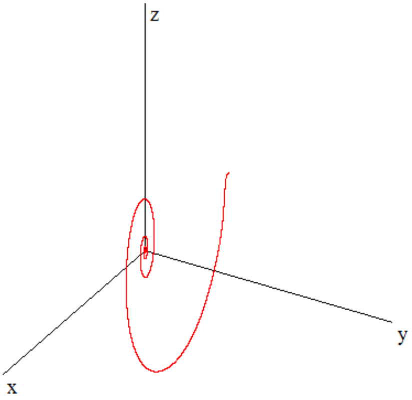
$$k = 1$$

Результаты



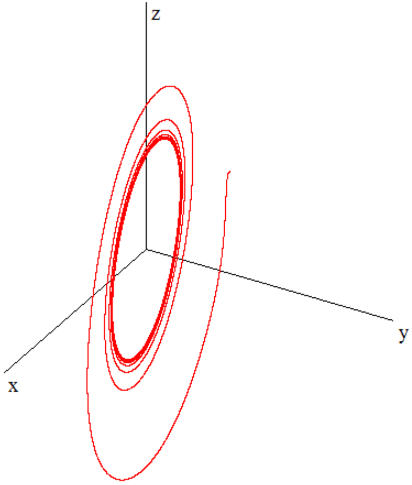
$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -4.0, \quad x_0 = 0$$

Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -2.5, \quad x_0 = 0$$

Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -5.0, \quad x_0 = 0$$

Нормальная форма

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j+1}{2}} u_j(t,s,x), \quad s = \varepsilon t \tag{10}$$

$$u_0(x,t) = z(s)e^{i\omega t}w(x) + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{w(x)} \tag{11}$$

Система последовательно разрешимых краевых задач

$$\begin{aligned}
\sqrt{\varepsilon}: &\quad \dot{u}_0 = u_0'' + u_0 \\
\varepsilon: &\quad \dot{u}_1 = u_1'' + u_1 + f(u_0) \\
\varepsilon^{3/2}: &\quad \dot{u}_2 = u_2'' + u_2 + g(u_0, u_1)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u_0'(0) &= 0, \\ u_0'(1) &= \alpha_{cr} u_0(x_0). \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} u_2'(0) &= 0, \\ u_0'(1) &= \alpha_{cr} u_2(x_0) + u_0(x_0). \end{aligned} \tag{14}$$

$$u_2 = e^{i\omega t} v(x)$$

$$v(x) = c_1(x) ch(\mu x) + c_2(x) sh(\mu x)$$

$$\begin{aligned} c_1(x) &= I_1(x) + q_1 \\ c_2(x) &= I_2(x) + q_2 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int\limits_0^x \left(\frac{z'}{2\mu} w + \frac{3z|z|^2}{2\mu} w|w|^2 \right) e^{-\mu y} dy \\ I_2(x) &= -\int\limits_0^x \left(\frac{z'}{2\mu} w + \frac{3z|z|^2}{2\mu} w|w|^2 \right) e^{\mu y} dy \end{aligned} \tag{16}$$

Нормальная форма

$$\dot{z} = \phi z + dz|z|^2 \tag{17}$$

Теорема

При $Re(\phi) > 0$, $Re(d) < 0$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *наблюдается экспоненциально-орбитально устойчивый цикл, асимптотика которого описывается формулой (10), в которой*
$z(s) = \sqrt{-\frac{Re(\phi)}{Re(d)}} \exp\left(i\left(Im(\phi) - \frac{Im(d)Re(\phi)}{Re(d)}\right)s + i\gamma\right)$