

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

И.А. Винтер, В.Ф. Камбулов, А.С. Прудниченко

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Часть II

Ярославль 1999

ББК В236.35
В50

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент Л.С. Подвальный

кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Винтер И.А., Камбулов В.Ф., Прудниченко А.С.

Автоколебательные системы: Часть II. Учебное пособие / Яросл.
гос. ун-т. Ярославль, 1999. 52 с.

Пособие подготовлено на основе материалов лекционного курса, разработанного авторами и читаемого студентам-математикам, физикам (специальности “Прикладная математика”, “Радиофизика”). Систематически излагается метод нормальных форм (укороченных уравнений) применительно к краевым задачам с частными производными, которые являются математическими моделями одной автоколебательной системы с РС-распределенными параметрами. В пособии использованы результаты собственных исследований авторов.

Предназначено для студентов математического и физического факультетов вузов, аспирантов и соискателей.

Табл. 1. Рис. 26. Библиогр.: 42 назв.

© Ярославский государственный университет, 1999

© Винтер И.А., Камбулов В.Ф., Прудниченко А.С., 1999

Введение

В настоящее время в технике используется все более сложное электронное оборудование, что приводит к необходимости уменьшения веса, габаритов, стоимости и повышения надежности применяемой аппаратуры. Решение возникших проблем в первую очередь связывают с дальнейшим развитием микроэлектроники. В частности, получение на базе пленочной и диффузионной технологий различных новых линий с распределенными параметрами и объемных структур привело к дальнейшему совершенствованию автогенерирующих устройств, сохраняющих традиционные функциональные возможности систем на дискретных элементах. Указанные приборы позволяют решить ряд проблем практики, связанных с конструированием запоминающих устройств, генераторов шума, имеют лучшие энергетические характеристики и т.д. Следует отметить, что изучение предложенных устройств с распределенными параметрами приводит к более глубокому пониманию физики колебательных движений, реализуемых в различных явлениях природы.

Современная радиоэлектронная промышленность накладывает достаточно жесткие требования на работу различных передающих устройств, поэтому возникает практическая необходимость их совершенствования и, тем самым, потребность в дальнейшем развитии теории и методов анализа таких систем.

Во второй части учебного пособия «Автоколебательные системы» продолжено изложение некоторых проблем теории нелинейных колебаний и их устойчивости на примере одной задачи из радиофизики, описывающей работу генератора с каскадно-соединенными RC-структурами. На основе метода нормальных форм (укороченных уравнений) рассмотрены вопросы бифуркации многоциклических [6, 7, 13–21, 23, 24] и двоякопериодических автоколебаний, синхронизации, возбуждение параметрических и автопараметрических колебаний. При этом исследовались как автономные, так и неавтономные краевые задачи, что приводило к необходимости модифицирования применяемых алгоритмов. Особое внимание в работе уделено проблемам математического моделирования распределенных систем, а так же развитию методологических приемов исследования поставленных задач.

Напомним, что в первой части пособия «Автоколебательные системы» рассматривался метод Андронова-Хопфа применительно к радиофизическим задачам, математическими моделями которых являлись краевые задачи с частными производными параболического и гиперболического типов. В заключение отметим, что спецкурс «Автоколебательные системы» – составная часть общего цикла специальных курсов математического и физического факультетов Ярославского госуниверситета им. П.Г. Демидова, посвященных теории нелинейных колебаний и их устойчивости. Материал спецкурса широко использовался в течение более 20 лет при выполнении студентами курсовых и дипломных работ, а также аспирантами и соискателями в их научно-исследовательской деятельности.

Глава 1. Исследование одного автогенератора с RC-распределенными параметрами

В первой главе учебного пособия рассматривается одна математическая модель RC-распределенного автогенератора, в котором при определенных условиях в нерезонансном случае имеет место явление многоцикличности [23]. Из проведенного ранее исследования [13–21] можно сделать вывод, что многоцикличность – неотъемлемое свойство LCRG-автогенераторов. Однако для RC-автоколебательных систем аналогичного заключения сделать нельзя, так как, как правило, в них реализуются одночастотные режимы автоколебаний [4, 5, 26, 31–33, 36, 37]. Поэтому для теории и практики нелинейных колебаний представляет определенный интерес обнаружение многоцикличности в RC-распределенных генераторах, анализ влияния различных параметров системы на ее возникновение, эволюцию и разрушение. Немаловажное значение для бифуркации заданных многоциклических режимов и их стабильности имеет внешнее гармоническое воздействие на автоколебательное устройство. Эти и ряд других проблем многоцикличности изучаются в настоящей главе.

1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим блок-схему RC-автогенератора (рис. 1.1.1), математической моделью которого в случае идеального усилителя является краевая задача [23, 24]

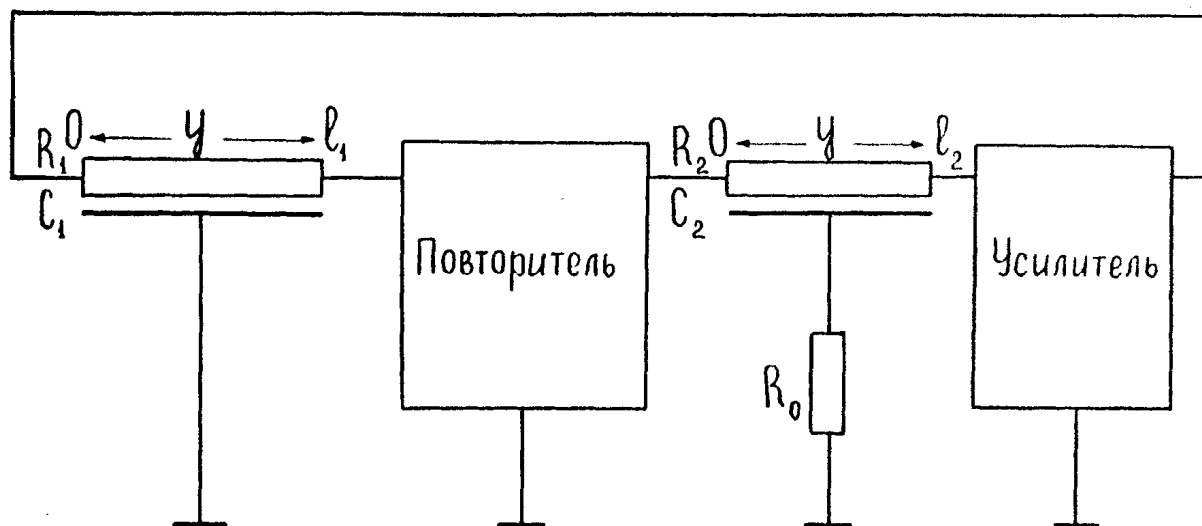


Рис. 1.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Au, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_1 \Big|_{x=1} - u_2 \Big|_{x=0} + \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.1.2)$$

$$u_1|_{x=0} + k_0 \left(u_2|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + k_1 \left(u_2|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 - \\ - k_2 \left(u_2|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^3 = 0 \quad (1.1.3)$$

Здесь $u = \text{color}(u_1, u_2)$ - переменные составляющие напряжения в фильтрах, $x, \tau = t/(l_1^2 R_1 C_1)$ - нормированные координата и время, $\alpha = R_0/R_2$ - положительный параметр, k_0, k_1, k_2 - коэффициенты аппроксимации нелинейной характеристики усилителя,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad a = \frac{l_2^2 R_2 C_2}{l_1^2 R_1 C_1}.$$

Отметим, что использование в указанном выше генераторе в качестве цепи обратной связи фильтра нижних частот и режекторного фильтра принадлежит В.В. Мигулину. Это позволило в рассматриваемой автоколебательной системе реализовать явление многоцикличности, а также при определенной асимметрии нелинейной характеристики получить двухчастотные автоколебания [23, 24].

2. Анализ условий самовозбуждения

Рассмотрим линеаризованную краевую задачу (1.1.1)-(1.1.3), из которой определим условия самовозбуждения автогенератора. Можно показать [23, 24], что характеристическое уравнение этой задачи имеет следующий вид:

$$P(\lambda) = (\text{ch } \sqrt{a\lambda} + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}) \text{ch } \sqrt{\lambda} + k_0 (1 + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}) = 0. \quad (1.2.4)$$

Учитывая тот факт, что k_0 - действительная величина, можно (1.2.4) записать в виде равенств

$$k_0 = -\text{Re} \frac{(\text{ch } \sqrt{a\lambda} + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}) \text{ch } \sqrt{\lambda}}{1 + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}}, \quad (1.2.5)$$

$$\text{Im} \frac{(\text{ch } \sqrt{a\lambda} + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}) \text{ch } \sqrt{\lambda}}{1 + \alpha \sqrt{a\lambda} \text{ sh } \sqrt{a\lambda}} = 0. \quad (1.2.6)$$

Проведем анализ равенств (1.2.5), (1.2.6) в критическом случае, полагая $\lambda = i\omega$. Задавая параметры a и α , из (1.2.5), (1.2.6) численно определяем $k_0 = k_0(a, \alpha, \omega)$, $\omega = \omega(a, \alpha)$. В дальнейшем удобно проводить рассмотрение в плоскости k_0, α , фиксируя a . Например, при $a = 7,9767$ график зависимости k_0 от α имеет вид, изображенный на рис. 1.2.2. При этом для точки B соответственно $\omega_1 = 1,406, \omega_2 = 26,13$ и $\omega_2/\omega_1 = 18,585$.

Учитывая последние данные, приходим к выводу, что в рассматриваемой задаче отсутствуют младшие резонансы (1:1, 1:2, 1:3). Аналогичная картина наблю-

дается при значениях параметра $a \in [7,6125, 8,3316]$. Таким образом, здесь можно воспользоваться алгоритмом построения решения из [23, 24, 28].

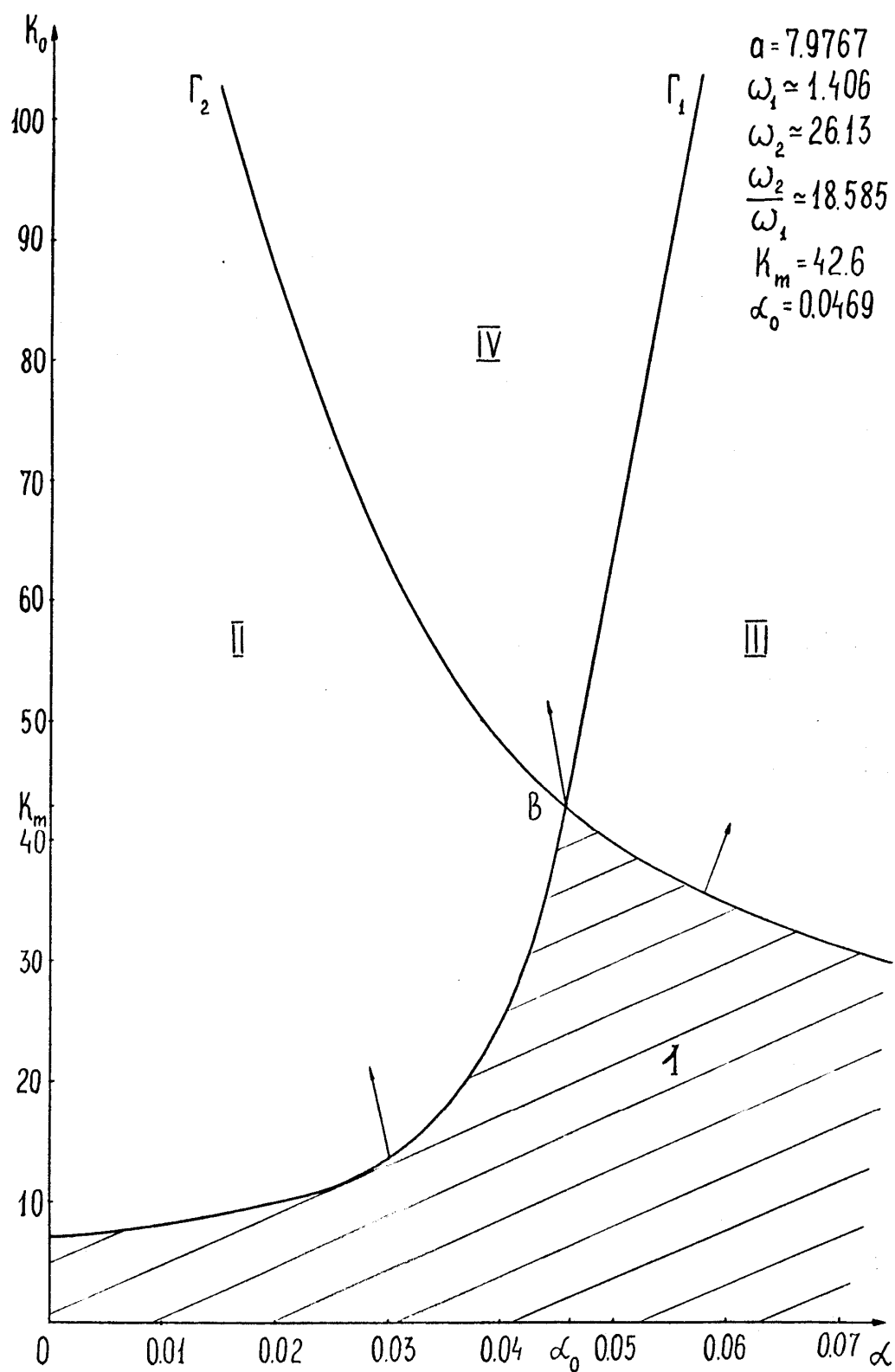


Рис. 1.2.2

Рассмотрим теперь подробнее рис. 1.2.2. Как показал анализ, в плоскости k_0, α , можно выделить характерные области I, II, III, IV. Область I соответствует устойчивому нулевому состоянию равновесия. При переходе из I в области II, III, IV теряется устойчивость колебательным образом, причем в правую комплексную полуплоскость перемещается одна пара простых корней (области II, III), или две пары простых корней уравнения (1.2.4) (область IV). Дальнейшее рассмотрение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) будем проводить для значений параметров k_0, α , из области IV в окрестности точки $B = B(\alpha_0, k_m)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор A , который определим на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad v_1|_{x=1} - v_2|_{x=0} + \alpha \left. \frac{dv_2}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (1.2.7)$$

$$v_1|_{x=0} + k_0 \left(v_2|_{x=1} - \alpha \left. \frac{dv_2}{dx} \right|_{x=0} \right) = 0. \quad (1.2.8)$$

Пусть $\lambda_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \gamma_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \pm i\omega_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $k = 1, 2$ - его собственные значения. Здесь $\varepsilon_1 = k_0 - k_m, \varepsilon_2 = \alpha - \alpha_0$ - малые параметры, причем $\varepsilon_1 > 0$. В дальнейшем нам потребуются величины

$$\gamma'_{kj} = \operatorname{Re} \left. \frac{d\lambda_k}{d\varepsilon_j} \right|_{\varepsilon_j=0}, \quad \omega'_{kj} = \operatorname{Im} \left. \frac{d\lambda_k}{d\varepsilon_j} \right|_{\varepsilon_j=0}, \quad k, j = 1, 2.$$

Пусть $\omega_k = \omega_k(0, 0)$. Можно показать, что

$$\gamma'_{kj} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{a}} \frac{A_{kj}(C_{kj} - D_{kj}) + B_{kj}(C_{kj} + D_{kj})}{A_{kj}^2 + B_{kj}^2},$$

$$\omega'_{kj} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{a}} \frac{A_{kj}(C_{kj} + D_{kj}) + B_{kj}(D_{kj} - C_{kj})}{A_{kj}^2 + B_{kj}^2},$$

где

$$\begin{aligned} A_{k1} = & (1 + \alpha_0)(\operatorname{sh} v_k \cos v_k \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k) + \\ & + \alpha_0 v_k [(\operatorname{ch} v_k \cos v_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k) \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k - \\ & - (\operatorname{sh} v_k \sin v_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k) \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k +] \\ & + \frac{1}{\sqrt{a}} (\operatorname{ch} v_k \cos v_k \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k) + \\ & + \alpha_0 \eta_k [(\operatorname{sh} v_k \cos v_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k) \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k - \\ & - (\operatorname{sh} v_k \cos v_k + \operatorname{ch} v_k \sin v_k) \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_0 k_m [\operatorname{sh} v_k \cos v_k + v_k (\operatorname{ch} v_k \cos v_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k)], \\
A_{k2} &= \operatorname{sh} v_k \cos v_k \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k + \\
& + \frac{1}{\sqrt{a}} (\operatorname{ch} v_k \cos v_k \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k) + \\
& + \alpha_0 [\operatorname{sh} v_k \cos v_k (k_m + \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k) - \operatorname{ch} v_k \sin v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k] + \\
& + \alpha_0 v_k [(\operatorname{ch} v_k \cos v_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k) (\operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + k_m) - \\
& - \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k (\operatorname{sh} v_k \sin v_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k)] \\
& + \alpha_0 \eta_k [\operatorname{sh} v_k \cos v_k (\operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k) - \\
& - \operatorname{ch} v_k \sin v_k (\operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k + \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k)] - \\
B_{k1} &= (1 + \alpha_0) (\operatorname{ch} v_k \sin v_k \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + \operatorname{sh} v_k \cos v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k) + \\
& + \alpha_0 v_k [(\operatorname{sh} v_k \sin v_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k) \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + \\
& + (\operatorname{ch} v_k \cos v_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k) \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k] \\
& + \frac{1}{\sqrt{a}} (\operatorname{sh} v_k \sin v_k \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k) + \\
& + \alpha_0 \eta_k [(\operatorname{sh} v_k \cos v_k + \operatorname{ch} v_k \sin v_k) \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k + \\
& + (\operatorname{sh} v_k \cos v_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k) \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k] + \\
& + \alpha_0 k_m [\operatorname{ch} v_k \sin v_k + v_k (\operatorname{sh} v_k \sin v_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k)], \\
B_{k2} &= \operatorname{ch} v_k \sin v_k \operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + \operatorname{sh} v_k \cos v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k + \\
& + \frac{1}{\sqrt{a}} (\operatorname{ch} v_k \cos v_k \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k + \operatorname{sh} v_k \sin v_k \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k) + \\
& + \alpha_0 [\operatorname{sh} v_k \cos v_k \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k + \operatorname{ch} v_k \sin v_k (\operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + k_m)] + \\
& + \alpha_0 v_k [(\operatorname{sh} v_k \sin v_k + \operatorname{ch} v_k \cos v_k) (\operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + k_m) + \\
& + \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k (\operatorname{ch} v_k \cos v_k - \operatorname{sh} v_k \sin v_k)] + \\
& + \alpha_0 \eta_k [\operatorname{sh} v_k \cos v_k (\operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k + \operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k) + \\
& + \operatorname{ch} v_k \sin v_k (\operatorname{sh} \eta_k \cos \eta_k - \operatorname{ch} \eta_k \sin \eta_k)], \\
C_{k1} &= -1 - \alpha_0 v_k (\operatorname{sh} v_k \cos v_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k), \\
C_{k2} &= -v_k [(\operatorname{sh} v_k \cos v_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k) (\operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + k_m) - \\
& - \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k (\operatorname{ch} v_k \sin v_k + \operatorname{sh} v_k \cos v_k)] \\
D_{k1} &= -\alpha_0 v_k (\operatorname{sh} v_k \cos v_k + \operatorname{ch} v_k \sin v_k), \\
D_{k2} &= -v_k [(\operatorname{sh} v_k \cos v_k + \operatorname{ch} v_k \sin v_k) (\operatorname{ch} \eta_k \cos \eta_k + k_m) + \\
& + \operatorname{sh} \eta_k \sin \eta_k (\operatorname{sh} v_k \cos v_k - \operatorname{ch} v_k \sin v_k)] \\
v_k &= \sqrt{\frac{a \omega_k}{2}}, \quad \eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}.
\end{aligned}$$

Эти формулы будут существенно использованы ниже. В таблице 1.2.1 приведены значения γ'_{kj} , ω'_{kj} для представленных на рис. 1.2.2 данных.

Таблица 1.2.1.

k	γ'_{k1}	γ'_{k2}	ω'_{k1}	ω'_{k2}
1	$1,5964 \cdot 10^{-3}$	$-7,4251$	$1,9517 \cdot 10^{-3}$	$-9,7611$
2	$1,9947 \cdot 10^{-1}$	$1,3865 \cdot 10^2$	$1,5598 \cdot 10^{-1}$	$5,0598 \cdot 10^1$

3. Предварительные сведения

Обозначим через $e_{k0}(x) = e_{k1}(x) + ie_{k2}(x)$ собственные функции оператора A , соответствующие собственным значениям $i\omega_k$, а через $h_{k0} = h_{k1}(x) + ih_{k2}(x)$ – собственные функции оператора A^* , сопряженного к A в смысле гильбертова пространства суммируемых с квадратом функций. Непосредственно проверяется, что можно считать

$$e_{k1}(x) = \text{colon}(e'_{k1}(x), e''_{k1}(x)), e_{k2}(x) = \text{colon}(e'_{k2}(x), e''_{k2}(x)),$$

где

$$\begin{aligned} e'_{k1}(x) &= \\ &= [\text{ch } \nu_k \cos \nu_k + \alpha_0 \nu_k (\text{sh } \nu_k \cos \nu_k - \text{ch } \nu_k \sin \nu_k)] \text{ch } \eta_k(x-1) \cos \eta_k(x-1) - \\ &- [\text{sh } \nu_k \sin \nu_k + \alpha_0 \nu_k (\text{sh } \nu_k \cos \nu_k + \text{ch } \nu_k \sin \nu_k)] \text{sh } \eta_k(x-1) \sin \eta_k(x-1), \\ e''_{k1}(x) &= \text{ch } \nu_k(x-1) \cos \nu_k(x-1), \\ e'_{k2}(x) &= [\text{ch } \nu_k \cos \nu_k + \alpha_0 \nu_k (\text{sh } \nu_k \cos \nu_k - \text{ch } \nu_k \sin \nu_k)] \text{sh } \eta_k(x-1) \sin \eta_k(x-1) + \\ &+ [\text{sh } \nu_k \sin \nu_k + \alpha_0 \nu_k (\text{ch } \nu_k \sin \nu_k + \text{sh } \nu_k \cos \nu_k)] \text{ch } \eta_k(x-1) \cos \eta_k(x-1), \\ e''_{k2}(x) &= \text{sh } \nu_k(x-1) \sin \nu_k(x-1). \end{aligned}$$

При этом $h_{k1}(x)$, $h_{k2}(x)$ удобно определить так, чтобы

$$\int_0^1 h_{ki}(x) e_{kj}(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Положим

$$\begin{aligned} E_{k1}(x, \tau) &= \text{colon}(E'_{k1}(x, \tau), E''_{k1}(x, \tau)) = \\ &= \text{colon}(e'_{k1}(x) \cos \omega_k \tau - e'_{k2}(x) \sin \omega_k \tau, e''_{k1}(x) \cos \omega_k \tau - e''_{k2}(x) \sin \omega_k \tau), \\ E_{k2}(x, \tau) &= \text{colon}(E'_{k2}(x, \tau), E''_{k2}(x, \tau)) = \\ &= \text{colon}(e'_{k1}(x) \sin \omega_k \tau + e'_{k2}(x) \cos \omega_k \tau, e''_{k1}(x) \sin \omega_k \tau + e''_{k2}(x) \cos \omega_k \tau), \\ H_{k1}(x, \tau) &= (H'_{k1}(x, \tau), H''_{k1}(x, \tau)) = \\ &= (h'_{k1}(x) \cos \omega_k \tau - h'_{k2}(x) \sin \omega_k \tau, h''_{k1}(x) \cos \omega_k \tau - h''_{k2}(x) \sin \omega_k \tau), \\ H_{k2}(x, \tau) &= (H'_{k2}(x, \tau), H''_{k2}(x, \tau)) = \\ &= (h'_{k1}(x) \sin \omega_k \tau + h'_{k2}(x) \cos \omega_k \tau, h''_{k1}(x) \sin \omega_k \tau + h''_{k2}(x) \cos \omega_k \tau), \end{aligned}$$

Функции $E_{jj}(x, \tau)$, $j=1, 2$ являются $2\pi/\omega_k$ – периодическими решениями соответствующей (1.1.1)-(1.1.3) линеаризованной задачи при $k_0 = k_m$, $\alpha = \alpha_0$, а функции $H_{kj}(x, \tau)$ – $2\pi/\omega_k$ -периодическими решениями сопряженной задачи.

Ниже потребуются следующие леммы, доказательство которых легко получить, используя некоторые результаты работ [23, 24, 26].

Лемма 1.3.1. Краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Au + f(x, \tau), \quad (1.3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_1 \Big|_{x=1} - u_2 \Big|_{x=0} + \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.3.10)$$

$$u_1 \Big|_{x=0} + k_m \left(u_2 \Big|_{x=1} - \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = \Psi(\tau), \quad (1.3.11)$$

где $f(x, \tau) = \text{colon}(f_1(x, \tau), f_2(x, \tau))$, $\Psi(\tau)$ – некоторые достаточно гладкие по x тригонометрические многочлены по τ , разрешима в классе тригонометрических многочленов в том и только в том случае, если

$$I_{kj}(f, \Psi) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (H_{kj}(x, \omega_k \tau), f_0(x, \tau)) d\tau = 0, \quad (1.3.12)$$

$$f_0(x, \tau) = \text{colon} \left(f_1(x, \tau) - \frac{1}{1 + k_m} \frac{d\Psi}{d\tau}, f_2(x, \tau) - \frac{1}{1 + k_m} \frac{d\Psi}{d\tau} \right),$$

Лемма 1.3.2. Краевая задача (1.3.9)-(1.3.11), где $\psi(\tau)$, $f(x, \tau)$ – достаточно гладкие периодические по τ с периодом $\frac{2\pi}{\omega_k}$ функции, имеет $\frac{2\pi}{\omega_k}$ -периодические решения в том и только том случае, если

$$I_{k1}(f, \psi) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \int_0^1 H_{k1}(x, \omega_k \tau) f(x, \tau) dx d\tau - a(\omega_k) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \psi(\tau) \sin \omega_k \tau d\tau - \quad (1.3.13)$$

$$- b(\omega_k) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \psi(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau = 0,$$

$$I_{k2}(f, \psi) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \int_0^1 H_{k2}(x, \omega_k \tau) f(x, \tau) dx d\tau - b(\omega_k) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \psi(\tau) \sin \omega_k \tau d\tau + \quad (1.3.14)$$

$$+ a(\omega_k) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} \psi(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau = 0$$

Здесь

$$a(\omega_k) = 2 \frac{\omega'_{k1} [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)] + \gamma'_{k1} \alpha_0 \beta(\omega_k)}{[1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 + \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k)},$$

$$b(\omega_k) = 2 \frac{\gamma'_{k1}[1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)] - \omega'_{k1} \alpha_0 \beta(\omega_k)}{[1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 + \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k)},$$

$$\alpha(\omega_k) = -v_k (shv_k \cos v_k - chv_k \sin v_k),$$

$$\beta(\omega_k) = -v_k (chv_k \sin v_k + shv_k \cos v_k).$$

4. Определение параметров автоколебаний. Явление многоцикличности в RC- системе

Пусть $k_0 = k_m + \varepsilon_1$, $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon_2$. Следуя работам [23, 24, 28], будем приближенно искать решение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) в виде

$$u(x, \tau_1, \tau_2) = \sum_{k=1}^2 \xi_k E_{k1}(x, \tau_k) + \sum_{k,j=1}^2 W_{kj}(x, \tau_1, \tau_2) \xi_k \xi_j + \sum_{k,j=1}^2 W_k(x, \tau_1, \tau_2) \xi_k \varepsilon_j +$$

$$+ \sum_{k,j,p=1}^2 W_{kjp}(x, \tau_1, \tau_2) \xi_k \xi_j \xi_p, \quad (1.4.15)$$

где W_k, W_{kj}, W_{kjp} - векторные тригонометрические многочлены векторного переменного $\omega\tau = (\omega_1 \tau_1, \omega_2 \tau_2)$, подлежащие в дальнейшем определению, а ξ_k, τ_k находятся из системы уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \xi_k \left(\sum_{j=1}^2 \gamma'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 \varphi_{kj} \xi_j^2 \right) + \Phi_k(\omega\tau, \xi, \varepsilon_j), \quad (1.4.16)$$

$$\frac{d\tau_k}{d\tau} = 1 + \frac{1}{\omega_k} \sum_{j=1}^2 \omega'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 c_{kj} \xi_j^2 + \frac{1}{\xi_k} \Psi_k(\omega\tau, \xi, \varepsilon_j).$$

Здесь достаточно гладкие функции $\Phi_k(\omega\tau, \xi, \varepsilon_j), \Psi_k(\omega\tau, \xi, \varepsilon_j)$ 2π -периодичны по векторному аргументу $\omega\tau = (\omega_1 \tau_1, \omega_2 \tau_2)$ и их абсолютные значения не превосходят величины $M_{10} \left(|\varepsilon|^2 |\xi|^2 + |\varepsilon| |\xi|^2 + |\xi|^4 \right)$, где $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, а M_{10} - некоторая положительная постоянная.

В (1.4.16) отбросим высшие порядки малости и рассмотрим систему укороченных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \xi_k \left(\sum_{j=1}^2 \gamma'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 \varphi_{kj} \xi_j^2 \right) \quad (1.4.17)$$

$$\frac{d\tau_k}{d\tau} = 1 + \frac{1}{\omega_k} \sum_{j=1}^2 \omega'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 c_{kj} \xi_j^2, \quad (1.4.18)$$

которую и будем называть нормальной формой решений краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3). Составим формальное равенство

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \tau_k} \frac{d\tau_k}{d\tau} = Au - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{d\xi_k}{d\tau}. \quad (1.4.19)$$

Подставим в краевую задачу (1.4.19), (1.1.2), (1.1.3) выражение (1.4.15) с учетом (1.4.17), (1.4.18) и приравняем в получившихся равенствах слева и справа коэффициенты при степенях ξ_1^3, \dots, ξ_2^3 . В результате приходим к четырем неоднородным задачам вида:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \tau_k} &= Au + f(\omega\tau, x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, u_1 \Big|_{x=1} - u_2 \Big|_{x=0} + \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ u_1 \Big|_{x=0} + k_m \left(u_2 \Big|_{x=1} - \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) &= \Psi(\omega\tau), \end{aligned}$$

где $f(\omega\tau, x), \Psi(\omega\tau)$ - тригонометрические многочлены. Для определения коэффициентов φ_{kj}, c_{kj} следует разбить эти многочлены на слагаемые с одинаковой зависимостью от $\omega_1 \tau_1, \omega_2 \tau_2$ и применить к полученным таким образом краевым задачам вида (1.3.9)-(1.3.11) леммы 1.3.1, 1.3.2. Попутно определяются функции $W_{kj}(x, \tau_1, \tau_2)$. После громоздких вычислений приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{kk} &= -0,75k_2 \gamma'_{k1} \{ [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 + \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k) \} - \\ &- 0,5k_1^2 [a(\omega_k) I_{kk} + b(\omega_k) F_{kk}], \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{kj} &= 2\varphi_{jj} \frac{\gamma'_{k1}}{\gamma'_{j1}} - 0,5k_1^2 [a(\omega_k) I_{kj} + b(\omega_k) F_{kj}], k \neq j, \\ c_{kk} &= -0,75k_2 \frac{\omega'_{k1}}{\omega_k} \{ [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 + \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k) \} - \\ &- 0,5k_1^2 [b(\omega_k) I_{kk} - a(\omega_k) F_{kk}], \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

$$c_{kj} = 2c_{jj} \frac{\omega_j \omega'_{k1}}{\omega_k \omega'_{j1}} - 0,5k_1^2 [b(\omega_k) I_{kj} - a(\omega_k) F_{kj}], k \neq j.$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{kk} &= -2a_{k2} + a_{k4} - a_{k5}, F_{kk} = -2a_{k1} - a_{k3} - a_{k6}, \\ I_{kj} &= S_{kj} - \alpha_0 [Q_{kj} + S_{kj} \alpha(\omega_j) + S_0 \beta(\omega_j) - 2R_{j1} \beta(\omega_k)] + \alpha_0^2 [Q_{kj} \alpha(\omega_j) + Q_0 \beta(\omega_j)], \\ F_{kj} &= 2R_{j1} + S_{00} - \alpha_0 [2R_{j1} \alpha(\omega_k) + S_{00} \alpha(\omega_j) - Q_{00} - S_{jk} \beta(\omega_j)] - \\ &- \alpha_0^2 [Q_{jk}(\omega_j) \beta(\omega_j) + Q_{00} \alpha(\omega_j)], \\ a_{k1} &= R_{k1} [\alpha(\omega_k) \alpha_0 - 1], a_{k2} = -\alpha_0 R_{k1} \beta(\omega_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{k3} &= -R_{k2} - \alpha_0 [T_{k1} - R_{k2} \alpha(\omega_k)] + \alpha_0^2 T_{k1} \alpha(\omega_k), \\
a_{k4} &= -\alpha_0 \beta(\omega_k) (R_{k2} + \alpha_0 T_{k1}), \\
a_{k5} &= -R_{k3} - \alpha_0 [T_{k2} - R_{k3} \alpha(\omega_k)] + \alpha_0^2 T_{k2} \alpha(\omega_k), \\
a_{k6} &= -\alpha_0 \beta(\omega_k) (R_{k3} + \alpha_0 T_{k2}), \\
R_{k1} &= \frac{1}{2(1 + k_m)} [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 + \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k), \\
R_{k2} &= \frac{r_{k2} \operatorname{Re} P(2i\omega_k) + 2r_{k3} \operatorname{Im} P(2i\omega_k)}{2|P(2i\omega_k)|^2}, \\
R_{k3} &= \frac{r_{k2} \operatorname{Im} P(2i\omega_k) - 2r_{k3} \operatorname{Re} P(2i\omega_k)}{2|P(2i\omega_k)|^2}, \\
r_{k2} &= [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)]^2 - \alpha_0^2 \beta^2(\omega_k), \quad r_{k3} = -\alpha_0 \beta(\omega_k) [1 - \alpha_0 \alpha(\omega_k)], \\
T_{k1} &= \frac{\sqrt{a\omega_k}}{2|P(2i\omega_k)|^2} \{r_{k2}[(\operatorname{Re} P(2i\omega_k) + \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{sh} \sqrt{a\omega_k} \cos \sqrt{a\omega_k} - \\
&\quad - (\operatorname{Re} P(2i\omega_k) - \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{ch} \sqrt{a\omega_k} \sin \sqrt{a\omega_k}] - 2r_{k3}[(\operatorname{Re} P(2i\omega_k) - \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \times \\
&\quad \times \operatorname{sh} \sqrt{a\omega_k} \cos \sqrt{a\omega_k} + (\operatorname{Re} P(2i\omega_k) + \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{ch} \sqrt{a\omega_k} \sin \sqrt{a\omega_k}]\}, \\
T_{k2} &= -\frac{\sqrt{a\omega_k}}{2|P(2i\omega_k)|^2} \{r_{k2}[(\operatorname{Re} P(2i\omega_k) + \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{ch} \sqrt{a\omega_k} \sin \sqrt{a\omega_k} + \\
&\quad + (\operatorname{Re} P(2i\omega_k) - \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{sh} \sqrt{a\omega_k} \cos \sqrt{a\omega_k}] + 2r_{k3}[(\operatorname{Re} P(2i\omega_k) + \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \times \\
&\quad \times \operatorname{sh} \sqrt{a\omega_k} \cos \sqrt{a\omega_k} - (\operatorname{Re} P(2i\omega_k) - \operatorname{Im} P(2i\omega_k)) \operatorname{ch} \sqrt{a\omega_k} \sin \sqrt{a\omega_k}]\}, \\
S_0 &= S_3 - S_1, \quad S_{00} = S_1 + S_3, \\
S_1 &= \frac{M_1 \operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1)) + N_1 \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))}{|P(i(\omega_2 - \omega_1))|^2}, \\
S_3 &= \frac{M_2 \operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1)) + N_2 \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))}{|P(i(\omega_2 + \omega_1))|^2}, \\
S_{12} &= S_4 - S_2, \quad S_{21} = S_2 + S_4, \\
S_2 &= \frac{M_1 \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1)) - N_1 \operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1))}{|P(i(\omega_2 - \omega_1))|^2}, \\
S_4 &= \frac{M_2 \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1)) - N_2 \operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1))}{|P(i(\omega_2 + \omega_1))|^2}, \\
Q_0 &= Q_1 - Q_3, \quad Q_{00} = Q_1 + Q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4 = & -\frac{\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}}}{|P(i(\omega_2 + \omega_1))|^2} \{M_2[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))] \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} + (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))) \times \\
& \times sh\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \cos\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}}] - N_2[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))] \times \\
& \times sh\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \cos\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} - (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))) \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}}\},
\end{aligned}$$

$$M_1 = 1 - \alpha_0[\alpha(\omega_1) + \alpha(\omega_2)] + \alpha_0^2[\alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2) + \beta(\omega_1)\beta(\omega_2)],$$

$$M_2 = 1 - \alpha_0[\alpha(\omega_1) + \alpha(\omega_2)] + \alpha_0^2[\alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2) - \beta(\omega_1)\beta(\omega_2)],$$

$$N_1 = -\alpha_0[\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1) - \alpha_0(\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \alpha(\omega_2)\beta(\omega_1))],$$

$$N_2 = -\alpha_0[\beta(\omega_2) + \beta(\omega_1) - \alpha_0(\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) + \alpha(\omega_2)\beta(\omega_1))].$$

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \frac{\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}}}{|P(i(\omega_2 - \omega_1))|^2} \{M_1[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))] \times \\
& \times sh\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \cos\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} - (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))) \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}}] - N_1[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))] \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} + (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))) \times \\
& \times sh\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \cos\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 = & \frac{\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}}}{|P(i(\omega_2 + \omega_1))|^2} \{M_2[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))] \times \\
& \times sh\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \cos\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} - (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1)) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))) \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}}] - N_2[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))] \times \\
& \times ch\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \sin\sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} + (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 + \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 + \omega_1))) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times sh \sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \cos \sqrt{\frac{a(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \}}, \\
& Q_{12} = Q_2 - Q_4, Q_{21} = -Q_2 - Q_4, \\
& Q_2 = -\frac{\sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}}}{|P(i(\omega_2 - \omega_1))|^2} \{M_1[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))] \times \\
& \times ch \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \sin \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} + (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))) \times \\
& \times sh \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \cos \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} + N_1[(\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1))) + \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))] \times \\
& \times sh \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \cos \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} - (\operatorname{Re} P(i(\omega_2 - \omega_1)) - \operatorname{Im} P(i(\omega_2 - \omega_1))) \times \\
& \times ch \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \sin \sqrt{\frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \}},
\end{aligned}$$

Например, для значений параметров $a, \alpha_0, k_m, \omega_j$, приведенных на рис. 1.2.2, и данных из таблицы 1.3.1 коэффициенты нормальной формы соответственно равны

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -3,1315 \cdot 10^{-5} k_2 - 1,4719 \cdot 10^{-6} k_1^2, \\
\varphi_{22} &= -1,2626 \cdot 10^7 k_2 - 3,6045 \cdot 10^5 k_1^2,
\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{21} &= -7,8260 \cdot 10^{-3} k_2 - 5,8892 \cdot 10^{-4} k_1^2, \\
\varphi_{12} &= -2,0208 \cdot 10^5 k_2 + 3,5089 \cdot 10^4 k_1^2, \\
c_{11} &= -2,7231 \cdot 10^{-5} k_2 - 1,9019 \cdot 10^{-6} k_1^2, \\
c_{22} &= -3,7784 \cdot 10^5 k_2 - 3,6255 \cdot 10^5 k_1^2, \\
c_{12} &= -1,7573 \cdot 10^5 k_2 - 2,1368 \cdot 10^5 k_1^2, \\
c_{21} &= -2,3425 \cdot 10^{-4} k_2 - 1,8917 \cdot 10^{-4} k_1^2.
\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Отметим еще, что функции $W_{kj}(x, \tau_1, \tau_2)$ имеют вид

$$W_{12}(x, \tau_1, \tau_2) = \sum_{k=1}^2 [u_{k1}(x, \tau_1, \tau_2) + u_{k2}(x, \tau_1, \tau_2)], \tag{1.4.24}$$

$$W_{kk}(x, \tau_1, \tau_2) = \operatorname{color}(-R_{k1} - \frac{k_1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{r_{k2} L(x_{k1}) ch[x_{k2}(x-1)] \exp(x_{k2} \tau_k)}{P(x_{k1})} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + k_1 \operatorname{Im} \left[\frac{r_{k3} L(x_{k1}) \operatorname{ch}[x_{k2}(x-1)] \exp(x_{k2}\tau_k)}{P(x_{k1})} \right], \\
& - R_{k1} - \frac{k_1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{r_{k2} \operatorname{ch}[x_{k1}(x-1)] \exp(x_{k2}\tau_k)}{P(x_{k1})} \right] + \\
& + k_1 \operatorname{Im} \left[\frac{r_{k3} \operatorname{ch}[x_{k1}(x-1)] \exp(x_{k2}\tau_k)}{P(x_{k1})} \right], \\
u_{k1}(x, \tau_1, \tau_2) = & \operatorname{colon}(-k_1 \operatorname{Re} \left[\frac{M_k L(y_{k1}) \operatorname{ch}[y_{k2}(x-1)] \exp(iz_k)}{P(y_{k1})} \right], \\
& - k_1 \operatorname{Re} \left[\frac{M_k \operatorname{ch}[y_{k1}(x-1)] \exp(iz_k)}{P(y_{k1})} \right]), \\
u_{k2}(x, \tau_1, \tau_2) = & \operatorname{colon}(k_1 \operatorname{Im} \left[\frac{N_k L(y_{k1}) \operatorname{ch}[y_{k2}(x-1)] \exp(iz_k)}{P(y_{k1})} \right], \\
& k_1 \operatorname{Im} \left[\frac{N_k \operatorname{ch}[y_{k1}(x-1)] \exp(iz_k)}{P(y_{k1})} \right]),
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

где

$$\begin{aligned}
L(x_{k1}) &= \operatorname{ch} x_{k1} + \alpha_0 x_{k1} \operatorname{sh} x_{k1}, \\
x_{k1} &= \sqrt{2ia\omega_k}, x_{k2} = \sqrt{2i\omega_k}, y_{11} = \sqrt{ia(\omega_2 - \omega_1)}, y_{21} = \sqrt{ia(\omega_2 + \omega_1)}, \\
y_{12} &= \sqrt{i(\omega_2 - \omega_1)}, y_{22} = \sqrt{i(\omega_2 + \omega_1)}, z_1 = \omega_2\tau_2 - \omega_1\tau_1, z_2 = \omega_2\tau_2 + \omega_1\tau_1.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для установившихся колебательных режимов правые части равенств (1.4.17), (1.4.18) соответственно равны

$$\xi_k \left(\sum_{j=1}^2 \gamma'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 \varphi_{kj} \xi_j^2 \right) = 0, \tag{1.4.26}$$

$$1 + \frac{1}{\omega_k} \sum_{j=1}^2 \omega'_{kj} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^2 c_{kj} \xi_j^2 = c_k, \tag{1.4.27}$$

где c_k - некоторые константы.

Рассмотрим систему уравнений (1.4.26). Здесь могут представиться три возможности: 1) $\xi_1 \neq 0, \xi_2 = 0$; 2) $\xi_1 = 0, \xi_2 \neq 0$; 3) $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$. Простой численный анализ, проведенный на основе полученных ранее формул, показывает, что при определенных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ возможна одновременная реализация этих трех случаев. При этом в первых двух

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sqrt{-\frac{\sum_{j=1}^2 \gamma'_{1j} \varepsilon_j}{\varphi_{11}}}, \xi_2 = 0, \\
\xi_1 &= 0, \xi_2 = \sqrt{-\frac{\sum_{j=1}^2 \gamma'_{2j} \varepsilon_j}{\varphi_{22}}},
\end{aligned} \tag{1.4.28}$$

а в третьем случае

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \xi_2 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}, \quad (1.4.29)$$

где

$$\Delta = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}, \Delta_1 = \varphi_{12} \sum_{j=1}^2 \gamma'_{2j}\varepsilon_j - \varphi_{22} \sum_{j=1}^2 \gamma'_{1j}\varepsilon_j,$$

$$\Delta_2 = \varphi_{21} \sum_{j=1}^2 \gamma'_{1j}\varepsilon_j - \varphi_{11} \sum_{j=1}^2 \gamma'_{2j}\varepsilon_j.$$

Отметим, что состояниям равновесия (1.4.28), (1.4.29) системы уравнений (1.4.17) соответствуют периодические (одночастотные) или двоякопериодические (двухчастотные) решения исходной краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3), причем их устойчивость связана с устойчивостью состояний равновесия.

Рассмотрим случай симметричной нелинейной характеристики ($k_1 = 0$). В работах [23, 24] показано, что в этой ситуации в зависимости от начальных условий реализуется одночастотный режим автоколебаний на частоте ω_1 или ω_2 , то есть имеет место гармоническая многоцикличность. Как отмечалось ранее, автогенератор в таком режиме генерации может быть использован в качестве запоминающего устройства. Естественно, имеет практический интерес определение области значений параметров автогенератора, при которых возможен подобный режим работы. На рис. 1.4.1 представлена область G_1 малых параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при которых реализуется указанный случай, причем границы области G_1 определяются из уравнений

$$\gamma'_{11}\varepsilon_1 + \gamma'_{12}\varepsilon_2 = 0, \gamma'_{21}\varepsilon_1 + \gamma'_{22}\varepsilon_2 = 0.$$

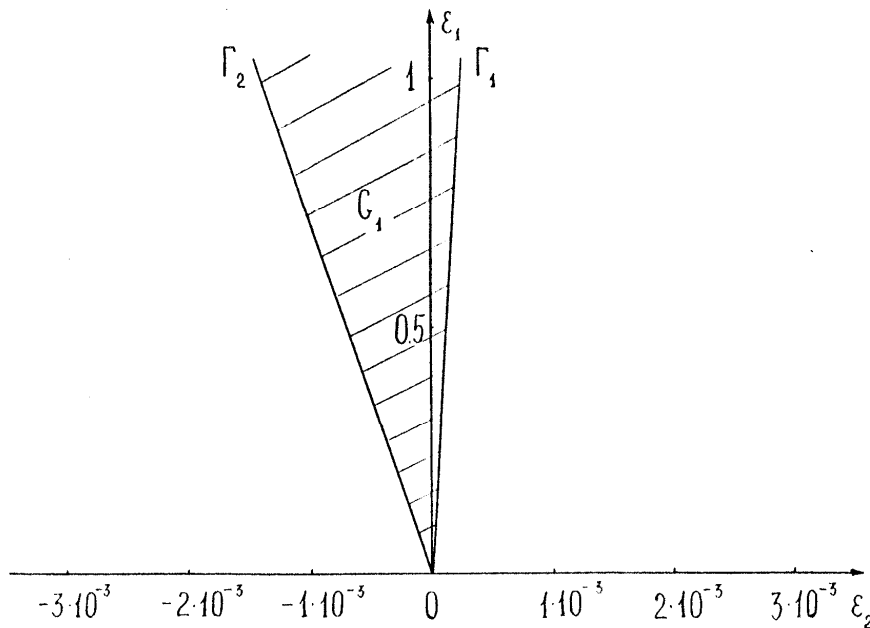


Рис. 1.4.1.

5. Влияние нелинейности активного элемента на многоцикличность в RC-автогенераторе

В работах [23, 24] исследовалась эволюция многоцикличности в зависимости от изменения различных параметров автоколебательных систем: коэффициента усиления, активных потерь в линиях, входных и выходных импедансов усилителя, “паразитных” факторов и т.д. Напомним, что в LCRG - генераторах нелинейность (симметричная или асимметричная) не оказывала существенного влияния на многоцикличность, так как частоты самовозбуждения, определяемые из линеаризованной задачи, находились в резонансных соотношениях. Иная ситуация наблюдается в рассматриваемом RC-автогенераторе, где имеет место существенно нерезонансный случай ($\omega_2 / \omega_1 = 18,585$). Поэтому априори не ясно, как отразится на бифуркацию автоколебаний в системе наличие асимметрии нелинейной характеристики активного элемента.

Пусть $k_1 \neq 0$, то есть нелинейность асимметрична. Здесь, как показал анализ состояний равновесия (1.4.28), (1.4.29), при определенных значениях k_1 может качественно измениться ситуация. Одночастотные режимы становятся неустойчивыми, и реализуется двухчастотный режим автоколебаний [23, 24], то есть происходит вырождение многоцикличности. С физической точки зрения такое поведение одночастотных режимов связано с ослаблением “конкуренции” между ними в силу возникновения “завязки” через гармоники, отвечающие комбинационным частотам $\omega_1 + \omega_2, \omega_2 - \omega_1$. На рис. 1.5.1 представлены области I, II значений коэффициентов k_1, k_2 , при которых реализуются соответственно неустойчивые и устойчивые двухчастотные автоколебания.

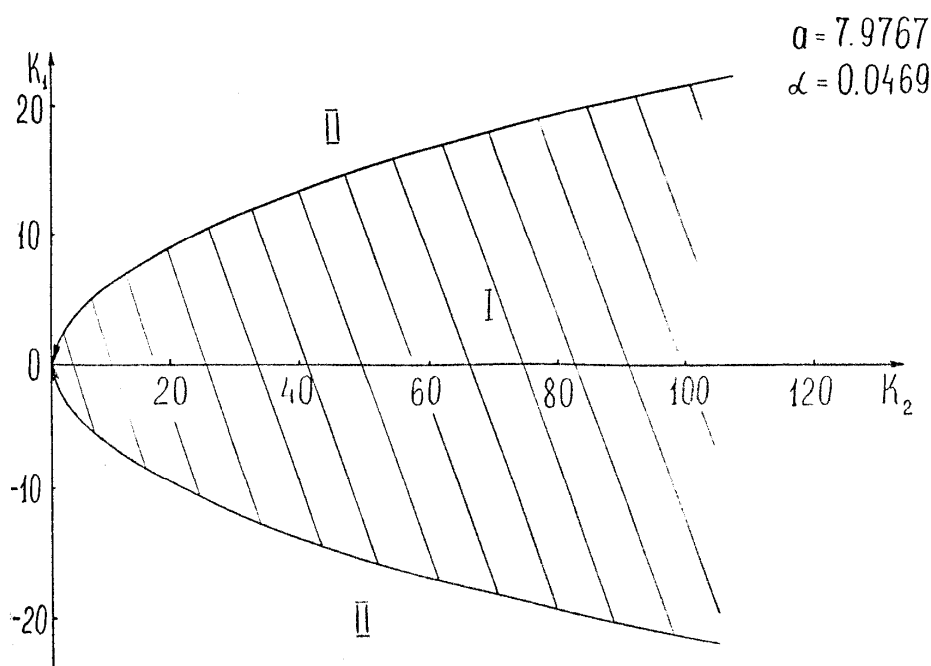


Рис. 1.5.1.

Так, например, при $k_1 = 50, k_2 = 100, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1,6 \cdot 10^{-4}$ из формул (1.4.29) находим

$$\xi_1 = 0,3081, \xi_2 = 1,8782 \cdot 10^{-6}.$$

На рис. 1.5.2 показана область D значений параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при которых могут существовать устойчивые двухчастотные автоколебания, причем граница области определяется из уравнений

$$\begin{aligned} (\gamma'_{21}\varphi_{12} - \gamma'_{11}\varphi_{22})\varepsilon_1 + (\gamma'_{22}\varphi_{12} - \gamma'_{12}\varphi_{22})\varepsilon_2 &= 0, \\ (\gamma'_{11}\varphi_{21} - \gamma'_{21}\varphi_{11})\varepsilon_1 + (\gamma'_{12}\varphi_{21} - \gamma'_{22}\varphi_{11})\varepsilon_2 &= 0. \end{aligned}$$

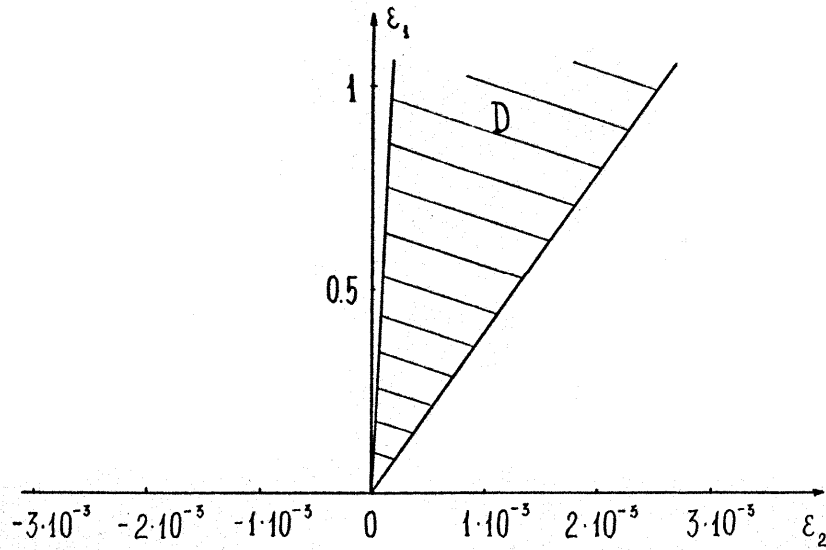


Рис. 1.5.2.

Из этого рисунка в частности видно, что при $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 = 0$, то есть одновременном переходе двух пар корней характеристического уравнения (1.2.1) через мнимую ось в правую комплексную полуплоскость, устойчивые двухчастотные режимы не реализуются.

В заключение сформулируем следующее предложение, доказательство которого следует из проведенного анализа.

Предложение 1.5.1. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ таковы, что реализуются возможности 1) - 3). Тогда существуют области значений параметров k_1, k_2 , при которых краевая задача (1.1.1)-(1.1.3) имеет устойчивые периодические решения

$$u_k(x, \tau) = \xi_k E_{k1}(x, \tau_k) + \xi^2 W_{kk}(x, \tau_k) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (1.5.1)$$

$$\tau_k = c_k \tau,$$

$$k = 1, 2$$

или устойчивое двоякопериодическое решение

$$u(x, \tau) = \sum_{k=1}^2 \xi_k E_{k1}(x, \tau_k) + \sum_{k,j=1}^2 W_{kj}(x, \tau_1, \tau_2) \xi_k \xi_j + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (1.5.2)$$

Отметим, что реализация первого или второго периодического решения (1.5.2) зависит от задания начальных условий.

Глава 2. Исследование внешнего воздействия на возбуждение и стабилизацию многоциклических режимов

В этой главе изучаются вопросы, связанные с возбуждением в RC-автогенераторе заданных многоциклических режимов и их стабильностью в результате воздействия на систему внешней гармонической силы. Отметим, что выход в многоциклической системе на определенный режим генерации вызывает определенные затруднения: проблема заключается в квалифицированном задании соответствующих начальных условий. При этом в практическом применении явления многоциклическости, например, при создании ячеек памяти, необходимо однозначно “вызывать” тот или иной автоколебательный режим. В работах [22, 24, 31, 40] предлагается один из способов решения этой проблемы путем параметрического возбуждения при основном резонансе 1:2 заданного режима колебаний. Анализируются условия возбуждения колебаний при неосновных резонансах 1:1, 1:3.

Важной задачей при использовании многоциклическости на практике также является создание стабильных режимов генерации. Это связано с тем, что в распределенных системах, как правило, многоциклическость реализуется в большом числе циклов [6, 7, 13, 22, 42] и из-за флуктуаций происходят хаотические перескоки с одного режима генерации на другой. В этой главе исследуется вопрос о стабилизации бифурцирующих автоколебаний путем их синхронизации внешней гармонической силой при резонансе 1:1.

1. Синхронизация бифурцирующих автоколебаний при резонансе 1:1

Рассмотрим RC-автогенератор (рис. 1.1.1), когда в нем реализуются одночастотные автоколебательные режимы на частотах ω_1 или ω_2 , определяемые формулой (1.5.1). Исследуем задачу о синхронизации таких автоколебаний в случае резонанса 1:1. Пусть на вход усилителя подается гармоническое воздействие с частотой, близкой к частоте автоколебаний. Как известно, при определенных условиях происходит захват автоколебаний, то есть наблюдается явление синхронизации. Математической моделью рассматриваемой системы служит следующая краевая задача [24]

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau} = Au_k, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_{k1} \Big|_{x=1} - u_{k2} \Big|_{x=0} + \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$u_{k1} \Big|_{x=0} + k_0 \sigma - k_2 \sigma^3 = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.1.3)$$

$$\sigma = u_{k2} \Big|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} + \mu_k \cos \omega_{k0} \tau.$$

Можно показать [24], что синхронизация наступает, когда наименьший порядок амплитуды внешнего воздействия μ_k при наибольшем порядке расстройки частоты ω_{k0} относительно частоты автоколебаний соответственно равны $\varepsilon_1^{3/2}$ и ε_1 . Положим

$$\mu_k = \varepsilon_1^{3/2} A_k, \omega_{k0} = \omega_k (1 + \varepsilon_1 \delta_k). \quad (2.1.4)$$

Вводя новое время (см. (2.1.8)), запишем краевую задачу (2.1.1)-(2.1.3) в виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau_k} = (1 + \varepsilon_1 \delta_k)^{-1} A u_k, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, u_{k1} \Big|_{x=1} - u_{k2} \Big|_{x=0} + \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.1.6)$$

$$u_{k1} \Big|_{x=0} + k_0 \sigma_1 - k_2 \sigma_1^3 = 0, \quad (2.1.7)$$

где

$$\sigma_1 = u_{k2} \Big|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} + \varepsilon_1^{3/2} A_k \cos \omega_k (\bar{\tau}_k + \gamma_k).$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся методикой из работ [24, 26] и результатами предыдущих разделов. Будем искать решения краевой задачи (2.1.5)-(2.1.7) приближенно в виде

$$u_k(x, \tau) = \nu \beta_k(\nu) E_{k1}(x, \bar{\tau}_k) + \nu^3 \beta_k^3(\nu) W_k(x, \bar{\tau}_k), \quad (2.1.8)$$

где $\nu = \sqrt{\varepsilon_1}$, $\bar{\tau}_k = (1 + \varepsilon_1 \delta_k)[\tau - \gamma_k(\nu)]$, а функции $E_{k1}(x, \bar{\tau}_k)$, $W_k(x, \bar{\tau}_k)$ имеют тот же смысл, что и в разделе 5.

Подставим (2.1.8) в краевую задачу (2.1.5)-(2.1.7) и соберем коэффициенты при ν^3 . Далее, к полученной краевой задаче применим критерий существования $\frac{2\pi}{\omega_k}$ -периодических решений (лемма 1.3.2). После громоздких вычислений для определения $\beta_{k0} = \beta_k(0)$, $\gamma_{k0} = \gamma_k(0)$ получаем систему уравнений

$$2(\gamma'_{k1} \beta_{k0} + \varphi_{kk} \beta_{k0}^3) = -k_m A_k [b(\omega_k) \cos \omega_k \gamma_{k0} - a(\omega_k) \sin \omega_k \gamma_{k0}], \quad (2.1.9)$$

$$2(\Delta_k \beta_{k0} - \omega_k c_{kk} \beta_{k0}^3) = k_m A_k [b(\omega_k) \sin \omega_k \gamma_{k0} + a(\omega_k) \cos \omega_k \gamma_{k0}], \quad (2.1.10)$$

где $\Delta_k = \omega_k \delta_k - \omega'_{k1}$, а $k_m, \omega_k, a(\omega_k), b(\omega_k), \gamma'_{k1}, \varphi_{kk}, c_{kk}, \omega'_{k1}$ были определены ранее. Исключая из (2.1.9), (2.1.10) γ_{k0} , получаем для нахождения β_{k0} уравнение

$$4\beta_{k0}^2 \left[(\gamma'_{k1} + \varphi_{kk} \beta_{k0}^2)^2 + (\Delta_k - \omega_k c_{kk} \beta_{k0}^2)^2 \right] = k_m^2 A_k^2 [a^2(\omega_k) + b^2(\omega_k)] \quad (2.1.11)$$

Для определения γ_{k0} можно, например, воспользоваться равенством (2.1.9), из которого

$$\gamma_{k0} = \frac{1}{\omega_k} \arccos \frac{-2(\gamma'_{k1}\beta_{k0} + \varphi_{kk}\beta_{k0}^3)}{k_m A_m \rho(\omega_k)} - \theta_k,$$

где

$$\theta_k = \frac{1}{\omega_k} \arcsin \frac{a_k}{\rho(\omega_k)}, \rho(\omega_k) = \sqrt{a^2(\omega_k) + b^2(\omega_k)}.$$

Фазы синхронизации φ_{k0} определяются по формуле

$$\varphi_{k0} = (1 + \varepsilon_1 \delta_k) \omega_k \gamma_{k0}. \quad (2.1.12)$$

Исследование устойчивости синхронизированных автоколебаний можно провести на основе методики, изложенной в работах [22, 24, 26, 27]. Однако можно предложить и другой подход к решению этого вопроса, позволяющий также проанализировать переходной процесс при синхронизации.

Будем искать решение, отвечающее синхронизированным автоколебаниям, в виде

$$u_k(x, t, \tau) = B_k(\tau) E_{k1}(x, \omega_{k0}t - \varphi_k(\tau)), \quad (2.1.13)$$

полагая $B_k(\tau), \varphi_k(\tau)$ медленными функциями времени. Подставим (2.1.13) в краевую задачу (2.1.1)-(2.1.3) и приведем ее к виду (1.3.9)-(1.3.11), где

$$\begin{aligned} f_k(x, t, \tau) &= \Delta_{k1} B_k E_{k2} - B_k E_{k1} - B \varphi E_{k2}, \\ \Psi_k(t, \tau) &= -\varepsilon_1 \left(B_k E_{k1}''|_{x=1} - \alpha \frac{\partial E_{k1}}{\partial x} \Big|_{x=0} B_k + \mu_k \cos \omega_{k0} t \right) + \\ &+ k_2 \left(B_k E_{k1}''|_{x=1} - \alpha B_k \frac{\partial E_{k1}''}{\partial x} \Big|_{x=0} + \mu_k \cos \omega_{k0} t \right)^3. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{k1} = \omega_{k0} - \omega_k$. Далее к этой краевой задаче применим критерий существования периодических решений, считая функции $B_k(\tau), \varphi_k(\tau)$ константами за периоды $\frac{2\pi}{\omega_k}$. На этом пути для $B_k(\tau), \varphi_k(\tau)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_k &= \gamma'_{k1} \varepsilon_1 B_k + \varphi_{kk} B_k^3 + k_m \mu_k \frac{b(\omega_k) \cos \varphi_k - a(\omega_k) \sin \varphi_k}{2}, \\ B \varphi_k &= \Delta_{k0} B_k - \omega_k c_{kk} B_k^3 - k_m \mu_k \frac{b(\omega_k) \sin \varphi_k + a(\omega_k) \cos \varphi_k}{2}, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

где $\Delta_{k0} = \varepsilon_1(\omega_k \delta_k - \omega'_{k1})$. Если теперь положить в установившемся режиме

$$B_k = \sqrt{\varepsilon_1} \beta_{k0}, \mu_k = \varepsilon^{3/2} A_k, \varphi_k = \omega_k \gamma_{k0},$$

то легко получаем систему уравнений (2.1.9), (2.1.10), из которой находятся β_{k0}, γ_{k0} .

Таким образом, исследование устойчивости синхронизированных автоколебаний сводится к анализу устойчивости состояния равновесия β_{k0}, γ_{k0} системы уравнений (2.1.14). Можно показать, что при выполнении неравенств

$$\begin{aligned} \gamma'_{k1} + 2\beta_{k0}^2 \varphi_{kk} &< 0, \\ (\gamma'_{k1} + 2\beta_{k0}^2 \varphi_{kk})^2 + (\Delta_k - 2\beta_{k0}^2 \omega_k c_{kk})^2 - \beta_{k0}^4 \varphi_{kk}^2 - \omega_k^2 \beta_{k0}^4 c_{kk}^2 &> 0 \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

состояние равновесия β_{k0}, γ_{k0} асимптотически устойчиво. Заметим, что условия (2.1.15) можно получить, используя математически обоснованную методику из [26, 27].

Сформулируем основной результат этого параграфа в виде следующего предложения.

Предложение 2.1.1. При выполнении условий (2.1.4), (2.1.15) краевая задача (2.1.1)-(2.1.3) имеет устойчивые $\frac{2\pi}{(1 + \varepsilon_1 \delta_k) \omega_k}$ - периодические решения, для которых справедливо асимптотическое представление

$$u_k(x, \tau) = \sqrt{\varepsilon_1} \beta_{k0} E_{k1}(x, \bar{\tau}) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Рассмотрим теперь конкретный пример $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$, используя необходимые значения параметров из разделов 4, 5. На рис. 2.1.1 - 2.1.6 представлены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики, а также полосы синхронизации одночастотных автоколебаний, которые получены в результате численного решения на ЭВМ уравнений (2.1.11) и формулы (2.1.12). При этом требовалось выполнение неравенств (2.1.15). Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) наблюдается заметная асимметрия характеристик при расстройках частоты внешнего воздействия ω_{k0} в разные стороны относительно частот автоколебаний;

2) максимумы амплитудно-частотных характеристик смещены в сторону отрицательных расстроек частот ω_{k0} . Последнее обстоятельство может быть объяснено увеличением коэффициента передачи цепи обратной связи при уменьшении частот синхронизированных автоколебаний относительно частот ω_k ;

п32

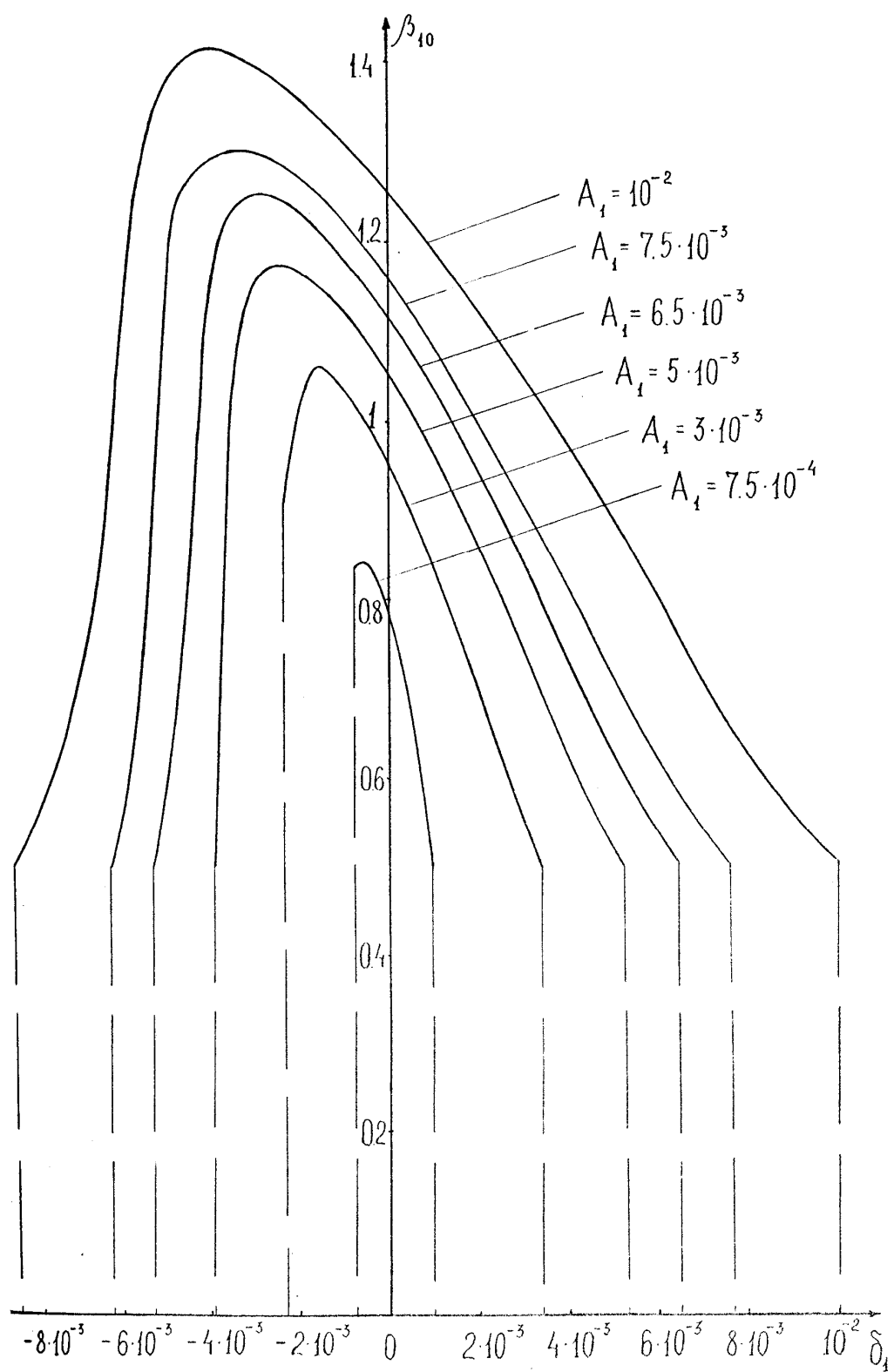


Рис. 2.1.1.

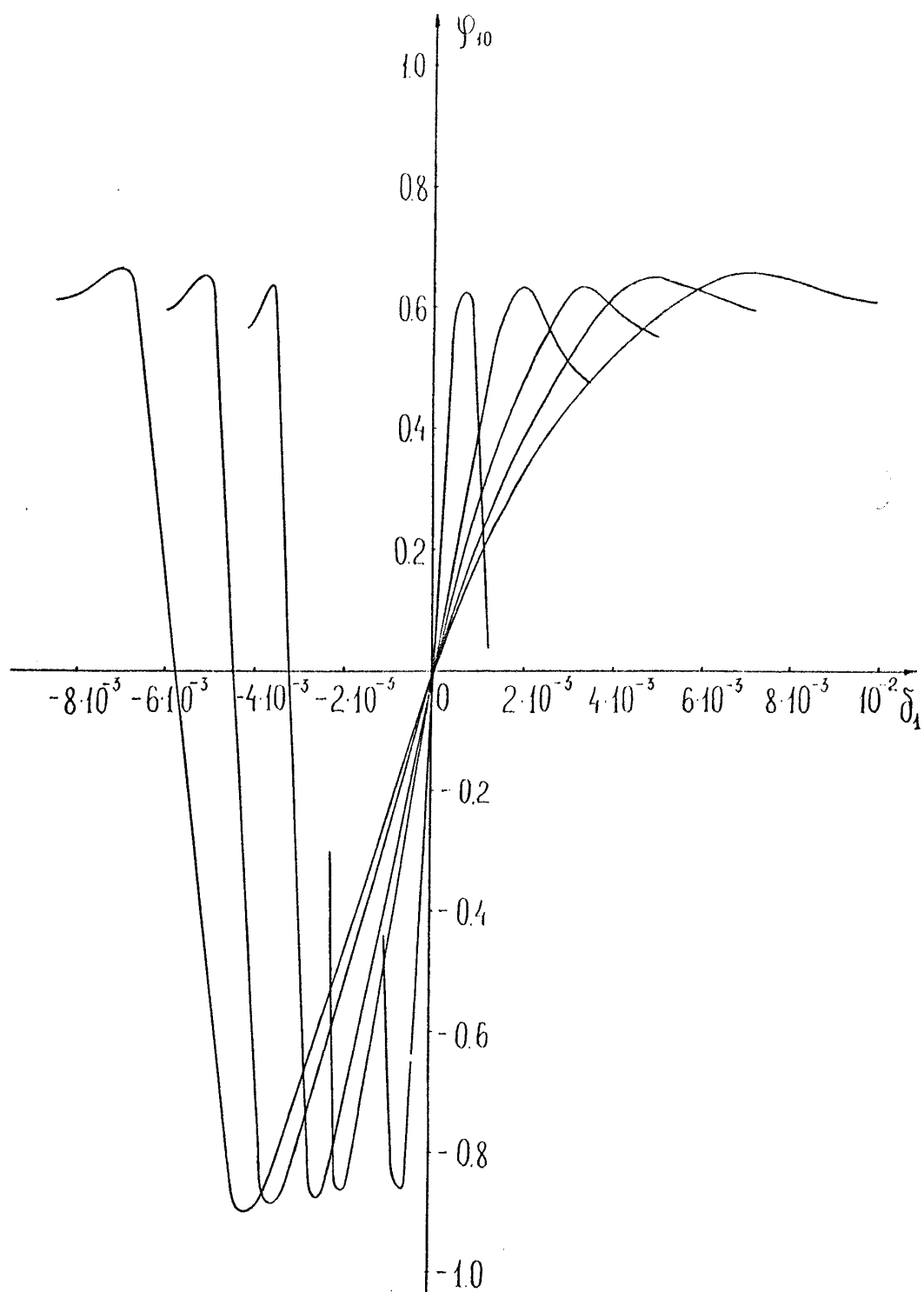


Рис. 2.1.2

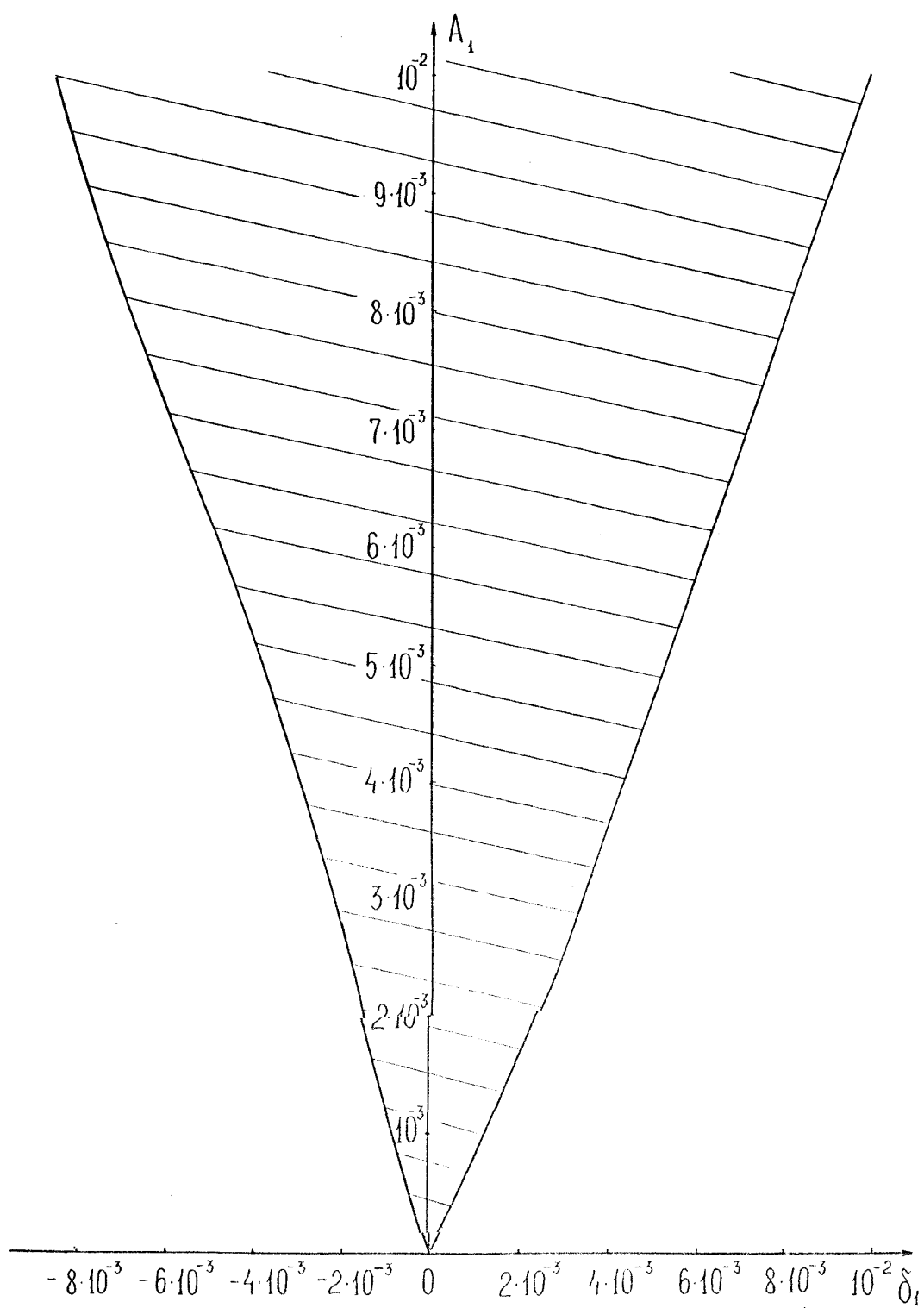


Рис. 2.1.3

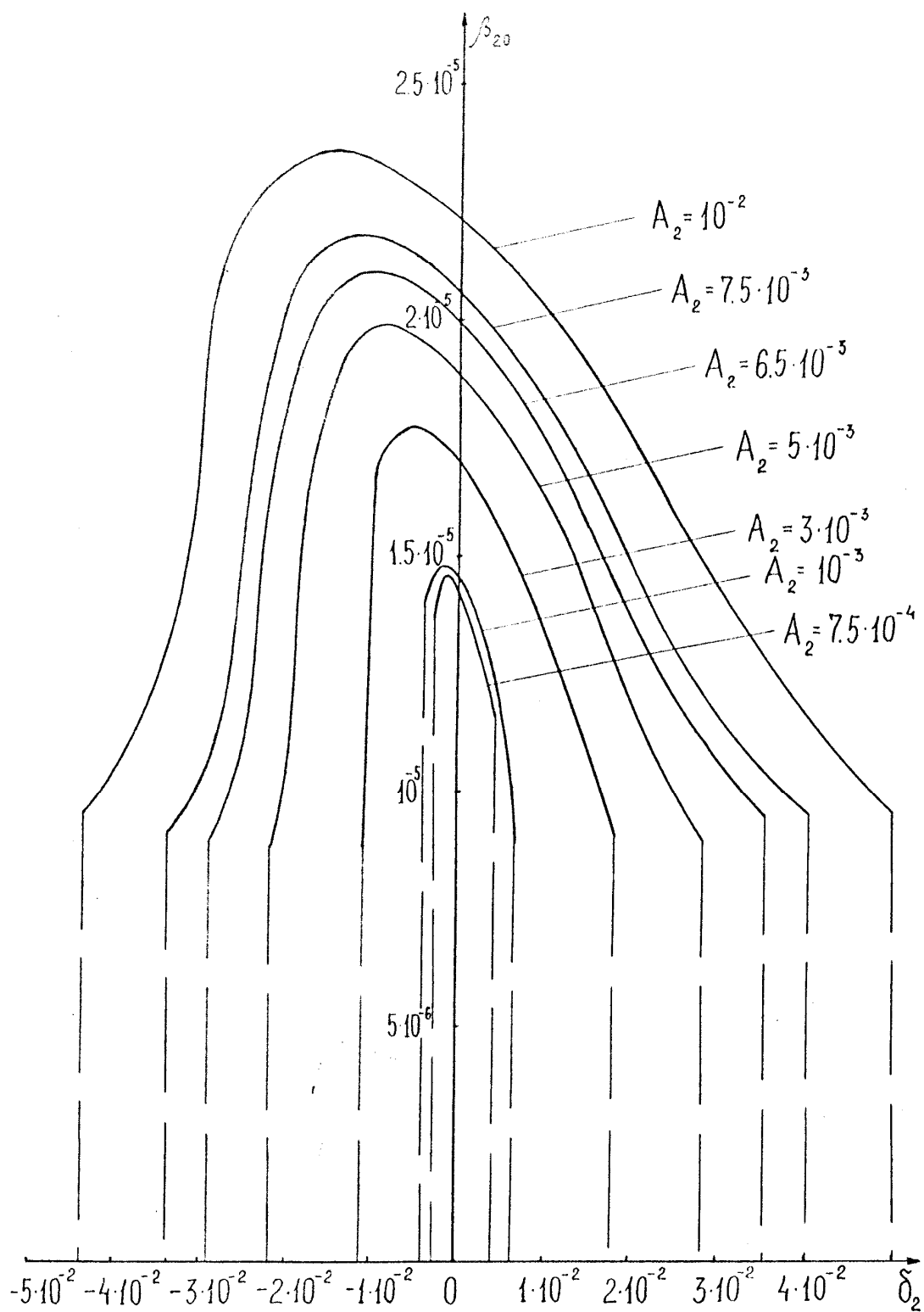


Рис. 2.1.4

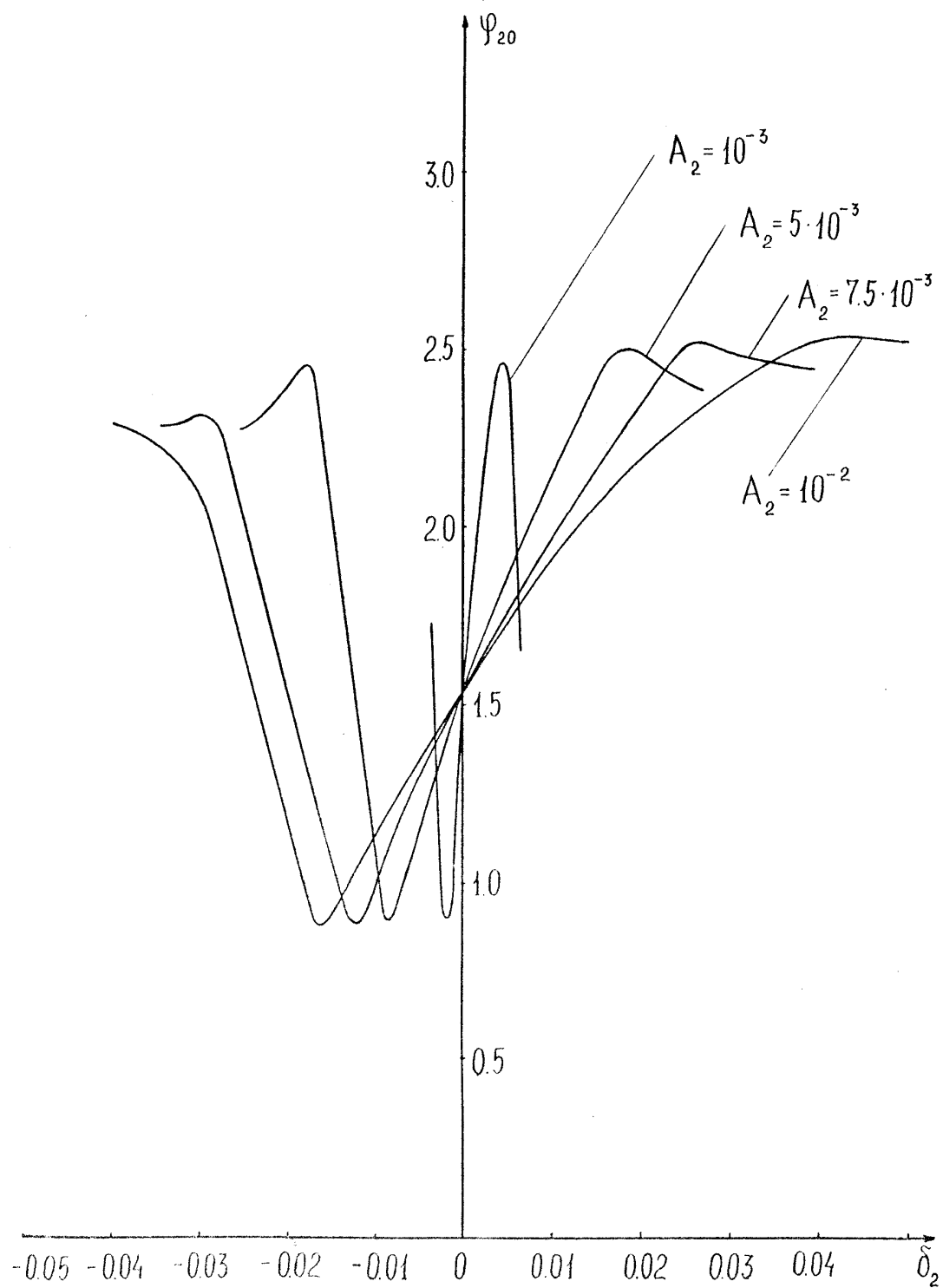


Рис. 2.1.5

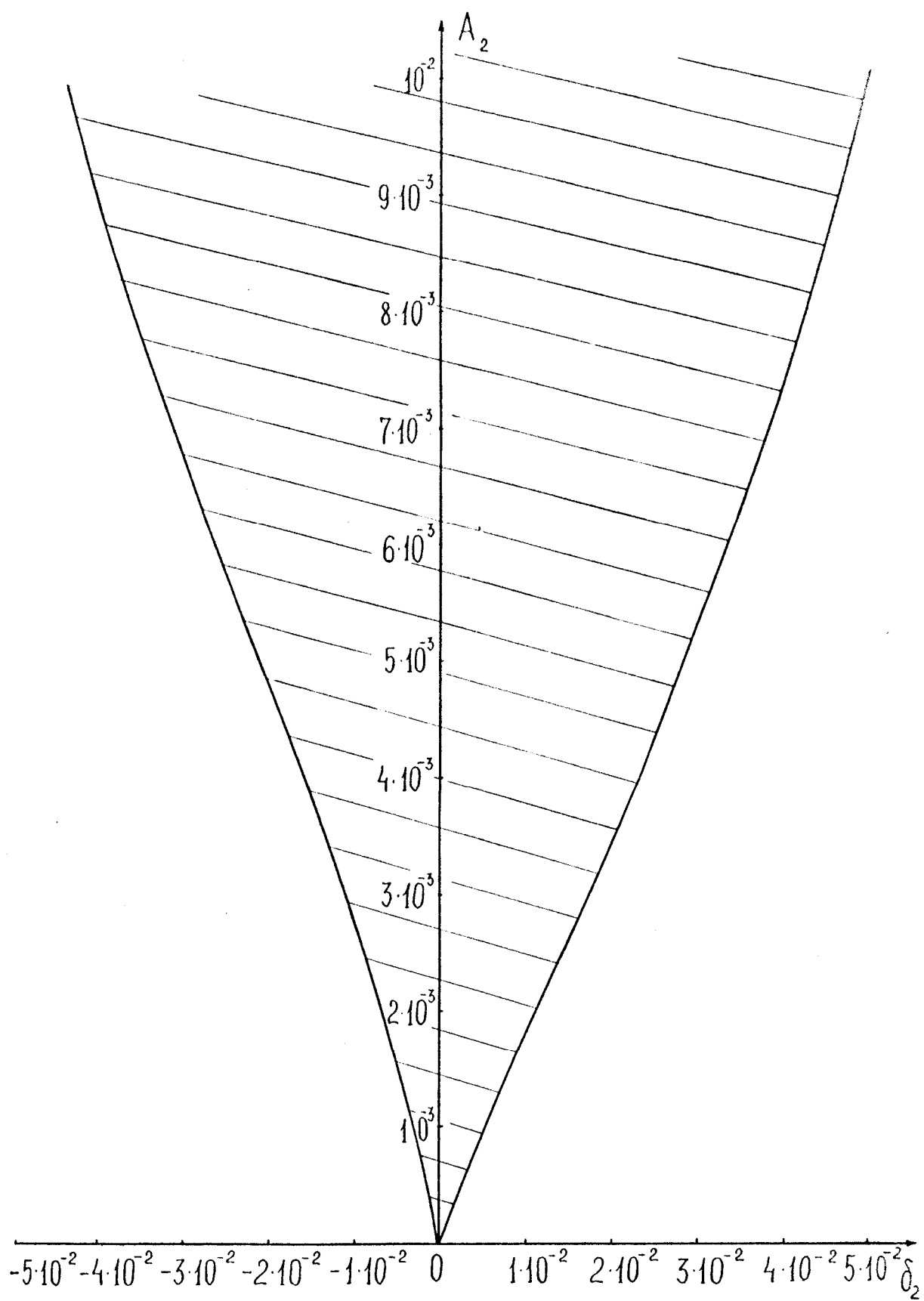


Рис. 2.1.6

3) фазово-частотные характеристики - ограниченные функции $\left(|\varphi_{k0}| \leq \frac{\pi}{2}\right)$ и достаточно сложно зависят от расстроек δ_k . Однако при малых расстройках с увеличением δ_k фазово-частотные характеристики монотонно возрастают.

Отметим еще, что наименьшие порядки амплитуды внешней силы и расстройки частоты, при которых происходит синхронизация колебаний, соответственно равны $\frac{3}{\varepsilon^2}$ и ε .

2. Параметрическое возбуждение колебаний в многоциклической RC-распределенной системе

Как уже отмечалось выше, выход в многоциклической системе на желаемый режим генерации вызывает определенные затруднения, связанные с квалифицированным заданием начальных условий. В настоящем разделе предлагается один из способов решения этой проблемы при реализации гармонической многоциклическости в распределенном устройстве, который заключается в селективном выборе нужного автоколебания вследствие периодического воздействия на один из энергетических параметров генератора. Не ограничивая общности, поставленную задачу можно решить, исследуя возбуждение параметрических колебаний при резонансах (1:1, 1:2, 1:3) в RC-автогенераторе, в котором может иметь место единственный одночастотный режим автоколебания.

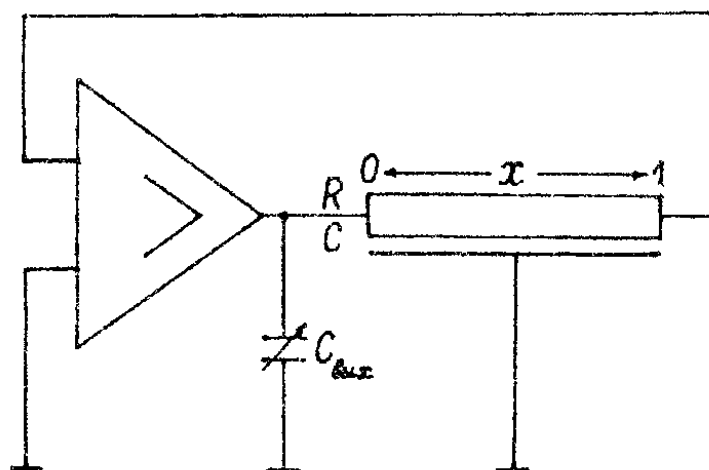


Рис. 2.2.1.

Рассмотрим автогенератор с однородной распределенной RC-структурой (рис. 2.2.1), в точке $x=0$ которой подключена сосредоточенная емкость, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой $2p$, близкой к удвоенной частоте самовозбуждения ω_0 . Тогда математической моделью изучаемого генератора служит краевая задача [22, 24]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(1 + q \cos 2p\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + (1 - \alpha 2pq \sin 2p\tau) u \Big|_{x=0} + \\ & + k_0 u \Big|_{x=1} + k_1 u^2 \Big|_{x=1} - k_2 u^3 \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где u -переменная составляющая напряжения в RC-структуре, $\tau = t/(RC)$; αq , $2p$ -соответственно амплитуда и частота изменения сосредоточенной емкости на выходе усилителя; k_0 , k_1 , k_2 - коэффициенты аппроксимации нелинейной характеристики активного элемента.

Анализ задачи (2.2.1), (2.2.2) будем проводить по следующей схеме. Предварительно рассмотрим автономный случай ($q=0$). При этом краевая задача принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + u \Big|_{x=0} + k_0 u \Big|_{x=1} + k_1 u^2 \Big|_{x=1} - k_2 u^3 \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.2.4)$$

и ее исследование проводится на основе модифицированного алгоритма Андронова-Хопфа.

Для определения условий самовозбуждения автогенератора рассмотрим линеаризованную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + u \Big|_{x=0} + k_0 u \Big|_{x=1} = 0. \quad (2.2.6)$$

Непосредственно проверяется, что ее характеристическое уравнение имеет вид

$$P(\lambda) = (1 + \alpha\lambda) \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + k_0 = 0. \quad (2.2.7)$$

Можно показать, что для любого $\alpha \geq 0$ существует такое положительное значение $k_0 = k_m(\alpha)$, при котором характеристическое уравнение (2.2.7) имеет пару простых корней $\pm i\omega_0(\alpha)$, а остальные корни находятся в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda$, $\operatorname{Im} \lambda$. На рис. 2.2.2, 2.2.3 представлены графики зависимости k_m и ω_0 от α , полученные в результате численного решения уравнения (2.2.7). Таким образом, в исследуемом генераторе могут бифурцировать только одночастотные автоколебания.

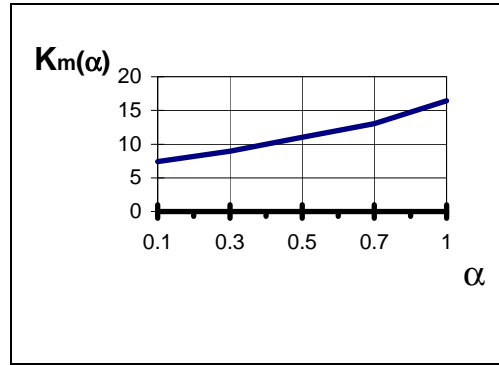


Рис. 2.2.2

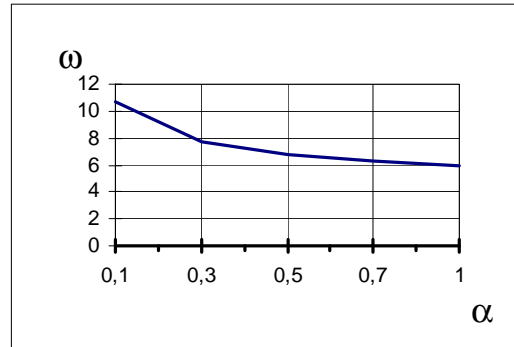


Рис. 2.2.3

Пусть теперь $k_0 = k_m + \varepsilon$, где ε -малый положительный параметр. В дальнейшем потребуются следующие величины:

$$\tau'_0 = \operatorname{Re} \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -n/r,$$

$$\omega'_0 = \operatorname{Im} \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = m/r,$$

причем легко проверяется, что $\tau'_0 > 0$. Здесь

$$n = \alpha \operatorname{ch} \eta \cos \eta + \frac{1}{4\eta} [\operatorname{sh} \eta \cos \eta + \operatorname{ch} \eta \sin \eta + \alpha \omega_0 (\operatorname{sh} \eta \cos \eta - \operatorname{ch} \eta \sin \eta)],$$

$$m = \alpha \operatorname{sh} \eta \sin \eta + \frac{1}{4\eta} [\operatorname{ch} \eta \sin \eta - \operatorname{sh} \eta \cos \eta + \alpha \omega_0 (\operatorname{sh} \eta \cos \eta + \operatorname{ch} \eta \sin \eta)],$$

$$r = m^2 + n^2, \eta = \sqrt{\omega_0/2}.$$

Далее, находим решение краевой задачи (2.2.3), (2.2.4), которое задается формулой

$$u(x, \tau) = \sqrt{\varepsilon} \xi E_1(x, \tau_1) + \varepsilon \xi^2 \varphi_2(x, \tau_1) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где

$$\tau_1 = \tau / (1 + \Theta \varepsilon \xi^2), \quad \Theta = - \frac{k_1^2 (\tau_0'^2 + \omega_0'^2) \operatorname{Im} P(2i\omega_0)}{2\tau_0' \omega_0 |P(2i\omega_0)|^2},$$

$$\xi^{-2} = \frac{3}{4} k_2 + \frac{k_1^2}{1 + k_m} + \frac{k_1^2 [\tau_0' \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \omega_0' \operatorname{Im} P(2i\omega_0)]}{2\tau_0' |P(2i\omega_0)|^2},$$

$$E_1(x, \tau_1) = \operatorname{ch}[\eta(x-1)] \cos[\eta(x-1)] \cos \omega_0 \tau_1 - \operatorname{sh}[\eta(x-1)] \sin[\eta(x-1)] \sin \omega_0 \tau_1,$$

$$\varphi_2(x, \tau_1) = -\frac{k_1}{2(1+k_m)} - k_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\sqrt{2i\omega_0}(x-1)]}{2P(2i\omega_0)} \exp 2i\omega_0 \tau_1 \right\}.$$

Пусть RC-автогенератор при $q \neq 0$ “недовозбужден”, т.е. $k_0 = k_m - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Задача состоит в нахождении такого изменения емкости $C_{\text{вых}}$, при котором в генераторе существуют $2\pi/\rho$ -периодические устойчивые колебания, а также в определении их параметров.

Предположим, что в краевой задаче (2.2.1), (2.2.2)

$$\rho = (1 + \varepsilon \delta) \omega_0, \quad \alpha q = \varepsilon d. \quad (2.2.8)$$

В дальнейшем воспользуемся методикой, изложенной в монографии [24], и полученными выше результатами. Будем искать решение краевой задачи (2.2.1), (2.2.2) в виде

$$u(x, \tau) = \nu \beta(\nu) E_1(x, \tau_2) + \nu^2 \beta^2(\nu) \varphi_2(x, \tau_2) + \nu^3 \beta^3(\nu) \varphi_3(x, \tau_2) + \dots, \quad (2.2.9)$$

где

$$\nu = \sqrt{\varepsilon}, \quad \tau_2 = (1 + \varepsilon \delta) [\tau - \gamma(\nu)]. \quad (2.2.10)$$

Подставим (2.2.9) с учетом (2.2.8), (2.2.10) в (2.2.1), (2.2.2) и приравняем коэффициенты при ν^3 . Далее, из условия разрешимости полученной краевой задачи в классе $2\pi/\omega_0$ -периодических функций для определения $\beta_0 = \beta(0)$, $\gamma_0 = \gamma(0)$ приходим к уравнениям

$$\omega_0 \left(\delta + \Theta \beta_0^2 \right) + \omega_0' \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\xi^2} \right) = \frac{d\omega_0}{2} (M_1 \sin 2\omega_0 \gamma_0 + M_2 \cos 2\omega_0 \gamma_0), \quad (2.2.11)$$

$$\tau_0' \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\xi^2} \right) = \frac{d\omega_0}{2} (M_1 \cos 2\omega_0 \gamma_0 - M_2 \sin 2\omega_0 \gamma_0). \quad (2.2.11)$$

где

$$M_1 = \tau_0' \operatorname{sh} \eta \sin \eta - \omega_0' \operatorname{ch} \eta \cos \eta, \quad M_2 = \tau_0' \operatorname{ch} \eta \cos \eta + \omega_0' \operatorname{sh} \eta \sin \eta.$$

Исключая теперь из (2.2.10), (2.2.11) γ_0 , получаем для β_0 следующее выражение :

$$\beta_0 = \xi \left[\frac{-B + (B^2 + AN)^{1/2}}{A} \right]^{1/2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= (\omega_0 \Theta \xi^2 + \omega'_0)^2 + \tau_0'^2, \\ B &= \delta \omega_0^2 \Theta \xi^2 + \omega_0 (\Theta \xi^2 + \delta) \omega'_0 + \omega_0'^2 + \tau_0'^2, \\ N &= \frac{1}{4} \omega_0^2 d^2 (M_1^2 + M_2^2) - (\delta \omega_0 + \omega'_0)^2 - \tau_0'^2. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Очевидно, следует требовать выполнения неравенств

$$-B + (B^2 + AN)^{1/2} > 0, \quad B^2 + AN \geq 0. \quad (2.2.13)$$

Простой анализ выражений (2.2.12) показывает, что неравенства (2.2.13) заведомо выполняются, если

$$d > d_m = \frac{2}{\omega_0} \left[\tau_0'^2 + (\delta \omega_0 + \omega'_0)^2 \right] / (M_1^2 + M_2^2)^{1/2}, \quad (2.2.14)$$

т.е. когда амплитуда колебаний емкости $C_{\text{вых}}$ больше минимального значения $\alpha d_m = \varepsilon d_m$.

Таким образом, окончательно можно сформулировать следующее утверждение: для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и при условиях (2.2.8), (2.2.14) краевая задача (2.2.1), (2.2.2) имеет единственное $2\pi/[\omega_0(1 + \varepsilon\delta)]$ -периодическое решение, для которого справедливо асимптотическое представление

$$u(x, \tau) = \sqrt{\varepsilon} \beta_0 E_1(x, \tau_2) + \varepsilon \beta_0^2 \varphi_2(x, \tau_2) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\tau_2 = (1 + \varepsilon\delta)(\tau - \tau_0)$.

Отметим, что устойчивость построенного периодического решения определяется характером расположения собственных чисел матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

у которой

$$d_{11} = -2\tau_0' \left(1 + 2 \frac{\beta_0^2}{\xi^2} \right) - i \left[\delta \omega_0 + 4\omega_0 \beta_0^2 \Theta + 2\omega_0' \left(1 + 2 \frac{\beta_0^2}{\xi^2} \right) \right], \quad (2.2.15)$$

$$d_{12} = -2\tau_0' \frac{\beta_0^2}{\xi^2} - 2i \frac{\beta_0^2}{\xi^2} (\omega_0 \Theta \xi^2 + \omega_0'), \quad (2.2.16)$$

а d_{22} , d_{21} - комплексно сопряжены с ними. Из равенств (2.2.15), (2.2.16) вытекает, что при определенных β_0 , δ

$$\text{sp} D < 0, \det D > 0,$$

т.е. устойчивость параметрических колебаний.

Для практики определенный интерес представляют амплитудно-частотные характеристики и полосы возбуждения колебаний. На рис. 2.2.4, 2.2.5 представлены графики зависимостей $\beta_0 = \beta_0(\delta)$ при $d = 1,5d_m$, $\varepsilon = 0,3$, $k_1 = 10$, $k_2 = 15$ и различных α , а также полоса возбуждения колебаний при $\alpha = 0,1$.

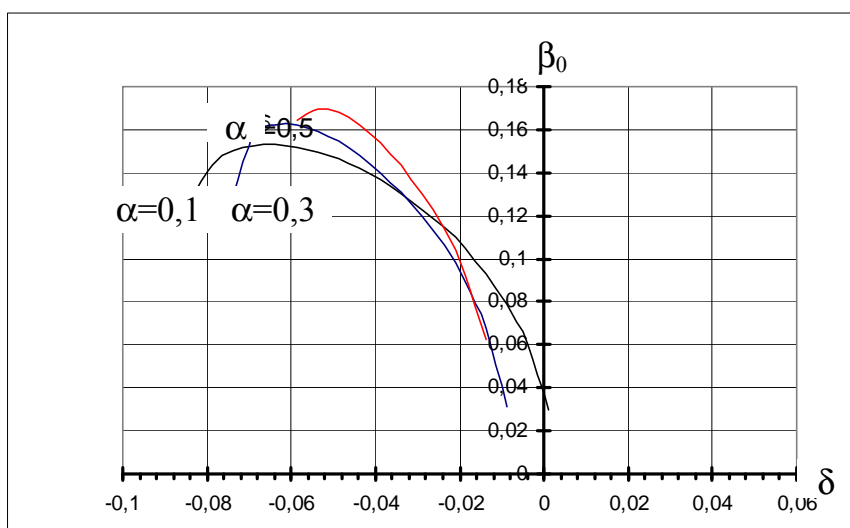


Рис. 2.2.4

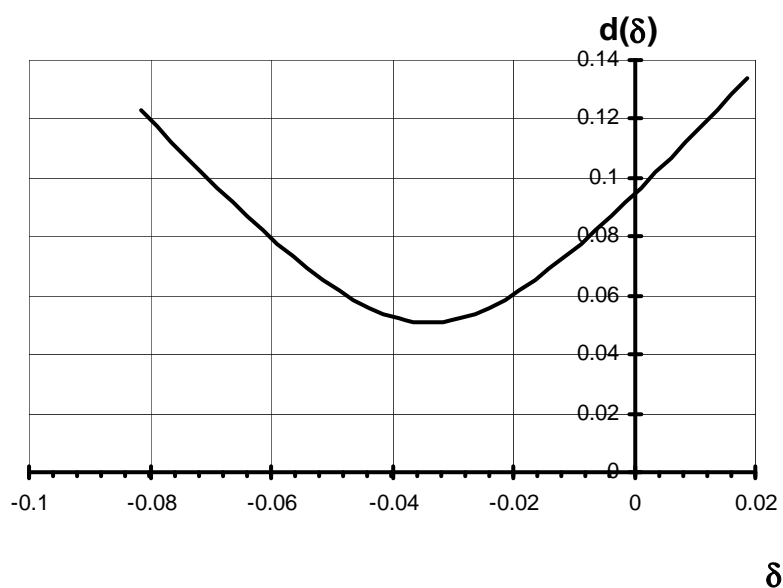


Рис. 2.2.5

Отметим некоторые специфические особенности полученных графиков :

- 1) амплитудно-частотные характеристики асимметричны относительно расстройки частоты, причем максимумы амплитуд приходятся на отрицательные значения δ . Отмеченная особенность связана с нелинейными свойствами изучаемой системы, в частности, влиянием квадратичного члена в аппроксимации нелинейной характеристики усилителя;
- 2) увеличение параметра α при заданных выше значениях параметров автогенератора приводит к уменьшению полосы для δ , что связано с ухудшением условий возникновения колебаний;
- 3) полоса возбуждения параметрических колебаний расширяется с увеличением d и асимметрична относительно δ .

Таким образом, построена математическая модель и исследованы условия возбуждения параметрических колебаний в автогенераторе с RC-распределенными параметрами в случае резонанса 1:2. Определены наименьший порядок амплитуды изменения параметра $C_{\text{вых}}$, равный ε , и наибольший порядок ε расстройки частоты, когда имеет место изученный эффект. Найдены параметры колебаний и выявлены специфические особенности их характеристик, связанные с нелинейными свойствами исследуемой системы.

Рассмотрим теперь математическую модель автогенератора (2.2.1), (2.2.2), у которого емкость на выходе усилителя изменяется по гармоническому закону с частотой p (резонанс 1:1). Задача состоит в нахождении такого изменения емкости, при котором в генераторе существуют $2\pi/p$ - периодические устойчивые колебания, а также в определении их параметров.

Предположим, что в краевой задаче (2.2.1), (2.2.2)

$$p = (1 + \varepsilon\delta)\omega_0, \quad \alpha q = \sqrt{\varepsilon}d_1, \quad (2.2.17)$$

причем d_1 сравнимо с единицей. Далее, поступая аналогично изложенному выше, приходим для определения $\beta_0 = \beta(0)$, $\gamma_0 = \gamma(0)$ к системе уравнений

$$\frac{\tau'_0}{\beta_0} \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\xi^2} \right) = \frac{d_1\omega_0 k_1}{2} (b_1 \cos \omega_0 \gamma_0 + b_2 \sin \omega_0 \gamma_0), \quad (2.2.18)$$

$$(\beta_0^2 \Delta + \delta\omega_0 + \omega'_0) / \beta_0 = \frac{d_1\omega_0 k_1}{2} (c_1 \cos \omega_0 \gamma_0 - c_2 \sin \omega_0 \gamma_0), \quad (2.2.19)$$

где

$$b_1 = \frac{\omega'_0 a_1 + \tau'_0 a_2}{2|P(2i\omega_0)|^2} + \frac{\omega'_0}{1 + k_m}, \quad b_2 = \frac{\omega'_0 a_2 - \tau'_0 a_1}{2|P(2i\omega_0)|^2} + \frac{\tau'_0}{1 + k_m},$$

$$c_1 = \frac{\omega'_0 a_2 - \tau'_0 a_1}{2|P(2i\omega_0)|^2} - \frac{\tau'_0}{1 + k_m}, \quad c_2 = \frac{\omega'_0 a_1 + \tau'_0 a_2}{2|P(2i\omega_0)|^2} - \frac{\omega'_0}{1 + k_m},$$

$$a_1 = \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0} \operatorname{Im} P(2i\omega_0),$$

$$a_2 = \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0} \operatorname{Re} P(2i\omega_0) - \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} \operatorname{Im} P(2i\omega_0),$$

$$\Delta = \omega'_0 \left[\frac{3}{4} k_2 + \frac{k_1^2}{1 + k_m} + k_1^2 \frac{\operatorname{Re} P(2i\omega_0) \omega'_0 - \tau'_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0)}{2\omega'_0 |P(2i\omega_0)|^2} \right].$$

Можно показать, что система уравнений (2.2.18), (2.2.19) однозначно разрешима относительно β_0, γ_0 , причем

$$\beta_0 = \left(\frac{-B + (B^2 - AC)^{1/2}}{A} \right)^{1/2}, \quad (2.2.20)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left[2\tau'_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{\xi^2} \right) / \left(\beta_0 d_1 \omega_0 k_1 \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right) \right] - \alpha_0. \quad (2.2.21)$$

Здесь

$$A = \lambda_2^2 d^2 + (\Delta + \lambda_1 d)^2, \quad C = (\delta\omega_0 + \omega'_0 - \lambda_1 \tau'_0)^2 + \lambda_2^2 \tau_0'^2, \quad (2.2.22)$$

$$B = (\Delta + \lambda_1 d)(\delta\omega_0 + \omega'_0 - \lambda_1 \tau'_0) - \lambda_2^2 \tau_0' d - \lambda_2 \frac{d_1^2 \omega_0^2 k_1^2}{8} (b_1^2 + b_2^2), \quad (2.2.23)$$

$$d = -\tau'_0 / \xi^2, \quad \lambda_1 = \frac{b_1 c_1 - b_2 c_2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{b_1^2 + b_2^2},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(b_1 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right).$$

Далее, учитывая (2.2.20), (2.2.22), (2.2.23), необходимо требовать, чтобы

$$B < 0, \quad B^2 \geq AC. \quad (2.2.24)$$

Выполнение неравенств (2.2.24) гарантируется при значениях параметра

$$d_1 > d_{1m} = \max \{ d_{1m}^1, d_{1m}^2 \} \quad (2.2.25)$$

где

$$\begin{aligned} d_{1m}^1 &= \left\{ 8 \left[(\Delta + \lambda_1 d)(\delta\omega_0 + \omega'_0 - \lambda_1 \tau'_0) - \lambda_2^2 \tau_0' d \right] / \left(\lambda_2^2 \omega_0^2 k_1^2 (b_1^2 + b_2^2) \right) \right\}^{1/2}, \\ d_{1m}^2 &= \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 |k_1| \sqrt{\lambda_2^2 (b_1^2 + b_2^2)}} \left\{ \left[\lambda_2^2 d^2 + (\Delta + \lambda_1 d)^2 \right] (\delta\omega_0 + \omega'_0 - \lambda_1 \tau'_0)^2 + \lambda_2^2 \tau_0'^2 \right\}^{1/2} + \\ &+ (\Delta + \lambda_1 d)(\delta\omega_0 + \omega'_0 - \lambda_1 \tau'_0) - \lambda_2^2 \tau_0' d \}^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно можно сформулировать следующее утверждение: для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и при условиях (2.2.17), (2.2.24) краевая

задача (2.2.1), (2.2.2) имеем единственное $2\pi/[\omega_0(1 + \varepsilon\delta)]$ - периодическое решение, для которого справедливо асимптотическое представление

$$u(x, t) = \sqrt{\varepsilon}\beta_0 E_1(x, \tau_1) + \varepsilon\beta_0^2 \varphi_2(x, \tau_1) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\tau_1 = (1 + \varepsilon\delta)(\tau - \gamma_0)$.

Отметим, что устойчивость построенного периодического решения определяется характером расположения собственных чисел матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

у которой

$$d_{11} = -2\tau'_0 A + 2\omega'_0 B - 2i(\omega_0 \delta + \omega'_0 A + \tau'_0 B),$$

$$d_{12} = -2\beta_0^2 \frac{\tau'_0}{\xi^2} + \frac{d_1 \omega_0 k_1 \beta_0}{1 + k_m} (\tau'_0 \sin \omega_0 \gamma_0 + \omega'_0 \cos \omega_0 \gamma_0) - \\ - i \left[\frac{2\omega'_0 \beta_0^2}{\xi^2} + 2\omega_0 \Theta \beta_0^2 + \frac{d_1 \omega_0 k_1 \beta_0}{1 + k_m} (\tau'_0 \cos \omega_0 \gamma_0 - \omega'_0 \sin \omega_0 \gamma_0) \right],$$

где

$$A = 1 + 2 \frac{k_1^2 \beta_0^2}{1 + k_m} + \frac{3}{2} k_2 \beta_0^2 - \frac{d_1 \omega_0 k_1 \beta_0}{2(1 + k_m)} \sin \omega_0 \gamma_0 - \\ - \frac{d\omega_0}{2|P(2i\omega_0)|^2} \left[-k_1 \beta_0 \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \right. \\ + d_1 \omega_0 [(e_1(0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} - e_2(0) \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0}) \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \\ + (e_2(0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} + e_1(0) \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0}) \operatorname{Im} P(2i\omega_0)] \Big] - \\ - \frac{k_1 \beta_0}{|P(2i\omega_0)|^2} \left[-k_1 \beta_0 (\sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) - \cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0)) + \right. \\ + d_1 \omega_0 [e_1(0) (\sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) - \cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0)) + \\ + e_2(0) (\cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0))] \Big], \\ B = \frac{d_1 \omega_0 k_1 \beta_0}{2(1 + k_m)} \cos \omega_0 \gamma_0 - \\ - \frac{d_1 \omega_0}{2} [-k_1 \beta_0 \sin \sqrt{\omega_0} \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + d_1 \omega_0 [(e_2(0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} + \\ + e_1(0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0}) \operatorname{Re} P(2i\omega_0) - \\ - (e_1(0) \operatorname{ch} \sqrt{\omega_0} \cos \sqrt{\omega_0} - e_2(0) \operatorname{sh} \sqrt{\omega_0} \sin \sqrt{\omega_0}) \operatorname{Im} P(2i\omega_0)] \Big] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_1 \beta_0}{|P(2i\omega_0)|^2} \left[k_1 \beta_0 (\cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0)) + \right. \\
& + d_1 \omega_0 [e_2(0)(\sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) - \cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0)) - \\
& \left. - e_1(0)(\cos \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Re} P(2i\omega_0) + \sin \omega_0 \gamma_0 \operatorname{Im} P(2i\omega_0))] \right].
\end{aligned}$$

Отметим, что d_{22} , d_{21} -комплексно сопряжены соответственно с d_{11} , d_{12} .

Непосредственно проверяется, что при определенных β_0, δ

$$\operatorname{sp} D < 0, \quad \det D > 0,$$

т.е. имеет место устойчивость параметрических колебаний.

В заключение отметим, что в случае резонанса 1:3 параметрические колебания реализуются тогда, когда наименьший порядок изменения амплитуды емкости на выходе усилителя равен $\sqrt{\varepsilon}$. Однако подробно этот вопрос в настоящей работе не освещается.

Таким образом, проанализированы условия возбуждения параметрических колебаний и рассчитаны их параметры в случае резонансов (1:1). Далее, определен наименьший порядок амплитуды выходной емкости, равный $\sqrt{\varepsilon}$, и наибольший порядок ε расстройки частоты, когда имеет место изучаемый эффект. Показано, что при симметричной нелинейной характеристике ($k_1 = 0$) рассмотренный резонанс не реализуется. Отметим еще, что при основном резонансе (1:2) наименьший порядок амплитуды, при котором имеют место параметрические колебания, $-\varepsilon$.

В заключение сформулируем выводы, которые следуют из проведенного в главе 2 анализа:

- 1) в многоциклической системе для реализации заданного режима генерации посредством параметрического воздействия следует выбирать частоту “раскачки” параметра приблизительно в два раза выше соответствующей частоты самовозбуждения, при этом в автогенераторе с резонансным спектром бифуркаций на других частотах не происходит;
- 2) в многоциклической автоколебательной системе с резонансным спектром не рекомендуется возбуждать нужную моду, используя параметрический резонанс 1:1 или 1:3, так как в этом случае возможна реализация двухмодового режима с несущими частотами ω и 3ω .

Отметим еще, что после возбуждения заданного колебания для дальнейшего функционирования его в автономном режиме следует увеличить подкачку энергии в систему, а затем снять внешнее воздействие.

Глава 3. Исследование внешнего воздействия на возбуждение многоциклических режимов

В этой главе изучаются вопросы, связанные с возбуждением в РС-автогенераторе заданных многоциклических режимов в результате воздействия на систему внешней гармонической силы. Еще раз отметим, что выход в многоциклической системе на определенный режим генерации вызывает определенные затруднения, т.е. проблема заключается в квалифицированном задании соответствующих начальных условий. При этом в практическом применении явления многоциклическости, например, при создании ячеек памяти, необходимо однозначно “вызывать” тот или иной автоколебательный режим. В настоящей работе предлагается иной, чем в предыдущей главе, способ решения этой проблемы путем автопараметрического возбуждения при резонансе 1:2 заданного режима колебаний.

Анализ автопараметрических колебаний в случае резонанса 1:2

Рассмотрим РС-автогенератор (рис. 3.1.1), когда в нем реализуются одночастотные автоколебательные режимы на частотах ω_1 или ω_2 , определяемые формулой (1.4.29). Исследуем задачу о автопараметрическом возбуждении колебаний в случае резонанса 1:2. Пусть на вход усилителя подается гармоническое воздействие с частотой, близкой к удвоенной частоте автоколебаний, и генератор находится в регенеративном режиме. Оказывается, при определенных условиях происходит возбуждение колебаний, то есть наблюдается явление автопараметрического резонанса. Можно показать, что математической моделью рассматриваемой системы служит следующая краевая задача

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau} = Au_k, \quad (3.1.1)$$

$$\left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, u_{k1}|_{x=1} - u_{k2}|_{x=0} + \alpha \left. \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$u_{k1}|_{x=1} + k_0 \sigma + k_1 \sigma^2 - k_2 \sigma^3 = 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.1.3)$$

$$\sigma = u_{k2}|_{x=1} - \alpha \left. \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \right|_{x=0} + \mu_k \cos 2\omega_{k0} \tau.$$

Несложный анализ показывает, что автопараметрическое возбуждение колебаний наступает, когда наименьший порядок амплитуды внешнего воздействия μ_k при наибольшем порядке расстройки частоты ω_{k0} относительно частоты автоколебаний равны ε_1 .

Положим

$$\mu_k = \varepsilon_1 A_k, \quad \omega_{k0} = \omega_k(1 + \varepsilon_1 \delta_k). \quad (3.1.4)$$

Вводя новое время, запишем краевую задачу (3.1.1)-(3.1.3) в виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau_k} = (1 + \varepsilon_1 \delta_k)^{-1} A u_k, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_{k1} \Big|_{x=1} - u_{k2} \Big|_{x=0} + \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.1.6)$$

$$u_{k1} \Big|_{x=1} + k_0 \sigma + k_1 \sigma^2 - k_2 \sigma^3 = 0, \quad (3.1.7)$$

где

$$\sigma_1 = u_{k2} \Big|_{x=1} - \alpha \frac{\partial u_{k2}}{\partial x} \Big|_{x=0} + \varepsilon_1 A_k \cos 2\omega_k (\bar{\tau}_k + \gamma_k).$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся методикой из работ [24, 32] и результатами разделов 4, 5 главы 1. Будем искать решения краевой задачи (3.1.5)-(3.1.7) приближенно в виде

$$u_k(x, \tau) = \nu \beta_k(\nu) E_{k1}(x, \bar{\tau}_k) + \nu^2 \beta_k^2(\nu) W_{kk}(x, \bar{\tau}_k) + \nu^3 \beta_k^3(\nu) W_{kkk}(x, \bar{\tau}_k), \quad (3.1.8)$$

где $\nu = \sqrt{\varepsilon_1}$, $\bar{\tau}_k = (1 + \varepsilon_1 \delta_k)[\tau - \gamma_k(\nu)]$, а функции $E_{k1}(x, \bar{\tau}_k)$, $W_{kk}(x, \bar{\tau}_k)$, $W_{kkk}(x, \bar{\tau}_k)$ имеют тот же смысл, что и в главе 1.

Подставим (3.1.8) в краевую задачу (3.1.5)-(3.1.7) и соберем коэффициенты при ν^3 . Далее, к полученной краевой задаче применим критерий существования $\frac{2\pi}{\omega_k}$ -периодических решений (лемма 1.3.2). После громоздких вычислений для определения $\beta_{k0} = \beta_k(0)$, $\gamma_{k0} = \gamma_k(0)$ получаем систему уравнений

$$2\gamma'_{k1}(1 - \varphi_{kk} \beta_{k0}^2) = k_1 A_k [b(\omega_k) \cos 2\omega_k \gamma_{k0} - a(\omega_k) \sin 2\omega_k \gamma_{k0}], \quad (3.1.9)$$

$$2(\Delta_k - \omega_k c_{kk} \beta_{k0}^2) = k_1 A_k [b(\omega_k) \sin 2\omega_k \gamma_{k0} + a(\omega_k) \cos 2\omega_k \gamma_{k0}], \quad (3.1.10)$$

где $\Delta_k = \omega_k \delta_k + \omega'_{k1}$, а $\omega_k, a(\omega_k), b(\omega_k), \gamma'_{k1}, \varphi_{kk}, c_{kk}, \omega'_{k1}$ были определены ранее. Решая систему уравнений (3.1.9), (3.1.10), определяем γ_{k0}, β_{k0} .

Отметим, что устойчивость построенного периодического решения определяется характером расположения собственных чисел матрицы.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

у которой

$$d_{11} = -2(\gamma'_{k1} - 2\varphi_{kk}\beta_{k0}^2) - i(\delta_k\omega_k - 4\omega_k c_{kk}\beta_{k0}^2 + 2\omega'_{k1}) \quad (3.1.11)$$

$$d_{12} = 2\beta_{k0}^2(\varphi_{kk} + i\omega_k c_{kk}), \quad (3.1.12)$$

а d_{22} , d_{21} – комплексно сопряжены с ними. Из равенств (3.1.11), (3.1.12) вытекает, что при определенных β_{k0} , δ_k $\text{sp} D < 0$, $\det D > 0$, т.е. устойчивость автопараметрических колебаний.

Сформулируем основной результат этого раздела в виде следующего предложения.

Предложение 3.1.1. При выполнении условий (3.1.4), (3.1.11), (3.1.12) краевая задача (3.1.1)-(3.1.3) имеет $\frac{2\pi}{(1 + \varepsilon_1\delta_k)\omega_k}$ - устойчивые периодические решения, для которых справедливо асимптотическое представление

$$u_k(x, \tau) = \sqrt{\varepsilon_1}\beta_{k0}E_{k1}(x, \bar{\tau}) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Доказательство сформулированного выше предложения следует из проведенного в предыдущих главах анализа.

Глава 4. Проведение экспериментов для RC-автогенератора с распределенными параметрами

Экспериментальная проверка результатов, полученных при выявлении многоциклическости в RC-автогенераторе, проводилась на двух макетах, у которых нелинейные динамические характеристики усилительных каскадов достаточно хорошо аппроксимировались полиномами третьей степени. Цепи обратной связи либо моделировались при помощи сосредоточенных элементов, либо применялись распределенные структуры, полученные на основе пленочной технологии. Остановимся подробно на проведенных экспериментах.

1. Эксперимент по выявлению синхронизации многоциклических режимов и их разрушения при асимметрии нелинейной характеристики

Для проверки теоретических результатов исследования математической модели RC-автогенератора был собран экспериментальный макет, схема которого предложена в работе [24] и представлена на рис. 4.1.1. Операционный усилитель К574УД1А и дифференциальный каскад К122УД1В выполняли функции усилителя. Нелинейная характеристика указанного операционного усилителя, как известно, близка к релейной с ограничениями на уровне приблизительно ($\pm 15\%$). Дифференциальный каскад выполнял функцию плавного ограничителя. Совместная характеристика двух активных элементов достаточно хорошо аппроксимировалась полиномом третьей степени. За счет регулировки баланса усилителя можно было установить рабочую точку в центре симметрии характеристики. Таким образом, в экспериментах всегда имелась “мягкая” нелинейность, разбаланс операционного усилителя не нарушал симметрии общей нелинейной характеристики. Далее, с помощью резистора R_3 рабочая точка выводилась из центра характеристики, что приводило к асимметрии нелинейности. Затем динамическая характеристика усилительного каскада снималась с экрана осциллографа и с хорошей степенью точности (не более 15%) аппроксимировалась полиномом третьей степени, причем $K_2 = 100$, а $K_1 \in [-50, 50]$.

В рассмотренной схеме автогенератора, как и в работах [23, 24] RC-структуры моделировались RC-цепочками, которые содержали соответственно 15 и 17 RC-цвеньев с суммарными сопротивлениями и емкостями равными $R_1 = 33 \text{ кОм}$, $R_2 = 115,6 \text{ кОм}$, $C_1 = 11250 \text{ нФ}$, $C_2 = 25500 \text{ нФ}$. При этом параметр $\gamma = 7,9402$ отличался от используемого при анализе менее, чем на 5%.

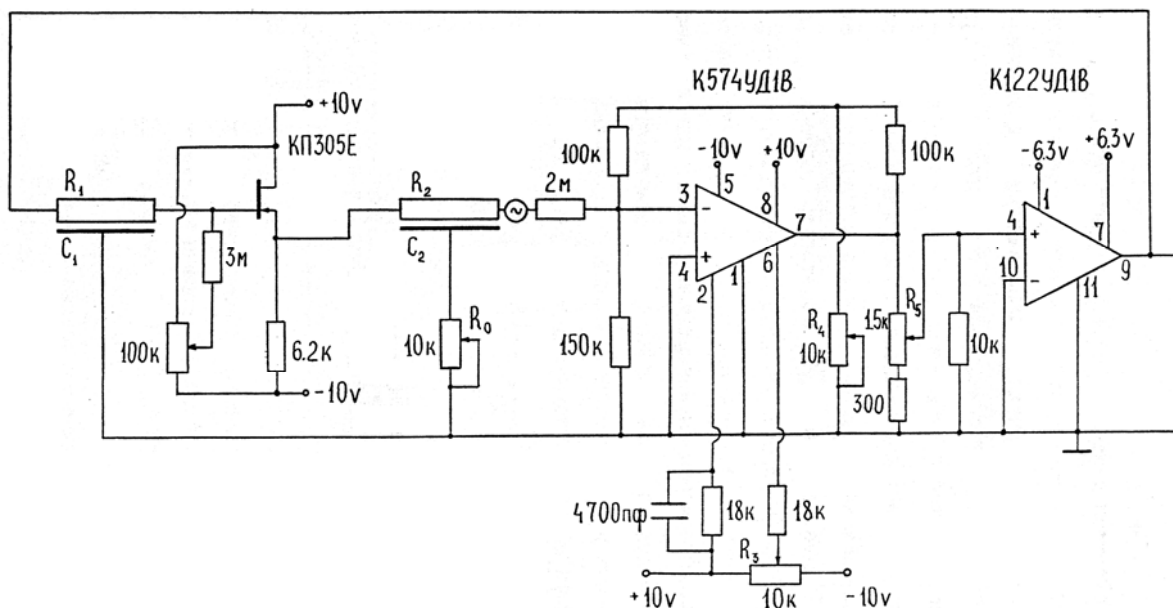


Рис. 4.1.1.

Для наблюдения многоцикличности и ее разрушения при определенной асимметрии нелинейной характеристики выполнялось следующее. Резистором R_3 устанавливали рабочую точку в месте перегиба нелинейной характеристики, а резисторами R_0 , R_4 , R_5 подбирались такие α и k_0 , что в генераторе возбуждались автоколебания на частоте f_1 или f_2 . На фото 14.2, 14.3 представлены наблюдавшиеся автоколебания, причем $f_1 = 500 \text{ Гц}$, $f_2 = 8280 \text{ Гц}$. В дальнейшем резистором R_3 для случая высокочастотных автоколебаний ($f_2 = 8280 \text{ Гц}$) проводилось перемещение рабочей точки из центра характеристики на один из склонов ее характеристики. Это приводило к возникновению двухчастотных автоколебаний, представленных на фотографиях 4.1.4, 4.1.5. Соответствующие им фигуры Лиссажу изображены на фото 4.1.6, 4.1.7.

Далее, при наличии многоцикличности, проводились эксперименты по синхронизации одночастотных автоколебаний. Для этого сначала реализовывались низкочастотные автоколебания, которые синхронизировались гармоническими колебаниями, подаваемыми на вход усилителя от ГЗ-33 через достаточно большое сопротивление (4 МОм). Синхронизированные автоколебания снимались на вход y осциллографа, от второго генератора ГЗ-18 гармонические колебания подавались на вход x . При совпадении частот синхронизированных автоколебаний и колебаний от ГЗ-18 на экране наблюдался деформированный эллипс. При расстройках частоты синхронизирующего генератора ГЗ-33 относительно частоты автоколебаний в полосе захвата происходило вращение эллипса, а уход частоты достаточно точно определялся по подстройке частоты генератора ГЗ-33 до остановки эллипса на экране осциллографа. Срыв синхронизации регистрировался по возникающим биениям. В полосе синхронизации измерялась также ампли-

туда автоколебаний. Аналогичные эксперименты проводились по синхронизации высокочастотных автоколебаний.

Из проведенных экспериментов получено достаточно хорошее совпадение (20%-30%) экспериментальных и теоретических результатов.

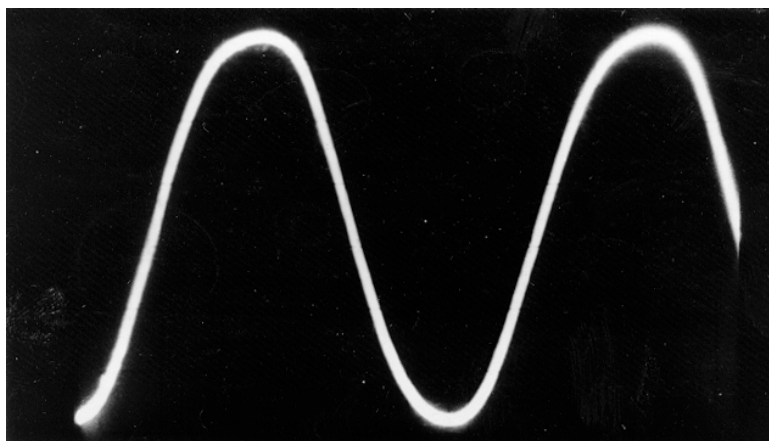


Фото 4.1.2

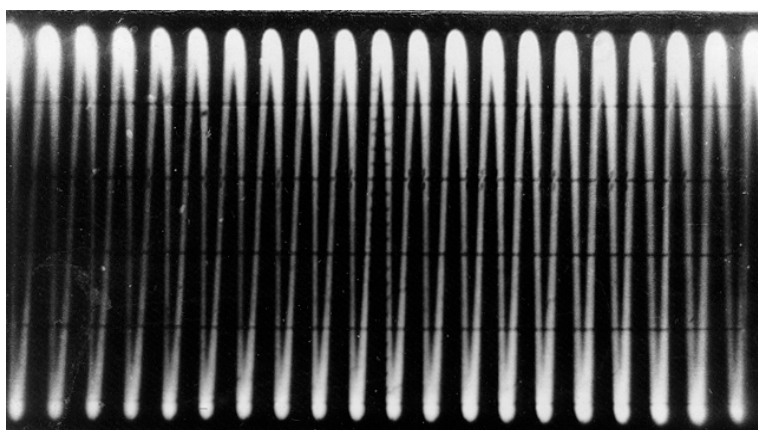


Фото 4.1.3

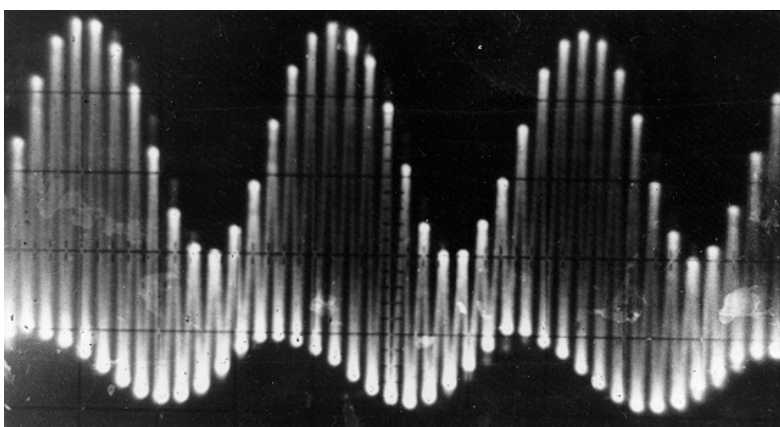


Фото 4.1.4

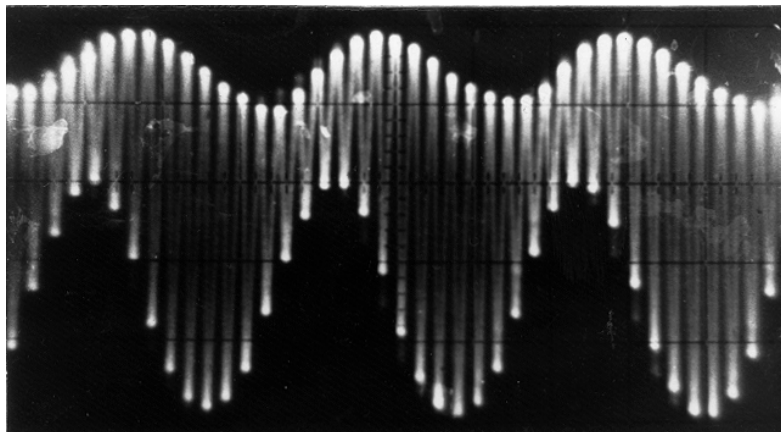


Фото 4.1.5

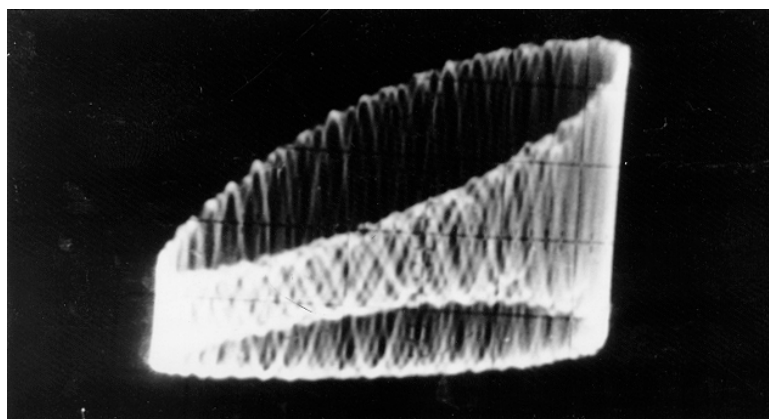


Фото 4.1.6

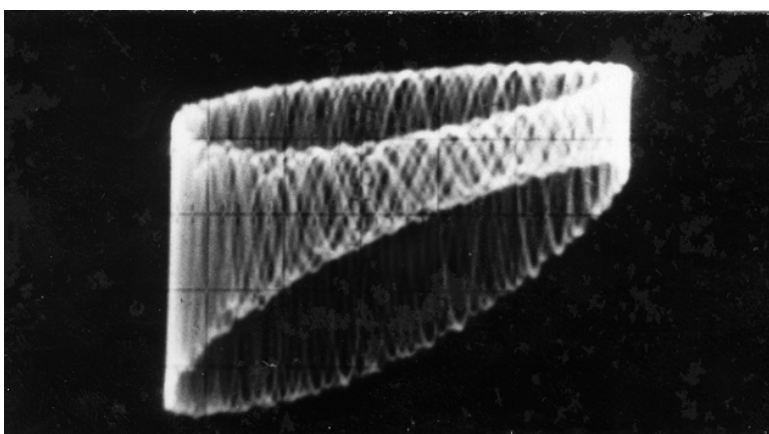


Фото 4.1.7

2. Эксперимент по возбуждению заданных гармонических колебаний вследствие параметрического воздействия на систему

Для проверки результатов расчета и оценки применимости полученных ранее выражений был использован автогенератор, собранный по схеме рис. 4.2.1.

RC-структура (однородная и линейная) была исполнена методом нанесения резистивного, диэлектрического и проводящего слоев в вакууме. Частота поворота фазы на 180° в RC-структуре соответствовала $f_0 = 6180 \text{ Гц}$, $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 9960 \text{ пФ}$; частота была рассчитана с учетом значительного входного сопротивления повторителя $R_{\text{вх}} = 17R$ и достаточно малого выходного сопротивления усилителя $R_{\text{вых}} = 0,002R$. Экспериментально измеренные линейная частота и бифуркационный параметр равнялись соответственно $f_0 = 6185 \text{ Гц}$ и $k_m = 11,7$. Динамическая характеристика усилителя снималась на переменном напряжении, для чего база транзистора T_3 отключалась от RC-структуры и при помощи делителя напряжения (не показанного на схеме) на базе T_3 устанавливалось напряжение смещения, равное тому, которое имелось на ней при срыве автоколебаний. Практически входом усилителя являлась база T_3 , а выходом – коллектор T_2 . Характеристика фотографировалась с экрана осциллографа, а затем с учетом масштабных коэффициентов аппроксимировалась полиномом третьей степени.

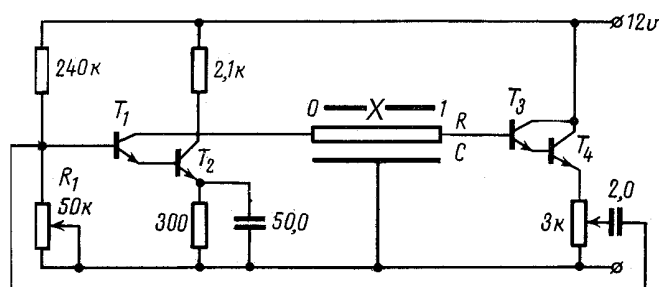


Рис. 4.2.1

На рис. 4.2.2 приведена полученная характеристика каскада. Величина k_0 устанавливалась путем изменения коэффициента передачи повторителя напряжения, а положение рабочей точки – резистором R_1 . В недовозбужденном режиме, в котором и проводился данный эксперимент, нелинейная характеристика усилителя аппроксимировалась кубическим полиномом вида:

$$u_{\text{вых}} = 11,4 u_{\text{вх}} + 10 u_{\text{вх}}^2 - 15 u_{\text{вх}}^3$$

причем $\varepsilon = k_m - k_0 = 0,3$.

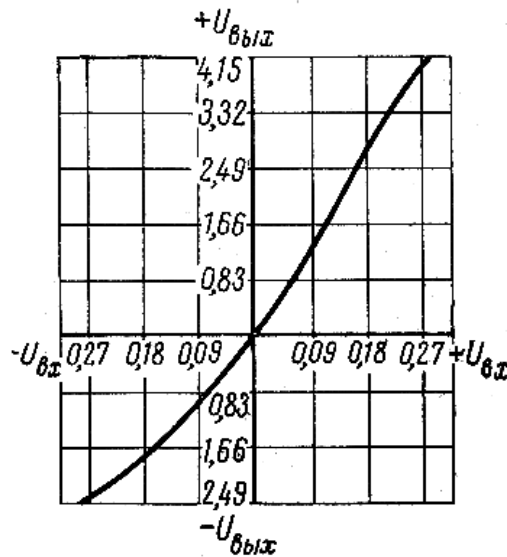


Рис. 4.2.2

Далее на вход RC-структуры через емкость 750нФ подключался варикап Д901Е, на который сначала подавалось постоянное обратное смещение $0,45\text{В}$, а затем от ГЗ добавлялось переменное напряжение с частотой приблизительно в два раза больше, чем частота самовозбуждения генератора. Нелинейная характеристика варикапа изображена на рис. 4.2.3.

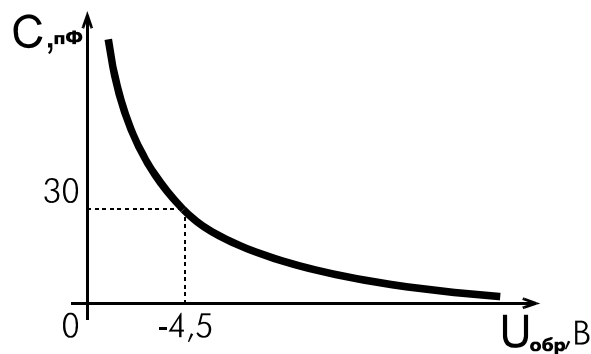


Рис. 4.2.3

В дальнейшем выбирались амплитуда внешнего воздействия и частота, при которых в системе возбуждались колебания с частотой, близкой к частоте генерации. Затем, осуществляя расстройку частоты ГЗ, по срыву параметрических колебаний определялись полоса возбуждения и амплитудно-частотные характеристики, которые с хорошей степенью точности (25%) совпадали с результатами теории.

Аналогично предыдущему проводился эксперимент по возбуждению заданного колебания в многоциклической RC-системе, принципиальная схема которой представлена на рис. 4.1.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.-503 с.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.-384 с.
4. Винтер И.А., Артемова Т.К. Матричный метод поляризационного измерения электро-магнитного поля // Измерительная техника. 1997. № 2. С. 40-43.
5. Винтер И.А., Артемова Т.К. Матричный метод оценки ЭМС в приборном отсеке летательного аппарата // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1997. Т. 5. Вып. 4(20). С. 14-21.
6. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы // ЖТФ. 1934. Т. 4. Вып. 1. С. 144-159.
7. Витт А.А. К теории скрипичной структуры // ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 9. С. 1459-1479.
8. Камбулов В.Ф. Гармонические колебания в автогенераторе с LCRG-распределенными параметрами в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 11. С. 2321-2326.
9. Камбулов В.Ф. Синхронизация автоколебаний в RC-автогенераторах // Сб. тр. института математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс: Пяргале, 1980. Вып. 27. С. 27-33.
10. Камбулов В.Ф. Параметрический резонанс в линии с LC-распределенными параметрами // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 123-129.
11. Камбулов В.Ф. Синхронизация автоколебаний в автогенераторах с распределенными параметрами: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 1984.-128с.
12. Камбулов В.Ф., Куликов А.Н. Автоколебательные системы: Учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 1986. 74 с.
13. Kambulov V.F. Bifurcation Auto-Oscillation in a Generator with a segment of a Long-Line in a Feedback Circuit // Second International Conference on Development Dierenmous of the Radiocommunication System and Means. Voronesh, 1995. С. 137-143.
14. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю. О явлении буферности в одной резонансной гиперболической краевой задаче из радиофизики // Мат. сборник. 1995. Т. 186, № 7. С. 77-96.
15. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Математическое моделирование. 1996. Т. 8, № 1. С. 93-102.
16. Камбулов В.Ф. Теоретический и экспериментальный анализ явления буферности в длинной линии с туннельным диодом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1575-1576.

17. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О явлении буферности в длинной линии с туннельным диодом // УМН. 1996. Т. 51, вып. 5. С. 146-147.
18. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теоретический и экспериментальный феномен буферности в длинной линии с туннельным диодом // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 638-645.
19. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю. О специфике генерируемых колебаний в автогенераторе с малым затуханием в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 1019-1024.
20. Камбулов В.Ф. Модель распределенного автогенератора Ван-Дер-Поля // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1121-1124.
21. Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю. О явлении буферности в длинной линии с туннельным диодом // ДАН. 1997. Т. 355, № 6. С. 744-746.
22. Камбулов В.Ф., Прудниченко А.С. Параметрические колебания в РС-автогенераторе с распределенными параметрами // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997. Т. 40, № 9. С. 29-36.
23. Камбулов В.Ф. Бифуркация автоколебаний в одном РС-генераторе с распределенными параметрами при асимметричной нелинейной характеристике // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997. Т. 40, № 10. С. 60-67.
24. Камбулов В.Ф., Прудниченко А.С. Автогенераторы с распределенными параметрами и их математические модели (Кн. 1,2) . Ярославль: ЗАО ФГИ "Содействие". 1997. 113(115) с.
25. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.-320 с.
26. Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И. Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с.
27. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778-1788.
28. Колесов Ю.С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. С. 3-40.
29. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: Собр. соч. 1956. Т. 2. С. 7-263.
30. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 488 с.
31. Матвеев В.Н., Прудниченко А.С., Спокойнов А.Н., Тарасов С.А. О параметрических колебаниях в одной распределенной системе в случае резонанса 1:1. Деп. в ВИНТИ, 17.06.98, № 1822-B98. С. 10.
32. Матвеев В.Н., Прудниченко А.С., Спокойнов А.Н., Чикин А.Н. Автопараметрические резонансы в одной системе с распределенными параметрами. Деп. в ВИНТИ, 17.06.98, № 1823-B98. С. 6.
33. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988.-391 с.
34. Минакова И.И. Неавтономные режимы автоколебательных систем. М.: МГУ, 1987. 168 с.

35. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
36. Neprintsev V.I., Kambulov V.F. Bifurcation of oscillations in an oscillator based on a nonlinear RC- distributed structure with a nonlinear amplifier characteristic// Proc. the third international symposium on network theory. Split. Yugoslavia, 1975. P. 545-553.
37. Непринцев В.И., Камбулов В.Ф. Нелинейные искажения в автогенераторах с распределенной RC-структурой в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 5. С. 982-993.
38. Прудниченко А.С. Условия возбуждения параметрических колебаний в одном генераторе с распределенными параметрами // Сб. Научных трудов конференции молодых ученых. Ярославль, 1996. С. 15-16.
39. Прудниченко А.С. Способ расширения границы применимости бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на примере одной задачи из радиофизики. Деп. в ВИНТИ, 20.02.97, № 542–В97. С. 10.
40. Прудниченко А.С. Математическая модель RC-автогенератора при возбуждении в нем параметрических колебаний в случае резонанса 1:1// Математические модели естествознания. Волгоград, 1997. С. 21-22.
41. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
42. Уткин Г.М. Автоколебательные системы и волновые усилители. М.: Сов. Радио, 1978. 272 с.

Содержание

Введение	3
.....	
Глава 1. Исследование одного автогенератора с RC-распределенными параметрами	4
1. Постановка краевой задачи	4
2. Анализ условий самовозбуждения	5
3. Предварительные сведения	9
4. Определение параметров автоколебаний. Явление многоциклическости в RC-системе	11
5. Влияние нелинейности активного элемента на многоциклическость в RC-автогенераторе	18
Глава 2. Исследование внешнего воздействия на возбуждение и стабилизацию многоциклических режимов	20
.....	
1. Синхронизация бифурцирующих автоколебаний при резонансе 1:1	20
2. Параметрическое возбуждение колебаний в многоциклической RC-распределенной системе	30
Глава 3. Исследование внешнего воздействия на возбуждение многоциклических режимов	40
.....	
Глава 4. Проведение экспериментов для RC-автогенератора с распределенными параметрами	43
.....	
1. Эксперимент по выявлению синхронизации многоциклических режимов и их разрушения при асимметрии нелинейной характеристики	43
2. Эксперимент по возбуждению заданных гармонических колебаний вследствие параметрического воздействия на систему	47
.....	
Литература	49

Игорь Александрович Винтер, Виктор Федорович Камбулов
Александр Семенович Прудниченко

Автоколебательные системы

Часть II

Корректор А.А.Аладьева
Компьютерная верстка Л.А. Кузьмичевой

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96

Подписано в печать 12.05.99. Формат 60х84/16. Бумага белая писчая №1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
Ярославского государственного университета
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе. ООО "Рио-Гранд". Ярославль, ул. Чкалова, 2