В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Существование и устойчивость быстро осциллирующих циклов у нелинейного телеграфного уравнения, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1998, том 38, номер 8, 1287–1300

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 8, с. 1287–1300

УДК 519.63

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЦИКЛОВ У НЕЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ[1)]

© 1998 г. **В. Ф. Камбулов*, А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов****

*(*150000 Ярославль, Советская, 14, Ярославский ун-т, матем. ф-т;*
***119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, мехмат)*

Поступила в редакцию 21.05.97 г.

Продолжены исследования автоколебаний в сингулярно возмущенных системах, установлены условия существования и устойчивости у нелинейного волнового уравнения с малой диффузией быстро осциллирующих по пространственной переменной циклов, т.е. периодических решений, обладающих специфическим релаксационным поведением.

Основы теории колебаний в сингулярно возмущенных системах обыкновенных дифференциальных уравнений заложены в [1], дальнейшее развитие эта теория получила в монографии [2], а вполне законченный вид она приобрела в монографиях [3], [4]. Отметим еще монографию [5], в которой общие идеи из [3], [4] использованы при построении релаксационных автоколебаний для некоторых уравнений с запаздыванием из экологии. В настоящей работе эти исследования продолжены.

1. СЛУЧАЙ ДИФФУЗИИ ПОРЯДКА ЕДИНИЦЫ

1.1. Постановка задачи и описание результата. Сначала изучим общие свойства рассматриваемого класса уравнений в случае диффузии порядка единицы, так как в дальнейшем они будут существенно использоваться при построении быстро осциллирующих циклов.

На отрезке $0 \le x \le \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \varepsilon \partial u/\partial t + u = a^2 \partial^2 u/\partial x^2 + f(u, \partial u/\partial t), \tag{1.1}$$

$$\partial u/\partial x|_{x=0} = \partial u/\partial x|_{x=\pi} = 0, \tag{1.2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a > 0$, функция $f(u, v) \in C^\infty$ имеет в нуле тейлоровское разложение вида

$$f(u, v) = a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + b_4 v^3 + \dots . \tag{1.3}$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u, \partial u/\partial t)$) краевой задачи (1.1), (1.2) возьмем $\overset{\circ}{W}{}_2^2 \times W_2^1$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ – соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Напомним, что понятие фазового пространства позволяет практически без изменений перенести на бесконечномерный случай основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: устойчивость по Ляпунову, орбитальную устойчивость, интегральные многообразия и т.д. Поэтому ниже для краевой задачи (1.1), (1.2) будем пользоваться соответствующими понятиями без дополнительных пояснений.

Поставим вопрос о существовании и устойчивости у задачи (1.1), (1.2) периодических по t решений, нетривиально зависящих от пространственной переменной x. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ линеаризованная в нуле задача (1.1), (1.2) допускает тригонометрические решения

$$\exp(\pm i\omega_n t)\cos nx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}.$$

Поэтому фиксируем произвольное натуральное n и для построения периодического решения, бифурцирующего при $\varepsilon > 0$ из нулевого состояния равновесия на моде $\cos nx$, воспользуемся стан-

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00207.)

дартным одночастотным методом из [6], т.е. положим в (1.1), (1.2)

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_3(\tau, x) + \varepsilon^2 u_4(\tau, x) + \ldots, \tag{1.4}$$

где

$$u_1 = [\exp(i\omega_n\tau) + \exp(-i\omega_n\tau)]\xi_n\cos nx, \tag{1.5}$$

$$\tau = (1 + \varepsilon\alpha_n + \ldots)t, \tag{1.6}$$

а ξ_n, α_n – некоторые неизвестные (подлежащие определению) вещественные постоянные. Учитывая затем разложение (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем для определения u_k, $k = 2, 3, 4$, рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач

$$(\partial^2/\partial\tau^2 - a^2\partial^2/\partial x^2)u_k + u_k = g_k(\tau, x), \quad \partial u_k/\partial x|_{x = 0, \pi} = 0. \tag{1.7}$$

Решения последних ищем в виде тригонометрических полиномов переменной $\omega_n\tau$ той же структуры, что и соответствующая неоднородность.

Несложные вычисления показывают, что

$$u_2(\tau, x) = \xi_n^2[A(x) + B(x)\exp(2i\omega_n\tau) + \bar{B}(x)\exp(-2i\omega_n\tau)], \tag{1.8}$$

где

$$A(x) = (a_1 + \omega_n^2 a_3)\left[1 + \frac{1}{\omega_{2n}^2}\cos(2nx)\right], \quad B(x) = \frac{1}{2}(a_1 + i\omega_n a_2 - \omega_n^2 a_3)\left[\frac{1}{1 - 4\omega_n^2} - \frac{1}{3}\cos(2nx)\right], \tag{1.9}$$

а при $k = 3$ правая часть в (1.7) представляет собой линейную комбинацию функций

$$\exp(\pm im\omega_n\tau)\cos(npx), \quad m, p = 1, 3. \tag{1.10}$$

Поэтому для разрешимости задачи (1.7) при $k = 3$ в нужном классе функций необходимо и достаточно отсутствие в ее правой части гармоник

$$\exp(\pm i\omega_n\tau)\cos nx. \tag{1.11}$$

Учитывая в представлении

$$\begin{aligned} g_3(\tau, x) = {} & \frac{\partial u_1}{\partial\tau} - 2\alpha_n\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} + 2a_1u_1u_2 + a_2u_1\frac{\partial u_2}{\partial\tau} + a_2u_2\frac{\partial u_1}{\partial\tau} + \\ & + 2a_3\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\frac{\partial u_2}{\partial\tau} + b_1u_1^3 + b_2u_1^2\frac{\partial u_1}{\partial\tau} + b_3u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\right)^2 + b_4\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\right)^3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

явный вид (1.8), (1.9) решения u_2 и приравнивая нулю коэффициенты при гармониках вида (1.11), для определения постоянных ξ_n, α_n приходим к уравнению

$$(\omega_n - 2i\alpha_n\omega_n^2)\xi_n + d_n\xi_n^3 = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned} d_n = {} & \omega_n a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\omega_{2n}^2} - \frac{3}{2(4\omega_n^2 - 1)}\right) + \frac{3}{4}(\omega_n b_2 + 3\omega_n^3 b_4) - 2ia_1(a_1 + \omega_n^2 a_3)\left(1 + \frac{1}{2\omega_{2n}^2}\right) + \\ & + i\left[(a_1 - \omega_n^2 a_3)(a_1 + 2\omega_n^2 a_3) - \frac{1}{2}a_2^2\omega_n^2\right]\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4\omega_n^2 - 1}\right) - \frac{3}{4}i(3b_1 + \omega_n^2 b_3). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Предположим, что

$$\mathrm{Re}\, d_n < 0. \tag{1.15}$$

Тогда из (1.13) находим

$$\xi_n = \sqrt{-\omega_n/\mathrm{Re}\, d_n}, \quad \alpha_n = \xi_n^2\,\mathrm{Im}\, d_n/(2\omega_n^2), \tag{1.16}$$

а затем определяем функцию u_3, представляющую собой линейную комбинацию гармоник вида (1.10) при $m = 1$, $p = 3$ и $m = 3$, $p = 1, 3$. И, наконец, при $k = 4$ разрешимость краевой задачи (1.7) в классе тригонометрических многочленов обеспечивает неравенство

$$a^2 \neq (2n)^{-2}, \tag{1.17}$$

возникающее при нахождении коэффициентов функции u_4 при гармониках

$$\exp(\pm 2i\omega_n\tau)\cos(4nx).$$

Итак, при условиях (1.15), (1.17) приближенное периодическое решение (1.4) может быть построено с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке. Линеаризуя на нем уравнение (1.1), получаем краевую задачу

$$\begin{gathered}\partial^2 h/\partial t^2 - a^2\partial^2 h/\partial x^2 + h = \sqrt{\varepsilon}[a_1(\omega_n\tau, x)h + a_2(\omega_n\tau, x)\partial h/\partial t] + \\ + \varepsilon[b_1(\omega_n\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\omega_n\tau, x, \varepsilon)\partial h/\partial t], \quad \partial h/\partial x|_{x=0,\pi} = 0\end{gathered} \tag{1.18}$$

с $2\pi/\omega_n$-периодическими по $\tau = (1 + \varepsilon\alpha_n)t$ коэффициентами.

Как известно из [7], основной этап доказательства существования у краевой задачи (1.1), (1.2) цикла с асимптотикой (1.4) состоит в исследовании свойств устойчивости решения уравнения (1.18) и в обратимости соответствующего ему дифференциального оператора (в подходящем пространстве периодических функций). Обе эти проблемы решаются с помощью алгоритма исследования устойчивости из [8], адаптированного в [9] для телеграфных уравнений. Описание указанного алгоритма приводится ниже.

Начнем с расчета характеристических показателей (деленных на период логарифмов мультипликаторов) уравнения (1.18), отвечающих генерируемой моде $\cos nx$. В соответствии с развитой в [8] методикой положим

$$h = [V_0(\tau, x) + \sqrt{\varepsilon}V_1(\tau, x) + \varepsilon V_2(\tau, x)]\exp(\varepsilon D t), \tag{1.19}$$

$$V_j = [w_j, \bar{w}_j], \quad j = 0, 1, 2, \quad w_0 = \exp(i\omega_n\tau)\cos nx, \tag{1.20}$$

где w_j – тригонометрические полиномы переменной $\omega_n\tau$, а матрица D имеет структуру

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Приравнивая коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$ и ε, для определения w_1 и w_2 получаем краевые задачи вида (1.7), первая из которых разрешима в нужном классе функций. Неоднородность в уравнении для w_2 представляет собой линейную комбинацию гармоник (1.10). Поэтому, приравнивая нулю коэффициенты при гармониках (1.11), находим

$$\kappa_1 = d_n\xi_n^2/(2\omega_n), \quad \kappa_2 = \kappa_1, \tag{1.22}$$

а затем определяем и саму функцию w_2.

При $m = 0, 1, \ldots, m \neq n$ подставим в (1.18) представление

$$h = \exp(\varepsilon\mu_m t)[\exp(i\omega_m t)\cos mx + \sqrt{\varepsilon}h_{1m}(\omega_m t, \omega_n\tau, x) + \varepsilon h_{2m}(\omega_m t, \omega_n\tau, x)], \tag{1.23}$$

где h_{1m}, h_{2m} – тригонометрические многочлены переменных $\omega_m t$, $\omega_n\tau$, а μ_m – подлежащая определению комплексная постоянная. В результате, приравнивая коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$, для h_{1m} получаем краевую задачу

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau} + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)h_{1m} + h_{1m} = [a_1(\omega_n\tau, x) + i\omega_m a_2(\omega_n\tau, x)]\exp(i\omega_m t)\cos mx, \\ \partial h_{1m}/\partial x|_{x=0,\pi} = 0,\end{gathered} \tag{1.24}$$

решение которой будем искать в виде тригонометрического многочлена той же структуры, что и ее правая часть. На этом пути приходим к равенству

$$\begin{gathered}h_{1m} = \exp[i(\omega_m t + \omega_n\tau)]\{v_{1m}\cos[(n+m)x] + v_{2m}\cos[(n-m)x]\} + \\ + \exp[i(\omega_m t - \omega_n\tau)]\{v_{3m}\cos[(n+m)x] + v_{4m}\cos[(n-m)x]\},\end{gathered} \tag{1.25}$$

где

$$v_{1m} = v_+/[\omega_{n+m}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2], \quad v_{2m} = v_+/[\omega_{n-m}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2], \tag{1.26}$$

$$v_{3m} = v_-/[\omega_{n+m}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2], \quad v_{4m} = v_-/[\omega_{n-m}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2], \tag{1.27}$$

$$v_{\pm} = \frac{\xi_n}{2}[2a_1 + i(\omega_m \pm \omega_n)a_2 \mp 2\omega_n\omega_m a_3]. \tag{1.28}$$

Отметим, что в (1.26), (1.27) при любом $a > 0$

$$(\omega_n + \omega_m)^2 - \omega_{n\pm m}^2 \neq 0, \quad (\omega_n - \omega_m)^2 - \omega_{n\pm m}^2 \neq 0. \tag{1.29}$$

Действительно, в справедливости первого неравенства (1.29) убеждаемся, переписывая его в эквивалентной форме

$$-1/2 \pm a^2nm \neq \sqrt{1 + a^2n^2}\sqrt{1 + a^2m^2}$$

и замечая, что, в силу неравенства Буняковского–Коши,

$$|-1/2 \pm a^2nm| \leq \sqrt{1/4 + a^2n^2}\sqrt{1 + a^2m^2} < \sqrt{1 + a^2n^2}\sqrt{1 + a^2m^2}.$$

Второе из неравенств (1.29) устанавливается аналогично. Отметим также, что при $m \longrightarrow \infty$ коэффициенты (1.26), (1.27) стремятся к конечным пределам, а значит,

$$|v_{jm}| \leq N, \quad j = 1, \ldots, 4; \tag{1.30}$$

здесь и ниже через N, N_1 и т.д. обозначаем различные универсальные (не зависящие от m, ε) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

При нахождении h_{2m} имеем дело с аналогичной (1.24) краевой задаче. Приравнивая в ее правой части $g(\omega_m t, \omega_n\tau, x)$ к нулю коэффициент при гармонике

$$\exp(i\omega_m t)\cos mx,$$

для определения μ_m приходим к равенству

$$\begin{aligned} 2i\omega_m\mu_m - i\omega_m = {} & \frac{\xi_n}{2}(v_{1m} + v_{2m})[2a_1 - i\omega_n a_2 + i(\omega_m + \omega_n)(a_2 - 2i\omega_n a_3)] + \\ & + \frac{\xi_n}{2}(v_{3m} + v_{4m})[2a_1 + i\omega_n a_2 + i(\omega_m - \omega_n)(a_2 + 2i\omega_n a_3)] + \\ & + \xi_n^2[2a_1(a_1 + \omega_n^2 a_3) + 3b_1 + \omega_n^2 b_3] + i\omega_m\xi_n^2[a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3) + b_2 + 3\omega_n^2 b_4]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Из (1.31), в частности, следует, что при $m \longrightarrow \infty$ последовательность μ_m имеет конечный предел μ_∞.

После определения μ_m в $g(\omega_m t, \omega_n\tau, x)$ остаются лишь гармоники

$$\begin{gathered} \exp(i\omega_m t)\cos[(2n \pm m)x], \quad \exp[i(\omega_m t + 2\omega_n\tau)]\cos[(2n \pm m)x], \\ \exp[i(\omega_m t - 2\omega_n\tau)]\cos[(2n \pm m)x], \quad \exp[i(\omega_m t \pm 2\omega_n\tau)]\cos mx. \end{gathered} \tag{1.32}$$

Поэтому для нахождения h_{2m} в том же классе функций следует убедиться в справедливости неравенств

$$\begin{gathered} \omega_m^2 - \omega_{2n\pm m}^2 \neq 0, \quad (\omega_m + 2\omega_n)^2 - \omega_{2n\pm m}^2 \neq 0, \\ (\omega_m - 2\omega_n)^2 - \omega_{2n\pm m}^2 \neq 0, \quad (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 - \omega_m^2 \neq 0. \end{gathered} \tag{1.33}$$

Второе и третье неравенства (1.33) эквивалентны условию

$$|1 \pm a^2nm| \neq \sqrt{1 + a^2m^2}\sqrt{1 + a^2n^2}. \tag{1.34}$$

А так как $m \neq n$, то, в силу неравенства Буняковского–Коши, левая часть (1.34) строго меньше правой. Что же касается первого и четвертого неравенств (1.33), то они, соответственно, эквивалентны очевидным неравенствам

$$4a^2n(m \pm n) \neq 0, \quad 4\omega_n(\omega_n \pm \omega_m) \neq 0.$$

Отметим еще, что после деления на ω_m^2 величины в (1.33) при $m \longrightarrow \infty$ стремятся к ненулевым конечным пределам. А отсюда, в свою очередь, следует, что для коэффициентов функции h_{2m} при гармониках (1.32) справедливы аналогичные (1.30) оценки.

Перед формулировкой основного результата введем в рассмотрение числа $R_{n,m} = \mathrm{Re}\mu_m$ $(m \neq n)$, $R_{n,\infty} = \mathrm{Re}\mu_\infty$, для которых из (1.31) вытекают равенства

$$\begin{gathered}2R_{n,m} = 1 + \frac{1}{2}a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3)\left(2 + \frac{\omega_n}{\omega_m}\right)\left[\frac{1}{\omega_{n+m}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2} + \frac{1}{\omega_{n-m}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2}\right]\xi_n^2 + [a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3) + \\ + b_2 + 3\omega_n^2 b_4]\xi_n^2 + \frac{1}{2}a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3)\left(2 - \frac{\omega_n}{\omega_m}\right)\left[\frac{1}{\omega_{n+m}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2} + \frac{1}{\omega_{n-m}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2}\right]\xi_n^2,\end{gathered} \tag{1.35}$$

$$2R_{n,\infty} = 1 + [a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3) + b_2 + 3\omega_n^2 b_4]\xi_n^2. \tag{1.36}$$

Теорема 1. *Пусть при некотором натуральном n справедливы неравенства* (1.15), (1.17), *отличны от нуля числа* (1.35), (1.36) *и количество положительных среди них равно* m_0. *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет цикл с асимптотикой* (1.4), (1.16), *экспоненциально орбитально устойчивый при* $m_0 = 0$ *и дихотомичный при* $m_0 > 0$ *с размерностью неустойчивого многообразия* $2m_0 + 1$.

Из (1.35), (1.36) следует, что при подходящем выборе параметров краевая задача (1.1), (1.2) может иметь любое конечное число устойчивых циклов, а также циклы с бесконечномерными неустойчивыми многообразиями (при $R_{n,\infty} > 0$).

1.2. Доказательство теоремы 1. Для начала обоснуем описанный выше алгоритм асимптотического вычисления характеристических показателей краевой задачи (1.18). Введем новые переменные $h_1 = \partial h/\partial t$, $h_2 = Bh$, где B – арифметический квадратный корень из оператора $-a^2d^2/dx^2 + I$ с граничными условиями (1.2), и перейдем обычным образом от уравнения (1.18) к системе первого порядка в $W_2^1 \times W_2^1$. Выполним затем в получившейся системе замену, исходя из формулы

$$\begin{gathered}h = (V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2)v + \sum_{\substack{m = 0, 1, \dots \\ m \neq n}} \{\omega_m^{-2}[\exp(i\omega_m t)\cos mx + \sqrt{\varepsilon}h_{1m} + \varepsilon h_{2m}]\eta_m + \\ + \omega_m^{-2}[\exp(-i\omega_m t)\cos mx + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}_{1m} + \varepsilon\bar{h}_{2m}]\bar{\eta}_m\},\end{gathered} \tag{1.37}$$

где $v = \mathrm{colon}(v_1, \bar{v}_1)$, $\eta = \mathrm{colon}(v_1, \bar{v}_1, \eta_1, \bar{\eta}_1, \dots) \in l_2$. Последнее означает, что при дифференцировании (1.37) по t следует считать

$$\dot{v} = \varepsilon D v, \quad \dot{\eta}_m = \varepsilon\mu_m\eta_m.$$

Заметим, далее, что из способа построения и свойств входящих в (1.37) функций следует, что формула (1.37) индуцирует ограниченный (равномерно по t, ε) оператор, действующий из l_2 в $W_2^1 \times W_2^1$, а результатом применения указанной замены к уравнению (1.18) служит система в l_2:

$$\dot{\eta} = \varepsilon\Lambda_0\eta + \varepsilon^{3/2}\Lambda_1(t, \varepsilon)\eta. \tag{1.38}$$

Здесь $\Lambda_0 = \mathrm{diag}\{D, \mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_m, \dots\}$, а линейный оператор Λ_1 ограничен равномерно по $t \in R$ и ε.

Несложный анализ системы (1.38) показывает, что свойства ее устойчивости совпадают с теми, о которых говорится в теореме 1: реальные части всех ее характеристических показателей (за исключением одного, имеющего порядок $\varepsilon^{3/2}$) равномерно по $m \ge 0$ с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ совпадают с числами $\varepsilon\mathrm{Re}\mu_m$ $(m \neq n)$ и $-\varepsilon$.

Завершающий этап – доказательство существования периодического решения у краевой задачи (1.1), (1.2) – проводится по стандартной схеме из [7]. Выполним в (1.1) замену времени

$$\tau = (1 + \varepsilon\alpha_n + \varepsilon^2\delta)t,$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ – подлежащая определению ограниченная функция ε, и положим

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_3(\tau, x) + \varepsilon^2 u_4(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}h,$$

где функции u_k, $k = 1, \dots, 4$, взяты из (1.4). В результате приходим к уравнению

$$\Pi(\varepsilon, \delta)h = \varepsilon F(\tau, x, \varepsilon, \delta, h, \partial h/\partial\tau), \tag{1.39}$$

где

$$\Pi(\varepsilon,\delta)h =$$
$$= (1+\varepsilon\alpha_n+\varepsilon^2\delta)^2\frac{\partial^2 h}{\partial\tau^2} - a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + h - \sqrt{\varepsilon}\Big[a_1(\omega_n\tau, x)h + a_2(\omega_n\tau, x)(1+\varepsilon\alpha_n+\varepsilon^2\delta)\frac{\partial h}{\partial\tau}\Big] - \tag{1.40}$$
$$-\varepsilon\Big[b_1(\omega_n\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\omega_n\tau, x, \varepsilon)(1+\varepsilon\alpha_n+\varepsilon^2\delta)\frac{\partial h}{\partial\tau}\Big],$$

а гладкая по совокупности переменных, $2\pi/\omega_n$-периодическая по τ функция $F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u, v)$ такова, что

$$\sup_\tau \|F(\tau, x, \varepsilon, \delta, 0, 0)\|_{W_2^1} \le N_1, \tag{1.41}$$

$$\sup_\tau \|F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u_1, v_1) - F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u_2, v_2)\|_{W_2^1} \le N_2\sqrt{\varepsilon}(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|), \tag{1.42}$$

где $N_2 = N_2(R)$, $R = \max\{|u_j|, |v_j|, j = 1, 2\}$.

Из наших построений следует, что уравнение

$$\Pi(\varepsilon,\delta)h = 0 \tag{1.43}$$

имеет приближенное (с точностью до ε^2 по невязке) периодическое решение

$$h_0(\tau, x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\tau}[u_1(\tau, x) + \sqrt{\varepsilon}u_2(\tau, x) + \varepsilon u_3(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_4(\tau, x)].$$

Добавляя в левую часть этого уравнения слагаемое (имеющее порядок ε^2)

$$-\Delta(\tau, x, \varepsilon, \delta)\int_0^\pi\Big[h\omega_n\sin\omega_n\tau + \frac{\partial h}{\partial\tau}\cos\omega_n\tau\Big]\cos nx\,dx\times$$
$$\times\left\{\int_0^\pi\Big[h_0(\tau, x, \varepsilon)\omega_n\sin\omega_n\tau + \frac{\partial h_0}{\partial\tau}\cos\omega_n\tau\Big]\cos nx\,dx\right\}^{-1}, \tag{1.44}$$

где $\Delta = \Pi(\varepsilon, \delta)h_0$, можно сделать его точным, что и полагаем ниже. Естественно, что добавку (1.44) нужно учесть и в правой части (1.39), общие свойства которой от этого не изменятся.

Рассмотрим оператор $\Pi(\varepsilon, \delta)$ в банаховом пространстве H, состоящем из таких $2\pi/\omega_n$-периодических по τ функций $h(\tau, x)$, что сама $h(\tau, x)$ непрерывна по τ в метрике $\mathring{W}_2^2$, $\partial h/\partial\tau$ непрерывна в метрике W_2^1, а $\partial^2 h/\partial\tau^2$ – в метрике L_2. Норму в H определим формулой

$$\|h\|_H = \max_\tau\left\{\|h\|_{\mathring{W}_2^2} + \left\|\frac{\partial h}{\partial\tau}\right\|_{W_2^1} + \left\|\frac{\partial^2 h}{\partial\tau^2}\right\|_{L_2}\right\}.$$

Введем еще пространство H_0, состоящее из непрерывных $2\pi/\omega_n$-периодических по τ функций $h(\tau, x)$ со значениями в W_2^1 и нормой

$$\|h_0\|_{H_0} = \max_\tau\|h(\tau, x)\|_{W_2^1}.$$

Как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости в H уравнения

$$\Pi(\varepsilon,\delta)h = G(\tau, x), \quad G\in H_0, \tag{1.45}$$

является равенство

$$\frac{\omega_n}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_n}\int_0^\pi G(\tau, x)g(\tau, x, \varepsilon, \delta)dxd\tau = 0, \tag{1.46}$$

где $g(\tau, x, \varepsilon, \delta)$ – периодическое решение сопряженного уравнения $\Pi^*(\varepsilon, \delta)g = 0$, удовлетворяющее условию нормировки

$$\frac{\omega_n}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_n}\int_0^{\pi} g(\tau, x, \varepsilon, \delta)\frac{\partial}{\partial\tau}h_0(\tau, x, \varepsilon)dxd\tau = 1. \tag{1.47}$$

Решение h_G при этом единственно, если $\partial h_G/\partial\tau$ ортогонально в среднем функции g. Кроме этого, имеет место неравенство

$$\|h_G\|_H \le N_3\|G\|_{H_0}/\varepsilon, \tag{1.48}$$

вытекающее из структуры замены (1.37) и вида системы (1.38), к которой преобразуется уравнение (1.43) с помощью указанной замены.

Рассматривая правую часть (1.39) как неоднородность G и подправляя ее соответствующим образом (вычитая из G функцию $\partial h_0/\partial\tau$, умноженную на левую часть (1.46)), переходим к интегральному уравнению, обращая оператор П. Неравенства (1.41), (1.42), (1.48) позволяют применить к нему в H принцип сжимающих отображений и определить функцию $h(\tau, x, \varepsilon, \delta)$. Подставляя ее в равенство (1.46), для определения δ получаем уравнение

$$\delta = p(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\Omega(\varepsilon, \delta), \tag{1.49}$$

где функция $p(\varepsilon)$ ограничена.

Для выяснения характера зависимости функции Ω от δ заметим, что имеют место неравенства

$$\sup_\tau\left\|\frac{\partial}{\partial\delta}g(\tau, x, \varepsilon, \delta)\right\|_{W_2^1} \le N_4, \quad \sup_\tau\left\|\frac{\partial}{\partial\delta}h(\tau, x, \varepsilon, \delta)\right\|_{W_2^1} \le N_5. \tag{1.50}$$

Действительно, применяя к уравнению

$$\Pi^*(\varepsilon, \delta)h = 0 \tag{1.51}$$

описанный выше алгоритм, убеждаемся, что, во-первых, его единственное периодическое решение (удовлетворяющее условию нормировки (1.47)) $g(\tau, x, \varepsilon, \delta)$ допускает оценку

$$\|g\|_H \le N_6, \tag{1.52}$$

а во-вторых, справедливо аналогичное (1.48) неравенство. Дифференцируя затем уравнение (1.51) по δ, получаем уравнение

$$\Pi^*(\varepsilon, \delta)w = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon, \delta), \quad w = \frac{\partial}{\partial\delta}g(\tau, x, \varepsilon, \delta), \tag{1.53}$$

в котором, в силу (1.52),

$$\sup_\tau\|f(\tau, x, \varepsilon, \delta)\|_{L_2} \le N_7. \tag{1.54}$$

И, наконец, обращая в (1.53) оператор Π^* и учитывая оценку (1.54), приходим к первому неравенству (1.50). Вторая оценка (1.50) обосновывается аналогично.

Из неравенств (1.50) вытекает, что по переменной δ функция Ω удовлетворяет условию Липшица с не зависящей от ε постоянной. Применяя теперь к уравнению (1.49) теорему о неявной функции, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЦИКЛОВ В СЛУЧАЕ МАЛОЙ ДИФФУЗИИ

2.1. Принцип подобия. Рассмотрим краевую задачу

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \varepsilon\partial u/\partial t + u = \varepsilon\sigma^2\partial^2 u/\partial x^2 + f(u, \partial u/\partial t), \tag{2.1}$$

$$\partial u/\partial x|_{x=0} = \partial u/\partial x|_{x=\pi} = 0, \tag{2.2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, положительный параметр σ имеет порядок 1, а функция $f(u, v)$ та же, что в (1.1). Как оказывается, проблема существования у задачи быстро осциллирующих по x периодических решений с помощью так называемого принципа подобия сводится к вопросу о существовании периодических по t и существенно зависящих от x решений краевой задачи (1.1), (1.2). Последний вопрос нами уже решен (см. теорему 1).

Принцип подобия состоит из трех этапов.

Этап 1. Выполним в (2.1), (2.2) замену переменной $nx \longrightarrow x$, где n – достаточно большое натуральное число. В результате придем к краевой задаче

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \varepsilon \partial u/\partial t + u = a_n^2 \partial^2 u/\partial x^2 + f(u, \partial u/\partial t), \tag{2.3}$$

$$\partial u/\partial x|_{x=0} = \partial u/\partial x|_{x=n\pi} = 0, \tag{2.4}$$

в которой параметр $a_n = \sqrt{\varepsilon}\,\sigma n$ будем считать величиной порядка 1.

Этап 2. Обратимся к вспомогательной краевой задаче (1.1), (1.2) и предположим, что на некотором отрезке

$$a_* \le a \le a_{**}, \quad 0 < a_* < a_{**} \tag{2.5}$$

изменения параметра a она имеет периодическое по t и нетривиально зависящее от x решение

$$u = u_0(t, x, a, \varepsilon). \tag{2.6}$$

Продолжим это решение по x на отрезок $-\pi \le x \le 0$ четным образом и на всю ось по периодичности с периодом 2π. Тогда, как легко видеть, оно будет удовлетворять граничным условиям (2.4) при любом натуральном n, а при $a = a_n \in [a_*, a_{**}]$ – и уравнению (2.3).

Этап 3. Возвращаясь к исходной краевой задаче (2.1), (2.2), заключаем, что при сделанных выше предположениях она имеет асимптотически большое число быстро осциллирующих по x циклов

$$u_n(t, x, \varepsilon) = u_0(t, nx, \sqrt{\varepsilon}\sigma n, \varepsilon) \tag{2.7}$$

с номерами n, удовлетворяющими неравенствам

$$a_*/\sigma\sqrt{\varepsilon} \le n \le a_{**}/\sigma\sqrt{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Итак, проблема существования у краевой задачи (2.1), (2.2) быстро осциллирующих циклов (2.7), (2.8) сводится к применению к вспомогательной краевой задаче (1.1), (1.2) теоремы 1. Поэтому ниже для удобства переформулируем условия последней для отрезка (2.5) и для $n = 1$.

Обозначим через $d(a)$ величину (1.14) при $n = 1$ и при a из отрезка (2.5).

Условие 1. Считаем, что $\mathrm{Re}\,d(a) < 0$ и что точка $a = 1/2$ не лежит на отрезке (2.5).

Напомним, что данное условие позволяет построить ряд (1.4) до четвертого шага включительно и определить, в частности, фигурирующие в (1.5), (1.6) (при $n = 1$) постоянные

$$\xi_1 = \sqrt{-\omega_1/\mathrm{Re}\,d(a)}, \quad \alpha_1 = \xi_1^2 \mathrm{Im}\,d(a)/(2\omega_1^2). \tag{2.9}$$

Перед формулировкой следующего ограничения обозначим через $\varphi_m(a)$, $\varphi_\infty(a)$, соответственно, величины $R_{n,m}$, $R_{n,\infty}$ (см. (1.35), (1.36)) при $n = 1$.

Условие 2. Считаем, что при всех a из отрезка (2.5) выполняются неравенства

$$\varphi_m(a) \ne 0, \quad m = 2, 3, \ldots, \quad \varphi_\infty(a) \ne 0. \tag{2.10}$$

Сформулированные ограничения вместе с теоремой 1 и принципом подобия приводят к следующему утверждению

Теорема 2. *Пусть для некоторого отрезка* (2.5) *выполняются условия* 1, 2. *Тогда найдется такое положительное число* ε_0, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *краевая задача* (2.1), (2.2) *имеет циклы* (2.7), (2.8), *где в качестве* (2.6) *фигурирует периодическое решение краевой задачи* (1.1), (1.2), *доставляемое теоремой* 1 *при* $n = 1$.

2.2. Исследование устойчивости быстро осциллирующих циклов. Линеаризуя краевую задачу (2.1), (2.2) на произвольном цикле семейства (2.7), (2.8) с номером n и выполняя замену $nx \longrightarrow x$, приходим к краевой задаче

$$\begin{gathered}\partial^2 h/\partial t^2 - a^2 \partial^2 h/\partial x^2 + h = \\ = \sqrt{\varepsilon}[a_1(\omega_1\tau, x)h + a_2(\omega_1\tau, x)\partial h/\partial t] + \varepsilon[b_1(\omega_1\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\omega_1\tau, x, \varepsilon)\partial h/\partial t],\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\partial h/\partial x|_{x=0} = \partial h/\partial x|_{x=n\pi} = 0, \tag{2.12}$$

в которой

$$\tau = [1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\delta(\varepsilon)]t, \tag{2.13}$$

а параметр $a = \sigma\sqrt{\varepsilon}\,n$, имеющий порядок 1, для удобства будем считать непрерывно меняющимся на отрезке (2.5). Отметим, что происхождение коэффициентов уравнения (2.11) и поправок α_1, $\delta(\varepsilon)$ к частоте в (2.13) очевидно, так как (2.11) представляет собой в то же время линеаризацию уравнения (1.1) на цикле (1.4) с номером $n = 1$. Однако, в отличие от задачи (1.18), краевая задача (2.11), (2.12) сингулярная, так как рассматривается на асимптотически большом (порядка $\varepsilon^{-1/2}$) отрезке $0 \le x \le n\pi$.

Итак, проблема устойчивости циклов (2.7) сводится к анализу расположения характеристических показателей краевой задачи (2.11), (2.12). Для их расчета снова воспользуемся алгоритмом из п. 1.1. С этой целью положим в (2.11), (2.12)

$$h = \exp(\varepsilon\mu_z t)[\exp(i\omega_z t)\cos zx + \sqrt{\varepsilon}h_{1z}(\omega_z t, \omega_1\tau, x) + \varepsilon h_{2z}(\omega_z t, \omega_1\tau, x)], \tag{2.14}$$

где $\omega_z = \sqrt{1 + a^2z^2}$, $z = k/n$, $k = 0, 1, \ldots$, h_{1z}, h_{2z} – тригонометрические многочлены переменных $\omega_z t$, $\omega_1\tau$, а μ_z – подлежащая определению комплексная постоянная.

Сравнивая уравнения (1.18) и (2.11), формулы (1.23) и (2.14), убеждаемся, что h_{1z}, h_{2z}, μ_z получаются из построенных в п. 1.1 функций h_{1m}, h_{2m} и постоянной μ_m посредством замены m на z и при $n = 1$. Более того, для входящих в h_{1z} коэффициентов v_{jz}, $j = 1, \ldots, 4$, оценки (1.30) сохраняются равномерно по всем $z \ge 0$. В случае же h_{2z} ситуация несколько иная. Здесь коэффициенты при гармониках

$$\exp(i\omega_z t)\cos[(2+z)x], \quad \exp[i(\omega_z t + 2\omega_1\tau)]\cos[(2\pm z)x],$$
$$\exp[i(\omega_z t - 2\omega_1\tau)]\cos[(2\pm z)x], \quad \exp[i(\omega_z t + 2\omega_1\tau)]\cos zx$$

по-прежнему допускают равномерные по всем $z \ge 0$ оценки вида (1.30); коэффициенты при гармониках

$$\exp(i\omega_z t)\cos[(2-z)x], \quad \exp[i(\omega_z t - 2\omega_1\tau)]\cos zx$$

при $z \longrightarrow 1$ имеют особенность вида $1/(z-1)$, а коэффициент при гармонике

$$\exp[i(\omega_z t - 2\omega_1\tau)]\cos[(2-z)x]$$

при $z \longrightarrow 1$ растет как $1/(z-1)^2$. Если же параметр z меняется на полуоси $z \ge 0$ с выброшенной фиксированной окрестностью точки $z = 1$, то равномерно ограниченными по z будут все входящие в h_{2z} коэффициенты.

Перед формулировкой следующего ограничения, предполагая, что параметр z непрерывно меняется на полуоси $z \ge 0$, вводим в рассмотрение функцию

$$\varphi(z, a) = \operatorname{Re}\mu_z. \tag{2.15}$$

Заметим, что

$$\varphi(z, a) \longrightarrow \varphi_\infty(a), \quad z \longrightarrow \infty, \tag{2.16}$$

где, напомним, $\varphi_\infty(a)$ – функция из (2.10).

Условие 3. Считаем, что при всех $a_* \le a \le a_{**}$, $z \ge 0$

$$\varphi(z, a) < 0, \quad \varphi_\infty(a) < 0. \tag{2.17}$$

Отметим, что данное ограничение усиливает условие 2, так как, очевидно, $\varphi_m(a) = \varphi(m, a)$.

При $z \longrightarrow 1$ сталкиваемся с особенностью, вызванной так называемыми пространственно-временными резонансами. Действительно, частота ω_1, отвечающая генерируемой моде $\cos x$, и частоты $\omega_{1\pm k/n}$, $k = 1, 2, \ldots$, на соседних модах $\cos[(1 \pm k/n)x]$ в силу малости k/n близки. Поэтому расчет характеристических показателей краевой задачи (2.11), (2.12) на этих модах в одночастотной форме (2.14) заведомо невозможен. Для того чтобы исправить положение, при

$$z = 1 + \nu, \quad 0 < |\nu| \le \nu_0, \tag{2.18}$$

где $\nu_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало, воспользуемся следующим специальным приемом. Положим в (2.11), (2.12)

$$h = v_1\cos\nu x - v_2\sin\nu x, \tag{2.19}$$

где функции $v_j(t, x, \nu, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, таковы, что

$$\partial v_1/\partial x|_{x=0,\pi} = 0, \quad v_2|_{x=0,\pi} = 0. \tag{2.20}$$

В результате для $v = \mathrm{colon}(v_1, v_2)$ получаем уравнение

$$\begin{gathered}\partial^2 v/\partial t^2 + v = a^2(\partial^2 v/\partial x^2 + 2\nu A_0 \partial v/\partial x - \nu^2 v) + \\ + \sqrt{\varepsilon}[a_1(\omega_1\tau, x)v + a_2(\omega_1\tau, x)\partial v/\partial t] + \varepsilon[b_1(\omega_1\tau, x, \varepsilon)v + b_2(\omega_1\tau, x, \varepsilon)\partial v/\partial t],\end{gathered} \tag{2.21}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а параметр $\nu = k/n - 1$ в силу произвольности k и n будем считать непрерывно меняющимся на множестве $0 < |\nu| \le \nu_0$.

Отметим, что краевая задача (2.21), (2.20) уже не содержит сингулярности в граничных условиях (вместо этого появляется дополнительный малый параметр ν). Отметим также, что, подставляя компоненты любого ее решения в (2.19) и полагая $\nu = k/n - 1$, получаем, очевидно, решение исходной задачи (2.11), (2.12). Таким образом, проблема расчета характеристических показателей последней на модах

$$\cos\left(\frac{k}{n}x\right), \quad 0 < |k/n - 1| \le \nu_0, \tag{2.22}$$

сводится к применению алгоритма из [8] к вспомогательной краевой задаче (2.21), (2.20).

При $\varepsilon = 0$ решениями Ляпунова–Флоке краевой задачи (2.21), (2.20) являются функции

$$\begin{gathered}\exp(\pm i\omega_{k+\nu}t)\mathrm{colon}(\cos kx, \sin kx), \quad k = 0, 1, \ldots, \\ \exp(\pm i\omega_{k-\nu}t)\mathrm{colon}(\cos kx, -\sin kx), \quad k = 1, 2, \ldots.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Напомним, однако, что в исходной краевой задаче (2.11), (2.12) нас интересуют моды (2.22). Поэтому ниже при реализации алгоритма из [8] будут задействованы только четыре функции (2.23), отвечающие номеру $k = 1$.

Следуя [8], положим в (2.21), (2.20)

$$v = [H_0 + \sqrt{\varepsilon}H_1 + \varepsilon H_2]\exp[\Lambda_0(\nu) + \varepsilon\Lambda_1(\nu)]\tau, \tag{2.24}$$

где матрицы $H_k(\tau, x, \nu)$, $k = 0, 1, 2$, размера 2×4 и четырехмерные квадратные матрицы Λ_0, Λ_1 имеют вид

$$H_j = [w_{j1}, \bar{w}_{j1}, w_{j2}, \bar{w}_{j2}] \quad (j = 0, 1, 2), \quad \Lambda_1 = \|\lambda_{js}(\nu)\| \quad (j, s = 1, \ldots, 4),$$

$$w_{01} = \exp(i\omega_1\tau)\mathrm{colon}(\cos x, \sin x), \quad w_{02} = \exp(i\omega_1\tau)\mathrm{colon}(\cos x, -\sin x),$$

$$\Lambda_0 = \mathrm{diag}\{i\sigma_+, -i\sigma_+, i\sigma_-, -i\sigma_-\}, \quad \sigma_\pm(\nu) = \omega_{1\pm\nu} - \omega_1.$$

Считаем еще, что столбцы матриц H_1, H_2 – тригонометрические полиномы переменной $\omega_1\tau$.

Приравнивая в (2.21) коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$, приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_{11}}{\partial\tau^2} + 2i\sigma_+\frac{\partial w_{11}}{\partial\tau} - \sigma_+^2 w_{11} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_{11}}{\partial x^2} + 2\nu A_0\frac{\partial w_{11}}{\partial x} - \nu^2 w_{11}\right) + w_{11} = \\ = a_1(\omega_1\tau, x)w_{01} + a_2(\omega_1\tau, x)i(\omega_1 + \sigma_+)w_{01},\end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial\tau^2} + 2i\sigma_-\frac{\partial w_{12}}{\partial\tau} - \sigma_-^2 w_{12} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x^2} + 2\nu A_0\frac{\partial w_{12}}{\partial x} - \nu^2 w_{12}\right) + w_{12} = \\ = a_1(\omega_1\tau, x)w_{02} + a_2(\omega_1\tau, x)i(\omega_1 + \sigma_-)w_{02},\end{gathered} \tag{2.26}$$

которые, естественно, следует дополнить граничными условиями типа (2.20). Решая получившиеся при этом краевые задачи, находим

$$w_{12}(\tau, x, \nu) = w_{11}(\tau, -x, -\nu), \quad w_{11}(\tau, x, \nu) = G_-(x, \nu) + G_+(x, \nu)\exp(2i\omega_1\tau), \tag{2.27}$$

$$G_{\pm} = \kappa_{\pm}\left[\frac{\operatorname{colon}(1, 0)}{\omega_{\nu}^2 - (\omega_{1+\nu} \pm \omega_1)^2} + \frac{\operatorname{colon}(\cos 2x, \sin 2x)}{\omega_{2+\nu}^2 - (\omega_{1+\nu} \pm \omega_1)^2}\right], \tag{2.28}$$

$$\kappa_{\pm} = \frac{\xi_1}{2}[2a_1 + i(\omega_{1+\nu} \pm \omega_1) \mp 2\omega_1\omega_{1+\nu}a_3], \tag{2.29}$$

где, напомним, a_j ($j = 1, 2, 3$) – коэффициенты тейлоровского разложения (1.3), ξ_1 – постоянная, определяемая первым равенством (2.9).

Приравнивая в (2.21) коэффициенты при ε, для нахождения матриц Λ_1, H_2 получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial H_2}{\partial \tau}\Lambda_0 + H_2\Lambda_0^2 + H_2 - a^2\left[\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + 2\nu A_0\frac{\partial H_2}{\partial x} - \nu^2 H_2\right] = F, \tag{2.30}$$

в котором

$$\begin{gathered} F = -2\alpha_1\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial H_0}{\partial \tau}\Lambda_0 + H_0\Lambda_0^2\right) - 2\frac{\partial H_0}{\partial \tau}\Lambda_1 - H_0(\Lambda_0\Lambda_1 + \Lambda_1\Lambda_0) + \\ + a_1(\omega_1\tau, x)H_1 + a_2(\omega_1\tau, x)\left(\frac{\partial H_1}{\partial \tau} + H_1\Lambda_0\right) + b_1(\omega_1\tau, x, 0)H_0 + b_2(\omega_1\tau, x, 0)\left(\frac{\partial H_0}{\partial \tau} + H_0\Lambda_0\right). \end{gathered} \tag{2.31}$$

Затем за счет выбора элементов неизвестной матрицы Λ_1 добиваемся отсутствия в столбцах матрицы (2.31) слагаемых, пропорциональных

$$\exp(\pm i\omega_1\tau)\operatorname{colon}(\cos x, \sin x), \quad \exp(\pm i\omega_1\tau)\operatorname{colon}(\cos x, -\sin x).$$

Учитывая в (2.31) формулы (2.27)–(2.29) и проводя соответствующие вычисления, убеждаемся, что

$$\lambda_{11}(\nu) = \mu_{1+\nu} - i\omega_{1+\nu}\alpha_1, \quad \lambda_{22}(\nu) = \bar{\lambda}_{11}(\nu), \quad \lambda_{33}(\nu) = \lambda_{11}(-\nu), \quad \lambda_{44}(\nu) = \bar{\lambda}_{11}(-\nu). \tag{2.32}$$

Явные формулы для остальных элементов матрицы Λ_1 опустим, так как в дальнейшем они не потребуются. Отметим лишь, что

$$\bar{\lambda}_{41}(0) = \lambda_{14}(0) = \bar{\lambda}_{23}(0) = \lambda_{32}(0) = \lambda_{11}(0). \tag{2.33}$$

После определения Λ_1 решение уравнения (2.30) однозначно находится в том же виде, что и неоднородность (2.31), причем, в отличие от h_{2z}, особенности при $\nu \longrightarrow 0$ здесь отсутствуют ("опасные" слагаемые в F уничтожены за счет специального выбора $\lambda_{js}(\nu)$).

Подставляя компоненты вектор-функции (2.24) в (2.19) и полагая затем $\nu = k/n$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, где k_0 – целая часть $n\nu_0$, приходим к искомым формулам для приближенных решений Ляпунова–Флоке краевой задачи (2.11), (2.12) на модах (2.22). На самой же генерируемой моде $\cos x$ остаются в силе формулы (1.19)–(1.22) (при $n = 1$).

Перед формулировкой заключительного ограничения введем в рассмотрение величину $\kappa(a) = \lambda_{11}(\nu)|_{\nu=0}$.

Условие 4. Предполагаем, что при всех $a_* \le a \le a_{**}$

$$\sigma^2/4\omega_1^3 + \operatorname{Im}\kappa(a) > 0. \tag{2.34}$$

Проделанный анализ позволяет дать ответ на вопрос об устойчивости циклов (2.7), (2.8), а именно: справедлива

Теорема 3. *При выполнении условий* 1–4 *и при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *быстро осциллирующие циклы краевой задачи* (2.1), (2.2), *доставляемые теоремой* 2, *экспоненциально орбитально устойчивы.*

Доказательство. Используя построенные при описанном выше алгоритме функции, сконструируем аналогичную (1.37) замену переменных, действующую из l_2 в $W_2^1(0, n\pi) \times W_2^1(0, n\pi)$ и преобразующую исходную краевую задачу (2.11), (2.12) в уравнение вида (1.38):

$$\dot{\eta} = \varepsilon\Gamma_0\eta + \varepsilon^{3/2}\Gamma_1(t, \varepsilon)\eta. \tag{2.35}$$

Здесь $\eta \in l_2$, линейный оператор Γ_1 ограничен равномерно по всем $t \in \mathbb{R}$ и ε,

$$\Gamma_0 = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \bar{\gamma}_1, \ldots, \gamma_{n-k_0-1}, \bar{\gamma}_{n-k_0-1}, \Lambda_n, \Lambda_{n+1}, \ldots, \Lambda_{n+k_0}, \gamma_{n+k_0+1}, \bar{\gamma}_{n+k_0+1}, \ldots, \gamma_m, \bar{\gamma}_m, \ldots\}, \quad (2.36)$$

где

$$\gamma_m = \mu_z|_{z=m/n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad (2.37)$$

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\beta} \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{d(a)\xi_1^2}{2\omega_1}, \quad \Lambda_{n+k} = \frac{1}{\varepsilon}[\Lambda_0(\nu) + \varepsilon\Lambda_1(\nu)]|_{\nu=k/n}, \quad k = 1, 2, \ldots, k_0, \quad (2.38)$$

а k_0 – целая часть $n\nu_0$ (см. (2.22)).

Свойства устойчивости уравнения (2.35) очевидны и определяются по его главной части, т.е. по расположению спектра оператора Γ_0. Спектр же последнего – это последовательность собственных значений

$$\gamma_m, \bar{\gamma}_m\colon m \geq 0, \quad m \neq n \pm k, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0, \quad \gamma_\infty = \lim \gamma_m, \quad m \longrightarrow \infty,$$

имеющих, в силу (2.37) и условия 3, отрицательные действительные части и собственные значения матриц Λ_{n+k}, $k = 0, 1, \ldots, k_0$. Отметим еще, что матрица Λ_n имеет нулевое собственное значение (напомним, что (2.35) – линеаризация на цикле). Другое же ее собственное значение отрицательно.

Итак, за устойчивость циклов (2.7), (2.8) отвечают в конечном итоге четырехмерные матрицы Λ_{n+k}, $k = 1, 2, \ldots, k_0$. При $k/n \sim 1$ их гурвицевость снова вытекает из условия 3. Действительно, в этом случае поправками порядка ε к чисто мнимым собственным значениям матрицы $\Lambda_0(\nu)$ являются диагональные элементы матрицы $\varepsilon\Lambda_1(\nu)$ (см. равенства (2.32)), имеющие отрицательные действительные части. Если же $k \sim 1$, то, полагая $\nu = k\sigma\sqrt{\varepsilon}/a$ в (2.38), перераскладывая результат по $\sqrt{\varepsilon}$ и учитывая равенства (2.32), (2.33), убеждаемся, что матрицы Λ_{n+k}, $k \geq 1$, имеют собственные значения λ_k^s, $\bar{\lambda}_k^s$, $s = 1, 2$, с асимптотикой

$$\lambda_k^s = \frac{iak\sigma}{\omega_1\sqrt{\varepsilon}} + r_k^s + o(1), \quad s = 1, 2, \quad (2.39)$$

где r_k^s – собственные значения матриц

$$D_k = \begin{pmatrix} \kappa(a) + \dfrac{k^2\sigma^2}{2\omega_1^3}i & \kappa(a) \\ \bar{\kappa}(a) & \bar{\kappa}(a) - \dfrac{k^2\sigma^2}{2\omega_1^3}i \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Остается отметить, что матрицы (2.40) гурвицевы, так как, в силу условий 3, 4,

$$\operatorname{sp} D_k = 2\operatorname{Re}\kappa(a) < 0, \quad \det D_k = \frac{k^2\sigma^2}{\omega_1^3}\left[\frac{k^2\sigma^2}{4\omega_1^3} + \operatorname{Im}\kappa(a)\right] > 0.$$

Теорема 3 доказана.

2.3. Заключительные замечания. Остановимся на вопросе о реализуемости условий 1–4. С этой целью введем в рассмотрение комплексную ляпуновскую величину

$$d_0 = \frac{1}{2}[a_2(a_1 + a_3) + b_2 + 3b_4] - \frac{i}{6}[10a_1(a_1 + a_3) + 4a_3^2 + a_2^2 + 9b_1 + 3b_3]$$

обыкновенного уравнения, получающегося из (2.1) при $\varepsilon = 0$, и предположим, что

$$\operatorname{Re} d_0 < 0, \quad \operatorname{Im} d_0 \geq 0. \quad (2.41)$$

Анализируя явные формулы для $d(a)$, $\xi_1(a)$, $\varphi(z, a)$, $\varphi_\infty(a)$ и $\kappa(a)$, убеждаемся, что

$$d(0) = \frac{3}{2}d_0, \quad \xi_1(0) = \sqrt{-\frac{2}{3\operatorname{Re} d_0}}, \quad \kappa(0) = d_0\xi_1^2(0)/4, \quad \varphi_\infty(0) = -1/6 \quad (2.42)$$

и равномерно по $z \geq 0$

$$\lim \varphi(z, a) = -1/6, \quad a \longrightarrow 0. \tag{2.43}$$

Отсюда, очевидно, следует, что неравенства (2.41) гарантируют выполнение условий 1–4 на некотором отрезке (2.5) при достаточно малых a_*, $a_{**} > 0$.

В качестве конкретного примера, иллюстрирующего содержательность теорем 1–3, рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + u = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0. \tag{2.44}$$

В данном случае условие (1.15) выполняется при любом натуральном n, так как $d_n = -3\omega_n/4$. Кроме того, в (1.4) имеем

$$u_2 = u_4 = 0, \quad \xi_n = 2/\sqrt{3}, \quad \alpha_n = 0 \tag{2.45}$$

и, следовательно, отпадает надобность в неравенстве (1.17). А так как здесь $\mu_m = \mu_\infty = -1/6$, то вместо теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любого натурального n_0 и для любых $a_{**} > a_* > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $a_* \leq a \leq a_{**}$ краевая задача* (2.44) *имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения* (1.4), (2.45) *с номерами $n = 1, 2, \ldots, n_0$.*

Добавим еще, что условия теорем 1, 2 в случае краевой задачи (2.44) также выполняются автоматически для любого фиксированного отрезка вида (2.5).

Обращаем внимание, что утверждение теоремы 2 сохраняется и при $\sigma \ll 1$. Однако в этом случае циклы (2.7), (2.8) становятся неустойчивыми уже при $\sigma \sim \sqrt{\varepsilon}$. Проиллюстрируем данное положение на типовом примере краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + u = \varepsilon^2\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0. \tag{2.46}$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что за устойчивость быстро осциллирующих циклов краевой задачи (2.46) с номерами

$$a_*/\sigma\varepsilon \leq n \leq a_{**}/\sigma\varepsilon \tag{2.47}$$

отвечают матрицы

$$\Lambda_1(0) + \operatorname{diag}\{iz, -iz, -iz, iz\}, \quad z = k\sigma a/\omega_1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.48}$$

получающиеся из $[\Lambda_0(\nu) + \varepsilon\Lambda_1(\nu)]/\varepsilon$ при подстановке

$$\nu = k\sigma\varepsilon/a, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad a_* \leq a \leq a_{**},$$

и при отбрасывании слагаемых порядка малости ε и выше. Несложная проверка с учетом явного вида элементов матрицы $\Lambda_1(0)$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \lambda_{44} = \lambda_{14} = \lambda_{41} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = -1/6,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{24} = \lambda_{42} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{34} = \lambda_{43} = -1/3$$

показывает, что $\Lambda_1(0)$ имеет собственное значение $\lambda = 1/3$. Поэтому найдется такое $\sigma_0 > 0$, что при всех $0 < \sigma \leq \sigma_0$ собственное значение с положительной действительной частью будет иметь, например, и матрица (2.48) при $k = 1$. А это означает, что быстро осциллирующие циклы краевой задачи (2.46) с номерами (2.47) при $\sigma \leq \sigma_0$ заведомо неустойчивы.

В заключение напомним, что как объект исследования краевая задача (2.1), (2.2) впервые была введена в [10], где с помощью так называемого метода квазинормальных форм (см. [11]) изучался вопрос о ее стационарных режимах, гладко зависящих от x. В настоящей работе, дополняющей результаты из [10], показано, что наряду с гладкими периодическими решениями краевая задача (2.1), (2.2) имеет и быстро осциллирующие циклы, причем количество последних неограниченно возрастает при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 5. С. 889–891.
2. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
3. *Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh.* Asymptotic methods in singularly perturbed systems. New York – London: Plenum Publ. Co., 1994.
4. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматгиз, 1995.
5. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Тр. МИРАН. М., 1993. Т. 199.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
7. *Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 4. С. 488–499.
8. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
9. *Колесов А.Ю.* Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. Вып. 2. С. 59–65.
10. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 12. С. 281–283.
11. *Колесов Ю.С.* Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.