Бифуркационные особенности одной краевой задачи с нелинейным отклонением в краевом условии

Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0,1).$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t). \tag{4}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) \ = 0, \qquad v'(1) \ = \alpha\, v(x_0). \tag{6}$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + \lambda},$$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\mu \operatorname{sh} \mu \;=\; \alpha \operatorname{ch} \mu x_0, \tag{7}$$

- $\lambda = 0: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma}$,

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

- $\lambda = \pm i\omega: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega}$,

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}.$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\ y + \operatorname{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y), \end{cases} \tag{8}$$

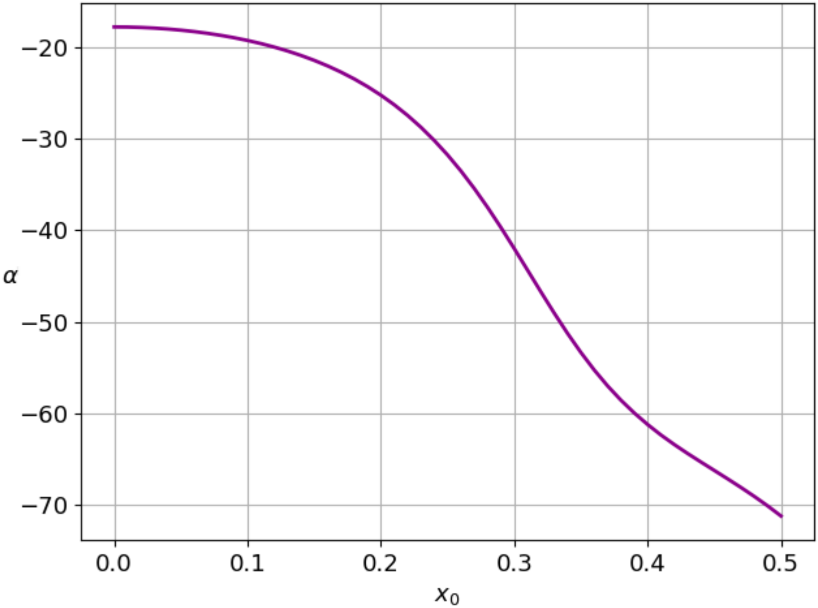
$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

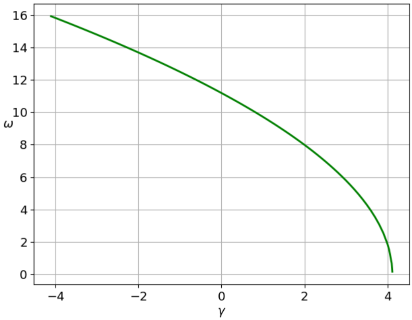
$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} y \cos y + \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y} - \operatorname{tg} y x_0 \operatorname{th} y x_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y \operatorname{sh} y \cos y - y \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{ch} y x_0 \cos y x_0}. \end{cases} \tag{9}$$

- $\gamma \neq 0,\ x_0 \neq 0.$

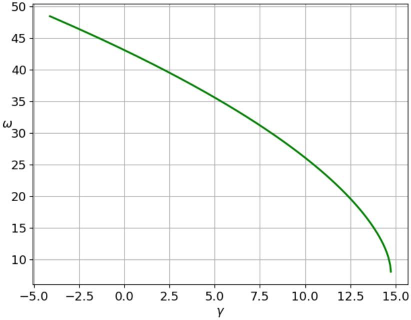
Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$



Численные результаты: $\omega(\gamma)$



a) $x_0 = 0.0$



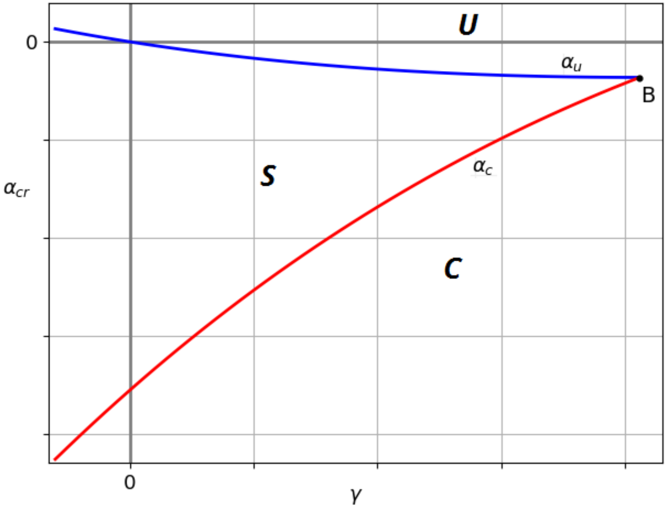
b) $x_0 = 0.5$

Моделирование линейной краевой задачи

$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

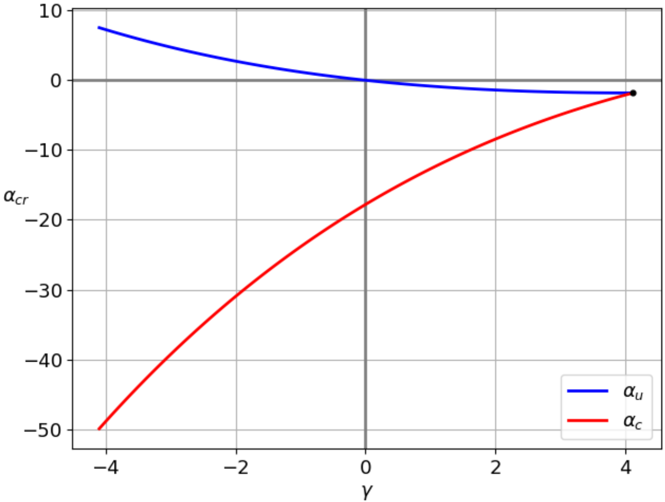
$$\begin{aligned} u_0 &= u_1, \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{\alpha}{n}\, u_k, \quad k \in [1, n]. \end{aligned}$$

Схематическая визуализация критической зависимости



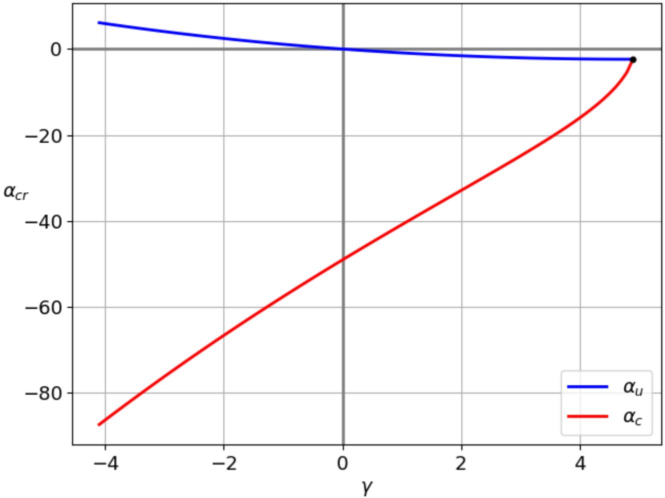
$$B = (\gamma_*, \alpha_*)$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



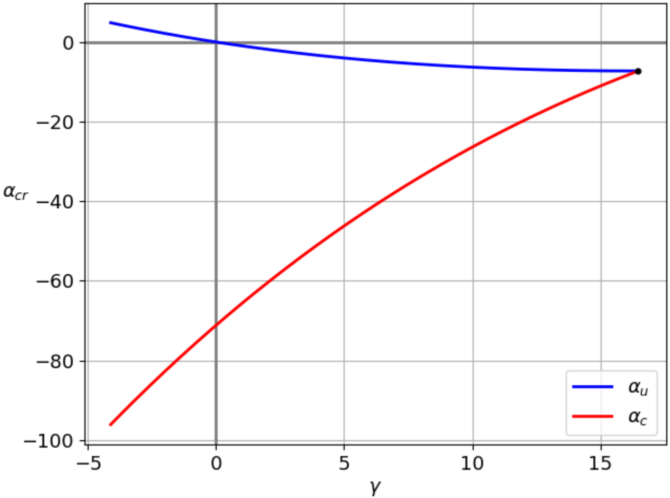
$$x_0 = 0: \quad \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



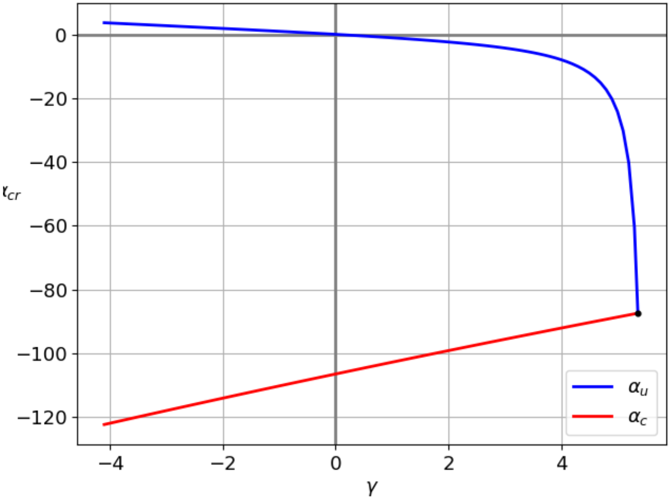
$$x_0 = 0.33 : \quad \gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.5: \quad \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.67: \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{12}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t), \tag{13}$$

$$u_0 = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{14}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t), \tag{15}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{16}$$

$$v_2'(0) = 0, \quad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0 + \beta \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{17}$$

$$v_2(x) = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho'}{2\sqrt{-\gamma}} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x + \frac{\rho' x}{2} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x.$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

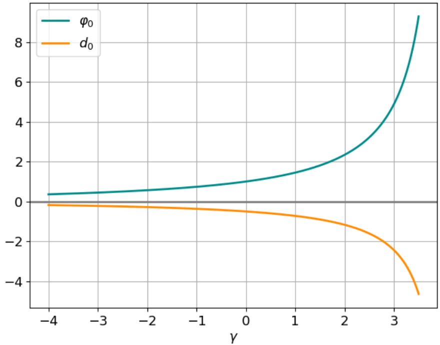
$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{18}$$

$$\phi_0 = Q \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0,$$

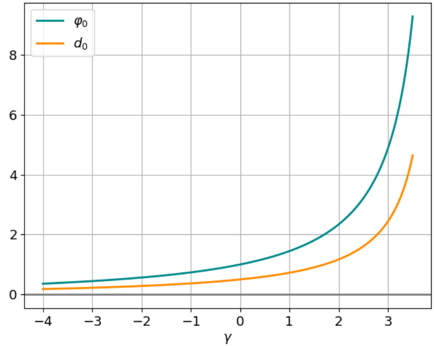
$$d_0 = \beta Q \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x_0,$$

$$Q = \frac{2\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} + \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} - \alpha_u x_0 \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



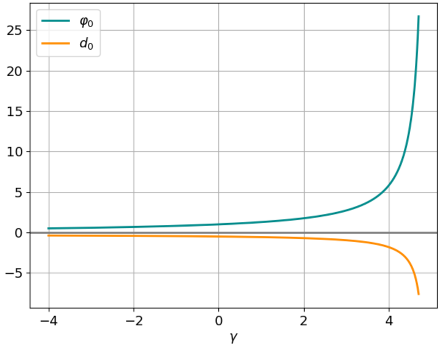
a) $\beta = -0.5$



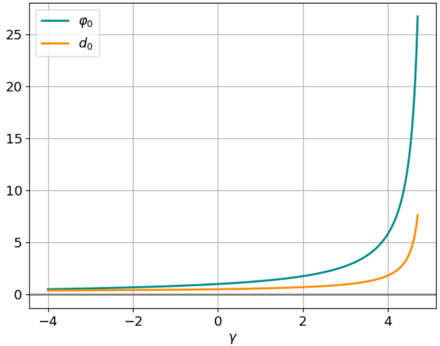
b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



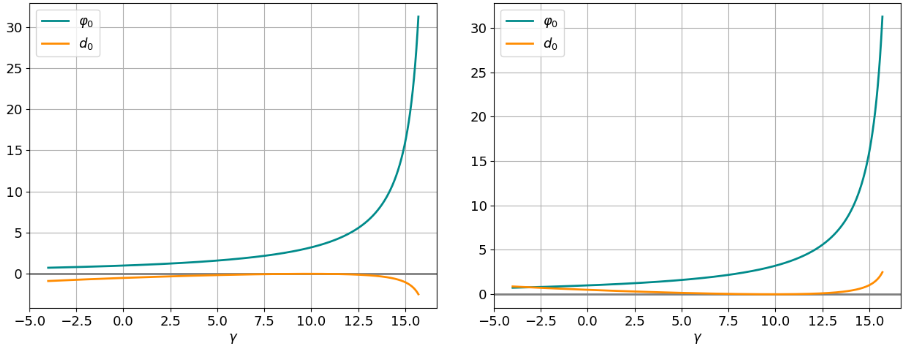
a) $\beta = -0.5$



b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.33$$

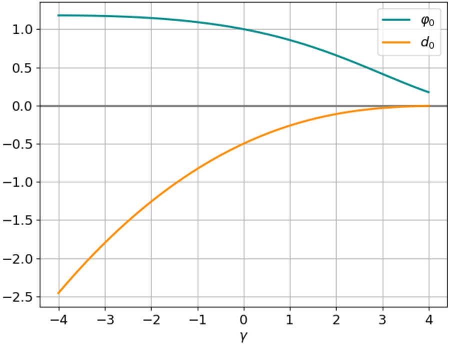
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



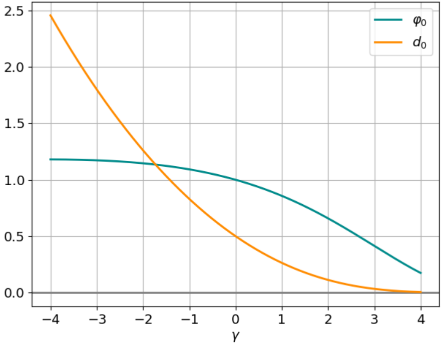
a) $\beta = -0.5$ b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.5$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -0.5$



b) $\beta = 0.5$

$$x_0 = 0.67$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{19}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t), \tag{20}$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2, \tag{21}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) - u_0(x_0,t) + \beta u_0^3(x_0,t). \tag{22}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega) v_2 - z' w(x) = 0, \tag{23}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) - z w(x_0) + 3\beta z |z|^2 w |w|^2. \tag{24}$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega}\, x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{25}$$

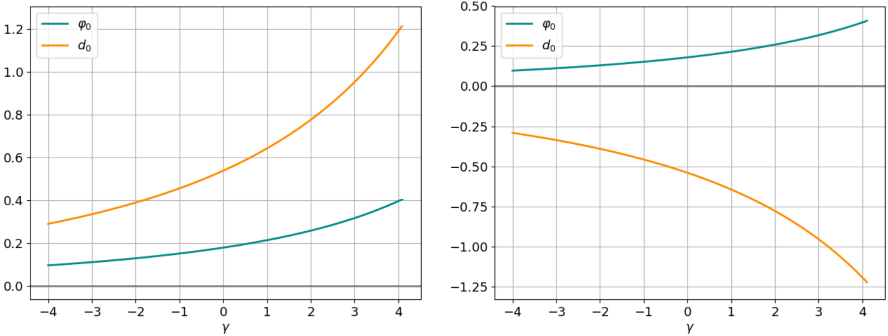
$$\phi_0 = -2\,\mathrm{Re}(Q\,\mathrm{ch}\,\mu x_0),$$

$$d_0 = 1.5\beta\,\mathrm{Re}(Q(\mathrm{ch}(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu)x_0 + \mathrm{ch}(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu)x_0 + 2\,\mathrm{ch}\,\overline{\mu}x_0)),$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$Q = \frac{\mu}{\mu\,\mathrm{ch}\,\mu + \mathrm{sh}\,\mu - \alpha_c x_0\,\mathrm{sh}\,\mu x_0}.$$

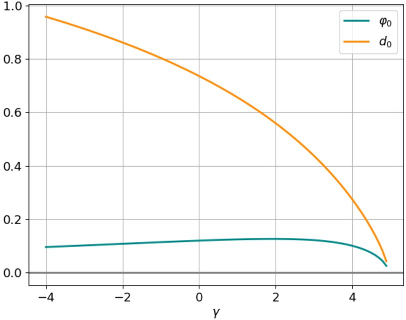
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



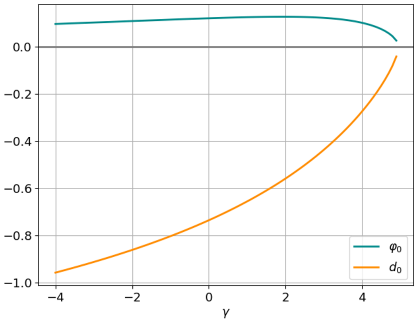
a) $\beta = -1.0$ b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



a) $\beta = -1.0$



b) $\beta = 1.0$

$$x_0 = 0.33$$

Бифуркационные особенности одной краевой задачи с нелинейным отклонением в краевом условии

Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова