Бифуркационные особенности одной краевой задачи с нелинейным отклонением в краевом условии

Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0,1).$$

Линеаризованная краевая задача

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{3}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t). \tag{4}$$

Задача на собственные значения

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x).$$

$$v'' + (\gamma - \lambda) v = 0, \tag{5}$$

$$v'(0) = 0, \qquad v'(1) = \alpha\, v(x_0). \tag{6}$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + \lambda},$$

$$v(x) = c \operatorname{ch} \mu x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

$$\mu \operatorname{sh} \mu \; = \; \alpha \operatorname{ch} \mu x_0, \tag{7}$$

- $\lambda = 0: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma},$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0}.$$

- $\lambda = \pm i\omega: \;\; \mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma + i\omega}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega} x_0}.$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\mathrm{sh}\, y \cos y - \mathrm{ch}\, y \sin y), \end{cases} \tag{8}$$

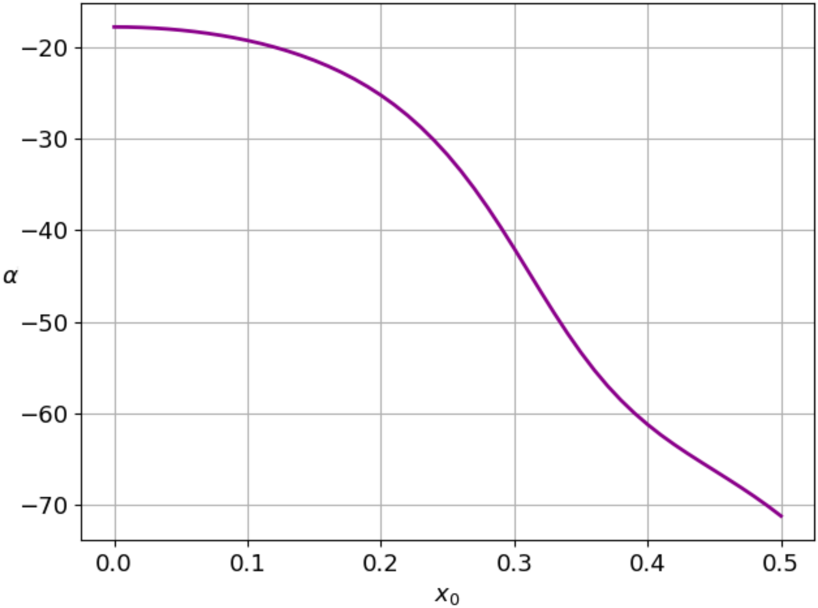
$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\, y \cos y + \mathrm{ch}\, y \sin y}{\mathrm{sh}\, y \cos y - \mathrm{ch}\, y \sin y} - \mathrm{tg}\, y x_0\, \mathrm{th}\, y x_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y\, \mathrm{sh}\, y \cos y - y\, \mathrm{ch}\, y \sin y}{\mathrm{ch}\, y x_0 \cos y x_0}. \end{cases} \tag{9}$$

- $\gamma \neq 0,\ x_0 \neq 0.$

Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$

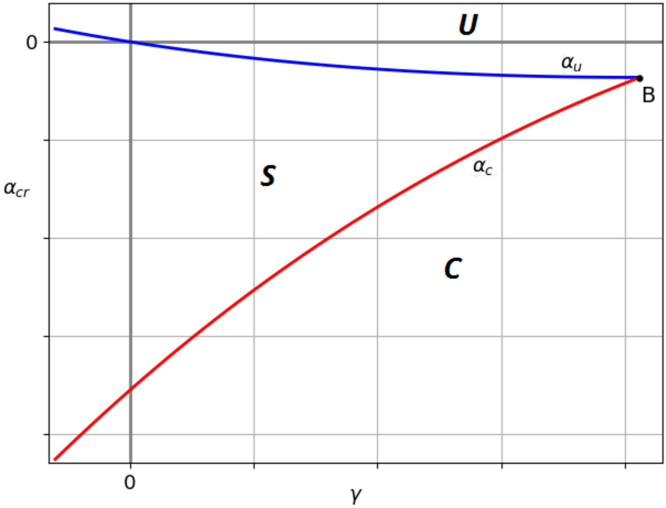


Моделирование линейной краевой задачи

$$\dot{u}_j = n^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

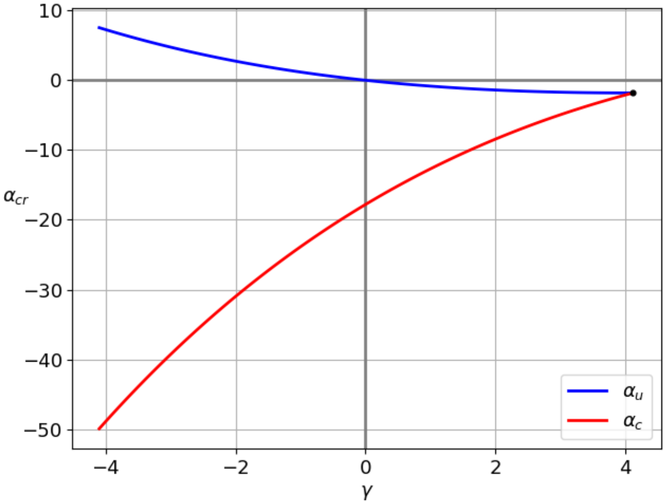
$$u_0 = u_1,$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{n}\, u_k, \quad k \in [1, n].$$

Схематическая визуализация критической зависимости



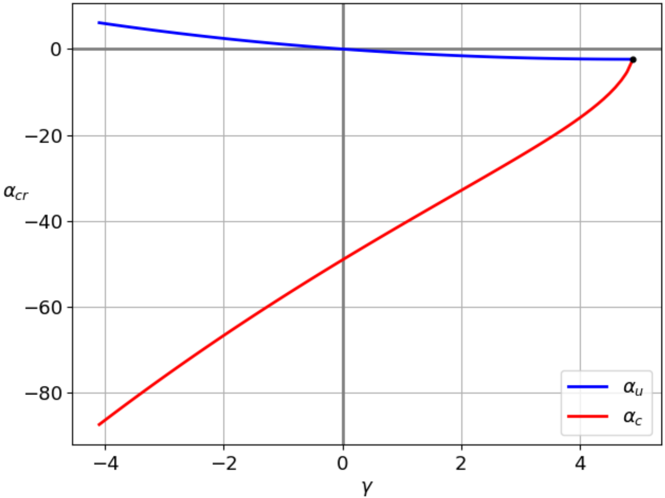
$$B = (\gamma_*, \alpha_*)$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



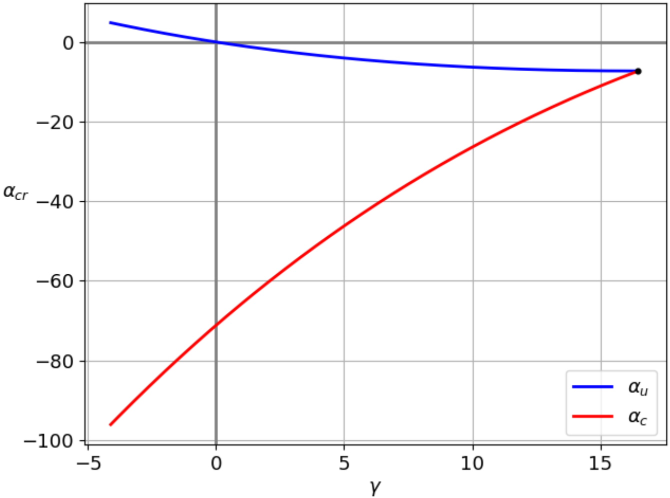
$$x_0 = 0 : \quad \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



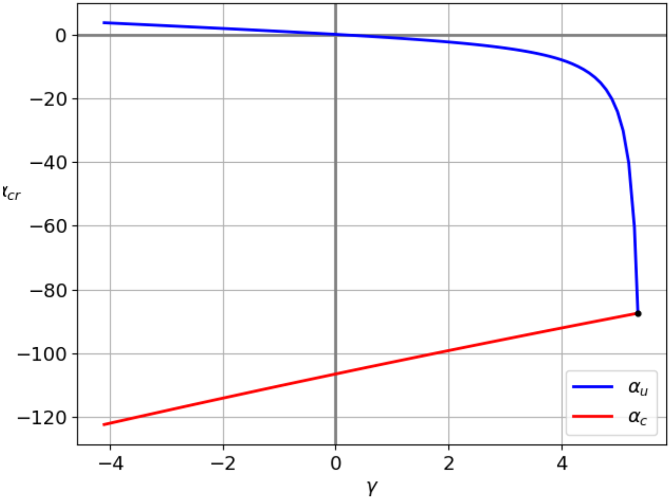
$$x_0 = 0.33: \quad \gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.5: \quad \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\alpha_{cr}(\gamma)$



$$x_0 = 0.67 : \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Локальный анализ краевой задачи

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_2 + O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad s = \varepsilon t.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{12}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_u u_0(x_0,t), \tag{13}$$

$$u_0 = \rho(s)\operatorname{ch}\sqrt{-\gamma}x.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{14}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_u u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t), \tag{15}$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$u_2 = e^{\lambda t} v_2(x), \quad \lambda = 0,$$

$$v_2'' + \gamma v_2 - \rho^3 \operatorname{ch}^3 \sqrt{-\gamma} x - \rho' \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x = 0, \tag{16}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + \rho(s) \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x_0. \tag{17}$$

$$v_2(x) = c \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma} x - \frac{\rho^3}{32} \operatorname{ch} 3\sqrt{-\gamma} x + \frac{3\rho^3 + 4\rho'}{8\sqrt{-\gamma}} x \operatorname{sh} \sqrt{-\gamma} x,$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

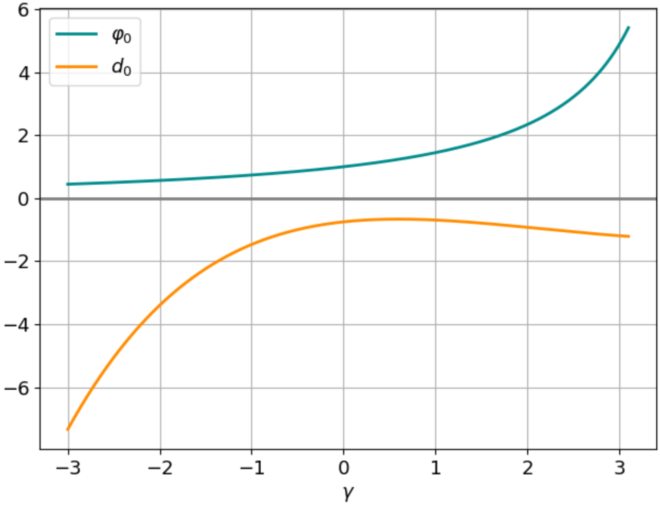
$$\rho' = \phi_0 \rho + d_0 \rho^3, \tag{18}$$

$$\phi_0 = \frac{2\mu \operatorname{ch} \mu x_0}{\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0},$$

$$d_0 = \frac{-3\gamma \operatorname{sh} 3\mu - 12 \operatorname{sh} \mu - 12\mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u \mu \operatorname{ch} 3\mu x_0 + 12\alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0}{16(\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu - \alpha_u x_0 \operatorname{sh} \mu x_0)},$$

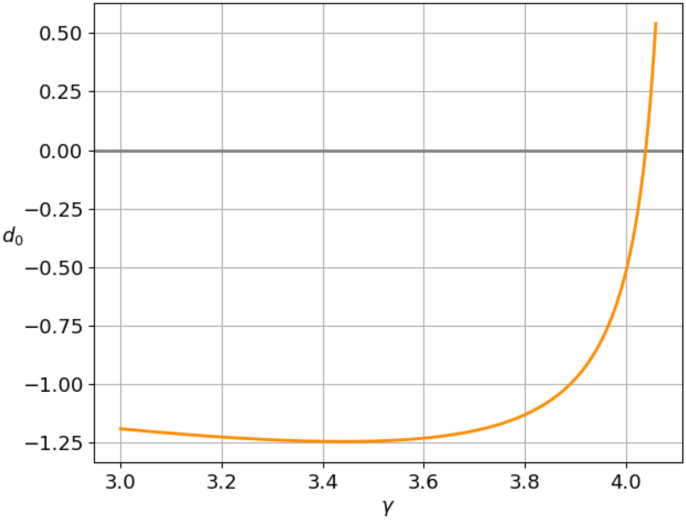
$$\mu = \sqrt{-\gamma}.$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



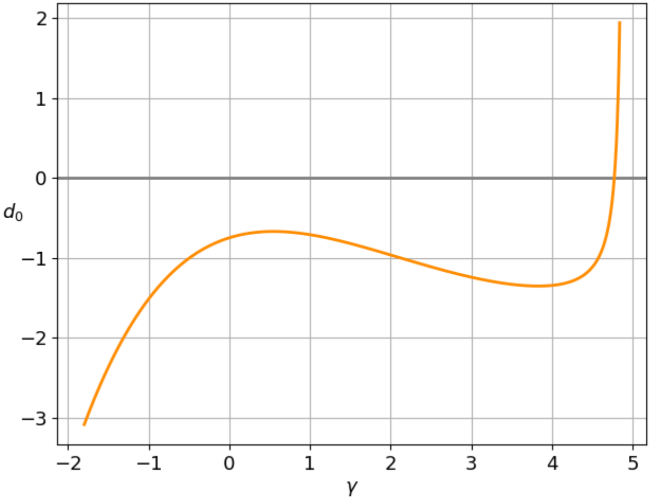
$$x_0 = 0$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



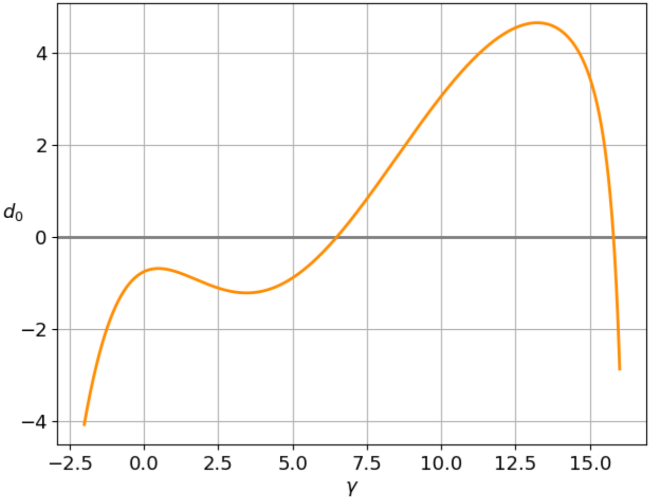
$$x_0 = 0 : \quad \overline{\gamma} \approx 4.039, \ \gamma_* \approx 4.115$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



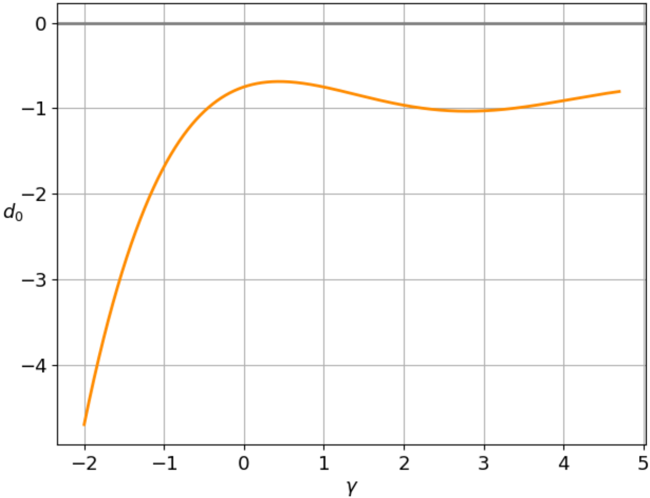
$$x_0 = 0.33 : \quad \overline{\gamma} \approx 4.773, \ \gamma_* \approx 4.895$$

Численные результаты: $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.5: \quad \overline{\gamma} \approx 6.485,\ \gamma_* \approx 16.4$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$$x_0 = 0.67: \quad \gamma_* \approx 5.361$$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$u_0 = u_0'' + \gamma u_0, \tag{19}$$

$$u_0'(0,t) = 0, \qquad u_0'(1,t) = \alpha_c u_0(x_0,t), \tag{20}$$

$$u_0 = z(s)e^{i\omega t}\operatorname{ch}\mu x + \overline{z(s)}e^{-i\omega t}\overline{\operatorname{ch}\mu x}.$$

$$\dot{u}_2 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = u_2'' + \gamma u_2 - u_0^3, \tag{21}$$

$$u_2'(0,t) = 0, \qquad u_2'(1,t) = \alpha_c u_2(x_0,t) + u_0(x_0,t), \tag{22}$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$u_2 = e^{i\omega t} v_2(x),$$

$$v_2'' + (\gamma - i\omega)v_2 - z' w(x) - 3z|z|^2 w|w|^2 = 0, \tag{23}$$

$$v_2'(0) = 0, \qquad v_2'(1) = \alpha_u v_2(x_0) + z(s) w(x_0), \tag{24}$$

$$w(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-\gamma + i\omega}\, x.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = \phi_0 z + d_0 z|z|^2, \tag{25}$$

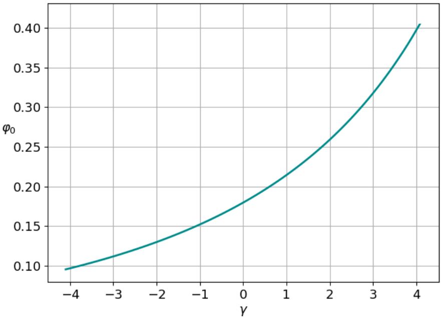
$$\phi_0 = -\operatorname{Re}\left(\frac{2\mu \operatorname{ch}\mu x_0}{\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0}\right),$$

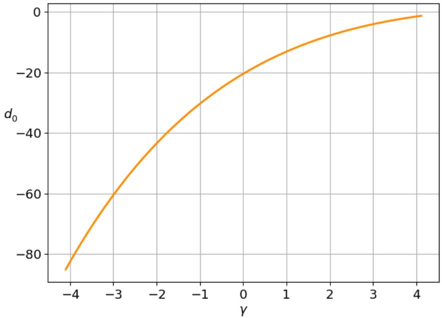
$$d_0 = \operatorname{Re}\left(\frac{3\mu(G(\mu + 2\,\mathsf{Re}\mu) + G(\mu + 2i\,\mathsf{Im}\mu) + 2G(\overline{\mu}))}{2(\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu - \alpha_c x_0 \operatorname{sh}\mu x_0)}\right),$$

$$\mu = \sqrt{-\gamma + i\omega},$$

$$G(y) = \frac{\alpha_c - y\ \operatorname{sh} y}{y^2 + \gamma - i\omega}.$$

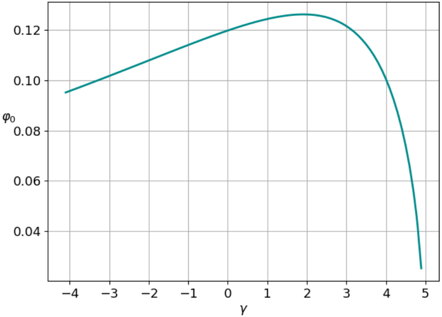
Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

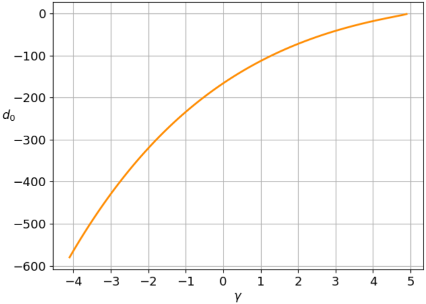




$$x_0 = 0$$

Численные результаты: $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$





$$x_0 = 0.33$$