

Потеря устойчивости нулевого решения краевой задачи с линейным отклонением в краевых условиях

Stability loss of the trivial solution of boundary-value problem with linear deviate in boundary condition

Ивановский Л. И.¹, Кащенко С. А.²

¹ Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, Ярославль, Россия; leon19unknown@gmail.com

² Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, Ярославль, Россия; kasch@uniyar.ac.ru

Рассмотрим уравнение параболического типа с линейным отклонением в краевом условии:

$$\dot{u} = \beta u'' - \gamma u, \quad (1)$$

$$u' \big|_{x=0} = 0, \quad u' \big|_{x=1} = \alpha u \big|_{x=x_0}, \quad (2)$$

где скалярная функция $u = u(x, t)$ дифференцируема по t и дважды дифференцируема по x , параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $x_0 \in [0, 1]$.

С помощью замены вида $u(x, t) = w(x) \exp\left(\lambda - \frac{\gamma}{\beta} t\right)$ краевая задача (1), (2) сводится к задаче на собственные значения вида

$$w'' - \lambda w = 0, \quad (3)$$

$$w'(0) = 0, \quad w'(1) = \alpha w(0). \quad (4)$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее первому из краевых условий (4), записывается следующим образом:

$$w(x) = c \operatorname{ch}(\mu x), \quad (5)$$

где c – константа, а $\mu = \sqrt{\lambda}$. Тем самым, для нахождения собственных значений краевой задачи (3), (4) необходимо функцию (5) подставить во второе краевое условие (4).

Для выяснения свойств устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2) необходимо найти собственное число λ , вещественная часть которого максимальна. В этом случае представляет интерес ситуация, когда все собственные числа задачи лежат в левой комплексной полуплоскости и одна пара из них находится на мнимой оси. Для решения этой задачи найдем такие значения параметра α_{cr} , для которого выполняется условие $\operatorname{Re}(\lambda_*) = \gamma$, тогда если удастся показать, что все остальные собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости, то можно говорить о колебательной потере устойчивости нулевого состояния равновесия задачи (1), (2). Поскольку найти нужные значения α_{cr} аналитически довольно затруднительно, исследование осуществлялось с помощью специально разработанного приложения. Все трудоемкие расчеты в программе выполняются параллельно, на независимых потоках центрального процессора.

В результате численного эксперимента были получены зависимости значений α_{cr} от параметров γ и λ , для которых нулевое решение уравнения (1), (2) колебательно теряет устойчивость.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (№ 14-21-00158).