В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике, *Матем. моделирование*, 1996, том 8, номер 1, 93–102

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 8 номер 1 год 1996

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

УДК 533.539

ОБ ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В РАДИОФИЗИКЕ

© *В.Ф. Камбулов, А.Ю. Колесов*

Ярославский государственный университет,
150000, Ярославль, ул. Советская, д.14.

На основе анализа конкретной прикладной задачи (математической модели RCLG-генератора) выводится модельное гиперболическое уравнение, описывающее динамические эффекты, связанные с переходом в нелинейном телеграфном уравнении от нерезонансного случая к резонансному. Дается также объяснение экспериментально наблюдаемому явлению - разрушению автоколебаний при увеличении энергии системы.

ON A CERTAIN MODEL HYPERBOLIC EQUATION ARISING IN RADIOPHYSICS

V.F. Kambulov, A.Yu. Kolesov

Yaroslavl State University, Sovetskaya street, 14, Yaroslavl, 150000
Fax: (0852) 225-232
E-mall: Matfac @ univ. uniar. ac. ru

The model hyperbolic equation, describing the dynamic effects arising through transition from nonresonance to resonance case in nonlinear telegraph equation, is derived on the base of certain applied problem (RCLG-autogenerator mathematical model) analysis. The explanation of auto-oscillation destruction, which is observed in experiments, is provided as well.

1. Постановка задачи. Автогенератор с RCLG — распределенными параметрами в цепи обратной связи и идеальным усилением описывается краевой задачей [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial J}{\partial x}-\alpha_1 u, \qquad \frac{\partial J}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha_2 J, \tag{1}$$

$$J|_{x=1}=0, \quad u|_{x=0}+\beta_0 u|_{x=1}+\beta_1 u^2|_{x=1}-\beta_2 u^3|_{x=1}=0, \tag{2}$$

где u, J — нормированные переменные составляющие напряжения и силы тока в линии; $\alpha_1=G\sqrt{L/C}$, $\alpha_2=R\sqrt{C/L}$, а R, C, L, G — соответственно распределенные сопротивление, емкость, индуктивность и проводимость; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — коэффициенты аппроксимации нелинейной характеристики усилителя полиномом третьей степени, причем $\beta_0, \beta_2>0$, а знак β_1 произволен.

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u(0,x),J(0,x))$) краевой задачи (1), (2) возьмем нелинейное многообразие Σ в гильбертовом пространстве $W_2^1([0,1];R^2)$, состоящее из вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям (2). В работе [2] показано, что решения краевой задачи (1), (2) порождают в Σ сильно непрерывную по t группу нелинейных операторов

$$T(t,w),\quad w=\mathrm{colon}(u(0,x),\ J(0,x))\in\Sigma,$$

определенную при всех $t\in R$ и гладко (по Фреше) зависящую от начального условия W и параметров. А это, в свою очередь, позволяет распространить на краевую задачу (1), (2) практически без изменений основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений – теоремы Ляпунова и Андронова-Витта об устойчивости по первому приближению, интегральные многообразия и так далее (см. работу [2], в которой на эту краевую задачу распространена классическая бифуркационная теорема Андронова-Хопфа).

В дальнейшем будем интересоваться переодическими решениями краевой задачи (1), (2), ответвляющимися от нулевого состояния равновесия. Исследуем его на устойчивость. С этой целью отбросим в (2) нелинейность и положим

$$u(t,x)=h_1(x)\exp\lambda t,\quad J(t,x)=h_2(x)\exp\lambda t.$$

В результате для определения $h_j(x)$, $j=1,2$, получаем краевую задачу

$$h_1'+(\alpha_2+\lambda)h_2=0,\quad h_2'+(\alpha_1+\lambda)h_1=0,$$

$$h_2(1)=0,\quad h_1(0)+\beta_0h_1(1)=0,$$

имеющую нетривиальные решения тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\mathrm{ch}\sqrt{(\lambda+\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)}+\beta_0=0. \tag{3}$$

Анализ уравнения (3) показывает, что, во-первых, при достаточно малых значениях β_0 все его корни лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda\le-\delta_0<0$ при некотором δ_0; во-вторых, при увеличении параметра β_0 и прохождении его через значения $\beta_{0,0}<\beta_{0,1}<\ldots<\beta_{0,n}<\ldots$, где

$$\beta_{0,n}=\mathrm{ch}\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{\frac{\pi^2(2n+1)^2+\alpha_1\alpha_2}{4\pi^2(2n+1)^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2}}\right\},\quad n=0,1\ldots, \tag{4}$$

каждый раз ровно одна пара простых корней $\pm i\omega_n$,

$$\omega_2=2\pi(2n+1)\sqrt{\frac{\pi^2(2n+1)^2+\alpha_1\alpha_2}{4\pi^2(2n+1)^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2}},\quad n=0,1,\ldots, \tag{5}$$

уравнения (3) переходит в полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda>0$, а при

$$\beta_0>\beta_{0,\infty}=\mathrm{ch}\{(\alpha_1+\alpha_2)/2\} \tag{6}$$

в этой полуплоскости содержится уже счетное число корней – наступает так называемая взрывная неустойчивость. С физической точки зрения такое поведение корней характеристического уравнения вполне естественно: увеличение энергетического параметра β_0 повышает степень неустойчивости нулевого состояния равновесия.

В дальнейшем будем считать, что параметры α_1, α_2 пропорциональны одному положительному параметру a, то есть

$$\alpha_1=\alpha a,\quad \alpha_2=(1-\alpha)a,\quad 0<\alpha<1,\quad \alpha\neq 1/2 \tag{7}$$

(случай $\alpha=1/2$, соответствующий линии без искажений, исключаем). Будем рассматривать наиболее интересную с физической точки зрения ситуацию $0<a\ll 1$ (параметр α предполагаем фиксированным), означающую малость активного сопротивления R в линии и проводимости G. Заметим также, что из равенств (4), (7) вытекает справедливость при $a\to 0$ (равномерно по n) асимптотических формул

$$\beta_{0,n}(a)=1+a^2/8+O(a^4),\qquad \beta_{0,\infty}(a)=1+a^2/8+O(a^4). \tag{8}$$

Равенства (8) показывают, что в (1), (2), (7) естественно положить

$$a=\varepsilon,\quad \beta_0=1+\varepsilon^2/8+\gamma\varepsilon^3;\quad 0<\varepsilon\ll 1,\quad \gamma\sim 1,\quad \gamma>0. \tag{9}$$

Действительно, в этом случае, во-первых, в плоскости параметров (a,β_0) находимся глубоко в области неустойчивости нулевого состояния равновесия и в то же время сохраняется локальность задачи – автоколебания происходят в асимптотически малой его окрестности (при увеличении γ, как будет ясно из дальнейшего, это свойство утрачивается). Во-вторых, реализуется максимальная особенность – взрывная неустойчивость (см.(6)).

Подставляя в (1), (2) равенства (7), (9) и исключая переменную J, приходим к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon^2 æ u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad æ=\alpha(1-\alpha)<1/4, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\quad u|_{x=0}+(1+\varepsilon^2/8+\gamma\varepsilon^3)u|_{x=1}+\beta u^2|_{x=1}-u^3|_{x=1}=0, \tag{11}$$

которая и является объектом дальнейшего анализа.

2. Вывод основного уравнения. Автоколебания краевой задачи (10), (11) будем строить с помощью так называемого метода квазинормальных форм [3], являющегося специальным вариантом асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского [4]. Суть этого метода в следующем. Полагая в (10), (11) $\varepsilon=0$ и отбрасывая нелинейность, убеждаемся, что получившаяся линейная краевая задача имеет счетное число линейно независимых периодических решений

$$\exp(\pm i\omega_n t)\cos\omega_n x,\qquad \omega_n=\pi(2n+1),\qquad n=0,1,\ldots,$$

причем их собственные частоты находятся во всевозможных резонансах нечетных порядков. Поэтому подставим в (10), (11) ряды

$$u=\varepsilon^{3/2}u_0+\varepsilon^{5/2}u_1+\varepsilon^3 u_2+\varepsilon^{7/2}u_3+\varepsilon^4 u_4+\varepsilon^{9/2}u_5+\ldots, \tag{12}$$

$$u_0=\sum_{n=0}^{\infty}[z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)]\cos\omega_n x, \tag{13}$$

где $u_j=u_j(t,\tau,x)$, $j=0,\ldots,5$, $\tau=\varepsilon^2 t$, а комплексные "амплитуды" z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2|z_n|^2$ (в этом случае $u_j\in W_2^1$ по переменной

x). Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях ε, для нахождения 2-периодических по t функций u_j получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач.

На первом и втором шаге приходим к краевым задачам

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_1=-\frac{\partial u_0}{\partial t},\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\quad u_1|_{x=0}+u_1|_{x=1}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_2=0,\quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\quad u_2|_{x=0}+u_2|_{x=1}+\beta u_0^2|_{x=1}=0,$$

решения которых ищем в виде рядов той же структуры, что и неоднородности. Получаем равенства

$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty} z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)B_n(x)+\bar z_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)\bar B(x), \tag{14}$$

$$u_2=-\frac{\beta}{2}\sum_{n,\,m=0}^{\infty}[z_n z_m \exp i(\omega_m+\omega_n)t+\bar z_n\bar z_m\exp(-i(\omega_m+\omega_n)t)]\cos(\omega_m+\omega_n)x+$$
$$+[z_n\bar z_m\exp i(\omega_n-\omega_m)t+\bar z_n z_m\exp i(\omega_m-\omega_n)t]\cos(\omega_n-\omega_m)x, \tag{15}$$

где

$$B_n(x)=\frac{i}{2}(x-1)\sin\omega_n x. \tag{16}$$

На третьем и четвертом шаге новые моменты не возникают. Поэтому здесь приведем сразу окончательный результат:

$$u_3=\sum_{n=0}^{\infty}(z_nC_n(x)+2\dot z_nB_n(x))\exp(i\omega_n t)+(\bar z_n\bar C_n(x)+2\dot{\bar z}_n\bar B_n(x))\exp(-i\omega_n t), \tag{17}$$

где точка обозначает дифференцирование по τ, а

$$C_n(x)=1/8(x-1)^2\cos\omega_n x+\frac{1}{2\omega_n}[æ-1/4](x-1)\sin\omega_n x. \tag{18}$$

Формулу для u_4 выписывать не будем, так как в дальнейшем она не потребуется. Отметим, что ее структура аналогична (15).

Пятый шаг связан с рассмотрением краевой задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_5=-\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial \tau}-æu_1,\quad \left.\frac{\partial u_5}{\partial x}\right|_{x=1}=0,$$

$$u_5|_{x=0}+u_5|_{x=1}+2\beta(u_0u_2)|_{x=1}-u_0^3|_{x=1}+\gamma u_0|_{x=1}=0.$$

Учитывая формулы (14)-(18) и равенство

$$2\beta(u_0u_2)|_{x=1}-u_0^3|_{x=1}=(1+\beta^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}z_n\exp(i\omega_n t)+\bar z_n\exp(-i\omega_n t)\Big)^3,$$

после некоторых преобразований убеждаемся, что условия разрешимости краевой задачи в классе 2-периодических функций имеют вид

$$\dot{z}_n/2-\frac{i(\text{æ}-1/4)}{4\omega_n}z_n=f_n,\quad n=0,1\ldots \tag{19}$$

Здесь f_n – коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma v-(1+\beta^2)v^3$, где

$$v(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}z_n(\tau)\exp(i\omega_n y)+\bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n y). \tag{20}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство E, состоящее из антипериодических с периодом 1 функций $v(y)\in W_2^1$. Из формул (19), (20) очевидным образом вытекает, что счетная система дифференциальных уравнений (19) эквивалентна одному скалярному уравнению в E:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\text{æ}\right)Lv+\gamma v-(1+\beta^2)v^3,\qquad v(\tau,y+1)\equiv -v(\tau,y), \tag{21}$$

где L – ограниченный линейный оператор в E,

$$Lv=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i}{\omega_n}z_n\exp(i\omega_n y)-\frac{i}{\omega_n}\bar{z}_n\exp(-i\omega_n y).$$

Дифференцируя уравнения (21) по y и учитывая, что $\frac{d}{dv}Lv=-v$, приходим к гиперболической краевой задаче

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\partial y}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\text{æ}\right)v+[\gamma-3(1+\beta^2)v^2]\frac{\partial v}{\partial y},\qquad v(\tau,y+1)\equiv -v(\tau,y). \tag{22}$$

Выполняя, далее, в (22) подходящие нормировки переменных τ, v и заменяя τ на t, y на x, получаем интересующую нас модельную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}=v+\lambda(1-v^2)\frac{\partial v}{\partial x},\qquad v(t,x+1)\equiv -v(t,x), \tag{23}$$

где $\lambda=8\gamma/(1-4\text{æ})>0$.

Краевая задача (23) является модельной в двух отношениях. Во-первых, она отражает характерные особенности динамики исходной краевой задачи (10), (11) при увеличении параметра γ. Точнее говоря, используя развитые в работах [3], [5] методы, можно показать, что каждому ее периодическому решению вида $v=w(\sigma t-x)$, $\sigma>0$, экспоненциально устойчивому или дихотомичному, отвечает цикл краевой задачи (10), (11) той же устойчивости (с асимптотикой (12), (13)).

Во-вторых, она описывает динамические эффекты, связанные с переходом в нелинейном телеграфном уравнении от нерезонансного случая к резонансному. Для примера рассмотрим типовую краевую задачу $(0<\varepsilon<1)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(3u^2-\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t}+\mu u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0, \tag{24}$$

и заметим, что ее собственные частоты $\omega_n=\sqrt{\mu+\pi^2(n+1)^2/4}$, $n=0,1,\ldots$ при $\mu=0$ находятся во всевозможных резонансных соотношениях нечетных порядков, а при $\mu\neq 0$ происходит "отход" от них. Подставим, далее, в краевую задачу (24) $\mu=\text{æ}\varepsilon$, $\text{æ}\sim 1$, и применим к ней описанный выше метод квазинормальных форм. С этой целью положим в (24)

$$u=\sqrt{\varepsilon}\,u_0(t,\tau,x)+\varepsilon^{3/2}u_1(t,\tau,x)+\ldots,\qquad \tau=\varepsilon t,$$

$$u_0=\sum_{n=0}^{\infty}(z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\bar z_n(\tau)\exp(-i\omega_n))\sin\omega_n x,$$

где $\omega_n=\pi/2\cdot(2n+1)$, и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$. В итоге из условий разрешимости в классе 4-периодических по t функций краевой задачи для u_1 выводим аналогичную (19) счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая "сворачивается" в скалярное уравнение

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial\tau\partial y}=-\text{æ}v+[1-3M(v^2)-3v^2]\frac{\partial v}{\partial y},\quad v(t,y+2)\equiv -v(\tau,y) \tag{25}$$

Здесь $M(*)$ – среднее значение по y,

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\exp(i\omega_n y)+\bar v_n\exp(-i\omega_n y),\qquad v=-iz_n/2.$$

Остается заметить, что краевые задачи (23) и (25) имеют не только схожую структуру, но и идентичные динамические свойства (при увеличении λ и уменьшении $|\text{æ}|$ соответственно).

3. Динамические свойства модельной краевой задачи. Из сказанного в предыдущем пункте следует, что основной интерес представляют периодические решения краевой задачи (23) типа бегущих волн, то есть

$$v=w(y),\ y=\sigma t-x,\ \sigma>0. \tag{26}$$

Ниже изучим их динамику при увеличении параметра λ. Начнем со случая

$$\lambda=\varepsilon,\qquad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{27}$$

Подставляя в краевую задачу (23) формулу (26), приходим к уравнению

$$\sigma w''+\lambda(w^2-1)w'+w=0. \tag{28}$$

Заметим, что (28) – это известное уравнение Ван-дер-Поля, которое при всех $\lambda>0$ имеет единственное периодическое решение [6] $w=w_0(y,\sigma,\lambda)$ с периодом $T_0=T_0(\sigma,\lambda)$ (антипериодическое с периодом $T_0/2$), где достаточно гладкие по совокупности переменных функции w_0,T_0 таковы, что

$$w_0(y,\sigma,0)=\exp(iy\sqrt{\sigma})+\exp(-iy/\sqrt{\sigma}),\qquad T_0(\sigma,0)=2\pi\sqrt{\sigma},$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial\lambda}(\sigma,0)=0. \tag{29}$$

Формулы (29) показывают, что при условии (27) уравнение

$$T_0(\sigma,\lambda)=2 \tag{30}$$

имеет единственное решение $\sigma=\sigma_0(\varepsilon)$, $\sigma_0(0)=1/\pi^2$, $\sigma_0'(0)=0$. Подставляя его в $w_0(y,\sigma,\lambda)$, получаем периодическое решение

$$w=w_0(y,\varepsilon),\qquad y=\sigma_0(\varepsilon)t-x, \tag{31}$$

вида (26) краевой задачи (23). Отметим также, что наряду с (31) у краевой задачи (23) при условии (27) существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного выше с помощью принципа подобия:

$$w=w_n(y,\varepsilon),\qquad y=\sigma_n(\varepsilon)t-x,\qquad n=0,1,\ldots,\tag{32}$$

где

$$w_n=w_0((2n+1)y,(2n+1)\varepsilon),\quad \sigma_n(\varepsilon)=\sigma_0((2n+1)\varepsilon)/(2n+1)^2.\tag{33}$$

Суммируем все сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Для любого натурального N можно указать такое $\varepsilon_N>0$, что при всех $0<\varepsilon\le\varepsilon_N$ краевая задача (23), (27) имеет периодические решения (32) с номерами $n=0,1,\ldots,N$.*

Для исследования свойств устойчивости периодического решения (32) с фиксированным номером n обратим оператор $\frac{\partial}{\partial x}$, стоящий перед производной по времени в уравнении (23), затем линеаризуем это уравнение на цикле (32), перейдем к новой пространственной переменной $y=\sigma_n(\varepsilon)t-x$ и отбросим слагаемые порядка малости ε^2 и выше. В итоге получаем линейную краевую задачу в E:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{1}{w_n^2}\frac{\partial h}{\partial y}+Lh+\varepsilon(1-w_0^2(y))h,\quad h(t,y+1)\equiv-h(t,y),\tag{34}$$

где, напомним, $w_n=\pi(2n+1)$, оператор L тот же, что и в (21),

$$w_0(y)=\exp(i\omega_ny)+\exp(-i\omega_ny).$$

Анализ свойств устойчивости краевой задачи (34) базируется на алгоритме из [7], суть которого в следующем. Положим в (34) при $m\ne n$

$$h=[\exp i(\omega_my+\Delta_mt)+\varepsilon h_m(t,y)]\exp(\varepsilon\lambda_mt),\tag{35}$$

где

$$\Delta_m=1/\omega_m-\omega_m/\omega_n^2.\tag{36}$$

Приравнивая коэффициенты при ε, для нахождения h_m получаем краевую задачу

$$\begin{aligned}&\frac{\partial h_m}{\partial t}+\lambda_m\exp i(\omega_my+\Delta_mt)=-\frac{1}{\omega_n^2}\frac{\partial h_m}{\partial y}+Lh_m+(1-w_0^2(y))\exp i(\omega_my+\Delta_mt),\\&h_m(t,y+1)\equiv-h_m(t,y).\end{aligned}\tag{37}$$

Из условия ее разрешимости в классе тригонометрических многочленов определяем $\lambda_m=-1$, а затем

$$\begin{aligned}&h_m=a_m\exp[i(\omega_m+2\omega_n)y+i\Delta_mt]+b_m\exp[i(\omega_m-2\omega_n)y+i\Delta_mt],\\&a_m=i/[2/\omega_n+2\omega_n/(\omega_m(\omega_m+2\omega_n))],\\&b_m=-i/[2/\omega_n+2\omega_n/(\omega_m(\omega_m-2\omega_n))].\end{aligned}\tag{38}$$

При $m=n$ описанный алгоритм расчета характеристических показателей уравнения (34) приходится несколько видоизменить. Связано это с тем, что при $m=n$ обращается в нуль знаменатель у коэффициента b_m. Поэтому в данном случае положим в (34)

$$\begin{aligned}&h=[V_0(y)+\varepsilon V_1(y)]\exp\Lambda t,\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\ \bar\lambda_2&\bar\lambda_1\end{pmatrix},\\&V_0=[\exp(i\omega_ny),\ \exp(-i\omega_ny)],\quad V_1=[h_n(y),\ \bar h_n(y)].\end{aligned}\tag{39}$$

Действуя далее описанным выше способом, приходим к равенствам

$$\lambda_1=\lambda_2=-1, \qquad h_n(y)=\frac{3i}{8}\omega_n\exp(3i\omega_n y). \tag{40}$$

Для обоснования изложенного алгоритма выполним в краевой задаче (34) замену

$$h=\sum_{m=0}^{\infty}[\exp i(\omega_m y+\Delta_m t)+\varepsilon h_m(t,y)]\xi_m+[\exp(-i(\omega_m y+\Delta_m t))+\varepsilon\overline{h}_m(t,y)]\overline{\xi},$$
$$\xi=(\xi_0,\overline{\xi}_0,\xi_1,\overline{\xi}_1,\ldots)\in\ell_2, \tag{41}$$

где функции h_m задаются формулами (38), (40). Обратим внимание, что знаменатели в (38) при всех $m\neq n$ отличны от нуля, а при $m\to\infty$ стремятся к ненулевым пределам. Поэтому равенство (41) индуцирует ограниченный обратимый оператор, действующий из ℓ_2 в E. А отсюда и из способа построения замены (41) вытекает, что ее результат – система с ограниченным оператором в ℓ_2, которая с точностью до слагаемых порядка ε^2 имеет вид

$$\dot{\xi}=\varepsilon\Lambda_0\xi, \quad \Lambda_0=\mathrm{diag}\{-1,-1,\ldots\Lambda,-1,\ldots\}. \tag{42}$$

Свойства устойчивости системы (42) очевидны: имеется один нулевой характеристический показатель (напомним, что (34) – система в вариациях на цикле), а все остальные равны $-\varepsilon$ и -2ε. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Все циклы, о которых говорится в теореме 1, экспоненциально орбитально устойчивы.*

Для того, чтобы проследить за эволюцией периодического решения (31) при увеличении параметра λ, сделаем в уравнении (28) замену $y/\sqrt{\sigma}\to y$. В результате вместо (30) получаем эквивалентное равенство

$$\varphi(\Theta)=2/\lambda, \quad \varphi(\Theta)=T(\Theta)/(\Theta) \tag{43}$$

для определения параметра $\Theta=\lambda/\sqrt{\sigma}$. Здесь $T(\Theta)$ – период цикла уравнения

$$w''+\Theta(w^2-1)w'+w=0. \tag{44}$$

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(\Theta)$. Во-первых, из результатов работ [4], [8] вытекает, что

$$\varphi(\Theta)\sim 2\pi/\Theta, \ \Theta\to+0; \ \varphi(\Theta)\to 3-2\ln 2, \ \Theta\to \tag{45}$$

(при $\Theta\ll 1$ цикл уравнения (44) близок к гармоническому, а при $\Theta\gg 1$ является релаксационным). Во-вторых, синтез численного и аналитического исследований приводит к неравенству

$$\varphi'(\Theta)=[\Theta T'(\Theta)-T(\Theta)]/\Theta^2<0, \quad \Theta>0 \tag{46}$$

(при $\Theta\ll 1$ и $\Theta\gg 1$ оно вытекает из приведенных в [4], [8] асимптотических формул для $T(\Theta)$).

Из указанных свойств $\varphi(\Theta)$ следует, что при

$$0<\lambda<\lambda_0, \quad \lambda_0=2/(3-2\ln 2) \tag{47}$$

уравнение (43) имеет единственный простой корень $\Theta_0=\Theta_0(\lambda)$, причем

$$\Theta_0(\lambda)\to\infty, \ \lambda\to\lambda_0-0. \tag{48}$$

А отсюда, в свою очередь, заключаем, что периодическое решение (31) непрерывно продолжается по λ на интервал (47). Рассмотрим, далее, циклы (32), получающиеся из него с помощью принципа подобия (33). Из способа их построения вытекает, что каждый из них существует в "ячейке"

$$0<\lambda<\lambda_n, \quad \lambda_n=\lambda_0/(2n+1), \quad n=0,1,\ldots \tag{49}$$

Итак, при увеличении λ модельная краевая задача (23) имеет следующую динамику. В условиях теоремы 1 наблюдается явление буферности: существует асимптотически много циклов (32) с номерами

$$0\le n<(\lambda_0/\varepsilon-1)/2, \tag{50}$$

причем можно гарантировать устойчивость любого фиксированного их числа. Далее, каждый цикл (32) с фиксированным номером n, близкий к гармоническому при $\lambda\ll 1$, при увеличении λ приобретает сложную форму, при $0<\lambda_n-\lambda\ll 1$ становится релаксационным (в этом случае стремится к нулю множитель σ, стоящий перед второй производной в (28), при $\lambda=\lambda_n$ – разрывным и изчезает при $\lambda>\lambda_n$. И наконец, при $\lambda>\lambda_0$ не остается ни одного из них.

4. Заключительные замечания. Интерпретируя полученные в п.3 результаты в терминах исходной краевой задачи (10), (11) (напомним, что периодическим решениям (26) отвечают циклы задачи (10), (11) той же устойчивости), получаем объяснение наблюдаемому при эксперименте явлению разрушения автоколебаний: при увеличении энергии системы синусоидальные колебания постепенно усложняются (становится заметным вклад высших гармоник), затем приобретает П-образную форму и изчезают. Отметим еще, что необходимыми условиями наступления этого явления служат, по всей видимости, три обстоятельства: наличие достаточного количества энергии в системе, близость собственных частот к резонансным и взрывная неустойчивость. Действительно, в нашем случае все три условия выполняются. Кроме того, именно близость частот (5) к резонансным позволяет "свернуть" квазинормальную форму – счетную систему (19) в краевую задачу (21). Ясна также и роль взрывной неустойчивости – она обеспечивает рост амплитуд высших гармоник при увеличении энергии у каждого отдельно взятого цикла, что приводит в конечном итоге к усложнению его формы и разрушению.

Вопрос об аттракторах краевой задачи (10), (11) при

$$\gamma>\gamma_0, \quad \gamma_0=\lambda_0(1-4æ)/8, \tag{51}$$

то есть когда умирают все периодические решения, доставляемые методом квазинормальных форм, остается открытым. Наиболее вероятным в связи со сказанным выше здесь представляется следующее: все решения $u(t,x)\not\equiv 0$ с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия, оставаясь ограниченными в C-норме, при $t\to\infty$ стремится к разрывным функциям. Возвращаясь к реальному объекту – автогенератору, заключаем, что в этой ситуации он не генерирует каких-либо устойчивых непрерывных автоколебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.Ф. Камбулов.* Расчет автоколебаний в RCLG-генераторах с распределенными параметрами в цепи обратной связи // Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: 1976, с. 86-89.
2. *А.Н. Куликов.* Исследование одной краевой задачи, возникающей в радиофизике // Исследование по устойчивости и теории колебаний. - Ярославль: 1976, с. 67-85.
3. *Ю.С. Колесов.* Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сборник, 1993, т. 184, № 3, с. 121-136.
4. *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974, 504 с.
5. *А.Ю. Колесов.* Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки, 1992, т. 51, вып. 2, с. 59-65.
6. *Р. Рейссинг, Г. Сансоне, Р. Конти.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974, 320 с.
7. *Ю.С. Колесов, В.В. Майоров.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, с. 1778-1788.
8. *Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975, 248 с.

Поступила в редакцию
09.02.95.