Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с диффузионным взаимодействием между соседними элементами и дополнительной внутренней связью

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

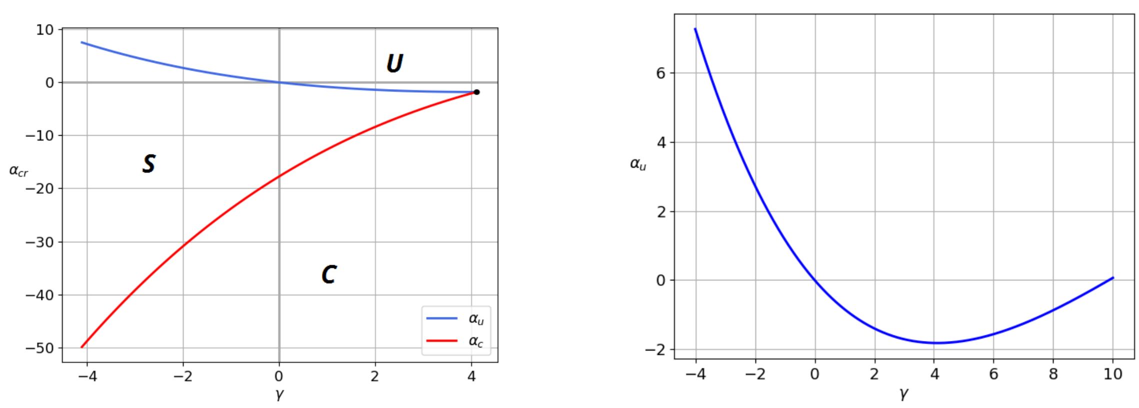
$$u_0 = u_1,\ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N. \tag{2}$$

где $u_j = u_j(t)$ — гладкие функции при $t \geqslant 0$, величина $N \gg 1$, а параметры α, β, γ — действительные числа. Индекс $k \in \mathbb{N}$ позволяет определить дополнительную внутреннюю связь между элементами u_N и u_k.

Изучим поведение нулевого состояния равновесия системы (1), (2) вблизи критических значений $\alpha = \alpha_u$ для различных значений γ при $k = 1$. Величина α_u рассчитывается по формуле

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh} \delta_u}{\operatorname{ch} \delta_u x_k}, \tag{3}$$

где $\delta_u = 2N \operatorname{arsh} \dfrac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$, а $x_k = \dfrac{1}{N}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$. Схематическая визуализация критических значений α и γ, а также график функции $\alpha_u(\gamma)$ показаны на рис. 1. Кривая α_u, соответствующая случаю дивергентной потери устойчивости нулевого состояния равновесия, показана синим цветом, а кривая α_c, соответствующая случаю колебательной потери устойчивости нулевого решения, показана красным цветом. Кривые α_u и α_c пересекаются в точке B с координатами (γ_*, α_*), где $\gamma_* > 0$ и $\alpha_* < 0$. Так, в случае $k = 1$ $(x_0 = 0)$ значение $\gamma_* \approx 4.116$, а $\alpha_* \approx -1.82$.



а) визуализация критических значений α и γ б) график функции $\alpha_u(\gamma)$

Рис. 1: Схематическая визуализация критических зависимостей в случае $k = 1$ $(x_0 = 0)$

Кривые α_u и α_c в данном случае являются важнейшими элементами построения областей значений параметров (α, γ), определяющих устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1), (2). Так область S соответствует случаю устойчивого нулевого решения, U – случаю появления двух симметричных состояний равновесия, а в области C наблюдается наличие цикла вблизи неустойчивого нулевого решения. Отметим, что все результаты локальны и получены в некоторой окрестности нулевого состояния равновесия и достаточно малой окрестности критических кривых.

С помощью предельного перехода $N \to \infty$, систему дифференциальных уравнений (1), (2) можно свести к непрерывной краевой задаче

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{4}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t). \tag{5}$$

Здесь функция $u(x,t)$ является гладкой при $t \geq 0$ и $x \in [0,1]$, а величина $x_0 \in [0,1)$ вместо индекса k, определяет отклонение во втором краевом условии. В нашем случае, поскольку величина $k = 1$, значение $x_0 = 0$.

С помощью вспомогательной функции $v(x,t)$ сведем задачу (4), (5) к следующей системе с краевыми условиями:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\gamma u + u^3 \end{cases}, \tag{6}$$

$$u(0) = a, \quad v(0) = 0, \tag{7}$$

где a — действительное число. По значению a в точке 0 будем находить значение нечетной скалярной функции

$$F(a) = v_*(1) - \alpha u_*(x_0), \tag{8}$$

где $(u_*(x), v_*(x))^T$ – решение задачи Коши вида (6), (7). Отметим, что корни a_* уравнения

$$F(a) = 0 \tag{9}$$

соответствуют состояниям равновесия системы (4), (5). Другими словами, для того, чтобы исследовать устойчивость нулевого решения краевой задачи (4), (5), а также фазовые перестройки, проходящие в его малой окрестности, достаточно изучить поведение функции $F(a)$.

Локальный анализ поведения системы (1), (2) в окрестности нулевого решения для $k = 1$ ($x_0 = 0$) и $\widetilde{\gamma} \approx 4.039$ позволил численно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$. Тогда для любого $\gamma < \widetilde{\gamma}$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных устойчивых режима.*

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon = \alpha - \alpha_u$. Тогда для любого $\widetilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ существует ε_0 такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1), (2) имеет в окрестности нуля два пространственно неоднородных неустойчивых режима.*

При изменении параметра α вблизи критических значений α_u, для любого γ такого, что $\gamma < \widetilde{\gamma}$ наблюдается один и тот же сценарий поведения функции $F(a)$. Для определенности возьмем $\gamma = -2.0$ и начнем менять параметр α вблизи критического значения α_u. Численный анализ поведения функции $F(a)$ позволяет получить следующую последовательность фазовых перестроек для нулевого состояния равновесия для системы (4), (5):

1. При $\alpha < \alpha_u$, $\alpha_u \approx 2.737$, где уравнение (9) имеет единственный нулевой корень. Другими словами, нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (5) будет устойчивым. График функции $F(a)$ для данного случая при $a > 0$ изображен на рис. 2.

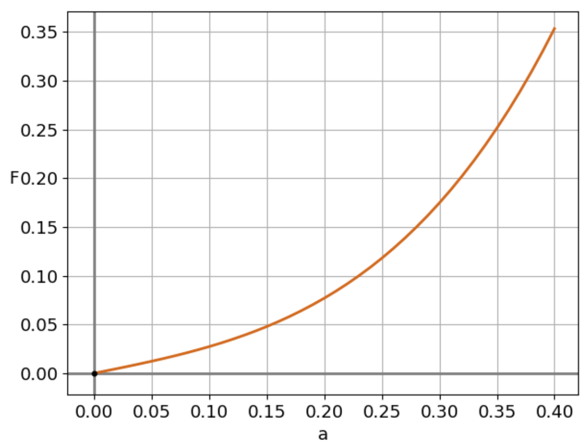
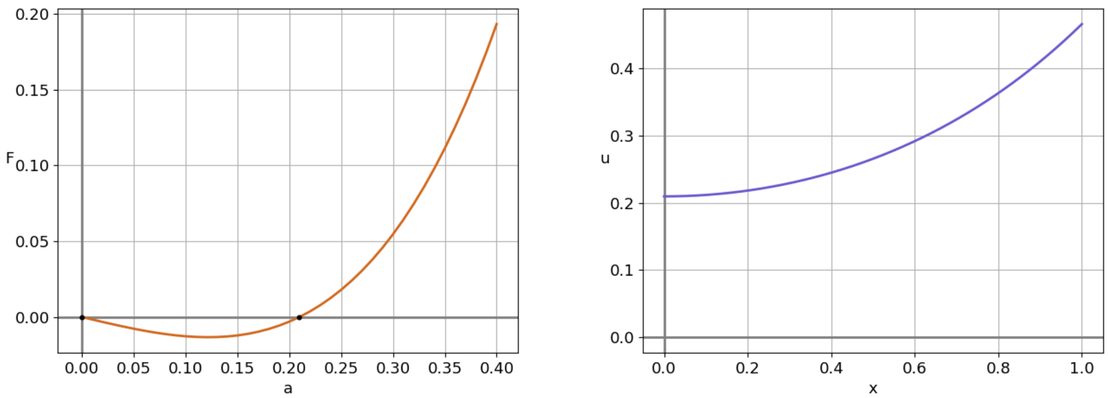


Рис. 2: График функции $F(a)$ для $\alpha = 2.5$ и $\gamma = -2.0$

2. При переходе через критическое значение α_u, для всех $\alpha > \alpha_u$ уравнение (9) имеет пару симметричных относительно нуля корней $a_0 > 0$ и $\overline{a_0} < 0$. Это означает, что от нулевого состояния равновесия краевой задачи (4), (5), ответвляется пара устойчивых симметричных состояний равновесия, в результате чего нуль теряет свою устойчивость. Графики функций $F(a)$ для $\alpha = 2.9$ при $a > 0$ и $u(x)$ для $a_0 > 0$ показаны на рис. 3.

Полученный сценарий поведения функции $F(a)$ верен для любых $\gamma < \widetilde{\gamma}$ и $\alpha > \alpha_c$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых значениях параметра α_u.

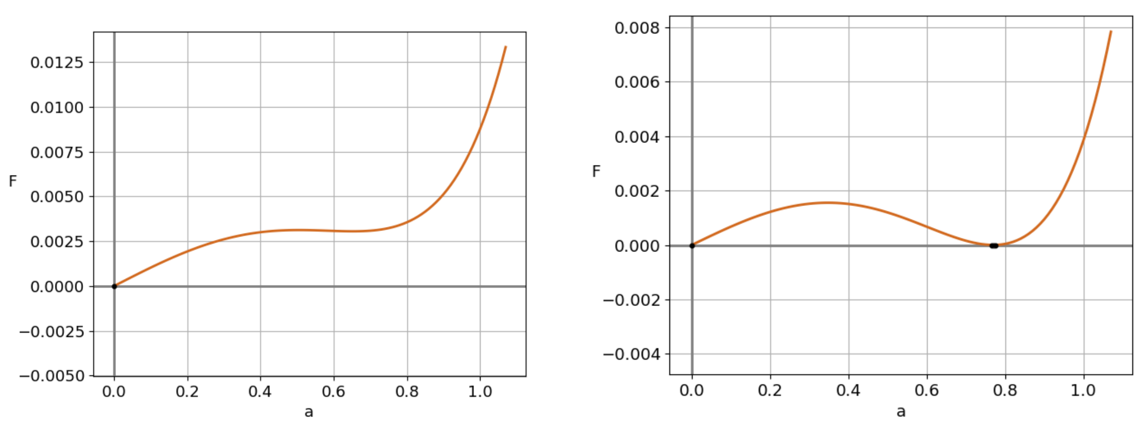


а) график функции $F(a)$ б) график функции $u(x)$ для $a^* \approx 0.21$

Рис. 3: Графики функций $F(a)$ и $u(x)$ для $\alpha = 2.9$ и $\gamma = -2.0$

При изменении параметра α вблизи критических значений α_u, для любого γ такого, что $\widetilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ наблюдается один и тот же сценарий поведения функции $F(a)$. Для определенности возьмем $\gamma = -4.1$ и начнем менять параметр α вблизи критического значения α_u. Численный анализ поведения функции $F(a)$ позволяет получить следующую последовательность фазовых перестроек для нулевого состояния равновесия для системы (4), (5):

1. При $\alpha < \alpha_1$, где $\alpha_1 \approx -1.823$, уравнение (9) имеет единственный нулевой корень. Другими словами, нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (5) будет устойчивым. График функции $F(a)$ для данного случая при $a > 0$ изображен на рис. 4а.



а) $\alpha < \alpha_1$ б) $\alpha = \alpha_1$

Рис. 4: График функции $F(a)$ для различных значений α

2. При значении $\alpha = \alpha_1$ функция $F(a)$ будет касаться оси абсцисс в точках $a_0 > 0$ и $\overline{a_0} < 0$, симметричных относительно нуля. График функции $F(a)$ для данного

случая при $a > 0$ изображен на рис. 4б.

3. В малой окрестности критического значения $\alpha_u \approx -1.82$, при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где $\alpha_2 \approx -1.81$, уравнение (9) будет иметь две пары симметричных относительно нуля корней $a_{02} > a_{01} > 0$ и $\overline{a_{02}} < \overline{a_{01}} < 0$. Это означает, что в окрестности устойчивого нулевого состояния равновесия краевой задачи (4), (5) рождается пара неустойчивых и пара устойчивых симметричных состояний равновесия, соответствующих парам корней a_{01}, $\overline{a_{01}}$ и a_{02}, $\overline{a_{02}}$. Отметим, что с ростом значения α, значения a_{01} и $\overline{a_{01}}$ будут приближаться к нулю, а a_{02} и $\overline{a_{02}}$ — отдаляться от него. График функции $F(a)$ для $\alpha = -1.821$ при $a > 0$ показан на рис. 5. Графики функции $u(x)$ для $a_{02} > a_{01} > 0$ показаны на рис. 6.

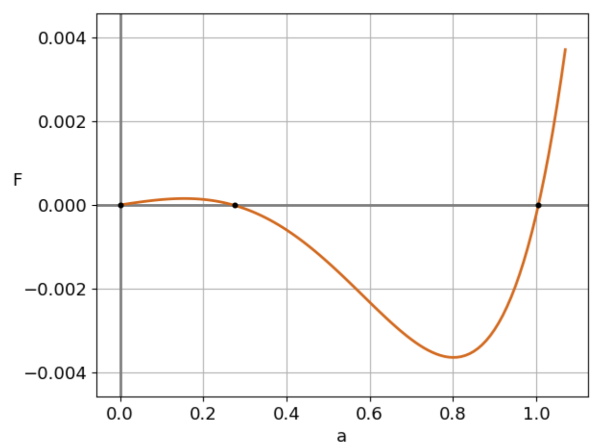
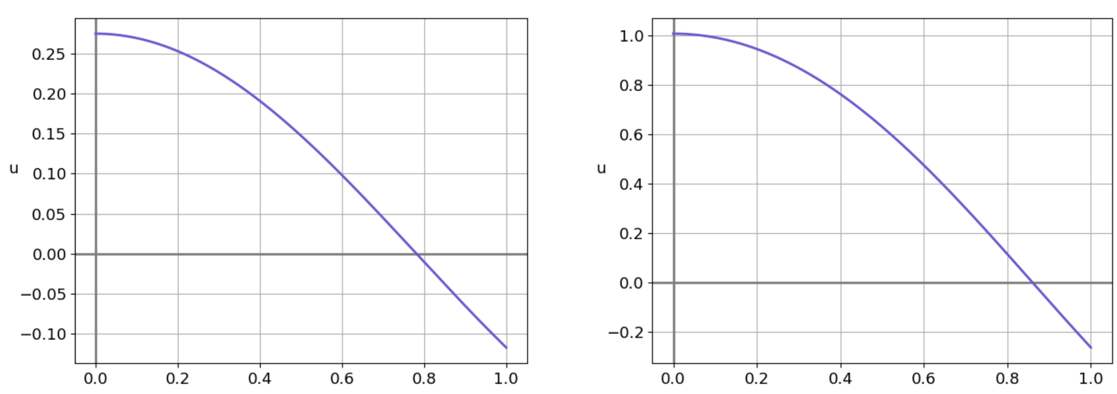


Рис. 5: График функции $F(a)$ для $\gamma = 4.1$ и $\alpha = -1.821$

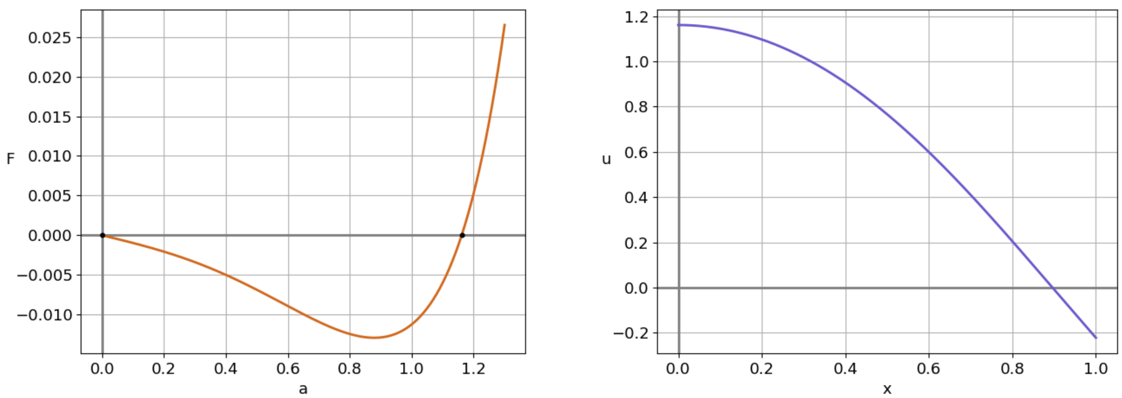


а) $\alpha_1^* \approx 0.275$ б) $\alpha_2^* \approx 1.006$

Рис. 6: График функций $u(x)$

4. При $\alpha = \alpha_2$ корни уравнения (9) a_{01} и $\overline{a_{01}}$ сливаются с нулем. Другими словами, пара неустойчивых симметричных состояний равновесия сливается с нулевым решением краевой задачи (4), (5), тем самым отбирая у него устойчивость.

5. При $\alpha > \alpha_2$ уравнение (9) имеет пару симметричных относительно нуля корней $a_{02} > 0$ и $\overline{a_{02}} < 0$. Это означает в окрестности неустойчивого нулевого решения краевой задачи (4), (5) имеется пара устойчивых состояний равновесия. Графики функций $F(a)$ для $\alpha = -1.81$ и $u(x)$ для $a_{02} > 0$ показаны на рис. 7.



а) график функции $F(a)$ б) график функции $u(x)$ для $a^* \approx 1.161$

Рис. 7: Графики функций $F(a)$ и $u(x)$ для $\alpha = -1.81$ и $\gamma = 4.1$

Полученный сценарий поведения функции $F(a)$ верен для любых $\widetilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$ и $\alpha > \alpha_c$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых значениях параметра α_u. Начиная со значения $\gamma > \gamma_*$ фазовые перестройки будут происходить с неустойчивым нулевым состоянием равновесия краевой задачи (4), (5).

Вместе с приведенным выше анализом фазовых перестроек, численно можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\gamma < \widetilde{\gamma}$. Тогда на плоскости параметров (α, γ), при переходе через кривую $\alpha_u(\gamma)$ от нулевого решения краевой задачи (4), (5) ответвляются два устойчивых симметричных состояния равновесия.*

Теорема 4. *Пусть $\widetilde{\gamma} < \gamma < \gamma_*$. Тогда на плоскости параметров (α, γ), при переходе через кривую $\alpha_u(\gamma)$ нулевое решение краевой задачи (4), (5) грубо теряет свою устойчивость: к нулевому состоянию равновесия равномерно подходит пара неустойчивых состояний равновесия и отбирает у него устойчивость.*