

Общероссийский математический портал

В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Теоретический и экспериментальный анализ феномена буферности в длинной линии с туннельным диодом, *Дифференц. уравнения*, 1997, том 33, номер 5, 638–645

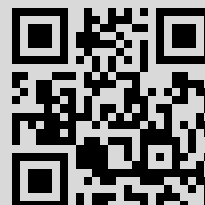
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.86.251.76

14 августа 2021 г., 23:10:37



УДК 517.926

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФЕНОМЕНА БУФЕРНОСТИ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ С ТУННЕЛЬНЫМ ДИОДОМ

В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Для нелинейного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа, моделирующего процессы в длинной линии с туннельным диодом, установлен феномен буферности, т. е. существование, при подходящем выборе параметров, любого фиксированного числа устойчивых циклов. Описана также конкретная физическая система, позволяющая получить экспериментальную иллюстрацию этого явления.

1. Постановка задачи. Будем говорить о феномене *буферности*, если в системе дифференциальных уравнений с бесконечномерным фазовым пространством можно гарантировать (при подходящем выборе параметров) существование произвольного наперед заданного конечного числа устойчивых циклов. Для параболических систем типа реакция-диффузия это интересное явление впервые установлено численными методами в [1]. Там же была поставлена проблема теоретического объяснения феномена буферности, разрешенная в [2, 3]. Исследование буферности в гиперболических уравнениях начато в [4], продолжено в [5, 6] и завершено в [7]. Из этих работ вытекает, что буферность типична для гиперболических краевых задач, причем в некоторых случаях возможна даже *гипербуферность* [7] — существование сразу счетного числа устойчивых циклов.

В настоящей работе проведен теоретический и экспериментальный анализ явления буферности в автогенераторе, содержащем отрезок длинной линии с туннельным диодом. Задача об автоколебаниях в длинной линии была поставлена А. А. Виттом [8] и впоследствии изучалась многими авторами (см., например, [9 — 13]). Отметим, что в [8] указывалось на возможность существования в таком автогенераторе сразу нескольких устойчивых циклов. Однако в полном объеме феномен буферности в этом генераторе изучен не был.

Рассмотрим изображенную на рис. 1 электрическую схему, содержащую отрезок длинной линии длины l с распределенными емкостью C и индуктивностью L , туннельный диод TD с емкостью C_d , источник питания с напряжением E и активное сопротивление R . Будем считать, что сила тока i , проходящего через туннельный диод, связана с приложенным напряжением u равенством $i = f(u)$, причем графики функций $i = f(u)$ и $i = (E - u)/R$ имеют единственную точку пересечения (u_0, i_0) , лежащую на падающем участке нелинейной характеристики (рис. 2).

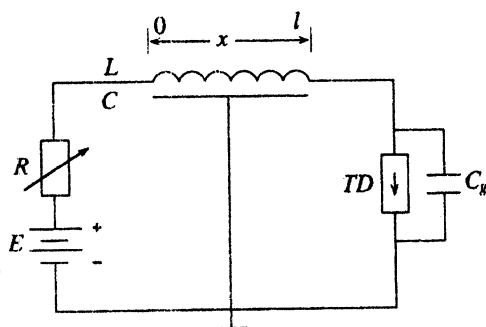


Рис. 1

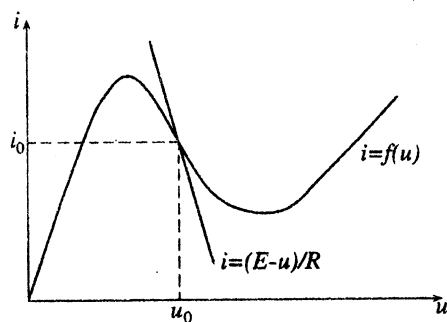


Рис. 2

Тогда, как показано в [12, 13], математической моделью этого автогенератора служит нелинейное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{d}{dt}[v(t) - Kv(t-h)] + (1-s_0)v(t) + (1+s_0)Kv(t-h) = s_1[v(t) - Kv(t-h)]^2 - s_2[v(t) - Kv(t-h)]^3, \quad (1)$$

где $K, h, s_0, s_2 > 0$, а знак параметра s_1 произволен. Здесь $K = (1-r_0)/(1+r_0)$, $r_0 = R\sqrt{C/L}$, $h = 2lC/C_g$, $s_j = S_j\sqrt{L/C}$, $j = 0, 1, 2$; S_j , $j = 0, 1, 2$, — коэффициенты аппроксимации нелинейной характеристики $i = f(u)$ полиномом третьей степени в окрестности рабочей точки (u_0, i_0) ; величина $v(t) - Kv(t-h)$ — переменная составляющая напряжения на конце $x = l$ (см. рис. 1) линии; t — нормированное время, связанное с истинным временем t' равенством $t = t'C_g^{-1}\sqrt{C/L}$.

Будем интересоваться существованием и устойчивостью периодических решений уравнения (1), бифурцирующих из его нулевого состояния равновесия при малых r_0, s_0 . В связи с этим сделаем в нем замену $v = \theta/\sqrt{s_2}$ и положим $s_0 = \varepsilon$, $K = 1 - \gamma\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а параметр $\gamma > 0$ имеет порядок единицы. В результате придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t-h)] + (1 - \varepsilon)\theta(t) + (1 - \gamma\varepsilon)(1 + \varepsilon)\theta(t-h) = \\ = \beta[\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t-h)]^2 - [\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t-h)]^3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\beta = s_1/\sqrt{s_2}$, которое и изучается в дальнейшем.

2. Гармоническая буферность. Рассмотрим квазиполином

$$P(\lambda, \varepsilon) = \lambda[1 - (1 - \gamma\varepsilon)\exp(-\lambda h)] + 1 - \varepsilon + (1 - \gamma\varepsilon)(1 + \varepsilon)\exp(-\lambda h), \quad (3)$$

отвечающий нулевому состоянию равновесия уравнения (2). Несложный анализ показывает, что, во-первых, при $\varepsilon = 0$ все его корни простые, чисто мнимые и определяются равенствами

$$\lambda = \pm i\omega_n, \quad \omega_n = 2\pi(n-1)/h + O(1/n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\omega_1 < \omega_2 < \dots$ — положительные корни уравнения

$$\omega \operatorname{tg}(\omega h/2) = 1; \quad (4)$$

во-вторых, при $0 < \varepsilon \ll 1$ и $\gamma > 2/(1 + \omega_1^2)$ они лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при уменьшении параметра γ и прохождении его через значения $2/(1 + \omega_n^2)$, $n \geq 1$, последовательно переходят в полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Таким образом, речь пойдет о бифурцирующих из нуля при

$$0 < \gamma < 2/(1 + \omega_n^2), \quad n \geq 1, \quad (5)$$

периодических решениях с близкими к ω_n частотами, алгоритм построения которых приводится ниже.

Фиксируем произвольное натуральное n и подставим в уравнение (2) ряды

$$\theta = \sqrt{\varepsilon}\theta_1(\tau) + \varepsilon\theta_2(\tau) + \varepsilon^{3/2}\theta_3(\tau) + \dots, \quad \tau = (1 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \dots)t, \quad (6)$$

$$\theta_1(\tau) = \xi[\exp(i\omega_n\tau) + \exp(-i\omega_n\tau)]. \quad (7)$$

Приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях ε , для нахождения $2\pi/\omega_n$ -периодических функций $\theta_k(\tau)$, $k \geq 2$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений вида

$$\Pi\theta_k = f_k(\tau), \quad \Pi\theta \equiv \frac{d}{d\tau}[\theta - \theta(\tau-h)] + \theta + \theta(\tau-h), \quad (8)$$

из условий разрешимости которых (при нечетных k) в нужном классе функций определяем неизвестные вещественные постоянные ξ, δ_k , $k \geq 1$.

При $k = 2$ описанный алгоритм приводит к формуле

$$\theta_2(\tau) = 4\beta\xi^2[1/(1 + \omega_n^2) + \cos 2\omega_n\tau/(1 + 3\omega_n^2)].$$

Приравнявая затем к нулю коэффициенты при $\exp(i\omega_n\tau)$ в правой части уравнения для θ_3 , находим

$$\xi = \frac{1 + \omega_n^2}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2}{1 + \omega_n^2}} - \gamma, \quad \delta_1 = -\frac{32\beta^2\xi^2}{(1 + \omega_n^2)(1 + 3\omega_n^2)(2 + h + h\omega_n^2)}, \quad (9)$$

а потом и саму функцию θ_3 , определяющуюся с точностью до слагаемого $\eta \cos \omega_n \tau$. Произвольная же постоянная η обеспечивает вместе с очередной поправкой к частоте δ_2 разрешимость в классе тригонометрических полиномов уравнения (8) при $k = 5$ и т.д. Добавим еще, что для продолжения алгоритма до шага с номером k необходимы и достаточны условия

$$|P(im\omega_n, 0)| \neq 0, \quad m = 2, \dots, k,$$

где $P(\lambda, \varepsilon)$ — квазиполином (3), автоматически выполняющиеся при $k = 2, 3$. Однако уже при $k = 4$ они приводят к неравенству

$$1 + 10\omega_n^2 - 15\omega_n^4 \neq 0, \quad (10)$$

справедливость которого можно обеспечить за счет выбора h .

Положим

$$R_{n,m} = \gamma(1 + 2\omega_n^2 - \omega_m^2) - 2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть при некотором $n \geq 1$ выполняются неравенства (5) и (10), отличны от нуля числа (11), а количество положительных среди них равно m_0 . Тогда найдется такое $\varepsilon_n > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ уравнение (2) имеет периодическое решение с асимптотикой (6), (7), (9), экспоненциально орбитально устойчивое (в метрике фазового пространства $W_2^1(-h, 0)$) при $m_0 = 0$ и диготомичное при $m_0 > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия $2m_0 + 1$.

Оригинальная часть доказательства теоремы состоит в применении алгоритма исследования устойчивости из [14] к уравнению

$$\Pi(\varepsilon)\theta \equiv \frac{d}{d\tau}[\theta(\tau) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(\tau - \tilde{h})] + a(\tau, \varepsilon)\theta(\tau) + b(\tau, \varepsilon)\theta(\tau - \tilde{h}) = 0, \quad (12)$$

где $\tilde{h} = (1 + \varepsilon\delta_1)h$, получающемуся из уравнения (2) после замены $\tau = (1 + \varepsilon\delta_1)t$ и линеаризации на построенном выше отрезке ряда (6). Для реализации указанного алгоритма при $m \neq n$ положим в (12)

$$\theta = [\exp(i\tilde{\omega}_m\tau) + \sqrt{\varepsilon}v_{1,m}\tau + \varepsilon v_{2,m}(\tau)] \exp(\varepsilon\mu_m\tau),$$

где $\tilde{\omega}_m$ — корни уравнения (4) при $h = \tilde{h}$, а $v_{1,m}$, $v_{2,m}$ — тригонометрические полиномы переменных $\tilde{\omega}_m\tau$, $\omega_n\tau$, подлежащие определению вместе с постоянной μ_m . Приравнявая затем коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$ и ε , получим уравнения

$$\Pi v_{j,m} = f_j(\tau), \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

где Π — дифференциальный оператор (8) при $h = \tilde{h}$, решения которых ищем в виде тригонометрических многочленов той же структуры, что и их правые части.

На этом пути сначала находим

$$v_{1,m} = A_+ \exp(i(\tilde{\omega}_m + \omega_n)\tau) + A_- \exp(i(\tilde{\omega}_m - \omega_n)\tau),$$

где $A_{\pm} = 8\beta\xi/(1 \mp i\omega_n)(1 - i\tilde{\omega}_m)P_0(i(\tilde{\omega}_m \pm \omega_n))$, а $P_0(\lambda)$ — квазиполином (3) при $\varepsilon = 0$, $h = \tilde{h}$. Приравнявая, далее, к нулю коэффициент при $\exp(i\tilde{\omega}_m\tau)$ в правой части второго уравнения (13), получаем

$$[2 + \tilde{h} + \tilde{h}\tilde{\omega}_m^2]\mu_m = 2 - \gamma(1 + \tilde{\omega}_m^2) - 2i\tilde{\omega}_m\delta_1 + 4\beta\xi(1 - i\tilde{\omega}_m)(\gamma_-A_- + \gamma_+A_+) - 48\xi^2/(1 + \omega_n^2),$$

$$\gamma_{\pm} = [1 - \exp(-i(\tilde{\omega}_m \pm \omega_n)\tilde{h})]/(1 \pm i\omega_n), \quad (14)$$

а затем определяем и функцию $v_{2,m}$, содержащую только гармоники $\exp(i(\tilde{\omega}_m \pm 2\omega_n)\tau)$.

При $m = n$, т.е. на собственной частоте автоколебаний, способ действий несколько отличается от предыдущего. В этом случае, полагая в уравнении (12)

$$\theta = [V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2] \exp \varepsilon D\tau, \quad V_j = [v_{j,n}, \bar{v}_{j,n}], \quad j = 0, 1, 2,$$

$$v_{0,n} = \exp(i\omega_n\tau), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ \bar{d}_2 & \bar{d}_1 \end{pmatrix}$$

и действуя, как указано выше, приходим к равенствам $[2 + h + h\omega_n^2]d_1 = i\omega_n\delta_1 - 24\xi^2/(1 + \omega_n^2)$, $d_2 = d_1$. Структура матрицы D и вытекающие из соотношений (14) равномерные по m асимптотические представления $\text{Re}\mu_n = R_{n,m}/(2 + h + h\omega_n^2) + O(\varepsilon)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = -\gamma/\bar{h}$ показывают, что формальные свойства устойчивости уравнения (12) совпадают с теми, о которых сказано в теореме 1. Их строгое обоснование, а также необходимая для доказательства существования цикла оценка

$$\|\Pi^{-1}(\varepsilon)\|_{C \rightarrow C^1} \leq N/\varepsilon, \quad N > 0,$$

где C^1 , C — подходящие пространства $2\pi/\omega_n$ -периодических функций, непосредственно следуют из результатов работы [15]. Само же доказательство существования у уравнения (2) периодического решения с нужной асимптотикой проводится по стандартной схеме [16].

Из утверждений теоремы 1 вытекает следующая динамика уравнения (2) при уменьшении γ . При $\gamma > 2/(1 + \omega_1^2)$ его нулевое состояние равновесия экспоненциально устойчиво, а при $\gamma < 2/(1 + \omega_1^2)$ от этого состояния равновесия ответвляется устойчивый цикл — происходит обычная бифуркация Андронова — Хопфа. Далее, при прохождении γ через значения $2/(1 + \omega_n^2)$, $n \geq 2$, в результате вторичных бифуркаций Андронова — Хопфа возникают неустойчивые циклы, которые, подрастая по амплитуде, становятся устойчивыми при

$$\gamma < 2/(1 + 2\omega_n^2 - \omega_1^2). \quad (15)$$

Таким образом, при подходящем уменьшении параметров γ , ε можно гарантировать существование у уравнения (2) любого наперед заданного количества устойчивых циклов, т.е. имеет место явление буферности. А так как доставляемые теоремой 1 циклы близки к гармоническим, то в данном случае уместно говорить о *гармонической буферности*.

В заключение добавим, что, опираясь на результаты из [17, 5], можно проследить за возникновением в уравнении (2) при уменьшении γ также и торов все более высоких размерностей. Все они, однако, неустойчивы. В частности, неустойчивые двумерные торы последовательно ответвляются от цикла с номером $n \geq 2$ при прохождении γ через значения $2/(1 + 2\omega_n^2 - \omega_m^2)$, $m = n - 1, \dots, 1$.

3. Высокочастотная буферность. Исследуем теперь динамику уравнения (2) при дополнительном предположении о малости параметра $1/h$. Отметим, что с физической точки зрения это условие вполне естественно, так как достигается, например, за счет увеличения длины линии l или уменьшения нормированной паразитной емкости C_g/C туннельного диода.

Для удобства дальнейшего анализа выполним в уравнении (2) замену времени $t/h \rightarrow t$, в результате которой запаздывание становится равным единице, появляется сингулярность — малый множитель $1/h$ перед производной по времени, а частоты ω_n , $n \geq 1$ (корни уравнения (4)), переходят в $h\omega_n$. Однако кроме сингулярности возникает еще одна трудность: из асимптотического представления

$$h\omega_n = \pi(2n - 1)[1 - 2/h + 4/h^2 + ((2/3)\pi^2(2n - 1)^2 - 8)/h^3] + O(1/h^4), \quad h \rightarrow \infty, \quad (16)$$

следует, что новые частоты $h\omega_n$ с точностью до $1/h^2$ удовлетворяют всем резонансным соотношениям нечетных порядков. А отсюда в свою очередь следует, что построение периодических решений в одночастотной форме (6), (7) здесь заведомо невозможно.

В связи с этим в уравнении (2) положим $h^{-1} = \alpha\varepsilon^{1/3}$, где параметр $\alpha > 0$ имеет порядок единицы (в этом случае “отход” от резонансности в частотах (16) происходит в порядке ε). В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon^{1/3} \frac{d}{dt} [\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t - 1)] + (1 - \varepsilon)\theta(t) + (1 + \varepsilon)(1 - \gamma\varepsilon)\theta(t - 1) = \\ = \beta[\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t - 1)]^2 - [\theta(t) - (1 - \gamma\varepsilon)\theta(t - 1)]^3, \end{aligned} \quad (17)$$

для построения автоколебаний которого воспользуемся так называемым *методом квазинормальных форм*. Напомним, что этот метод, представляющий собой специальный вариант асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского, впервые был предложен

Ю. С. Колесовым для исследования автоколебаний в системах параболических уравнений с малой диффузией (см., например, [17]), а на аналогичный класс волновых уравнений распространен в [4].

Следуя изложенной в [17] методике, подставим в уравнение (17) ряд

$$\theta = \sqrt{\varepsilon}\theta_0(s, \tau) + \varepsilon^{5/6}\theta_1(s, \tau) + \varepsilon\theta_2(s, \tau) + \varepsilon^{7/6}\theta_3(s, \tau) + \varepsilon^{4/3}\theta_4(s, \tau) + \varepsilon^{3/2}\theta_5(s, \tau) + \dots, \quad (18)$$

где $s = \varepsilon t$, $\tau = (1 + \delta_1\varepsilon^{1/3} + \delta_2\varepsilon^{2/3})t$, $\theta_0(s, \tau)$ — произвольная антипериодическая по τ с периодом 1 функция (подлежащая определению), а функции $\theta_k(s, \tau)$, $k = 1, \dots, 5$, считаем 2-периодическими по τ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , для нахождения $\theta_k(s, \tau)$ приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных разностных уравнений

$$\theta_k(s, \tau) + \theta_k(s, \tau - 1) = \psi_k(s, \tau), \quad k = 1, \dots, 5, \quad (19)$$

в которых неоднородности ψ_k будут антипериодическими или периодическими по τ с периодом 1 при нечетных или четных k соответственно.

Поэтому $\theta_k(s, \tau) = \psi_k(s, \tau)/2$, $k = 2, 4$, а для разрешимости в нужном классе функций уравнений (19) при $k = 1, 3, 5$ необходимы и достаточны условия

$$\psi_k(s, \tau) \equiv 0, \quad k = 1, 3, 5. \quad (20)$$

Эти равенства позволяют в свою очередь последовательно определить постоянные δ_1 , δ_2 и функцию $\theta_0(s, \tau)$, а затем положить $\theta_k \equiv 0$, $k = 1, 3, 5$. Например, на первом шаге имеем дело с уравнением

$$\theta_1(s, \tau) + \theta_1(s, \tau - 1) = -(\delta_1 + 2\alpha)\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau},$$

из которого находим $\delta_1 = -2\alpha$, $\theta_1 \equiv 0$. Дальнейшая реализация описанного алгоритма приводит к равенствам $\delta_2 = 4\alpha^2$, $\theta_2 = 2\beta\theta_0^2(s, \tau)$, $\theta_3 \equiv \theta_4 \equiv 0$ и краевой задаче

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial s} = -\frac{2\alpha^3}{3}\frac{\partial^3\theta_0}{\partial\tau^3} - 8\alpha^3\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau} + (2 - \gamma)\theta_0 - 8\theta_0^3, \quad (21)$$

$$\theta_0(s, \tau + 1) \equiv -\theta_0(s, \tau), \quad (22)$$

получающейся из уравнения (20) при $k = 5$.

Краевая задача (21), (22), согласно принятой в [17, 18] терминологии, является *квазинормальной формой* уравнения (17). Данное название оправдано двумя обстоятельствами. Во-первых, уравнение (21) может быть получено в результате применения к уравнению (17) алгоритма формальной нормализации и последующего “сворачивания” нормальной формы — счетной системы — в одно скалярное уравнение в частных производных (см. [6, 10], где аналогичная процедура проделана в близких ситуациях). Во-вторых, при выводе краевой задачи (21), (22) отброшены слагаемые хотя по порядку и малые относительно ε , но по силе отнюдь не являющиеся подчиненными остальным. Последнее обстоятельство позволяет говорить именно о квазинормальной, а не о нормальной форме.

Однако стандартное утверждение о соответствии между периодическими решениями уравнений (17) и (21) остается в силе.

Теорема 2. Пусть краевая задача (21), (22) имеет периодическое решение $\theta_0 = \theta_0(y)$, $y = \omega s + \tau$, экспоненциально орбитально устойчивое или диготомичное (в метрике фазового пространства W_2^3 1-антипериодических функций $\theta(\tau)$). Тогда при всех достаточно малых ε ему соответствует цикл уравнения (17) с асимптотикой (18) (при $\theta_0 = \theta_0(y)$) и теми же свойствами устойчивости.

На доказательстве теоремы 2 не будем останавливаться, отсылая читателя к работе [18], где метод квазинормальных форм обоснован для гиперболического случая.

Итак, проблема построения автоколебаний уравнения (17) сводится к исследованию периодических решений краевой задачи (21), (22) типа бегущих волн. В связи с этим всюду ниже

будем считать, что в уравнениях (17) и (21) параметр $\gamma < 2$, так как в противном случае нулевое решение будет устойчивым как в самом уравнении (17), так и в его квазинормальной форме (21), (22). Далее, последовательно выполняя в краевой задаче (21), (22) замены

$$\tau - 8\alpha^3 s \rightarrow \tau, \quad (2 - \gamma)s \rightarrow s, \quad \theta_0 = \sqrt{(2 - \gamma)/8w}, \quad s \rightarrow t, \quad \tau \rightarrow x,$$

приведем ее к более удобному для дальнейшего анализа виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = w - w^3, \quad w(t, x + 1) \equiv -w(t, x), \quad (23)$$

где $a^2 = 2\alpha^3[3(2 - \gamma)]^{-1}$.

Для нахождения периодических решений краевой задачи (23) типа бегущих волн положим в ней $w = w(y)$, $y = a^2(2n - 1)^3 \delta t + (2n - 1)x$, $n = 1, 2, \dots$. В результате для определения антипериодической с периодом 1 функции $w(y)$ и частоты δ приходим к уравнению

$$w''' + \delta w' = \mu[w - w^3], \quad (24)$$

где параметр $\mu = 1/a^2(2n - 1)^3$ для удобства будем считать меняющимся непрерывно.

Лемма. *Найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существует единственная пара достаточно гладких по своим переменным функций*

$$(w(y, \mu), \delta(\mu)): \quad w(y + 1, \mu) \equiv -w(y, \mu), \quad w(y, 0) = (2/\sqrt{3}) \cos y, \quad \delta(0) = 1,$$

обращающих уравнение (24) в тождество.

Лемма гарантирует существование у краевой задачи (23) сразу счетного числа бегущих волн

$$w = w(y, \mu_n), \quad y = \mu_n^{-1} \delta(\mu_n) t + (2n - 1)x, \quad \mu_n = 1/a^2(2n - 1)^3, \quad (25)$$

с номерами n , удовлетворяющими неравенству

$$1/a^2(2n - 1)^3 \leq \mu_0. \quad (26)$$

Теорема 3. *Все бегущие волны (25), (26) краевой задачи (23) экспоненциально орбитально устойчивы.*

Доказательства леммы и теоремы 3 не приводим, поскольку они содержатся в [7].

Отметим, что теоремы 2 и 3 обеспечивают существование у уравнения (17) при подходящем уменьшении ϵ любого наперед заданного фиксированного числа устойчивых быстро осциллирующих циклов. Таким образом, здесь уместно говорить о *высокочастотной буферности*.

Суммируя все сказанное выше, можно заключить, что при фиксированных $\epsilon \ll 1$, $\gamma < 2$ и при увеличении h количество устойчивых циклов уравнения (2) неограниченно растет. По тенденции это следует уже из теоремы 1, так как (см. (16)) $\omega_n = \omega_n(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, а значит, при любом фиксированном n условие устойчивости (15) цикла (6) в пределе совпадает с неравенством $\gamma < 2$. Далее, из теорем 2, 3 вытекает, что, во-первых, при $h^{-1} \sim \epsilon^{1/3}$ циклы (6) с младшими номерами n теряют гармоническую форму: в рамках краевой задачи (21), (22) им соответствуют нелокальные периодические решения типа бегущих волн, существование которых ясно из общих соображений; во-вторых, наряду со сложно зависящими от t циклами появляется много быстро осциллирующих и близких к гармоническим устойчивых периодических решений, т.е. наблюдается эффект высокочастотной буферности. Следует, однако, отметить, что в рамках физического эксперимента увеличение параметра h за счет увеличения длины линии l приводит к одновременному росту активного сопротивления R (увеличению параметра γ в уравнении (2)), что в свою очередь может привести не только к разрушению эффекта буферности, но и к полному гашению всех колебаний.

4. Результаты эксперимента. Описанный в п.2 качественный характер поведения автоколебаний в длинной линии с туннельным диодом при уменьшении R полностью подтверждается экспериментально.

Для этого В. Ф. Камбуловым был собран автогенератор, принципиальная схема которого представлена на рис. 1. В качестве отрезка длинной линии использовался коаксиальный кабель длины $l = 1,3$ м с распределенными емкостью $C = 94$ пФ и индуктивностью $L = 0,8$ мкГн. Напряжение источника питания $E = 0,45$ В, а емкость $C_g = 22$ пФ. Туннельный диод типа АИ201 имел нелинейную характеристику (аналогичную показанной на рис. 2) с экстремумами $i \approx 11$ мА, $i \approx 1$ мА в точках $u \approx 0,2$ В, $u \approx 0,6$ В соответственно. Сопротивление R изменялось в промежутке $0,3 - 25$ Ом, где имело место устойчивое положение рабочей точки на падающем участке нелинейной характеристики (см. рис. 2). Автоколебания переменной составляющей напряжения $u = u(t)$ снимались с точки линии $x = l$ и наблюдались на экране осциллографа.

Эксперимент дал следующие результаты. При уменьшении сопротивления R в интервале $25 - 10,5$ Ом в генераторе существовал единственный близкий к гармоническому цикл, аналогичный показанному на рис. 3, а. При уменьшении сопротивления от значения $10,5$ Ом до $0,4$ Ом наблюдалось явление гармонической буферности: в зависимости от задания начальных условий для тока и напряжения (при фиксированных прочих параметрах) возникали автоколебания, представленные на рис. 3, а, б. Далее, при $R = 0,4$ Ом к ранее возникшим циклам добавлялось автоколебание, показанное на рис. 3, в, т.е. буферность реализовывалась уже в наличии трех циклов. И наконец, при $R = 0,3$ Ом появлялся еще и четвертый периодический режим, изображенный на рис. 3, г.

Отметим, что на рис. 3 все эти циклы показаны при $R = 0,3$ Ом, т.е. при минимально возможном для данного устройства значении сопротивления. Поэтому, в частности, изображенный на рис. 3, а цикл уже значительно отличается от гармонического.

Итак, в рассматриваемом генераторе при уменьшении активных потерь в полном соответствии с теоретическими представлениями происходит накопление автоколебательных режимов, причем форма каждого отдельно взятого из них постепенно усложняется. Более того, из проделанного эксперимента следует, что теоретические выводы на качественном уровне сохраняются и в нелокальной ситуации. Действительно, в нашем случае оказалось, что $S_0 = 0,04 - 0,05$, а значит, $\epsilon \approx 4$.

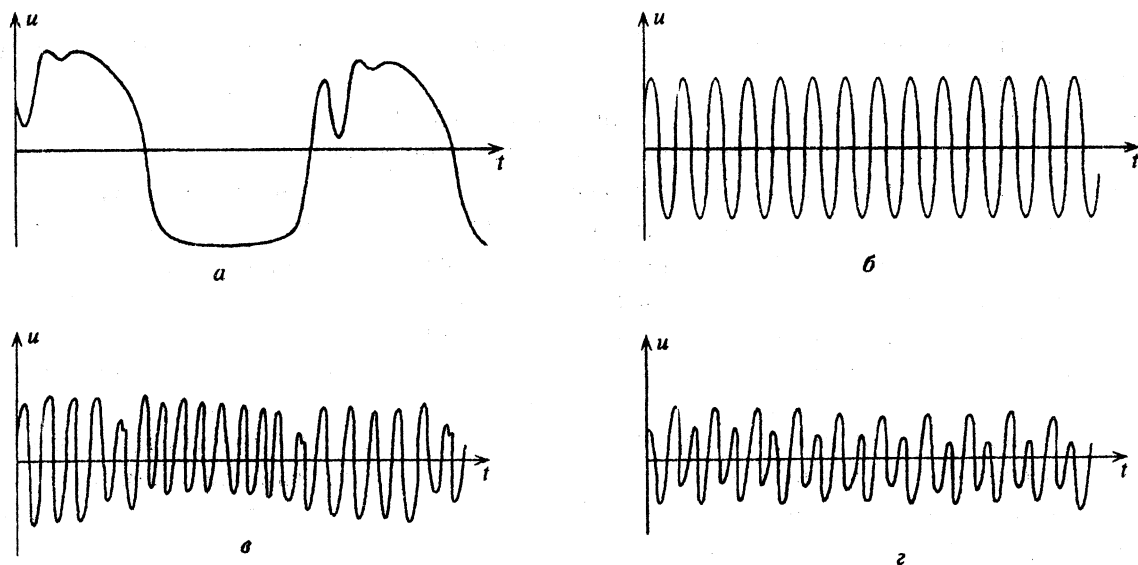


Рис. 3

5. Заключение. Отдельно остановимся на физической интерпретации феномена буферности. Из проделанного теоретического и экспериментального анализа следует, что буферность характеризуется следующими специфическими свойствами:

- 1) в генераторе с распределенными или сосредоточенными параметрами имеет место набор устойчивых периодических автоколебательных движений;
- 2) в зависимости от начальных условий или внешних факторов реализуется какой-либо

один из возможных режимов автоколебаний;

3) между различными потенциально возможными автоколебательными режимами существуют как бы буферы, препятствующие самопроизвольному переходу системы от одного периодического движения к другому.

Перечисленные свойства позволяют заключить, что явление буферности актуально, например, в связи с моделированием процессов памяти и созданием запоминающих ячеек [19, 20]. Поэтому представляют интерес две проблемы. Первая проблема связана с отысканием простейших радиофизических устройств, в которых данное явление наблюдается. Соответствующий цикл исследований был начат в работах [9, 10], посвященных анализу автоколебаний в математической модели *RCLG*-автогенератора. Вторая проблема состоит в максимизации числа потенциально реализуемых периодических движений в рамках какого-либо конкретного генератора. В нашем случае, как видно из проделанного анализа, она может быть решена за счет уменьшения активных потерь в линии, т.е. параметра γ в уравнении (2), или за счет увеличения параметра h .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96 — 01 — 00207).

Литература

1. Затаров А. А., Колесов Ю. С. // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 3 — 15.
2. Колесов А. Ю. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. Горький, 1986. С. 57 — 66.
3. Колесов А. Ю. // Моделирование динамики популяций. Н. Новгород, 1990. С. 35 — 38.
4. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315, № 12. С. 281 — 283.
5. Колесов А. Ю. // Мат. заметки. 1992. Т. 51, вып. 2. С. 59 — 65.
6. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. // Фунд. и прикл. математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 207 — 220.
7. Колесов А. Ю. // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 3. С. 141 — 158.
8. Витт А. А. // Журн. техн. физики. 1936. Т. 6, № 9. С. 1459 — 1479.
9. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 7. С. 77 — 96.
10. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 1. С. 93 — 102.
11. Нагумо Д., Шимура М. // ТИРИ. 1961. Т. 49, № 8.
12. Bryton R. K. // Quarterly Applied Mathematics. 1967. Vol. 24, N 4.
13. Колесов Ю. С., Швицра Д. И. // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1977. С. 27 — 48.
14. Колесов Ю. С., Майоров В. В. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778 — 1788.
15. Биркган С. Е. // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1983. С. 3 — 15.
16. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 4. С. 488 — 499.
17. Колесов Ю. С. // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 3. С. 121 — 136.
18. Колесов Ю. С. // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 10. С. 57 — 72.
19. Уткин Г. М. Автоколебательные системы и волновые усилители. М., 1978.
20. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. М., 1984.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10 апреля 1997 г.