

© Ивановский Л.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-xxxx-xx-xx-xx-xx

УДК xxx

## Динамические свойства одной импульсной задачи Коши

Леонид Игоревич ИВАНОВСКИЙ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, 14

<sup>2</sup> Объединенный институт математики и компьютерных наук им А.Н. Колмогорова

150008, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Союзная, 144

**Аннотация.** Рассматривается полносвязная ассоциация сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной системы. Для динамической системы с импульсными воздействиями изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения в зависимости от различных значений параметров. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов.

Данная работа состоит из пяти частей. Во введении приводится математическая модель функционирования отдельного нейрона, а также переход от сети нейронов с мембранными потенциалами к модифицированной ассоциации электрических синапсов. Вторая часть посвящена постановке задачи. В ней большое внимание уделяется теоретическим выкладкам, позволяющим перейти от анализа полносвязной ассоциации сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием к асимптотическому исследованию специального двумерного отображения. В третьей части рассказывается об особенностях численного исследования для поиска неподвижных точек релаксационного отображения. В четвертой части представлены результаты проведенного численного исследования. Здесь рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве двумерного отображения на основе теории бифуркаций. Полученные в результате анализа релаксационного отображения неподвижные точки позволяют найти асимптотические устойчивые решения исходной задачи. В заключении подводятся итоги выполненных исследований.

**Ключевые слова:** фазовые портреты, устойчивые режимы, бифуркации

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00209)

**Для цитирования:** *Ивановский Л.И.* Динамические свойства одной импульсной задачи Коши // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. xx. № xx. С. xx–xx. DOI 10.20310/2686-9667-xxxx-xx-xx-xx-xx.

© L. I. Ivanovsky, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-xxxx-xx-xx-xx-xx

## Dynamic properties of one impulse Cauchy problem

Leonid I. IVANOVSKY<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> P.G. Demidov Yaroslavl State University

14 Sovetskaya St., Yaroslavl 150003, Russian Federation

<sup>2</sup> A.N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science

144 Soyuznaya St., Yaroslavl 150008, Russian Federation

**Abstract.** Let us consider a fully connected association of singularly perturbed differential equations with delay presented as a mathematical model of an impulse system. For the dynamic system with impulse influences there were researched tasks of existence, stability and asymptotic representation of periodic solutions based on bifurcation analysis of special two-dimensional mapping which depends on various parameters. The main focus of this research was on the number of coexisting stable regimes.

This work consists of five parts. In the introduction there are presented a mathematical model of functioning of one neuron as well as the transition from the network of neurons with membrane potentials to the modified association of electric synapses. The second part is devoted to the problem definition. In this part much attention is paid to mathematical manipulations that allow to go from the analysis of fully connected association of singularly perturbed oscillators with delay to the asymptotic research of one specific two-dimensional mapping. In the third part it is narrated about peculiarities of numerical research how to search for stable points of relaxational mapping. The fourth part presents the results of numerical research. Herein we describe bifurcations in the phase space of special two-dimensional map. The fixed points obtained during the analysis of relaxation mapping allow to find asymptotically stable solutions of the original system. In the conclusion there are summed up all results of implemented research.

**Keywords:** phase portraits, stable regimes, bifurcations

**Acknowledgements:** This research was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00209)

**Mathematics Subject Classification:** 34D05, 34D20, 65L06, 65L11

**For citation:** Ivanovsky L.I. Dinamicheskie svoystva odnoy impulsnoy zadachi Koshi [Dynamics of one impulse Cauchy problem]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. xx, no. xx, pp. xx–xx. DOI 10.20310/2686-9667-xxxx-xx-xx-xx-xx. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## 1. Введение

Рассмотрим математическую модель функционирования отдельного нейрона, представляющую собой скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вида (см. [1])

$$\dot{u} = \lambda(-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u))u \quad (1.1)$$

для мембранного потенциала  $u = u(t) > 0$  и времени  $t \geq 0$ . Для дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) можно поставить начальную задачу Коши. В качестве начальной функции будем брать функцию  $\varphi(t) \in C[-1, 0]$ . Для параметра  $\lambda$ , характеризующего скорость протекания электрических процессов, а также величин  $\alpha$  и  $\beta$  выполняются условия

$$\lambda \gg 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Гладкие функции  $f(u), g(u)$  будем считать принадлежащими классу  $C^2(\mathbb{R}_+)$ . Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < \beta g(u) < \alpha, \quad f(0) = g(0) = 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В статьях [2–4] было показано, что модифицированное логистическое уравнение (1.1) при всех  $\lambda \gg 1$ , допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) > 0, \quad u_*(0, \lambda) \equiv 1 \quad (1.4)$$

периода  $T_*(\lambda)$ , удовлетворяющего предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad (1.5)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

для которых величина  $T_0$  определяет главную часть периода устойчивого цикла (1.4), выражение  $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$ , а  $x_0(t)$  —  $T_0$ -периодическая функция, которая задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t, & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha), & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta, & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Предположим, что имеется сеть из  $m \geq 2$  нейронов с мембранными потенциалами  $u_j = u_j(t) > 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ , каждый из которых взаимодействует с любым другим. Согласно [5, с. 60–65] связь между нейронами с номерами  $j$  и  $s$ ,  $j \neq s$  осуществляется посредством тока проводимости  $I_{j,s}^{syn}$ , который в силу закона Ома задается равенством

$$I_{j,s}^{syn} = d(u_s - u_j), \quad d > 0. \quad (1.7)$$

Одна из возможных моделей полносвязной ассоциации электрических синапсов, основанная на модели из статьи [6], может быть представлена системой вида

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m (u_s - u_j) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В статье [6] была приведена модификация данной системы. Ее суть состояла в переходе от равенства (1.7) к соотношению вида

$$I_{j,s}^{syn} = \sigma \left( \frac{u_s}{u_j} \right), \quad d > 0,$$

где функция связи  $\sigma(u) \in C^3(\mathbb{R}_+)$ , ограничивающая значения переменных  $u_j$ , удовлетворяет требованиям:

$$\begin{aligned} \sigma(u) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [0, 1), \quad \sigma(0) &= -1, \\ \sigma(u) > 0 \quad \text{при} \quad u > 1, \quad \sigma(1) &= 0, \quad \sigma'(1) > 0, \\ \sigma(u) - \delta, u\sigma'(u), u^2\sigma''(u), u^3\sigma'''(u) &= O(1/u) \quad \text{при} \quad u \rightarrow +\infty, \quad \delta = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Что же касается соответствующей ассоциации нейронов с синаптической электрической связью, то в данном случае она приобретает вид

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \sigma \left( \frac{u_s}{u_j} \right) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

В статье [6] отмечены два отличия нового подхода к моделированию электрических синапсов от общепринятого. Во-первых при переходе от отдельного нейрона к соответствующей сети сохраняется вольтерровская структура уравнений, а во-вторых, соблюден так называемый закон насыщающих проводимостей, суть которого заключается в выполнении условий (1.3), (1.8) для нелинейных функций. Тем самым, модели отдельного нейрона (1.1) и нейронной сети (1.9) базируются на одних и тех же принципах, сформулированных в работе [1]. Отметим, что под вольтерровской структурой уравнений (1.9) здесь подразумевается возможность записи их правых частей в виде произведения соответствующей зависимой переменной и некоторой неособой в нуле функции, что позволяет гарантировать положительность решений с положительными начальными условиями.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим ассоциацию сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием (1.9), моделирующую электрическое взаимодействие нейронов по принципу «каждый с каждым», предложенную в статье [6]. Здесь для параметров  $\lambda, \alpha, \beta$  системы (1.9) выполняются условия (1.2), а для гладких функций  $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  выполняются условия (1.3).

В качестве конкретного примера функции связи, удовлетворяющей требованиям (1.8), выберем (см. [6])

$$\sigma(u) = \frac{\delta(u-1)}{u+\delta}, \quad \delta \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

В силу равенства  $\sigma(1) = 0$  система (1.9) допускает так называемый однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (2.1)$$

где  $u_*(t, \lambda)$  — устойчивое периодическое решение уравнения (1.1) периода  $T_*(\lambda)$ , удовлетворяющего предельному соотношению (1.5). В статье [6] показано, что периодическое

решение  $u_*(t, \lambda)$  с периодом  $T_*(\lambda)$  асимптотически близко при  $\lambda \gg 1$  к величине  $e^{\lambda x_0(t)}$ , где  $x_0(t)$  —  $T_0$ -периодическая функция, которая задается равенствами (1.6).

Не проводя исследования всех периодических режимов системы (1.9), ограничимся рассмотрением лишь тех из них, что располагаются в некоторой окрестности однородного цикла (2.1). При нахождении таких режимов можно применить специальные асимптотические методы, разработанные и примененные в статьях [1–4, 7, 8] для аналогичных (1.9) систем из трех осцилляторов вида (см. [9–14])

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

с различными значениями параметров  $a_1, a_2$  и краевыми условиями на  $u_0, u_4$ : а)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$ , б)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$  (цепочка и кольцо диффузионно связанных осцилляторов), с)  $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$  (кольцо однонаправленно связанных осцилляторов).

Для системы (1.9), как и для системы (2.2) в статьях [3, 4], выполним замены

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1, \quad (2.3)$$

где  $x, y_1, \dots, y_{m-1}$  — новые переменные. Систему (1.9) можно свести к системе

$$\dot{x} = \varepsilon d \sum_{s=2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=1}^{s-1} y_r\right)\right) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j = & d \sum_{s=1}^j \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^j y_r\right)\right) + d \sum_{s=j+2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\right)\right) - d \sum_{s=1}^{j-1} \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\right)\right) - \\ & - d \sum_{s=j+1}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\right)\right) + G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

для которой функции  $F, G$  задаются равенствами

$$\begin{aligned} F(x, u, \varepsilon) = & -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \\ G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) = & \\ = & \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[ f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right)\right) \right] + \\ & + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) \right], \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим данную задачу в случае трех осцилляторов ( $m = 3$ ). Зафиксируем постоянную  $\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < \min(1, (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1))$  и на отрезке  $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$  обозначим через

$$y_1^0(t, z), y_2^0(t, z), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

компоненты решения импульсной задачи Коши (см. [4])

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = d(\sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{y_1}) + \sigma(e^{y_2}) - \sigma(e^{y_1+y_2})), \\ \dot{y}_2 = d(\sigma(e^{-y_2}) - \sigma(e^{y_2}) + \sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{-y_1-y_2})). \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} y_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \\ y_j(1+0) &= y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0), \\ y_j(\alpha+0) &= (1 + \beta) y_j(\alpha-0), \\ y_j(\alpha+1+0) &= y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$(y_1, y_2)|_{t=-0} = z.$$

Рассмотрим затем оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения импульсной системы (2.6), (2.7)

$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1^0(T_0) \\ y_2^0(T_0) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

действующее из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Для отображения (2.8) справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1** (см. [6], теорема 1). *Любой гиперболической неподвижной точке  $z = z_*$  отображения (2.8) в системе (2.4), (2.5) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  соответствует релаксационный цикл*

$$(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon)), \quad x(0, \varepsilon) \equiv 0$$

периода  $T(\varepsilon)$ , устойчивое и неустойчивое многообразия которого определяются соответствующими многообразиями этой точки. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j^0(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |y_j(t, \varepsilon)| \leq M, \quad j = \overline{1, m-1},$$

где  $x_0(t)$  – функция, определяемая по формуле (1.6),  $M = \text{const} > 0$ , а множество  $\Sigma(\varepsilon)$  представляет собой отрезок  $[-\sigma_0, T_0 + \sigma_0]$  с выброшенными интервалами  $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta), (\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta), (\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$ , где  $\delta = \text{const} \in (0, 1)$ .

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено в статьях [3, 7]. Из теоремы следует, что для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1.9) и системы (2.6), (2.7) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (2.8). Они и являлись объектами исследования.

Асимптотический анализ отображения (2.8), выполненный в статье [6], позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра  $d$  оно совпадает с оператором сдвига за время  $t = 1$  по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{z}_1}{dt} = 2 - \frac{C \exp \tilde{z}_1}{1 + \exp \tilde{z}_1}, \quad \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = \frac{C \exp(-\tilde{z}_2)}{1 + \exp \tilde{z}_2} - 2,$$

где  $C$  – константа, зависящая от значений параметров  $\alpha, \beta$ . Исходя из этого, отображение (2.8) имеет только одно устойчивое состояние равновесия  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ . При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений  $d$ . Ему соответствует однородный цикл системы (1.9).

Задача исследования состояла в определении таких значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых отображение (2.8) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (2.8). Поскольку описать динамические свойства отображения (2.8) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось на основе сочетания аналитических методов и численных экспериментов. В зависимости от различных значений начальных параметров изучались вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (2.8).

### 3. Поиск неподвижной точки релаксационного отображения

Расчет координат неподвижных точек отображения (2.8) выполняется следующим образом: вычисления начинаются из точек вида  $(y_1(-0), y_2(-0))^T$  координаты которых представляют собой начальные условия системы (2.6), (2.7). Начальным моментом времени здесь считается величина  $t = -0$ . Стартовые точки отображения (2.8) варьировались по ходу проведения численных исследований, оставаясь при этом в окрестности нулевого состояния равновесия.

Для каждой начальной точки отображения (2.8), итерационно, с фиксированным шагом  $h$ , при помощи метода Рунге-Кутты подсчитывались координаты следующей точки. Этот метод имеет четвертый порядок точности, т.е. ошибка на каждом интервале подсчета будет иметь порядок  $O(h^5)$ . Вычисления такого рода продолжаются до тех пор, пока не будет получена так называемая конечная точка отображения (2.8), в момент времени  $t = T_0$ . Однако стоит отметить, что для  $t = 0, 1, \alpha, \alpha + 1$  в системе (1.9) выполняются условия соответствующего импульсного воздействия. Как следствие, координаты точки в этих случаях подсчитываются по формулам (2.7).

Далее происходит проверка стационарности для каждой полученной конечной точки отображения (2.8). Если ее координаты отличаются от координат начальной точки не более чем на заранее заданное, достаточно малое число, то посчитанное ранее состояние отображения  $(y_1(T_0), y_2(T_0))^T$  считается устойчивым. В противном же случае, конечная точка отображения (2.8) считается начальной и для нее осуществляется та же последовательность операций, которая была описана ранее.

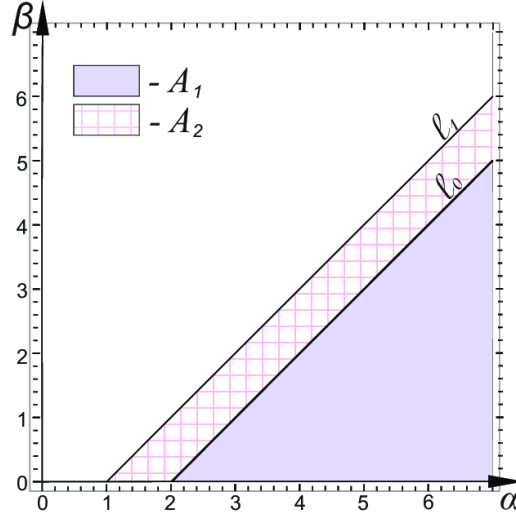
Для каждой начальной точки отображения (2.8) расчеты заканчивались при достижении достаточно большого числа описанных выше итераций получения конечной точки отображения (2.8) или при обнаружении неподвижного состояния равновесия.

### 4. Результаты численного исследования

Расчет неподвижных точек релаксационного отображения (2.8) зависит не только от выбора начальной точки и значений  $\alpha, \beta$ , но также и от величины  $\delta$ , являющейся параметром функции  $\sigma(u)$ .

В результате проведенных численных исследований, для  $\delta \in (2 + \sqrt{3}, +\infty)$  на коорди-

натной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  были выделены области  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$ ,  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$ , границами которых являются прямые  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ ,  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

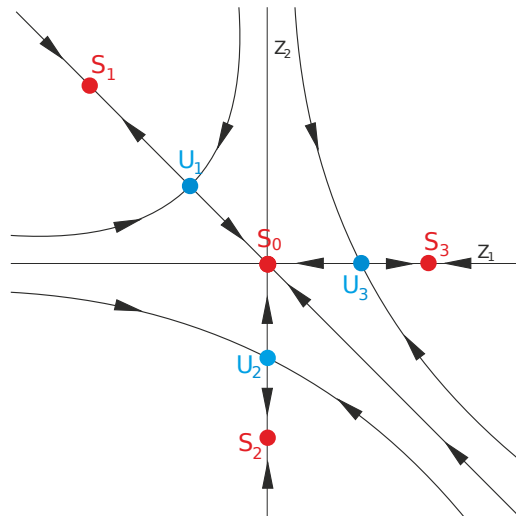


**Рис. 1.** Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей (в статьях [11–14] были продемонстрированы результаты аналогичных исследований для систем вида (2.2) с различными значениями параметров  $a_1, a_2$  и краевыми условиями на  $u_0, u_4$ ).

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 3.6$  и  $\beta = 0.4$ . При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0.025$  отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки ( $S_0, S_1, S_2, S_3$ ) и три неустойчивые ( $U_0, U_1, U_2$ ). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2.



**Рис. 2.** Фазовый портрет отображений при  $d < d_1$

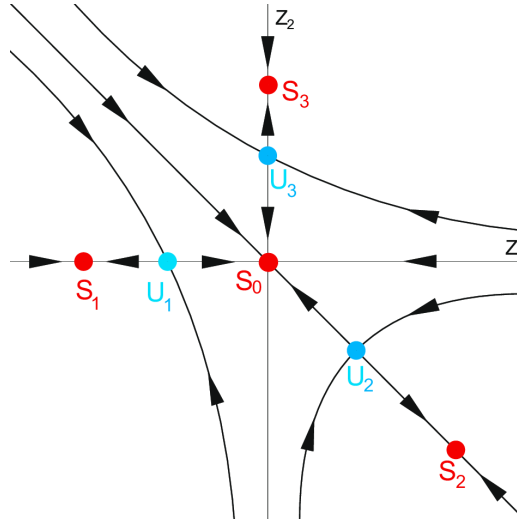


2. При  $d = d_1$  устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , сливаясь с седлами  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_1$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние  $S_0$ .

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 1.9$  и  $\beta = 0.1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (2.8) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0.002$  отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки ( $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ) и три неустойчивые ( $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 3.

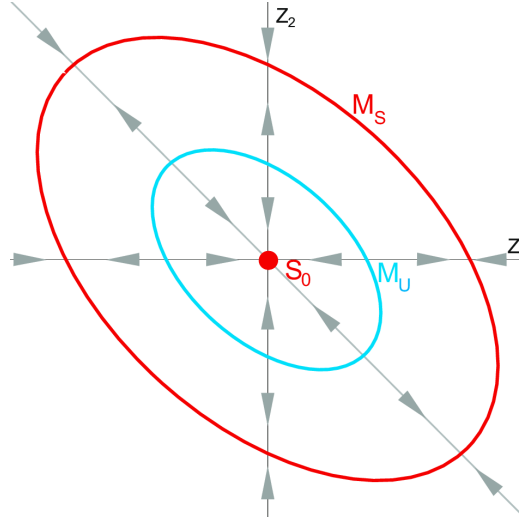


**Рис. 3.** Фазовый портрет отображений при  $d < d_1$

2. При  $d = d_1$  устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , сливаясь с седлами  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_1$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние  $S_0$ .

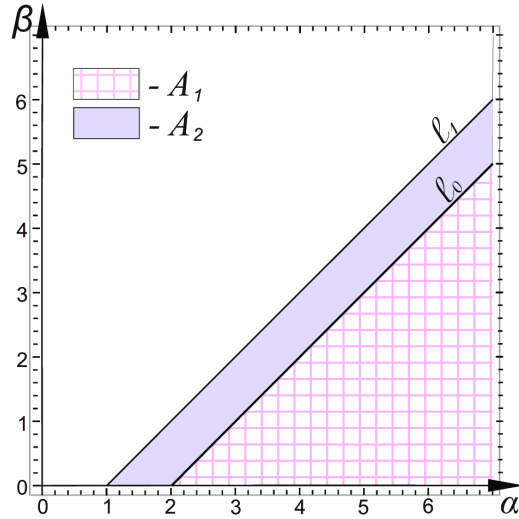
Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых  $(\alpha, \beta) \in A_2$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

Различия фазовых портретов, представленных на рис. 2 и 3, заключаются лишь в местоположении неустойчивых седел  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ , а также устойчивых узлов  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования, при зафиксированных  $\alpha$  и  $d$  и изменении значения  $\beta$ , на прямой  $l_1$  обнаруживалось существование двух многообразий: неустойчивого  $M_U$  и устойчивого  $M_S$  (см. рис. 4).



**Рис. 4.** Фазовый портрет отображения для параметров  $(\alpha, \beta) \in l_1$

В том случае, если параметр  $\delta \in (0, 2 - \sqrt{3})$ , согласно результатам проведенных численных исследований, на координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  также можно выделить области  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$ ,  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$ , границами которых являются прямые  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ ,  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 4. Отметим, что выделенные области  $A_1, A_2$  значений параметров  $(\alpha, \beta)$  в точности определяли сценарии аналогичных фазовых перестроек, описанных выше.



**Рис. 4.** Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Полученные в результате анализа отображения (2.8) его неподвижные точки позволяют найти асимптотику решений системы (2.6), (2.7). На основе решений импульсной системы (2.6), (2.7), учитывая замену (2.3), получаем асимптотические устойчивые решения исходной задачи (1.9).

## 5. Заключение

Для полносвязной ассоциации сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной систе-

мы, были изучены вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений с помощью бифуркационного анализа специального двумерного отображения, построенного в зависимости от различных значений параметров. Для динамической системы с импульсными воздействиями, полученной в результате преобразований полносвязной ассоциации осцилляторов, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно единовременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

### References

- [1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи мат. наук*, **70**:3 (2015), 3–76; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Mathematical Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [2] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.
- [3] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.
- [4] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.
- [5] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Либроком, М., 2009. [S. A. Kashchenko, V. V. Mayorov, *Modeli volnovoy pamyati*, Librokom, M., 2009 (In Russian)].
- [6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, “Об одном способе математического моделирования электрических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:7 (2022), 1–15; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, “On a Method of Mathematical Modeling of Electrical Synapses”, *Differential Equations*, **58**:7 (2022), 853–868.
- [7] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *Успехи мат. наук*, **67**:2 (2012), 109–156; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.
- [8] Д. С. Шапин, В. И. Некоркин, “Параметрически возбуждаемые хаотические спайковые последовательности и информационные аспекты в ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо”, *Письма в Журн. эксп. и теор. физики*, **113**:6 (2021), 415–420; англ. пер.: D. S. Shchapin, V. I. Nekorkin, “Parametrically Excited Chaotic Spike Sequences and Information Aspects in an Ensemble of FitzHugh–Nagumo Neurons”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, **113**:6 (2021), 418–422.
- [9] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями”, *Динамические системы*, **6**:2 (2016), 113–132. [L. I. Ivanovsky, “Stable modes of dynamical systems with impulses”, *Dynamic Systems*, **6**:2 (2016), 113–132 (In Russian)].
- [10] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Науках. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 2*, 2015, 121–132. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 2. Proceedings*, 2015, 121–132 (In Russian)].

- [11] Л. И. Ивановский, “Динамические свойства одного класса импульсных систем”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Наук. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 3*, 2015, 126—131. [L. I. Ivanovsky, “Dynamic properties of one class of impulse systems”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 3. Proceedings*, 2015, 126—131 (In Russian)].
- [12] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы одного класса динамических систем с импульсными воздействиями”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Наук. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 4*, 2017, 35—42. [L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of one class of dynamic systems with impulse influences”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 4. Proceedings*, 2015, 35—42 (In Russian)].
- [13] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Модел. и Анализ. Информ. Систем*, **21**:6 (2014), 179—181. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Phase reconstructions of one two-dimensional dynamical system with impulses”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21**:6 (2014), 179—181 (In Russian)].
- [14] L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of dynamic systems with impulsive influences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:5 (2017), 921—925.

#### Информация об авторах

**Ивановский Леонид Игоревич**, аспирант, младший научный сотрудник. Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Объединенный институт математики и компьютерных наук им А.Н. Колмогорова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: leon19unknown@gmail.com  
**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Ивановский Леонид Игоревич  
 E-mail: leon19unknown@gmail.com

Поступила в редакцию 00.00.2022 г.  
 Поступила после рецензирования 00.00.2022 г.  
 Принята к публикации 00.00.2022 г.

#### Information about the authors

**Leonid I. Ivanovsky**, Postgraduate Student, Junior Research Assistant. P.G. Demidov Yaroslavl State University, A.N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: leon19unknown@gmail.com  
**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Leonid I. Ivanovsky  
 E-mail: leon19unknown@gmail.com

Received 00.00.2022  
 Reviewed 00.00.2022  
 Accepted for press 00.00.2022