Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одной краевой задачи с дополнительной внутренней связью

Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова
Объединенный институт математики и компьютерных наук им. А.Н. Колмогорова

Система стабилизации температуры

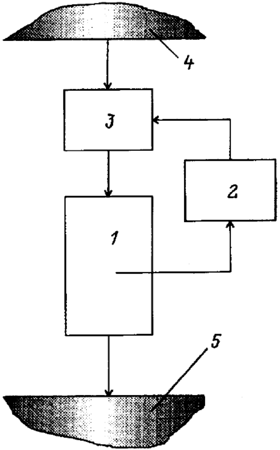
$$\dot{T} = T'', \tag{1}$$

$$T(0,t) = 0, \quad T'(1,t) = f(1 - T(x_0,t))\sigma(1 - T(x_0,t)), \tag{2}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1]$$

Rudyi A.S. Theoretical Fundamentals of the Method for Thermal Diffusivity Measurements from Auto-Oscillation Parameters in a System with a Thermal Feedback // International Journal of Thermophysics, 1993, vol. 14, no. 1, pp. 159 – 172.

Физическая модель системы стабилизации



1) Распределенный объект управления, 2) петля обратной связи, 3) контроллер, 4) источник энергии, 5) термостат

Система стабилизации температуры

$$f \equiv \left(1 - T\left(\frac{1}{2}, t\right)\right)^2$$

Rudyi A.S. Self-excited oscillations in a parabolic system with nonlinear external feedback // Tech. Phys., 1997, vol.42, no. 5, pp. 561 – 563.

Система регулирования температуры

$$\dot{T} = \beta T'' + f(T), \tag{3}$$

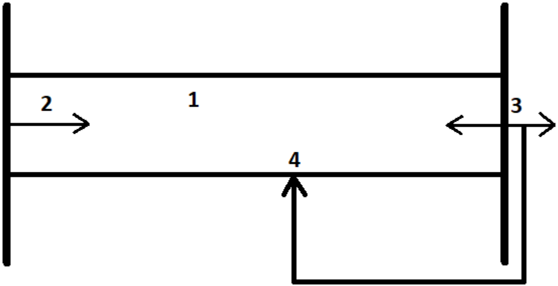
$$T'(0,t) = 0, \qquad T'(1,t) = \alpha T(x_0,t). \tag{4}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1]$$

$$\beta > 0, \quad x_0 \in [0,1]$$

$$\tau = \beta t$$

Физическая модель системы регулирования



1) стержень, 2) направление распространения тепла от источника, 3) точка выхода тепла, 4) точка измерения температуры на стержне, которая определяет обратную связь

Моделирование биологического процесса

$$\dot{N} = \beta\, N'' + r(1 - N^2)N, \tag{5}$$

$$N'(0,t) = 0, \qquad N'(1,t) = \alpha\, N(x_0, t - \tilde{T}), \tag{6}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1]$$

$$\tilde{T} > 0, \quad x_0 \in [0,1]$$

Краевая задача с отклонением в краевом условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u, \tag{7}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t) + \beta u^3(x_0,t), \tag{8}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0,1).$$

Ивановский Л.И. Динамика одной системы диффузионно связанных дифференциальных уравнений с дополнительной внутренней связью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2020, № 3 (55). С. 15–30.

Краевая задача с дополнительной внутренней связью

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{9}$$

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t), \tag{10}$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0,1).$$

Цепочка уравнений с диффузионным взаимодействием

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j - u_j^3, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{11}$$

$$u_0 = u_1, \ u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{12}$$

$$u_j = u_j(t), \quad t \geqslant 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Линеаризованная в нуле система уравнений

$$\dot{u}_j = N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \gamma u_j, \qquad j = \overline{1, N}, \tag{13}$$

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N + \frac{\alpha}{N} u_k, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{14}$$

Построение характеристического уравнения

$$u_j = e^{\lambda t} \operatorname{ch} \delta x_j,$$

$$x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

- $j \leqslant N - 1:$

$$\delta = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda}}{2N}. \tag{15}$$

- $j = N:$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma + \lambda} \operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta x_k}. \tag{16}$$

Потеря устойчивости нулевого решения

- $\lambda = 0:$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\,\operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_k},. \tag{17}$$

$$\delta_u = 2N\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}$$

- $\lambda = \pm i\omega:$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\,\operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_k}, \tag{18}$$

$$\delta_c = 2N\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}.$$

$$N = 50$$

Предельный случай

$$N \to \infty : \qquad \delta \to \sqrt{-\gamma + \lambda}.$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\gamma+\lambda}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma+\lambda}}{\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma+\lambda}\,x_0}. \tag{19}$$

- $\lambda = 0:$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma}}{\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma}x_0}.$$

- $\lambda = \pm i\omega:$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma+i\omega}\ \mathrm{sh}\,\sqrt{-\gamma+i\omega}}{\mathrm{ch}\,\sqrt{-\gamma+i\omega}x_0}.$$

Построение зависимости $\alpha_c(\gamma)$

- $\gamma = 0,\ x_0 = 0:$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\ y + \mathrm{th}\ y = 0, \\ \alpha_c = y(\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y), \end{cases} \qquad (20)$$

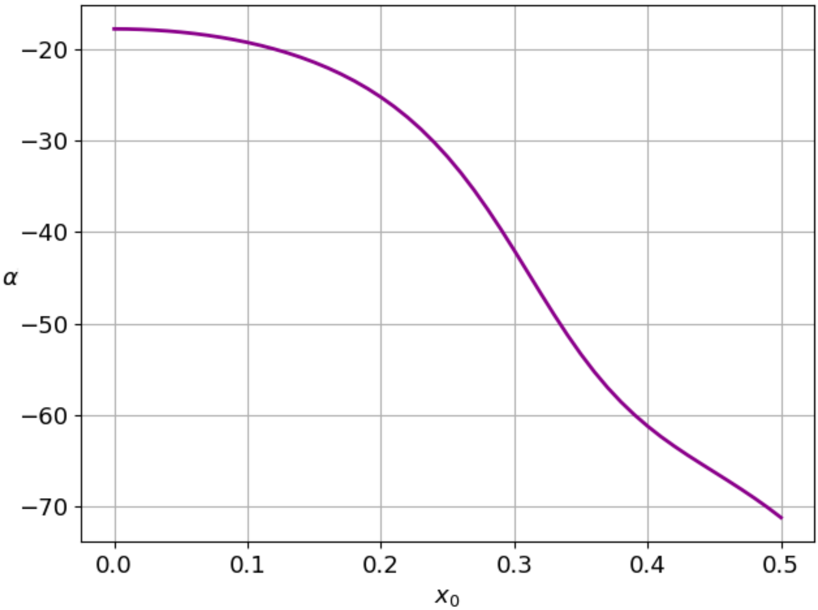
$$y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

- $\gamma = 0,\ x_0 \neq 0:$

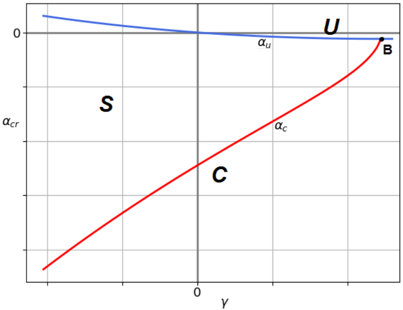
$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} y \cos y + \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{sh} y \cos y - \operatorname{ch} y \sin y} - \mathrm{tg}\, y x_0 \, \mathrm{th}\, y x_0 = 0, \\ \alpha_c = \dfrac{y \operatorname{sh} y \cos y - y \operatorname{ch} y \sin y}{\operatorname{ch} y x_0 \cos y x_0}. \end{cases} \qquad (21)$$

- $\gamma \neq 0,\ x_0 \neq 0.$

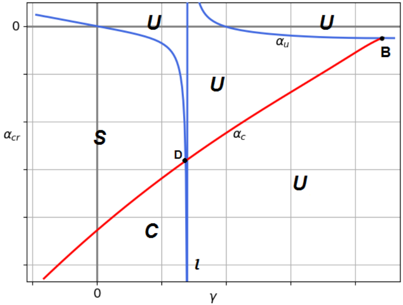
Численные результаты: $\alpha_c(x_0)$ при $\gamma = 0$



Визуализация критических зависимостей



а) $k = 1$ ($x_0 = 0.01$)

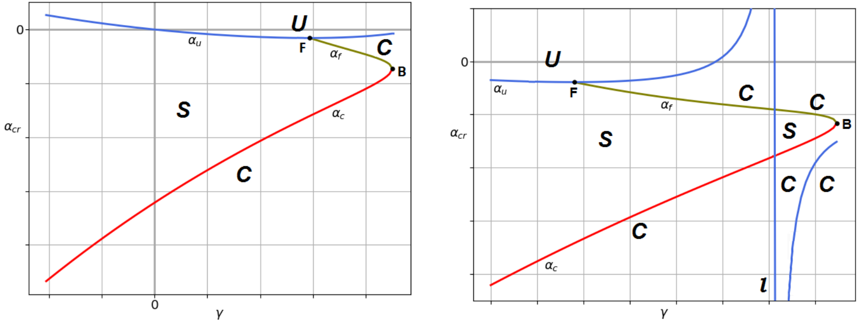


б) $k = 26$ ($x_0 = 0.51$)

$$B = (\gamma_*, \alpha_*) : \quad \gamma_* > 0, \ \alpha_* < 0$$

$$D = (\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) : \quad 0 < \hat{\gamma} < l, \ \hat{\alpha} < 0$$

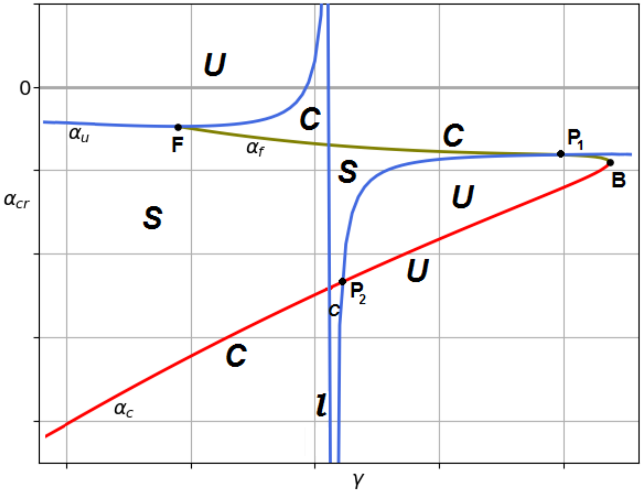
Визуализация критических зависимостей



а) $k = 22\ (x_0 = 0.43)$ б) $k = 24\ (x_0 = 0.47)$

$$F = (\overline{\gamma}, \overline{\alpha}) : \quad 0 < \overline{\gamma} < \gamma_*,\ 0 > \overline{\alpha} > \alpha_*$$

Визуализация критических зависимостей



$$k = 25 \ (x_0 = 0.49)$$

$$P_1 = (\gamma_1, \alpha_1), P_2 = (\gamma_2, \alpha_2): \quad \gamma_* > \gamma_1 > \gamma_2 > l$$

$$\Gamma_u = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leqslant k \leqslant 17, \\ \overline{\gamma}, & 18 \leqslant k \leqslant 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leqslant k \leqslant 50. \end{cases} \tag{22}$$

$$\Gamma_f = \begin{cases} \gamma_*, & 18 \leqslant k \leqslant 24, \\ \gamma_1, & k = 25. \end{cases} \tag{23}$$

$$\Gamma_c = \begin{cases} \gamma_*, & 1 \leqslant k \leqslant 24, \\ \gamma_2, & k = 25, \\ \hat{\gamma}, & 26 \leqslant k \leqslant 50. \end{cases} \tag{24}$$

$$\frac{\sqrt{-\gamma}\ \operatorname{sh}\delta_u}{\operatorname{ch}\delta_u x_{25}} - \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}\ \operatorname{sh}\delta_c}{\operatorname{ch}\delta_c x_{25}} = 0 \tag{25}$$

Лемма

Для всех значений $\gamma \leqslant \Gamma_u$, где Γ_u вычисляется по формуле (22) и $\gamma_1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_2$, где γ_1, γ_2 являются корнями трансцендентного уравнения (25), удовлетворяющими условию $\gamma_* > \gamma_1 > \gamma_2 > l$, критическая зависимость $\alpha_u(\gamma)$, рассчитываемая по формуле (17), позволяет выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением системы (11), (12) и области с двумя состояниями равновесия в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Лемма

Для всех значений $\overline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \Gamma_f$, где Γ_f вычисляется по формуле (23), и $\gamma \leqslant \Gamma_c$, где Γ_c вычисляется по формуле (24), критические зависимости $\alpha_f(\gamma)$ и $\alpha_c(\gamma)$, рассчитываемые из уравнения (18), позволяют выделить область параметров (γ, α) с устойчивым нулевым решением системы (11), (12) и области, для которых наблюдается наличие цикла в малой окрестности неустойчивого нулевого решения.

Локальный анализ системы

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{j,0} + \varepsilon u_{j,1} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,2} + O(\varepsilon^2), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{26}$$

$$u_j = u_j(s), \quad s = \varepsilon t,$$

$$\varepsilon = |\alpha - \alpha_{cr}|, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

- $\lambda = 0: \quad \varepsilon = \alpha - \alpha_u,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \tag{27}$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \le k < N \tag{28}$$

$$u_{j,0} = \rho(s)\,\mathrm{ch}\,\delta_u x_j,$$

$$\alpha_u = \frac{\sqrt{-\gamma}\ \mathrm{sh}\,\delta_u}{\mathrm{ch}\,\delta_u x_k}, \quad \delta_u = 2N\,\mathrm{arsh}\,\frac{\sqrt{-\gamma}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Случай дивергентной потери устойчивости

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u^3_{j,2}, \tag{29}$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_u}{N} u_{k,0}, \tag{30}$$

$$u_{j,2} = \operatorname{ch} \delta_u x_j.$$

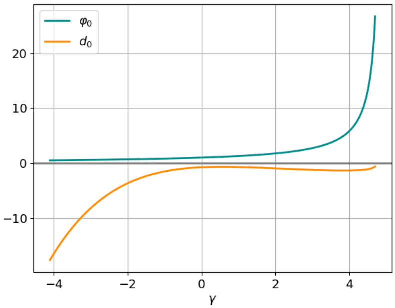
Случай дивергентной потери устойчивости

$$\rho' = \phi_0\rho + d_0\rho^3, \tag{31}$$

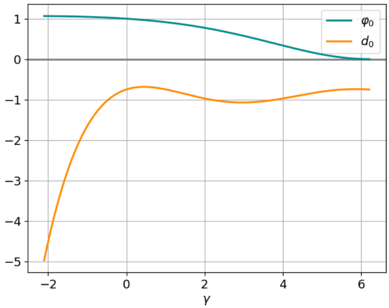
$$\phi_0 = \frac{2\delta_u \operatorname{ch}\delta_u x_k}{\delta_u \operatorname{ch}\delta_u + \operatorname{sh}\delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh}\delta_u x_k}, \tag{32}$$

$$d_0 = \frac{3\delta_u^2 \operatorname{sh}3\delta_u - \alpha_u\delta_u \operatorname{ch}3\delta_u x_k}{16(\delta_u \operatorname{ch}\delta_u + \operatorname{sh}\delta_u - \alpha_u x_k \operatorname{sh}\delta_u x_k)} - \frac{3}{4}. \tag{33}$$

Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

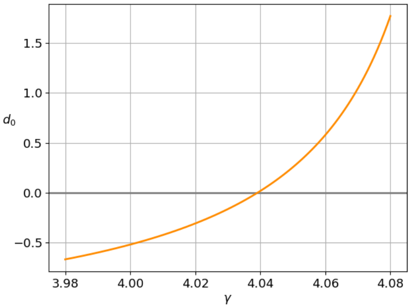


(а) $k = 17$ $(x_0 = 0.33)$

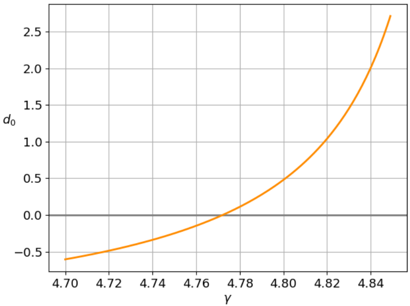


(б) $k = 32$ $(x_0 = 0.63)$

Графики $d_0(\gamma)$

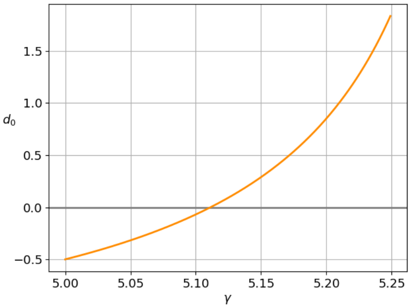


(а) $k = 1$ $(x_0 = 0.01)$, $\gamma_* \approx 4.116$

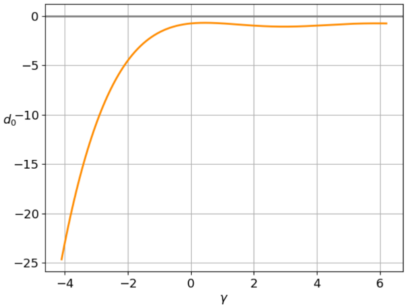


(б) $k = 17$ $(x_0 = 0.33)$, $\gamma_* \approx 4.896$

Графики $d_0(\gamma)$



(а) $k = 20$ $(x_0 = 0.39)$, $\quad \overline{\gamma} \approx 5.375$



(б) $k = 32$ $(x_0 = 0.63)$, $\quad l \approx 6.217$

Случай колебательной потери устойчивости

- $\lambda = \pm i\omega : \quad \varepsilon = \alpha_c - \alpha,$

$$\dot{u}_{j,0} = N^2(u_{j+1,0} - 2u_{j,0} + u_{j-1,0}) + \gamma u_{j,0}, \tag{34}$$

$$u_{0,0} = u_{1,0}, \quad u_{N+1,0} = u_{N,0} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \leq k < N \tag{35}$$

$$u_{j,0} = z(s) e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{\operatorname{ch} \delta_c x_j},$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega} \operatorname{sh} \delta_c}{\operatorname{ch} \delta_c x_k}, \quad \delta_c = 2N \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{-\gamma + i\omega}}{2N}, \quad x_j = -\frac{1}{2N} + \frac{j}{N}.$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$\dot{u}_{j,2} + \frac{\partial u_{j,0}}{\partial s} = N^2(u_{j+1,2} - 2u_{j,2} + u_{j-1,2}) + \gamma u_{j,2} - u_{j,2}^3, \qquad (36)$$

$$u_{0,2} = u_{1,2}, \quad u_{N+1,2} = u_{N,2} + \frac{\alpha_c}{N} u_{k,0}, \qquad 1 \leq k < N, \qquad (37)$$

$$u_{j,2} = e^{i\omega t} \operatorname{ch} \delta_c x_j .$$

Случай колебательной потери устойчивости

$$z' = (\phi_0 + i\psi_0)z + (d_0 + ic_0)z|z|^2, \tag{38}$$

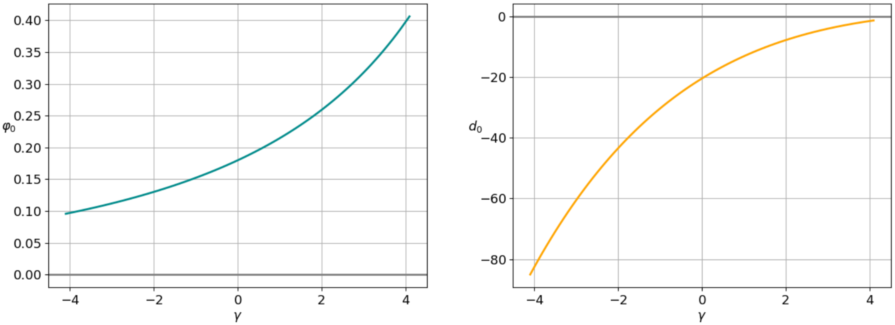
$$\phi_0 = -\mathsf{Re}\left(\frac{2\delta_c \operatorname{ch}\delta_c x_k}{\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k}\right),$$

$$d_0 = \mathsf{Re}\left(\frac{3\delta_c(G(\chi) + G(\eta) + 2G(\overline{\delta_c}))}{2(\delta_c \operatorname{ch}\delta_c + \operatorname{sh}\delta_c - \alpha_c x_k \operatorname{sh}\delta_c x_k)}\right),$$

$$\chi = \delta_c + 2\mathsf{Re}\,\delta_c, \qquad \eta = \delta_c + 2\mathsf{Im}\,\delta_c,$$

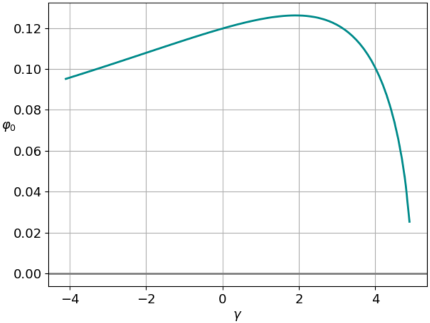
$$G(a) = \frac{\alpha_c \operatorname{ch} a x_k - a \operatorname{sh} a}{a^2 - \delta_c^2}.$$

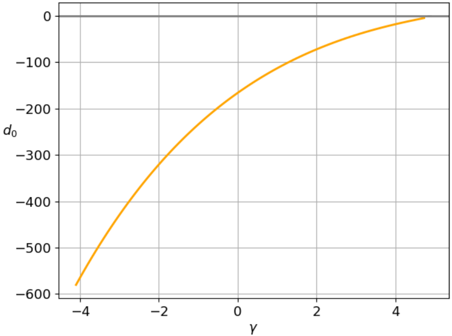
Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$



$$k = 1 \ (x_0 = 0.01), \quad \alpha_{cr} = \alpha_c$$

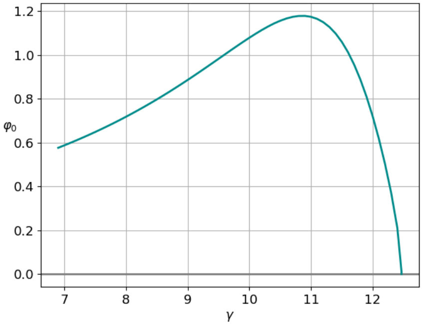
Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$

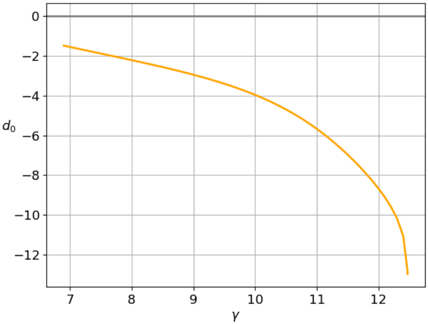




$$k = 17 \; (x_0 = 0.33), \quad \alpha_{cr} = \alpha_c$$

Графики $\phi_0(\gamma)$ и $d_0(\gamma)$





$$k = 24\ (x_0 = 0.47), \quad \alpha_{cr} = \alpha_f$$

Теорема

Для системы дифференциальных уравнений (11), (12) $\exists\, \tilde{\gamma} < \gamma_* :\ \gamma < \tilde{\gamma}$ нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость дивергентным способом.

Теорема

Для системы дифференциальных уравнений (11), (12) $\forall\, \gamma < \gamma_*$ нулевое состояние равновесия теряет свою устойчивость колебательным способом.

Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одной краевой задачи с дополнительной внутренней связью

Л.И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г. Демидова
Объединенный институт математики и компьютерных наук им. А.Н. Колмогорова