

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень разработанности темы

История моделирования процессов популяционной динамики с помощью математического аппарата насчитывает уже более трех веков исследований. Тем не менее, эта область до сих пор активно развивается. Классическим примером такой модели является логистическое уравнение, предложенное Франсуа Ферхюльстом в 1838 году

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right). \quad (1)$$

Здесь $N(t) > 0$ – отвечает за численность популяции, параметры K и r предполагаются положительными. Изменение K и r позволяет моделировать ухудшение/улучшение условий для обитания особей в окружающей среде. Предложенное Ферхюльстом уравнение обладает двумя важными свойствами:

1. при малых $N(t)$ численность популяции увеличивается;
2. $N(t)$, при увеличении t , стремится к величине K .

В работе Вольтерра при рассмотрении логистического уравнения было предложено одно из первых интегрально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} - \frac{1}{Q} \int_p^t \omega(t-s)N(s)ds \right). \quad (2)$$

В данном случае параметры r , K и Q положительны, параметр $p = -\infty$ или 0 . Такой вид отклонения называется распределенным. В качестве весовой функции $\omega(t)$ чаще всего рассматривают функцию плотности вероятности нормального распределения

$$\omega(t-s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t-s)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (3)$$

Исследование поведения решений уравнений с отклонением аргументов демонстрирует значительное разнообразие динамических режимов по сравнению с уравнениями без отклонений. В ряде прикладных задач хорошо известно, что изменение величины отклонения может привести к возникновению колебаний. В зависимости от параметров системы возможно, также, возникновение динамического хаоса.

Джорджем Хатчинсоном в 1948 году ([1]) было рассмотрено логистическое уравнение с дискретным отклонением временной переменной

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-h)}{K} \right). \quad (4)$$

Чаще всего данное уравнение рассматривают в нормализованном виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) (1 - N(t-1)). \quad (5)$$

Для такого уравнения многими авторами было показано, что при

$$0 < r \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия. При $r > \frac{\pi}{2}$ происходит рождение устойчивого цикла. В 1957 году Робертом Райтом ([2]) была сформулирована гипотеза о том, что нулевое состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво при

$$0 < r \leq \frac{37}{24}. \quad (7)$$

Однако, эта гипотеза не была доказана.

Многие авторы (см., например, [3], [4]) рассматривали модификацию классических моделей популяционной динамики добавлением диффузионного слагаемого. Большая часть работ по исследованию данных задач посвящена простейшему случаю, когда миграция особей пропорциональна градиенту концентрации. В книге Джеймса Диксона Мюррея 1993 года ([5]) была рассмотрена модель

$$\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 N(t, x)}{\partial x^2} + rN(t, x) \left(1 - \frac{N(t, x)}{K} \right) \quad (8)$$

и объяснена роль диффузии в математических моделях, описывающих динамику развития популяции.

Исследование математических моделей популяционной динамики, которые основываются на логистическом уравнении с отклонением временного аргумента и диффузионным слагаемым, связано с рядом технических трудностей ([6]). Трудность связана с тем, что диффузия, связанная с пространством, и отклонение временного аргумента не являются независимыми друг от друга явлениями. Впервые обстоятельную попытку справиться с этими трудностями предпринял Николас Бритон в 1990 году ([7]). В своей работе Бритон рассматривал уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + ru(t, x) \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t - s)u(s, x)ds \right). \quad (9)$$

Данное уравнение является модификацией уравнения Рональда Фишера, предложенного в 1937 году ([8]). В своей работе Фишер исследовал процесс распространения генной волны в пространстве.

Одной из важных задач в математической биологии является изучение распространения волны в системах с диффузией. Такие системы возникают при моделировании процесса распространения особей определенного вида. В 1937 году в работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова ([9]) была рассмотрена задача об определении скорости движения волны в уравнении реакции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (11)$$

В работе было установлено, что предельная скорость распространения фронта волны равна

$$c = 2\sqrt{df'(0)}. \quad (12)$$

В 2015 году Алешиным С.В., Глызиным С.Д. и Кащенко С.А. ([10]) была рассмотрена задача с отклонением пространственной переменной

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x)[1 - u(t, x - h)]. \quad (13)$$

Величина пространственного отклонения h полагалась положительной. В работе было исследовано влияние отклонения на профиль распространения волны и построено асимптотическое приближение решения в задаче с периодическими краевыми условиями.

При моделировании процессов популяционной динамики одним из основополагающих вопросов является изучение вопроса об устойчивости положений равновесия. Решению данной задачи посвящена значительная часть работы. Применение современных аналитических методов, а также численных экспериментов позволило получить ряд новых результатов, а также расширить область применимости логистического уравнения с запаздыванием в моделировании процессов экологии.

Цели и задачи исследования

Объектом исследования являются динамические системы с отклонением временного и пространственного аргументов. Для исследования данного объекта были сформулированные следующие цели:

1. Изучить зависимость решений от параметров системы.
2. Описать изменения качественного поведения решений в задачах с отклоняющимися аргументами.

В ходе исследования выполнен ряд численных экспериментов, применение которых основано на асимптотическом анализе поведения решений. Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Исследовать пространство параметров логистического уравнения с запаздыванием, при которых все положительные решения стремятся к нулю.
2. Исследовать вопрос о влиянии коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
3. Исследовать связь решений усреднённого логистического уравнения с запаздыванием и диффузией с решениями исходной задачи.
4. Провести анализ бифуркаций автоколебаний бегущих волн в задаче с симметричным отклонением пространственной переменной.
5. Провести численный анализ поведения решений в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и нелинейным множителем при запаздывающем слагаемом.

Научная новизна результатов

В ходе выполнения исследования были получены следующие результаты:

1. Доказана гипотеза Райта об области пространства параметров, при которых положительные решения логистического уравнения с запаздыванием стремятся к нулю. Разработан алгоритм последовательного улучшения оценки.
2. Доказано влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.

3. Разработан алгоритмы построения асимптотики решений и исследования устойчивости для усредненного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией.
4. Выполнено численное исследование распространения волн в логистическом уравнении с диффузией и двумя отклонениями пространственной переменной. Проведен анализ значений отклонения, при котором происходит изменение качественного поведения профиля волны.
5. Проведен численный эксперимент в задаче с логистическим уравнением с запаздыванием, диффузией и нелинейным множителем при запаздывающем слагаемом. Установлено влияние степени нелинейного множителя на амплитуду популяционных волн.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Разработанные в работе аналитические методы оценки области устойчивости и построения асимптотики решений могут быть применимы к широкому классу задач математической биологии и физики. Оценки влияния коэффициентов граничных условий на область устойчивости решений могут быть использованы для изучения различных проблем математической биологии и популяционной динамики. Проведенный анализ в задаче с нелинейным множителем при слагаемом с запаздыванием позволит модифицировать используемые в настоящий момент модели развития динамики популяции живых существ в высокогорных территориях.

Методология и методы исследования

В работе, при исследовании задач, были использованы известные методы анализа бифуркаций и построения асимптотик в задачах исследования характера динамических систем дифференциальных уравнений. Стоит отметить, что в силу высокой потребности в аналитических методах исследования систем дифференциальных уравнений с отклонением аргументов, в том числе и систем дифференциальных уравнений в частных производных, высокую значимость приобретает разработка новых методов построения асимптотик и анализа области устойчивости пространства параметров задач.

Положения, выносимые на публичное представление

1. Доказательство гипотезы Райта и демонстрация разработанного метода последовательного улучшения оценки области пространства параметров в логистическом уравнении с запаздыванием.
2. Доказательство влияния коэффициентов на устойчивость нулевого состояния равновесия в задаче исследования устойчивости решений уравнения с запаздыванием и диффузией при вариации коэффициентов граничных условий.
3. Доказательство связи решений усредненного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией с решениями исходного уравнения. Демонстрация разработанного алгоритм построения асимптотики решения и исследования устойчивости.

4. Для задачи распространения волны, которая описывается логистическим уравнением с симметричным отклонением пространственной переменной, демонстрация вычисленных значения величины отклонения, при котором профиль волны качественно изменяется.
5. Демонстрация результатов численного анализа в задаче с нелинейным множителем при слагаемом с запаздыванием.

Апробация результатов исследования

Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics" June 2–6, 2019, Cheboksary, Russia.
2. Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" 22–27 апреля, 2019, г. Ярославль.
3. 7th International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling June 25–27, 2018, Moscow, Russia.
4. Shilnikov WorkShop 2017, December 15–16, 2017, Nizhny Novgorod, Russia.
5. Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" 20–29 апреля, 2016, г. Ярославль.

В ходе работы разработано программное обеспечение для проведения численных экспериментов в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и варьируемом коэффициенте граничных условий, а также нелинейном множителе при слагаемом с запаздыванием.

Часть результатов получена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1 и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-29-10043.

Публикации

По теме работы автором опубликовано 9 статей и тезисов докладов, в том числе 2 статьи из рекомендованного перечня ВАК и 2 статьи из журналов индексируемых в системах цитирования Scopus и Web of Science.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность направления исследования, проводится краткая характеристика библиографии и основных результатов по теме исследования, полученных другими авторами. В разделе также описаны цели и основные задачи работы, проведена характеристика научной новизны и значимости результатов, освещен перечень выносимых на публичное представление результатов.

В **первой части работы** исследуется вопрос об определении всех тех параметров, для которых все положительные решения логистического уравнения с запаздыванием стремятся к нулю.

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (14)$$

возникает во многих прикладных задачах (см., например, [2,11,12]). Исследованию его решений посвящена значительная литература. По смыслу задачи коэффициенты r и T положительны. Пространством начальных условий для (14) является пространство $C_{[-T,0]}$. Поскольку интерес представляет изучение лишь неотрицательных решений (14), то начальные функции из $C_{[-T,0]}$ рассматриваются только неотрицательные. Решение с неотрицательной начальной функцией, заданной при $t = t_0$, остается неотрицательным при всех $t > t_0$. Термин "решение" в дальнейшем применяется только к неотрицательным решениям уравнения (14).

Количество параметров в (14) можно уменьшить с помощью нормализующей замены времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t - 1)]u, \quad \lambda = rT. \quad (15)$$

В этом уравнении удобно сделать замену $u = 1 + x$. Тогда получаем уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x(t - 1)[1 + x], \quad x \geq -1. \quad (16)$$

Перечислим известные и необходимые для дальнейшего свойства решений (16):

1. Каждое решение (16) при всех достаточно больших t удовлетворяет неравенству

$$x(t) \leq \exp(\lambda) - 1. \quad (17)$$

2. Устойчивость состояния равновесия $x_0 \equiv 0$ определяется расположением корней характеристического квазиполинома (линеаризованного на x_0 уравнения)

$$\mu = -\lambda \exp(-\mu). \quad (18)$$

При условии

$$0 < \lambda < \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

все корни (18) имеют отрицательные вещественные части, поэтому состояние равновесия x_0 в (16) является асимптотически устойчивым. Отметим, что при $\lambda = \pi/2$ уравнение (18) имеет пару чисто мнимых корней, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Сначала отметим, что для каждого решения $x(t)$ уравнения (16) и для каждого целого $n > 1$ найдется такого t_0 , что при $t > t_n$ функция $x(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой. Кроме этого из (17) открывается возможность нахождения значений коэффициентов a_n и b_n , для которых

$$-b_n \leq x^{(n)}(t) \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Например, при $n = 0$ имеем $b_0 = -1$, $a_0 = \exp(\lambda) - 1$.

Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (16) для некоторых $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(\lambda) - 1)$ удовлетворяет неравенствам

$$-\alpha \leq x(t) \leq M \quad (t \geq t_0). \quad (21)$$

Тогда для каждого n из (16) и (21) можно получить явные формулы для коэффициентов $a_n = a_n(\alpha, M)$ и $b_n = b_n(\alpha, M)$ фигурирующих в (20).

Фиксируем произвольно номер $m \geq 1$. Через $C(m, \alpha, M)$ и $S(m, \alpha, M)$ обозначим экстремумы функционалов

$$C(m, \alpha, M) = \inf \int_0^1 x(s) ds \quad (22)$$

и

$$S(m, \alpha, M) = \sup \int_0^1 x(s) ds, \quad (23)$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всем m раз непрерывно дифференцируемым решениям (16), удовлетворяющим неравенствам (21) при $n = 1, \dots, m$ и для которых $x(1) = 0$.

Обратим внимание, что условие равенства нулю решения (16) может не выполняться, т.е. некоторое решение может быть знакопостоянным (при $t \geq t_0$). Но тогда это решение, как следует из (16), монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и интерес такие решения не представляют. В этой связи укажем, что такие, т.е. монотонно стремящиеся к нулю, решения могут существовать лишь при условии $0 < \lambda < \exp(-1)$.

Осуществим переход к двумерному отображению. Положим

$$M_1 = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M)) - 1, \quad (24)$$

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-\lambda S(m, \alpha, M)). \quad (25)$$

Таким образом возникает двумерное отображение

$$(\alpha, M) \xrightarrow{\Phi(\alpha, M)} (\alpha_1, M_1) \xrightarrow{\Phi(\alpha_1, M_1)} (\alpha_2, M_2) \xrightarrow{\Phi(\alpha_2, M_2)} \dots \quad (26)$$

Теорема 1 *Для стремления к нулю всех решений уравнения (16), удовлетворяющих неравенству $x \geq -1$, достаточно, чтобы при всех $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(\lambda) - 1)$ выполнялись неравенства*

$$\alpha_1 < \alpha, \quad M_1 < M. \quad (27)$$

Из доказательства данной теоремы следует замечание.

Замечание 1 *Рассмотрим итерации (α_n, M_n) ($n = 2, 3, \dots$) отображения $\Phi(\alpha, M)$:*

$$(\alpha_{n+1}, M_{n+1}) = \Phi(\alpha_n, M_n). \quad (28)$$

Пусть при некотором λ имеем

$$\alpha_0(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \alpha_k, \quad M_0(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} M_k.$$

Тогда для решений (16) выполнены равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\tau \geq t} x(\tau) \geq -\alpha_0(\lambda), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} x(\tau) \leq M_0(\lambda). \quad (29)$$

Основная роль теоремы 1 состоит в том, что она намечает путь получения необходимых оценок. Уже при $m = 2$ для применения этой теоремы необходимо её существенно модернизировать.

Полученное двумерное отображение может быть сведено к двум одномерным. Далее предполагаем, что $m \geq 2$.

Пусть для некоторого решения $x(t)$ при всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$x(t) \geq -\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (30)$$

Сначала отметим, что при $m = 1$ выражение $C(1, \alpha, M)$ не зависит от M . Положим $C(\alpha) = C(1, \alpha, M) = \dots$.

Пусть

$$M_1 = \exp(-\lambda C(\alpha)) - 1.$$

Рассмотрим выражение $C(m, \alpha, M_1)$ и положим

$$M_2 = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M_1)) - 1.$$

Затем определим M_3, \dots по формуле

$$M_{n+1} = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M_n)) - 1 \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (31)$$

Отметим, что имеет место неравенство

$$M_{n+1} \leq M_n.$$

Обозначим через $M(\alpha)$ предельное значение последовательности M_n :

$$M(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n.$$

Тем самым $M(\alpha)$ – устойчивая неподвижная точка отображения (31).

На следующем этапе рассмотрено выражение

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-\lambda S(\alpha, M(\alpha)))$$

и

$$\alpha_{n+1} = 1 - \exp(-\lambda S(\alpha_n(\alpha), M(\alpha_n(\alpha)))) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (32)$$

Сформулируем теорему.

Теорема 2 Пусть при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполнено предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\alpha) = 0.$$

Тогда все решения уравнения (16) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 2 Для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно выполнения при всех $\alpha \in (0, 1)$ неравенства $\alpha_1 < \alpha$.

Далее автором рассматриваются три случая: $m = 0$, $m = 1$ и $m = 2$.

Отметим основные результаты первой части работы. Для случая $m = 0$ при $\lambda < 1$ все итерации α_{2n} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что при $\lambda < 1$ все решения (16) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. При $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ можно утверждать что для решений (16) выполнена при больших t оценка $x(t) \geq -\alpha_0$. В результате численного эксперимента получено, что $\alpha_0 \approx 0.9974065436$. Рассмотрение случая $m = 1$ произведено в два этапа: "грубой" оценки параметров решений и последующего уточнения. В результате "грубой" оценки установлено стремление к нулю всех решений только при

$$0 < \lambda < 1.44865. \quad (33)$$

На основании уточнения оценок удалось показать, что при $0 < \lambda < \frac{3}{2}$ все решения (16) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что при $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ для каждого решения при больших t выполнена оценка

$$x(t) \geq -\alpha_0 = -0.5254171515.$$

Случае $m = 2$ в работе аналогично рассматривается в два этапа. "Грубая" оценка не позволяет улучшить полученный ранее результат. В свою очередь уточнение оценки доказывает гипотезу Райта.

Во **второй части работы** рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1 - u(x, t - 1)), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (34)$$

и с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma(u - 1) \Big|_{x=1}, \quad (35)$$

которое является одной из базовых моделей математической экологии [12]. Коэффициенты d и r в (34) положительны. Краевая задача (34), (35) имеет четкий биологический смысл. Она описывает, например, изменение численности популяции в случае, когда через одну из границ возможна миграция. Эта миграция определяется величиной отклонения численности от своего среднего значения с коэффициентом γ .

Для величины $v = u - 1$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(x, t - 1)(1 + v), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma v \Big|_{x=1}. \quad (36)$$

Далее исследуется вопрос о поведении всех решений (36) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

При $\gamma = 0$ ответ на этот вопрос хорошо известен (см., например, [11], [12], [13]).

Линеаризуем в нуле краевую задачу (36). Положим $d\mu = \lambda + r \exp(-\lambda)$. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$w'' = \mu w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=1} = \gamma w|_{x=1}. \quad (37)$$

Через $\mu_0(\gamma) > \mu_1(\gamma) > \dots$ обозначим все собственные значения краевой задачи (37).

Рассмотрим уравнение

$$d\mu_0(\gamma) = \lambda + r \exp(-\lambda) \quad (38)$$

Пусть σ_0 – корень уравнения $\operatorname{tg} \sigma = -4\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий на интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим $r^* = (\sigma_0^2 + \frac{1}{16}(d\pi^2)^2)$. В результате линейного анализа сформулированы две леммы.

Лемма 1 Пусть $0 < r < r^*$. Тогда существует и единственно такое $\gamma = \gamma(r)$, что при $\gamma < \gamma(r)$ все корни уравнения (38) имеют отрицательные вещественные части, а при $\gamma > \gamma(r)$ у (38) есть корень с положительной вещественной частью.

Лемма 2 Пусть $r > r^*$. Тогда при любом γ уравнение (38) имеет корень с положительной вещественной частью.

Таким образом при $0 < r < r^*$ и $\gamma < \gamma(r)$ нулевое состояние равновесия в (36) экспоненциально устойчиво, а при $r > r^*$ или при $r < r^*$ и $\gamma > \gamma(r)$ – неустойчиво.

Фиксируем произвольно γ_1 и положим

$$\gamma = \gamma(r) + \varepsilon\gamma_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (39)$$

При условии (39) исследуется поведение решений исходной задачи из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (36).

Теорема 3 Пусть $0 < r < 1$ и выполнено условие (39). Тогда краевая задача (36) имеет в окрестности нуля устойчивое локальное одномерное интегральное многообразие, на котором (36) с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде ОДУ первого порядка

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b(r)\xi + c(r)\xi^2, \text{ где } \tau = \varepsilon t, \quad (40)$$

$$b(r) = -\frac{\gamma_1 ch(\sqrt{rd^{-1}})}{1-r},$$

$$c(r) = -\frac{4rd^{-1}(2\sqrt{rd^{-1}}+2)(9sh(\sqrt{rd^{-1}})+sh(3\sqrt{rd^{-1}}))}{(1-rd^{-1})(sh(2\sqrt{rd^{-1}})+2\sqrt{rd^{-1}})},$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon\varphi_0(x)\xi(\varepsilon t) + O(\varepsilon^2)$, а $\varphi_0(x)$ – собственная функция оператора (37), отвечающая собственному значению $\mu_0(\gamma)$: $\varphi_0(x) = ch(\mu_0^{1/2}(\gamma)x)$.

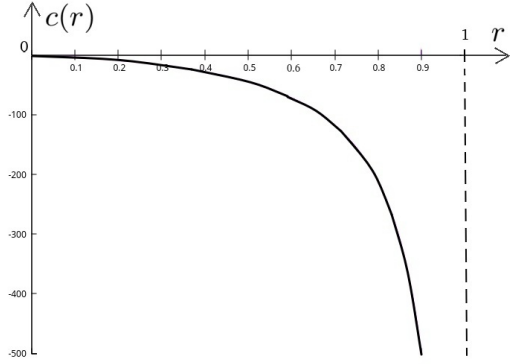


Рис. 1: График $c(r)$ при $d = 1$

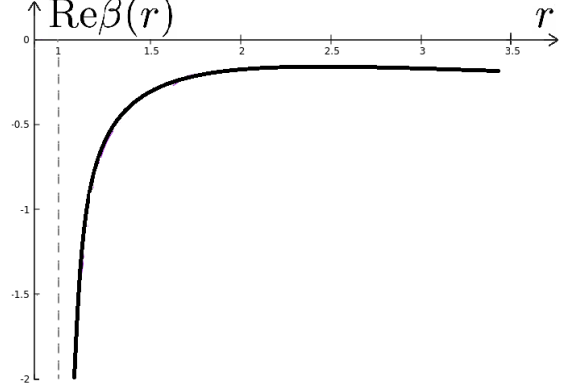


Рис. 2: График $\text{Re}\beta(r)$ при $d = 1$

Теорема 4 Пусть $1 < r < r^*$ и выполнено условие (20). Тогда в окрестности нуля краевая задача (16) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (16) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha(r)\xi + \beta(r)\xi|\xi|^2, \text{ где } \tau = \varepsilon t, \quad \alpha(r) = -\frac{\gamma_1 ch(\sqrt{\mu_0})}{1-r \exp(-i\sigma)}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \beta(r) = -r \left\{ (1 + e^{-i\sigma}) \left[\frac{A_1}{2\sqrt{\frac{r}{d}} \left(\frac{r}{d} - 4\mu_0 \right)} \left(sh \left(\sqrt{\frac{r}{d}} \right) \left(\frac{r}{d} ch(2\sqrt{\mu_0}) + \frac{r}{d} - 4\mu_0 \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2\sqrt{\mu_0 \frac{r}{d}} ch \left(\sqrt{\frac{r}{d}} \right) sh(2\sqrt{\mu_0}) \right) + \frac{A_2}{16} \left(\frac{4sh(2\sqrt{\mu_0}) + sh(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_3}{4} \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \Big] + (e^{i\sigma} + e^{-2i\sigma}) \left[\frac{B_1}{2\sqrt{\rho}(\rho - 4\mu_0)} \right. \\
& (sh(\sqrt{\rho})(\rho ch(2\sqrt{\mu_0}) + \rho - 4\mu_0) - 2\sqrt{\mu_0\rho} ch(\sqrt{\rho}) sh(2\sqrt{\mu_0})) + \\
& \left. + \frac{B_2}{16} \left(\frac{4sh(2\sqrt{\mu_0}) + sh(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \frac{B_3}{4} \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \right] \Big\} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{4\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{2} \right)^{-1}, \quad A_1 = \frac{\gamma (A_2 ch(2\sqrt{\mu_0}) + A_3) - 2A_2\sqrt{\mu_0} sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\frac{r}{d}} sh(\sqrt{\frac{r}{d}}) - \gamma ch(\sqrt{\frac{r}{d}})}, \\
& A_2 = \frac{\cos(\sigma)}{4\mu_0 d - r}, \quad A_3 = -\cos(\sigma), \quad \rho = \frac{r \exp(-2i\sigma) + 2i\sigma}{d}, \\
& B_1 = \frac{\gamma (B_2 ch(2\sqrt{\mu_0}) + B_3) - 2B_2\sqrt{\mu_0} sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\rho} sh(\sqrt{\rho}) - \gamma ch(\sqrt{\rho})}, \\
& B_2 = \frac{r \exp(-i\sigma)}{2d(4\mu_0 - \rho)}, \quad B_3 = -\frac{r \exp(-i\sigma)}{2d\rho}.
\end{aligned}$$

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\xi(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

Локальная динамика (36) при условии (39) и $0 < r < 1$ определяется уравнением (40), а при $1 < r < r^*$ – уравнением (41). Таким образом получаем, что при $\gamma_1 > 0$ и $0 < r < 1$ в (36) устойчиво состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon b(r) c^{-1}(r) ch(x\sqrt{\mu_0}) + O(\varepsilon^2)$, а при $1 < r < r^*$ – цикл, определенный из (41).

Далее в работе рассмотрен случай малой диффузии. Сформулированы две леммы.

Лемма 3 Пусть $0 < r < \frac{\pi}{2}$. Тогда при всех достаточно малых d все корни (19) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $d \rightarrow 0$.

Лемма 4 Пусть $r > \frac{\pi}{2}$. Тогда при всех достаточно малых d уравнение (19) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $d \rightarrow 0$ вещественной частью.

Отметим, что $r^* = r^*(d) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $d \rightarrow 0$.

Введем в рассмотрение краевую задачу для скалярной комплексной переменной $\xi(x, \tau)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \left(\frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \lambda_1 \xi + \beta \left(\frac{\pi}{2} \right) \xi |\xi|^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma \xi \Big|_{x=1}, \quad (42) \\
\lambda_1 &= -\frac{\mu_0(\gamma) + r_1 \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2} (r_1 - \mu_0(\gamma))}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Ниже через δ обозначено то значение выражения $(\frac{\pi}{2}(2i - 1))^{1/2}$, для которого выполнено неравенство $\text{Re} \delta < 0$.

Теорема 5 Пусть выполнено условие $0 < d \ll 1$ и пусть краевая задача (42) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение $\xi_0(x, \tau)$. Тогда при всех достаточно малых d краевая задача (36) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(d^{3/2})$ в уравнении и в граничных условиях решение

$$v_0(x, t, d) = d^{1/2} \left(\xi_0(x, \tau) \exp \left(i \frac{\pi}{2} t \right) + \bar{\xi}_0(x, \tau) \exp \left(-i \frac{\pi}{2} t \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{5} \left[\left((2-i)\xi^2(x, \tau) + d^{1/2} \frac{i-2}{\delta} \xi^2(1, \tau) \exp(i\pi t + \delta y) \right) + \right. \\
& \left. + \left((2+i)\bar{\xi}^2(x, \tau) + d^{1/2} \frac{i+2}{\delta} \bar{\xi}^2(1, \tau) \exp(-i\pi t + \delta y) \right) \right], \\
& y = d^{-1/2}(1-x), \quad \tau = td.
\end{aligned} \tag{43}$$

Отметим, что для периодического решения $\xi_0(x, \tau)$ в (42), удовлетворяющего условию невырожденности, существует точное почти периодическое решение $v_0(x, t, d)$ краевой задачи (36) с асимптотикой (43) и той же, что и $\xi_0(x, \tau)$ устойчивостью.

Далее в разделе представлены результаты численного эксперимента для различных значений параметров γ и r .

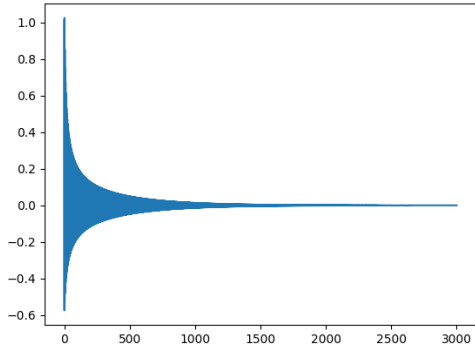


Рис. 3: $r = 3.19, \gamma = -16.64639827$

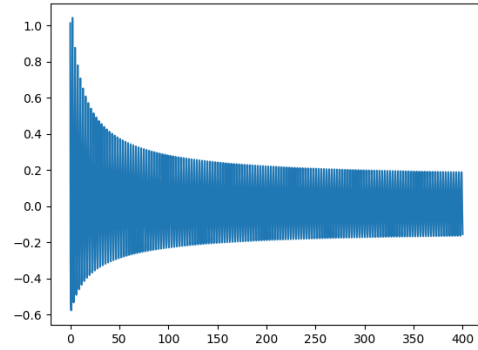


Рис. 4: $r = 3.21, \gamma = -16.64639827$

При проведении численного эксперимента были использованы начальные условия различных типов:

- тригонометрический многочлен;
- случайные величины из отрезка $[0, 1]$;
- линейная функция.

Отметим основные результаты второй части. Во второй части показано, что отрицательные значения параметра γ расширяют диапазон изменения значений параметра r , при которых нулевое состояние равновесия в (36) устойчиво, а положительные γ — сужают.

В случаях, близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения, приведен анализ локальной динамики краевой задачи (36).

Краевая задача (42) может обладать богатой динамикой. Поэтому можно сделать вывод о том, что при уменьшении коэффициента диффузии локальная динамика (36) может усложняться. В частности, возможна мультистабильность и существование нерегулярных колебаний.

В **третьей части работы** рассмотрена динамика нелинейного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r(s) u(t - T(s), x) [1 + u], \quad s = \omega t, \quad \omega > 0 \tag{44}$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma(s) u|_{x=1}. \tag{45}$$

Положительные коэффициенты $d(s)$, $r(s)$, $T(s)$, а также коэффициент $\gamma(s)$ предполагаются 2π -периодическими. В качестве пространства начальных условий для (44), (45) удобно выбрать пространство $W = C[-\max_s T(s), 0] \times \overset{\circ}{W}_2(t)$, где $\overset{\circ}{W}_2(t) \subset W_2^2[0, 1]$ и функции из $\overset{\circ}{W}_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям (45).

Введем несколько обозначений. Через $M(*)$ будем обозначать среднее по s выражение, являющегося аргументом оператора M . Через $M_0(v)$ будем обозначать среднее по s "бездиффузионной" части

$$M_0(v) = -M(r(s)v(t - T(s), x)[1 + v(t, x)]).$$

Для построения усредненного уравнения введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + M_0(v), \quad (46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}. \quad (47)$$

Через d_0 и γ_0 обозначены выражения

$$d_0 = M(d(s)), \quad \gamma_0 = d_0^{-1} M(d(s)\gamma(s)).$$

Нам понадобится еще одна вспомогательная краевая задача для 2π -периодической по s и экспоненциально убывающей по y при $y \rightarrow \infty$ функции $v(s, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f(s, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = g(s), \quad (48)$$

где $f(s, y)$ и $g(s)$ — 2π -периодичны по s и для некоторых положительных постоянных f_0 и δ_0 выполнена оценка

$$|f(s, y)| \leq f_0 \exp(-\delta_0 y).$$

Лемма 5 Для существования 2π -периодического по s решения $v(s, y)$ краевой задачи (48), удовлетворяющего для некоторых положительных постоянных v_0 и δ_0 оценке

$$|v(s, y)| \leq v_0 \exp(-\delta_0 y).$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$M \left[d(s)g(s) + \int_0^\infty f(s, y) dy \right] = 0.$$

Таким образом из леммы 5 следует, что у краевой задачи

$$\frac{\partial w}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma(s) - \gamma_0 \quad (49)$$

существует и единственно такое решение $w(s, y)$, определенное при $s \in [0, \infty)$, $y \in [0, \infty)$, которое 2π -периодично по s и для некоторых универсальных положительных постоянных c_0 и δ_0 выполнено неравенство

$$|w(s, y)| \leq c_0 \exp(-\delta_0 y). \quad (50)$$

Пусть $v(t, x)$ – некоторое решение краевой задачи (46), (47). Через $z(s, t, x, \omega)$ обозначим 2π -периодическую по s функцию

$$z(s, t, x, \omega) = [1 + v(t, x)] \int_0^s \left\{ (d(s) - d_0) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + M_0(v) - \right. \\ \left. - r(s)v(t - T(s), x) \right\} ds. \quad (51)$$

Пусть $\psi(t, x)$ произвольная непрерывная по $t \in [-\max_s T(s) + t_0, t_0]$ и непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, 1]$ функция. Через $u(t, x, \omega)$ и $v(t, x)$ обозначим решения краевых задач (46), (47) и (48) соответственно с начальным условием $\psi(t, x)$, заданным при $t = t_0$. Наконец, через $\mu > 0$ обозначим произвольное достаточно малое и независимое от ω значение.

Теорема 6 *Для каждого фиксированного $\mu > 0$ и $c > 0$ при $t \in [t_0 + \mu, t_0 + c]$ имеет место асимптотическое представление*

$$u(t, x, \omega) = v(t, x, \omega) + \omega^{-1/2} w(\omega t, (1 - x)\omega^{1/2}, t, \omega) + \\ + \omega^{-1} Z(\omega t, x, t, \omega), \quad (52)$$

в котором

$$v(t, x, \omega) = v(t, x) + \omega^{-1/2} v_1(t, x, \omega) + \dots, \quad (53)$$

$$w(s, y, t, \omega) = w(s, y)v(t, 1) + \omega^{-1/2} w_1(s, y, t, \omega) + \dots, \quad (54)$$

$$Z(s, x, t, \omega) = z(s, t, x, \omega) + \omega^{-1/2} z_1(s, t, x, \omega) + \dots. \quad (55)$$

Далее в рассмотрен вопрос о периодических решениях краевой задачи (44), (45).

Теорема 7 *Пусть $v_0(t, x)$ – h -периодическое решение краевой задачи (46), (47), и только один множитель линеаризованной на $v_0(t, x)$ краевой задачи равен по модулю 1. Тогда существует такая функция $\alpha(\omega)$ параметра ω , для которой $\alpha(\omega) = O(\omega^{-1/2})$ и краевая задача (44), (45) имеет почти периодическое решение $u_0(t, x, \omega)$ той же, что и $v_0(t, x)$ устойчивости и выполнено асимптотическое равенство*

$$u_0(t, x, \omega) = v_0((1 + \alpha(\omega))t, x) + \omega^{-1/2} w(s, y)v_0((1 + \alpha(\omega))t, 1) + O(\omega^{-1}). \quad (56)$$

Отметим, что коэффициенты формальных рядов (53), (54), (55) по степеням $\omega^{-1/2}$ еще и ограниченным образом зависят от параметра ω . Этот эффект является следствием присутствия в (44) запаздывания по времени.

В следующем разделе третьей части рассмотрено доказательство леммы 5. Дополнительно приведены две полезные формулы для вычисления средних значений. Пусть $g(\tau)$ – произвольная 2π -периодическая функций. Тогда

$$\begin{cases} M(g(\tau + b(\tau)))d^{-1}(\tau + b(\tau)) = M(g(\tau))d_0^{-1}, \\ M(g(\tau + b(\tau))) = M(g(\tau)d(\tau)). \end{cases} \quad (57)$$

Далее подробно исследован вопрос о бифуркациях из состояния равновесия в задаче (44), (45). В заключительном разделе рассмотрен алгоритм последовательного вычисления показателей, которые для исходной задачи выполняют роль ляпуновских экспонент. В разделе также рассмотрен ряд содержательных примеров применения разработанного алгоритма.

Отметим основные результаты третьей части работы. Построено усредненное уравнение для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией

и переменными граничными условиями. Сформулированы результаты о связи решений исходного и усредненного уравнений. Рассмотрен вопрос о локальной динамике в окрестности состояния равновесия усредненного уравнения в критических случаях. Разработан алгоритм, позволяющий получить асимптотические разложения коэффициентов нормальной формы, которые определяют динамику исходной задачи. В частности, показано, что соответствующие асимптотические разложения содержат как регулярные составляющие, характерные для теории усреднения в случае ОДУ, так и погранслойные асимптотики, играющие важную роль в теории сингулярных возмущений.

В четвертой части работы рассмотрено распространение волн в параболическом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa(u_{x+s}) + F(u) \quad (58)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), (x \in (-\infty, +\infty)). \quad (59)$$

Здесь u – скалярная величина, $F(u)$ – нелинейная аналитическая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, а через $\kappa(u_{x+s})$ обозначено выражение

$$\kappa(u_{x+s}) = \sum_{j=1}^n a_j u(t, x + l_j) + \int_{-l_0}^{l_0} \rho(s) u(t, x + s) ds, \quad (60)$$

в котором $l_j \in (-\infty, +\infty)$, $j = 0, \dots, n$; а функция $\rho(s)$ кусочно непрерывна.

Формальная часть резко упрощается, если несколько сузить класс операторов $\kappa(u_{x+s})$. Поэтому четвертой части все утверждения иллюстрируются для тех случаев, когда в (58) имеем

$$\kappa(u_{x+s}) = \frac{1}{2} A[u(t, x + l) + u(t, x - l)] + \frac{1}{2} B[u(t, x + ml) - u(t, x - ml)], \quad (61)$$

где

$$2\pi > l > 0, m > 0, A > 0 \quad (62)$$

В качестве пространства начальных условий краевой задачи (58), (59) зафиксировано пространство C всех непрерывных и 2π -периодических функций с метрикой $\| * \| = \max_x | * |$. Используя результаты работы [12], заключаем, что задача Коши для (58), (59) локально разрешима, т.е. для каждой $\varphi(x) \in C$ найдется такое $t_0 > 0$ и такая функция $u(t, x)$, которая определена при $t \in (0, t_0]$, $x \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяет тождествам (14), (15) и $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = \varphi(x)$. Кроме этого, найдется такое $r^0 > 0$, что при выполнении априорной оценки $\| u \| \leq r^0$ задача Коши глобально разрешима в сторону возрастания t .

Далее показано, что вопрос об устойчивости нулевого решения краевой задачи (58), (59), (61) связан с поведением спектра оператора

$$L\varphi = \varepsilon\varphi'' + \kappa(\varphi_{x+s}), \varphi(x + 2\pi) \equiv \varphi(x).$$

Обозначим через s_0 тот корень уравнения $s \cdot tg(s) = -2$, который принадлежит интервалу $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, и положим

$$c_0 = [s_0^2(4 + s_0^2)]^{\frac{1}{4}} A^{-\frac{1}{2}}.$$

Относительно спектра данного оператора справедлива следующая теорема.

Теорема 8 Пусть в (61) параметры A , B и t фиксированы, а параметр l удовлетворяет одному из неравенств

$$l \leq c\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } c < c_0 \quad (63)$$

или

$$l \geq c\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } c > c_0. \quad (64)$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нулевое состояние равновесия краевой задачи (58), (59), (61) асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство (19), и неустойчиво, – если (64).

В следующем разделе представлен анализ бифуркаций бегущих волн. Анализ выполнен с помощью метода нормальных форм. Вычислены значения s при которых профиль волны качественно изменяется.

В заключительном разделе четвертой части представлены результаты численного эксперимента, который был проведен над частным случаем уравнения (62):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x) \left(1 - \frac{u(t, x - s) + u(t, x + s)}{2} \right). \quad (65)$$

Численный эксперимент показал, что рассмотрение процесса распространения волн в уравнении (65) корректно только для краевых задач.

Отметим основные результаты четвертой части работы. Характерной чертой решений задачи (58), (59) является сильная осцилляция по пространственной переменной, также возможны ситуации, когда при уменьшении параметра, стоящего перед коэффициентом диффузии, происходит бесконечная смена "рождения" и "гибели" устойчивой автоволны. Рассмотрены в некотором смысле простейшие критические случаи. Разработан алгоритм асимптотического исследования всей совокупности решений, лежащих в окрестности состояния равновесия.

В пятой части работы проведен подробный численный анализ краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1 - a(x)u(t - 1, x)) \quad (66)$$

с краевыми условиями непроницаемости

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (67)$$

Для рассмотрения в качестве функции $a(x)$ выбрана

$$a(x) = Cx^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, C > 0. \quad (68)$$

Задача (66), (67) при условии (68) имеет четкий биологический смысл и моделирует динамику развития популяции животных, проживающих в гористых территориях. Для удобства рассмотрения функция $a(x)$ нормализована так, чтобы

$$\int_0^1 a(x) dx = 1 \quad (69)$$

в результате параметр C выбран

$$C = 1 - \alpha. \quad (70)$$

Численный эксперимент проводился на программном обеспечении, разработанном автором. В качестве начальных условий были рассмотрены следующие типы:

- тригонометрический многочлен;
- случайные величины из отрезка $[0, 1]$;
- линейная функция.

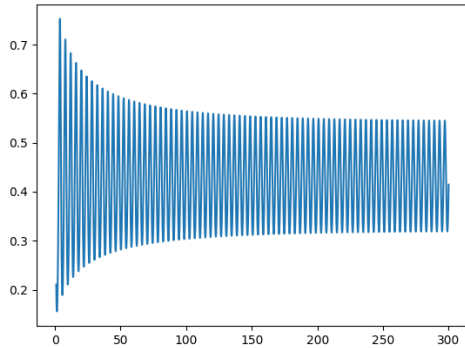


Рис. 5: График изменения площади, занимаемой особями при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.4, x = 0.9$

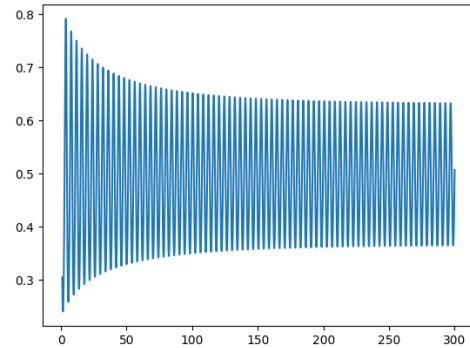


Рис. 6: График изменения площади, занимаемой особями при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.5, x = 0.9$

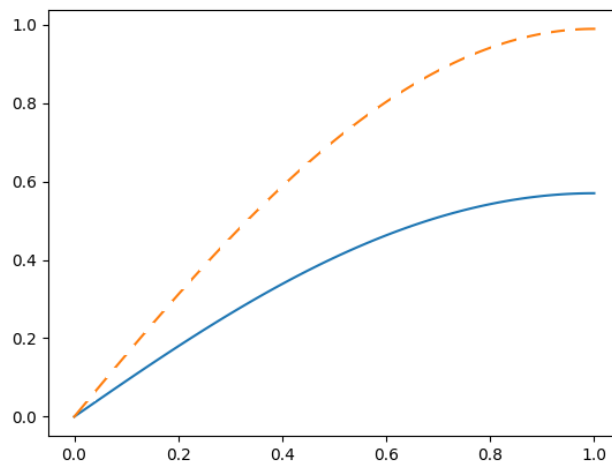


Рис. 7: Графики $u(t, x)$ при условиях
 сплошная линия – $t = 294.834, r \approx 4.052655, \alpha = 0.5$
 пунктирная линия –
 $t = 296.91, r \approx 4.052655, \alpha = 0.5$

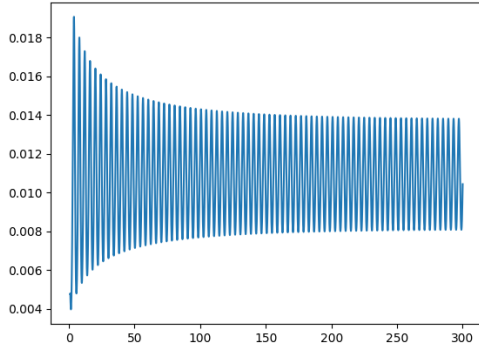


Рис. 8: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.4, x = 0.01$

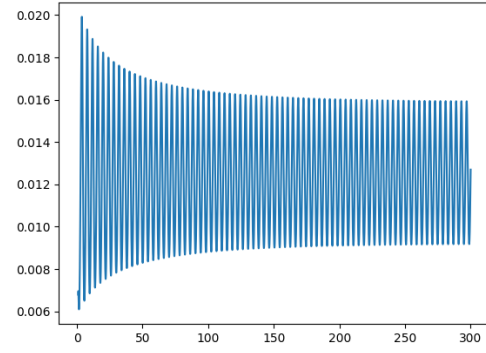


Рис. 9: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.5, x = 0.01$

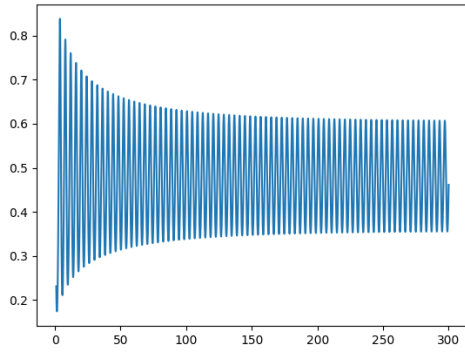


Рис. 10: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.4, x = 0.5$

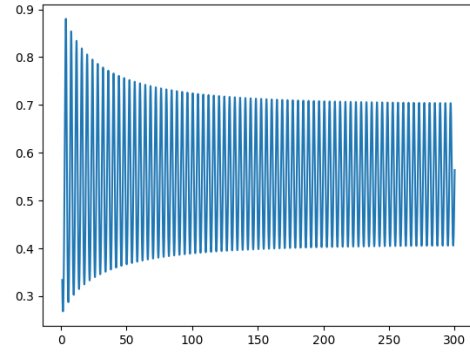


Рис. 11: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.5, x = 0.9$

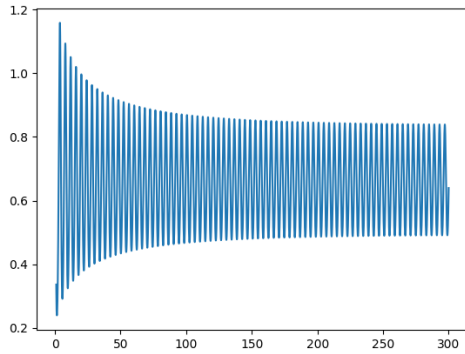


Рис. 12: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.4, x = 0.9$

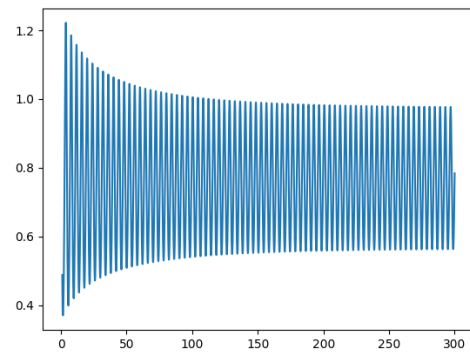


Рис. 13: График $u(t, x)$ при условиях $r \approx 4.052655, \alpha = 0.5, x = 0.9$

Отметим основные результаты пятой части работы. В задаче (66), (67) при $r \approx 4.052655$ происходит рождение устойчивого цикла. У левой границы ареала обитания наблюдаются малое изменение численности особей, тогда как, при приближении к правой границе эти показатели заметно растут. Уменьшение степени α при слагаемом с запаздыванием увеличивает максимальную численность особей, однако, происходит также и уменьшение минимального числа особей при рассмотрении развития вида во времени.

В **заключении** работы проведено обобщение результатов исследования, обозначены возможные направления развития по рассматриваемой теме и сфор-

мулированы выводы.

В **приложении А** приводятся фрагменты программной реализации алгоритмов разработанного программного обеспечения для проведения численных экспериментов по рассматриваемым задачам.

В **приложении В** приведен порядок работы с графическим интерфейсом разработанного программного обеспечения.

Заключение

В работе доказана гипотеза Райта [2] о том, что при условии (20) нулевое состояние равновесия уравнения (16) глобально устойчиво. Разработана методика последовательного уточнения соответствующих оценок.

Для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и вариации коэффициента граничных условий показано, что отрицательные значения коэффициента расширяют диапазон изменения значений параметра r , при которых нулевое состояние равновесия устойчиво, а положительные – сужают. В случаях, близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения, приведен анализ локальной динамики краевой задачи. Краевая задача с малой диффузией может обладать богатой динамикой. Поэтому можно сделать вывод о том, что при уменьшении коэффициента диффузии локальная динамика исходной задачи может усложняться. В частности, возможна мультистабильность и существование нерегулярных колебаний. Проведены численные эксперименты в задаче линейного и нелинейного слагаемого с запаздыванием.

В работе также построено усредненное уравнение для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями. Следует отметить, что усреднение в граничных условиях во многом зависит от осцилляций коэффициента диффузии. Сформулированы результаты о связи решений исходного и усредненного уравнений. Разработан алгоритм, позволяющий получить асимптотические разложения коэффициентов нормальной формы, которые определяют динамику исходной задачи. В частности, показано, что соответствующие асимптотические разложения содержат как регулярные составляющие, характерные для теории усреднения в случае ОДУ, так и погранслойные асимптотики, играющие важную роль в теории сингулярных возмущений. Показано, что осцилляции в граничных условиях обладают ярко выраженным стабилизирующим эффектом.

Для уравнения с отклонением пространственной переменной рассмотрены бифуркации автоколебаний в краевой задаче параболического типа с малой диффузией. Показано, что критический случай в задаче об устойчивости стационара имеет бесконечную размерность. На основе метода нормальных форм получены некоторые универсальные системы уравнений параболического типа. Установившиеся режимы этих уравнений позволяют определить структуру решений исходной краевой задачи. Разработан алгоритм асимптотического исследования всей совокупности решений, лежащих в окрестности состояния равновесия. Для их описания на основе метода нормальных и квазинормальных форм показано, что динамические свойства решений обладают высокой чувствительностью к изменению "малого" параметра, характеризующего коэффициент диффузии. Проведены результаты численного эксперимента в задаче с симметричным отклонением.

При численном анализе задачи с нелинейным множителем при слагаемом с запаздыванием в логистическом уравнении с запаздыванием вычислено критическое значение параметра r , при котором происходит бифуркация Андронова-Хопфа показано, что при $x \rightarrow 0$ решение $u(t, x) \rightarrow 0$. Уменьшение степени α

при слабом с запаздыванием увеличивает амплитуду колебаний.

Список литературы

1. Hutchinson, G.E. Circular causal in ecology / G.E. Hutchinson // Ann. N.Y. Acad. Sci, 1948, №50. pp.221–246.
2. Wright, E.M. A non-linear difference-differential equation / E.M. Wright // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1955, Vol. 106, pp. 66–87.
3. Britton, N.F. Reaction-diffusion equations and their applications to biology / N.F. Britton // New York: Academic Press, 1986
4. Levin, S.A. Population Models and Community Structure in Heterogeneous Environments / Levin, S.A. // In: Hallam T.G., Mathematical Ecology. Biomathematics, 1986, Vol 17. Springer, Berlin, Heidelberg.
5. Murray, J.D. Mathematical biology. / J.D. Murray // Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.
6. Wu, J.H. Theory and applications of partial functional differential equations / J.H. Wu // Appl. Math. Sci., 1996., p.119.
7. Britton, N.F. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model / N.F. Britton // SIAM J. Appl. Math., 1990, Vol.50, pp. 1663–1688.
8. Fisher, R.A. The advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics, 1937, Vol. 7, pp. 355–369.
9. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастом вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика, 1:6, 1937.
10. Алешин, С.В. Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением по пространственной переменной / С. В. Алешин, С. Д. Глызин, С. А. Кащенко, // , Модел. и анализ информ. систем, 2015, 22:5, С. 609–628.
11. Kuang, Y. Delay differential equations with applications in population dynamics / Y. Kuang // In: Mathematics in Science and Engineering, Vol. 191, Academic Press, New York, 1993.
12. Gourley, S.A. Non-locality of reaction–diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics. / S.A. Gourley, J. So, J. Wu // Journal of Mathematical Sciences, 2004, Vol. 124, №4, pp. 5119–5153.
13. Кащенко, С.А. Локальная динамика пространственнораспределенного логистического уравнения с запаздыванием и большим коэффициентом переноса / Кащенко, С.А. // Дифференциальные уравнения, 2014, С. 73–78.
14. Marsden, J.E. The Hopf Bifurcation and Its Applications / J.E. Marsden, M.F. McCracken // New York, Springer, 1976.

Список публикаций по теме работы

Публикации в перечне ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК

1. Кащенко, С.А. Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией / С.А. Кащенко, Д.О. Логинов // Математические заметки, 2019, Т. 106, №1. С. 138–143.
2. Кащенко, С.А. Бифуркации высокомодовых автоколебаний в параболическом уравнении с малой диффузией и отклонением пространственной переменной / С.А. Кащенко, Д.О. Логинов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2017, Т. 6, №5. С. 425–443.

Публикации в рецензируемых научных изданиях, входящих в Web of Science и Scopus

3. Kaschenko, S.A. Bifurcations Due to the Variation of Boundary Conditions in the Logistic Equation with Delay and Diffusion / S.A. Kaschenko, D.O. Loginov // Mathematical Notes, 2019, Vol. 106, No. 1, pp. 136–141.
4. Kaschenko, S.A. About Global Stable of Solutions of Logistic Equation with Delay / S.A. Kaschenko, D.O. Loginov // Journal of Physics: Conference Series 6. Сер. "VI International Conference Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling 2017, Vol 937, conference 1.

Работы, опубликованные в других изданиях

5. Loginov, D.O. Analysis of Bifurcations at Varying Boundary Conditions in a Logistic Equation with Delay and Diffusion / D.O. Loginov // International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics" Cheboksary, Ulianov Chuvash State University, 2019, pp. 136–137.
6. Логинов, Д.О. Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией / Д.О. Логинов // Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" г. Ярославль, ЯрГУ, 2019.
7. Loginov, D.O. Bifurcation as the Coefficients of the Boundary Conditions Change in the Logistic Equation with Delay and Diffusion / D.O. Loginov // 7th International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling Moscow, National Research Nuclear University MEPhI, 2018, p. 187.
8. Loginov, D.O. About Bifurcations in a Parabolic Equation with Small Diffusion and Deflection Space Variable / D.O. Loginov // Shilnikov WorkShop 2017, Nizhny Novgorod, Lobachevsky University, 2017, p. 22.
9. Логинов, Д.О. Свойства переходного фронта уравнения Колмогорова - Петровского-Пискунова / Д.О. Логинов // Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" г. Ярославль, ЯрГУ, 2016.