

# АНАЛИЗ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Леонид Ивановский, Илья Куксёнок



# Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u'(0, t) &= 0, \\ u'(1, t) &= \alpha u(x_0, t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau \geq 0, \quad x_0 \in [0, 1].$$

# Общая формулировка задачи

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u'(0, t) &= 0, \\ u'(1, t) &= \alpha u(x_0, t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau \geq 0, \quad x_0 \in [0, 1].$$

Кащенко С.А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием // Модел. и. анализ информ. систем, №24(2), с. 168–185 (2017).

# Нелинейная краевая задача без запаздывания

$$u' = \ddot{u} + \gamma u - u^3, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u' \big|_{x=0} &= 0, \\ u' \big|_{x=1} &= \alpha u \big|_{x=x_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [0, 1].$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

# Нелинейная краевая задача с запаздыванием в граничном условии

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u' \big|_{x=0} &= 0, \\ u' \big|_{x=1} &= \alpha u(1, t - \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0.$$

Исследование выполнено при поддержке Центра Интегрируемых Систем ЯрГУ им. П.Г. Демидова

## Упрощенная краевая задача

$$u(x, t) = w(x) \exp (\lambda - \gamma t)$$

## Упрощенная краевая задача

$$u(x, t) = w(x) \exp (\lambda - \gamma t)$$

$$w'' - \lambda w = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0, \\ w'(1) &= \alpha w(x_0) e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{8}$$

$$w(x) = c \operatorname{ch}(\mu x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$



$$w(x) = c \operatorname{ch}(\mu x),$$

$$\mu^2 = \lambda.$$

$$x = 1 :$$

$$\mu \operatorname{sh} \mu = \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0), \tag{9}$$

$$\mu \operatorname{sh} \mu = \alpha \operatorname{ch} \mu e^{i\omega\tau}.$$

# Колебательная потеря устойчивости нулевого состояния равновесия

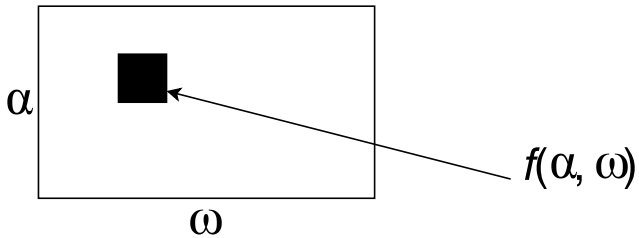
## Теорема

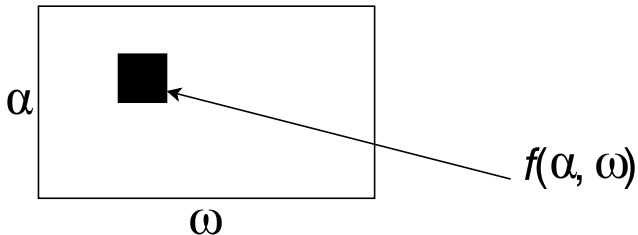
*Существует такое  $\alpha = \alpha_{cr}$ , для которого  $Re(\lambda_*) = \gamma$  и для всех остальных собственных значений задачи (7), (8)  $Re(\lambda) < \gamma$ .*



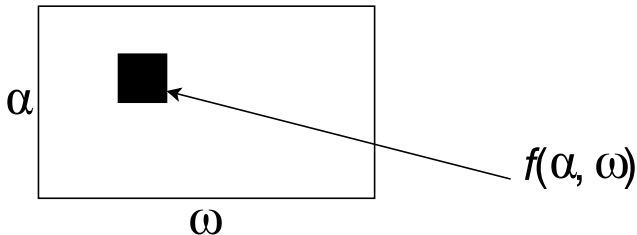
OpenMP

# Алгоритм





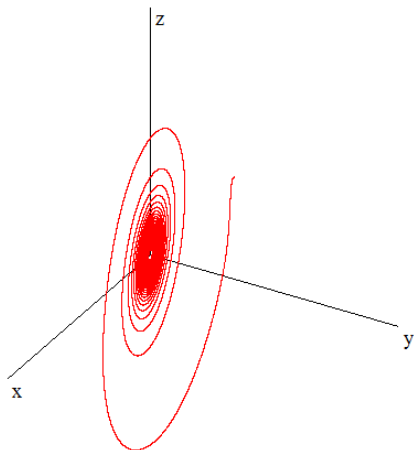
$$\begin{aligned} f(\omega, \alpha) &= \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0), \\ f(\omega, \alpha) &= \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch} \mu e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{10}$$



$$\begin{aligned} f(\omega, \alpha) &= \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch}(\mu x_0), \\ f(\omega, \alpha) &= \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch} \mu e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \tag{10}$$

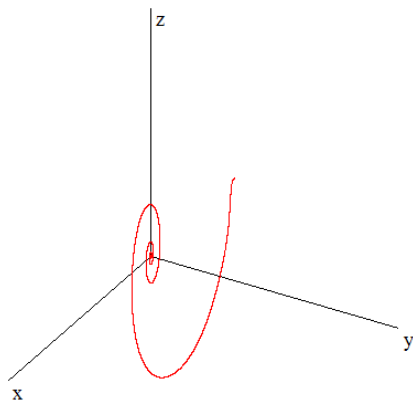
$$\alpha_{cr} : f(\omega, \alpha_{cr}) = 0.$$

# Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -4.0, \quad x_0 = 0$$

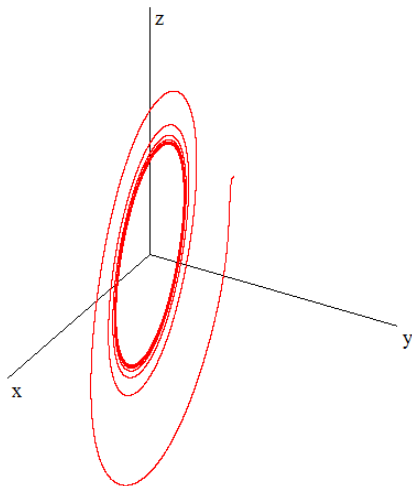
# Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -2.5, \quad x_0 = 0$$



# Результаты



$$\gamma = 3.3, \quad \alpha_{cr} = -5.0, \quad x_0 = 0$$

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j+1}{2}} u_j(t, s, x), \quad s = \varepsilon t \quad (11)$$

$$u_0(x, t) = z(s) e^{i\omega t} w(x) + \overline{z(s)} e^{-i\omega t} \overline{w(x)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon} : \quad \dot{u}_0 &= u_0'' + u_0 \\ \varepsilon : \quad \dot{u}_1 &= u_1'' + u_1 + f(u_0) \\ \varepsilon^{3/2} : \quad \dot{u}_2 &= u_2'' + u_2 + g(u_0, u_1)\end{aligned}\tag{13}$$

$$u_0'(0) = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} u_0'(1) &= \alpha_{cr} u_0(x_0) \\ u_0'(1) &= \alpha_{cr} u_0(1) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \tag{15}$$

$$u_2'(0) = 0 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_2'(1) &= \alpha_{cr} u_2(x_0) + u_0(x_0) \\ u_2'(1) &= \alpha_{cr} u_2(1) e^{-i\omega\tau} - \alpha_{cr} \tau u_0(1) \end{aligned} \tag{17}$$

$$u_2 = e^{i\omega t}v(x) \tag{18}$$

$$v(x) = c_1(x)ch(\mu x) + c_2(x)sh(\mu x) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= I_1(x) + q_1 \\ c_2 &= I_2(x) + q_2 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\dot{z} = \phi z + dz|z|^2 \quad (21)$$

## Теорема

*При  $Re(\phi) > 0$ ,  $Re(d) < 0$   $\exists \varepsilon_0 > 0$   $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  наблюдается экспоненциально-орбитально устойчивый цикл, асимптотика которого описывается формулой (10), в которой*

$$z(s) = \sqrt{-\frac{Re(\phi)}{Re(d)}} \exp \left( i \left( Im(\phi) - \frac{Im(d)Re(\phi)}{Re(d)} \right) s + i\gamma \right)$$

# Квазианалитическое решение

Положим

$$\mu = -\gamma + i\omega, \quad (22)$$

Тогда

$$(\text{??}, \text{??}) \rightarrow \begin{cases} \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \exp(-i\omega\tau) \operatorname{ch} \mu = 0 & \text{при } \tau \neq 0 \\ \mu \operatorname{sh} \mu - \alpha \operatorname{ch} \mu = 0 & \text{при } \tau = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

# Квазианалитическое решение

Получим спектр собственных чисел

$$\omega = -i(\gamma + \mu), \quad (24)$$

Где  $\mu$  может быть найдено численно из (??)