

Dimensiones de la tobera

Leonel Gerardo González Pérez

4 de septiembre de 2023

1. Introducción

Este escrito esta hecho para la discusión de como el manual *Rocket manual for amateurs* [1] contiene errores específicamente en el calculo del número mach y compararlo con las ecuaciones obtenidos en [2]

2. Desarrollo

La ecuación para obtener el mach en la salida de la tobera según el manual para amateurs es la siguiente

the Mach number at section e is

$$\mathbf{M_o} = \frac{\mathbf{v_e}}{\mathbf{a}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{P_e}}{\mathbf{P_c}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

Figura 1: Match del manual para amateurs

Asumiendo un flujo isentropico en la tobera se puede obtener las siguientes relaciones con las ecuaciones 3-2, 3-6 de [2]

$$h_x - h_y = \frac{1}{2\mathbf{J}}(v_y^2 - v_x^2) = c_p(T_x - T_y) \quad (1)$$

$$c_p = \frac{kR}{(k-1)\mathbf{J}} \quad (2)$$

$$\frac{T_x}{T_y} = \left(\frac{P_x}{P_y} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{V_x}{V_y} \right)^{k-1} \quad (3)$$

Donde x, y son dos puntos de la tobera. Así se puede obtener la ecuación

$$v_e = \sqrt{\frac{2kR}{k-1}(T_o - T_e) + v_c^2} \quad (4)$$

Se asume que la velocidad de la cámara de combustión es muy pequeña así v_c^2 es prácticamente 0. Factorizando T_o y utilizando 3

$$v_e = \sqrt{\frac{2kRT_e}{k-1} \left[\left(\frac{P_o}{P_e} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (5)$$

En este paso se equivoco el autor del manual para amateurs para obtener la velocidad ya que no se factorizo la temperatura T_e si no T_o por eso en la ecuación de la figura 1 se obtiene el factor $\frac{P_e}{P_o}$ y al calcular el Match no se eliminaría la temperatura.

Con esta ecuación para v_e se puede obtener el match que esta definido como

$$M_x = \frac{v_x}{a_x} \quad (6)$$

Donde a_x representa la velocidad del sonido en el punto x de la tobera

$$a_x = \sqrt{kRT_x} \quad (7)$$

Así se obtiene el calculo para el match

$$M_x = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P_o}{P_x} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (8)$$

O para el punto de la salida

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P_o}{P_x} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (9)$$

Con esto ya se puede calcular las relaciones de las áreas con la siguiente ecuación

$$\frac{A_x}{A_t} = \frac{1}{M_x} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (10)$$

Que es equivalente a la ecuación

$$\frac{A_t}{A_x} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_x}{P_y} \right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[\left(1 - \frac{P_x}{P_y} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (11)$$

3. Dimensiones correctas

Como en el análisis la velocidad de la cámara de combustión es prácticamente baja ya no se tomara que el match en la cámara de combustión esta en un rango de 0.3 a 0.4 sino conforme a la información que se muestra en [2, p. 73-74]

TABLE 3-2. Estimated Losses for Small-Diameter Chambers

Chamber-to-Throat Area Ratio	Throat Pressure (%)	Thrust Reduction (%)	Specific Impulse Reduction (%)
∞	100	0	0
3.5	99	1.5	0.31
2.0	96	5.0	0.55
1.0	81	19.5	1.34

$k = 1.20$; $p_1/p_2 = 1000$.

Figura 2: Perdidas para diámetros pequeños de cámara de combustión

Ya corregido el código en pyhton se obtuvieron los siguientes datos teniendo en cuenta las relaciones de cámara-tobera 3.5-4. Con $P_o = 1000$ psi y $P_e = 14.69$ psi

A_c/A_t	A_e/A_t	D_c [mm]	D_t [mm]	D_e [mm]	M_e
3.5	10.14	101.6	54.3	172.9	3.11
4	10.14	101.6	50.8	161.75	3.11

Tabla 1: Datos nuevos según las relaciones obtenidas

4. Conclusión

El manual de cohetería para amateurs ya no se debería de tomar en cuenta ya que es una referencia muy vieja y puede tener aun mas errores y remplazarlo por el Rocket propulsion elements. Por lo tanto se tienen que hacer un nuevo modelo de la tobera con las dimensiones correctas.

Referencias

- [1] Brinley, B. R. (1960). Rocket manual for ameteurs. Ballantine books.
- [2] Sutton, G. P., BIBLARZ, O. (2013). Rocket propulsion elements (7th ed.). Wiley India Pvt. Ltd.