Simulación de Procesos Físicos

Actividad 3.1. Conducción de calor.

Alumno: González Pérez Leonel Gerardo

Suponga que tenemos una barra de un material con un coeficiente de difusividad térmica $\alpha = 1$ m^2s, una longitud $L = 1$ m y temperatura $T = 0$ °C a lo largo de toda la barra. En un tiempo $t = 0$, se calienta el extremo izquierdo de la barra ($x = 0$) manteniéndose a una temperatura de $T = 100$ °C, en el lado derecho de la barra se tiene un material aislante.

La conducción de calor es un proceso difusivo, y se puede aproximar resolviendo la ecuación de calor; en una dimensión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

donde α es un coeficiente de difusividad térmica que va a depender del tipo de material conductor y T es la temperatura. Discretizando la ecuación con el esquema implícito tenemos:

$$-\mu T_{j-1}^{n} + (1 + 2\mu) T_j^n - \mu T_{j+1}^n = T_{j-1}^{n-1}$$

con:

$$\mu = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Para este tipo de problemas es conveniente introducir las condiciones de frontera de Neumann, con estas condiciones de frontera, en vez de especificar el valor de la solución en la frontera, se especifica el valor de la derivada de la solución en la frontera. En este caso, la C.F. de Neumann en el lado derecho de la barra se expresa como:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1} = q(t) \tag{2}$$

y discretizando:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1} \approx \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{\Delta x} = q(t) \tag{3}$$

En el contexto de la conducción de calor, la derivada espacial de la temperatura es la densidad de flujo de calor o simplemente flujo de calor q con unidades de W/m^2. En este caso, impusimos en $x = 1$ un material aislante, es decir, no existe un flujo de calor:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \tag{4}$$

Lo anterior nos indica que el cambio de temperatura cuando nos movemos en la dirección x es cero en el extremo derecho de la barra.

Instrucciones

Ejercicio 1

- Escriba un código para resolver la ecuación de difusión de calor para el ejemplo de la barra donde se implementen las condiciones de frontera de Neumann.
- Realice una gráfica para visualizar los resultados.
- Discuta los resultados.

Código.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Metodo de Euler
def euler(Nt ,dx ,dt ,u0 ,L ,alpha):

    mu      = alpha*(dt/(dx**2))

    x       = np.arange(0, L + dx, dx)
    t       = np.arange(0, Nt*dt, dt)
    sol     = np.zeros((Nt, len(x)))
    u_n     = np.zeros(len(x))

    u0 = u0(x)
    u = u0

    for n in range(Nt):
        u[0]    = 100
        u[-1]   = 0
        u_n[1:-1]    = u[1:-1] + mu*(u[:-2] - 2*u[1:-1] + u[2:])
        u = u_n
        sol[n] = u
    return x, t, mu, sol



# Condiciones del problema

L = 1
Nt = 5000
dx = 0.05
dt = 0.00004
alpha = 1
u0 = lambda x: np.zeros(len(x))

# Soluci n
x, t, mu ,sol = euler(Nt, dx, dt, u0, L, alpha)


# Grafica

plt.figure(figsize=(8 ,7))

plt.contourf( x ,t , sol )
plt.ylabel('Tiempo [s]')
plt.xlabel('Posici n [m]')
barra = plt.colorbar()
barra.set_label('Temperatura [ C ]')

plt.savefig('Grafica de temperatura.png')
plt.show()
```

Gráficas.

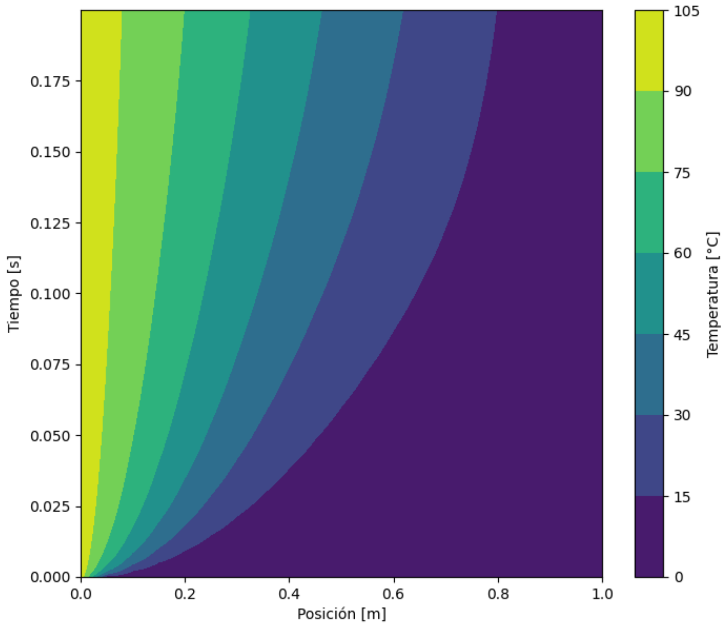

Figura 1: Gráfica de la evolución temporal de la temperatura de una barra unidimensional

Discusión.

En la figura 1 se puede ver la solución obtenida numéricamente de una barra unidimensional la cual tiene una temperatura constante de 100 °C y en su extremo contrario 0 °C se puede notar que al transcurrir el tiempo rápidamente la temperatura se va trasmitiendo por toda la barra como es de esperarse. Hablando de la resolución de la ecuación diferencial parcial, se utilizó el método de Euler adelantado el cual tiene sus limitaciones como lo es la estabilidad, debido a que se tienen que tomar valores para el paso de tiempo Δt muy pequeños para que se pueda obtener una buena solución, por lo que en problemas mas complejos y de mayor calculo puede ser un gran problema.