Simulación de Procesos Físicos

Actividad 2.1. Péndulo simple.

Alumno: González Pérez Leonel Gerardo

Considere un péndulo que consta de una varilla ligera de longitud L a la que se une una bola de masa m. El otro extremo de la varilla está unido a una pared en un punto de modo que la bola del péndulo se mueva en un círculo centrado en este punto. La posición de la masa en el tiempo t se describe completamente por el ángulo $\theta(t)$ de la masa desde la posición recta hacia abajo y se mide en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Suponemos que las únicas dos fuerzas que actúan sobre el péndulo son la fuerza de gravedad y una fuerza debida a la fricción. La fuerza gravitacional es una fuerza constante igual a mg que actúa en dirección descendente; la componente de esta fuerza tangente al círculo de movimiento está dada por $-mg\sin\theta$.

Se considera que la fuerza debida a la fricción es proporcional a la velocidad, es decir, $-bL\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ para una constante $b > 0$. Cuando no hay fuerza debido a la fricción ($b = 0$), tenemos un péndulo ideal cuyo movimiento está dado por:

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + \alpha\sin(\theta(t)) = 0$$

donde $\beta = b/m$ y $\alpha = g/L$, son constantes positivas.

Podemos convertir la ecuación anterior en un sistema de ecuaciones de primer orden: Definamos el siguiente cambio de variable

$$\theta'(t) = \omega(t)$$

por lo tanto

$$\theta''(t) = \omega(t)'$$

Sustituyendo en la ecuación del péndulo con amortiguamiento se obtienen el sistema de ecuaciones:

$$\theta'(t) = \omega(t)$$

$$\omega'(t) + \beta\omega(t) + \alpha sin(\theta)$$

Con estas ecuaciones existes 4 modos de oscilacion disponibles:

- **Sin amortiguamiento:** $\beta = 0$
- **Subamortiguado:** $\beta < 2\alpha$
- **Amortiguamiento critico:** $\beta = 2\alpha$
- **Sobreamortiguado:** $\beta > 2\alpha$

Instrucciones

- Complete el desarrollo matemático para llegar a un sistema de ecuaciones de primer orden.
- Escriba un código en Python para resolver el sistema de ecuaciones que describen el movimiento del péndulo simple.
- Utilice las condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/2$ y $\omega(0) = 0$.
- Obtenga la solución numérica para tres casos:

1. Péndulo sin amortiguamiento.
2. Péndulo con amortiguamiento.
3. Péndulo con amortiguamiento crítico.

- Para cada caso obtenga el plano de fases y grafique sobre el mismo la solución numérica encontrada.
- Complete con su código fuente y gráficas los campos indicados en la actividad.
- Escriba las discusiones de sus resultados en la parte correspondiente del formato. Conteste: ¿que se observa al cambiar los valores de b?; ¿para que sirve el diagrama de fases? y ¿qué pasaría si se cambian las condiciones iniciales?.

Código.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# Ecuacion diferencial
def pendulo(y, t, beta , alpha ):
    theta , omega = y
    dydt = [omega ,
            -beta *omega -alpha*np.sin(theta )]
    return dydt

# Definiendo las constantes
l = 2
m = 3.4
b = 10
g = 9.81
alpha = np.sqrt(g/l)
beta = np.array([0, 2*alpha, np.sqrt(b/m)])

# Definiendo el tiempo y condiciones iniciales
t = np.arange(0, 10*np.pi, 0.01)
y0 = [np.pi/2, 0]

# Pendulo simple, Am. critico, Am Subamortiguado
Name = ['$\\beta = 0$', '$\\beta = 2\\alpha$', '$\\beta < 2\\alpha$']


# Graficas
fig, (ax, ax2) = plt.subplots(2, figsize=(7, 7))


for i in range(len(beta)):
    sol = odeint(pendulo, y0, t, args=(beta[i], alpha))
    ax.plot(t, sol[:, 0], label=Name[i])
    ax.set_xlabel('Tiempo [s]')
    ax.set_ylabel(r'$\theta$ [rad]')
    ax.grid()

    ax2.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], label=Name[i])
    ax2.grid()
    ax2.set_xlabel(r'$\theta$ [rad]')
    ax2.set_ylabel(r'$\omega$ [rad/s]')

ax.legend()
ax2.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig('Solucion pendulo amortiguado.png')
plt.show()
```

Gráficas.

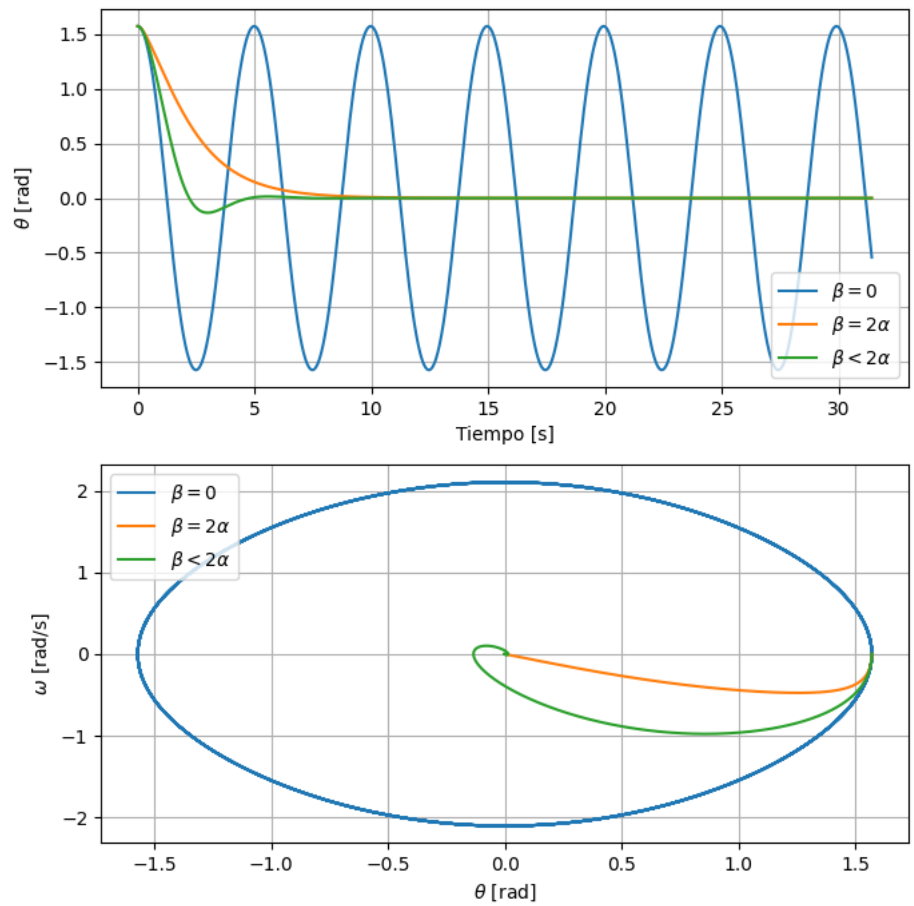

Figura 1: Gráficas de la posición contra el tiempo de las para 3 péndulos con parámetros de amortiguamiento distintos y su diagrama de fase

Discusión.

Al cambiar los valores de la constante b de amortiguamiento manteniendo una masa constante a un valor cada vez mayor el movimiento del péndulo se dificultara, llevándolo al estado de equilibro, si b es suficiente mayor que la masa incluso no se apreciarían oscilaciones por la dificultad de movimiento que genera el medio siendo de esta manera sobreamortiguado. En el caso de el diagrama de fases puede dar información valiosa sobre el comportamiento del péndulo, como lo es si se conserva la energía, como en el caso del péndulo simple que en el diagrama de fase se muestra una curva cerrada y no es así en los dos casos restantes cuando no es nula la fuerza de amortiguamiento, en estos casos se nota que se pierde energía, por esto se nota una forma de espiral tendiendo a (0,0) donde el movimiento del péndulo es nulo. Al cambia las condiciones iniciales con valores pequeños particularmente en el caso del péndulo simple es mas notorio el cambio en su velocidad angular ω, las gráficas de la posición contra el tiempo quedan prácticamente iguales pero no es así en el caso del plano de fases donde se ve aun mas alargada por los lados aun conservando su forma cerrada, solo el código al querer graficar para valores muy grandes en condiciones iniciales específicamente en la velocidad angular el código muestra que se mantiene girando como se esperaría.