Simulación de Procesos Físicos

Actividad 2.2. Sistemas masa–resorte acoplados.

Alumno: González Pérez Leonel Gerardo

Dos objetos de masa m_1 y m_2 están acoplados mediante dos resortes con constantes k_1 y k_2 respectivamente; la punta izquierda del resorte de la izquierda está fijo a una pared, como se muestra en la figura. Para agregar amortiguamiento al modelo añadimos los términos b_1x_1' y b_2x_2'. El sistema de ecuaciones

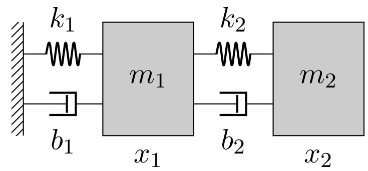

Figura 1: Esquema de los sistemas masa–resorte acoplados.

diferenciales acoplado de segundo orden para este sistema está dado por:

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{2}$$

Asumiendo que la fuerza de restauración no se comporta de manera lineal y se comporta de la siguiente manera:

$$F = -kx + \mu x^3 \tag{3}$$

Implementando la ecuación (3) en las ecuaciones (1), (2) se obtiene

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - \mu_1x_1^3 - k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(x_2 - x_1)^3 = 0 \tag{4}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) - \mu_2(x_2 - x_1)^3 = 0 \tag{5}$$

Para poder añadir el termino de forzamiento se utilizara una fuerza externa que dependa del tiempo de la siguiente manera:

$$F_e = Fcos\omega t \tag{6}$$

Añadiendo este termino a las ecuaciones (9), (10) se obtiene

$$m_1\ddot{x}_1 = -b_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + \mu_1x_1^3 + k_2(x_2 - x_1) - \mu_2(x_2 - x_1)^3 + F_1cos\omega_1 t \tag{7}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -b_2\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(x_2 - x_1)^3 + F_2cos\omega_2 t \tag{8}$$

Para poder obtener un sistema de ecuaciones de primer orden se hacen los siguientes cambios de variables

$$y_1 = \dot{x}_1, \qquad \dot{y_1} = \ddot{x}_1$$
$$y_2 = \dot{x}_2, \qquad \dot{y_2} = \ddot{x}_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento (9), (10) y despejando m_1 y m_2

$$\dot{y}_1 = -\beta_1y_1 - \alpha_1x_1 + \nu_1x_1^3 + \alpha_2(x_2 - x_1) - \nu_2(x_2 - x_1)^3 + \frac{F_1}{m_1}cos\omega_1 t \tag{9}$$

$$\dot{y}_2 = -\beta_2y_2 - \alpha_2(x_2 - x_1) + \nu_2(x_2 - x_1)^3 + \frac{F_2}{m_2}cos\omega_2 t \tag{10}$$

Donde $\beta = b/m$, $\alpha = k/m$, $\nu = \mu/m$

Instrucciones

Ejercicio 1.

- Basándose en Fay y Graham (2003), añada los términos no lineales a las ecuaciones y al código.
- Obtenga la solución numérica del ejemplo **3.1** del artículo.
- Grafique la solución y realice la gráfica de fase para la solución de ambos sistemas (ver ejemplo de las gráficas en el artículo).
- Discuta lo obtenido.

Ejercicio 2.

- Basándose en Fay y Graham (2003), añada los términos de los forzamientos a las ecuaciones y al código.
- Obtenga la solución numérica del ejemplo **4.1** del artículo.
- Grafique la solución y realice la gráfica de fase para la solución de ambos sistemas (ver ejemplo de las gráficas en el artículo).
- Discuta lo obtenido.

Código.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Definir el sistema de ecuaci nes
def Sistema(CI, t, m, b, k, mu, F, Omega):
    x1, x2, y1, y2 = CI

    M = np.array(m) # Array de las masas
    B1, B2 = 1/M*np.array(b)  # Beta
    A1, A2 = 1/M*np.array(k)  # Alpha
    N1, N2 = 1/M*np.array(mu) # Nu
    G1, G2 = 1/M*np.array(F)
    W1, W2 = Omega

    # Ecuaciones diferenciales
    dx1 = y1
    dx2 = y2
    dy1 = -B1*y1 - A1*x1 + N1*x1**3 + A2*(x2-x1) - N2*(x2-x1)**3 +G1*np.cos(W1*t)
    dy2 = -B2*y2 - A2*(x2-x1) + N2*(x2-x1)**3 + G2*np.cos(W2*t)
    return [dx1, dx2, dy1, dy2]



# Ejercicio 1
m_1 = [1,1]
b_1 = [0,0]
k_1 = [0.4, 1.808]
mu_1 = [-1/6, -1/10]
F_1 = [0, 0]
Omega_1 = [0, 0]
CI = [1, -1/2, 0, 0] # Condiciones Iniciales
t = np.linspace(0, 50, 10000)

Sol_1 = odeint(Sistema, CI, t, args=(m_1, b_1, k_1, mu_1, F_1, Omega_1))

# Graficas ejercicio 1

# Para x1
fig, ax1 = plt.subplots(2, figsize=(7, 7))

# Primer gr fica
ax1[0].plot(t, Sol_1[:, 0], 'r-')
ax1[0].set_xlabel('Tiempo [s]')
ax1[0].set_ylabel('Posici n [m]')
ax1[0].set_title(r'Gr fica para $x_{1}$')
ax1[0].grid()

# Segunda gr fica
ax1[1].plot(Sol_1[:, 0], Sol_1[:, 2], 'r-')
ax1[1].set_xlabel('Posici n [m]')
ax1[1].set_ylabel('Velocidad [m/s]')
```

```
ax1[1].set_title(r'Plano de fases para $x_{1}$')
ax1[1].grid()

fig.tight_layout()
plt.savefig('Ejercicio 1 X1.png')
plt.show(block=False)


# Para x2

fig2, ax2 = plt.subplots(2, figsize=(7, 7))

ax2[0].plot(t, Sol_1[:, 1], 'b-')
ax2[0].set_xlabel('Tiempo [s]')
ax2[0].set_ylabel('Posici n [m]')
ax2[0].set_title(r'Gr fica para $x_{2}$')
ax2[0].grid()


ax2[1].plot(Sol_1[:, 1], Sol_1[:, 3], 'b-')
ax2[1].set_xlabel('Posici n [m]')
ax2[1].set_ylabel('Velocidad [m/s]')
ax2[1].set_title(r'Plano de fases para $x_{2}$')
ax2[1].grid()

fig2.tight_layout()
plt.savefig('Ejercicio 1 X2.png')
plt.show(block=False)


# Ejercicio 2

m_2 = [1,1]
b_2 = [1/10,1/5]
k_2 = [2/5, 1]
mu_2 = [1/6, 1/10]
F_2 = [1/3, 1/5]
Omega_2 = [1, 3/5]
CI_2 = [0.7, 0.1, 0, 0] # Condiciones Iniciales
t = np.linspace(0, 150, 10000)

Sol_2 = odeint(Sistema, CI_2, t, args=(m_2, b_2, k_2, mu_2, F_2, Omega_2))

fig3, ax3 = plt.subplots(2, figsize=(7, 7))

# Para x1
ax3[0].plot(t, Sol_2[:, 0], 'r-')
ax3[0].set_xlabel('Tiempo [s]')
ax3[0].set_ylabel('Posici n [m]')
ax3[0].set_title(r'Gr fica para $x_{1}$')
ax3[0].grid()


ax3[1].plot(Sol_2[:, 0], Sol_2[:, 2], 'r-')
ax3[1].set_xlabel('Posici n [m]')
```

```
ax3[1].set_ylabel('Velocidad [m/s]')
ax3[1].set_title(r'Plano de fases para $x_{1}$')
ax3[1].grid()

fig3.tight_layout()
plt.savefig('Ejercicio 2 X1.png.png')
plt.show(block=False)


# Para x2

fig4, ax4 = plt.subplots(2, figsize=(7, 7))

ax4[0].plot(t, Sol_2[:, 1], 'b-')
ax4[0].set_xlabel('Tiempo [s]')
ax4[0].set_ylabel('Posici n [m]')
ax4[0].set_title(r'Gr fica para $x_{2}$')
ax4[0].grid()


ax4[1].plot(Sol_2[:, 1], Sol_2[:, 3], 'b-')
ax4[1].set_xlabel('Posici n [m]')
ax4[1].set_ylabel('Velocidad [m/s]')
ax4[1].set_title(r'Plano de fases para $x_{2}$')
ax4[1].grid()

fig4.tight_layout()
plt.savefig('Ejercicio 2 X2.png.png')
plt.show()
```

Gráficas.

Gráficas del ejercicio 1

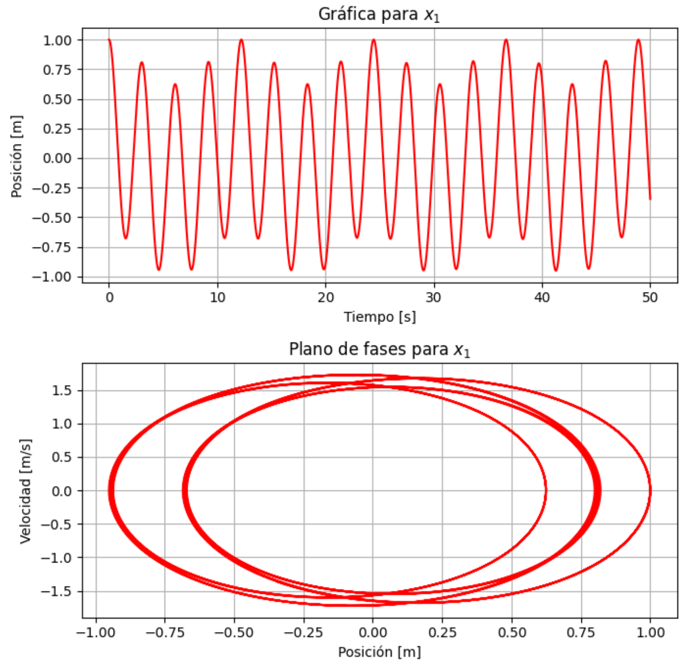

Figura 2: Plano de fase y gráfica de x_1 de la solución numérica

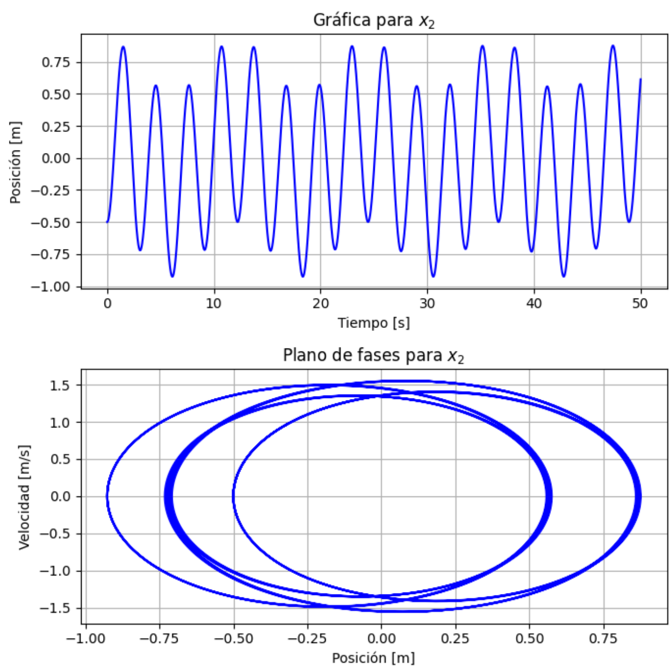

Figura 3: Plano de fase y gráfica de x_2 de la solución numérica

Gráficas del ejercicio 2

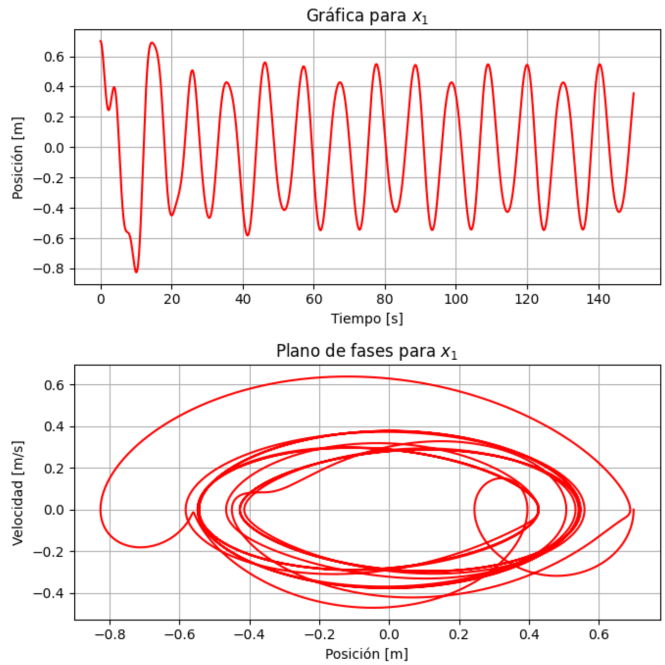

Figura 4: Plano de fase y gráfica de x_1 de la solución numérica

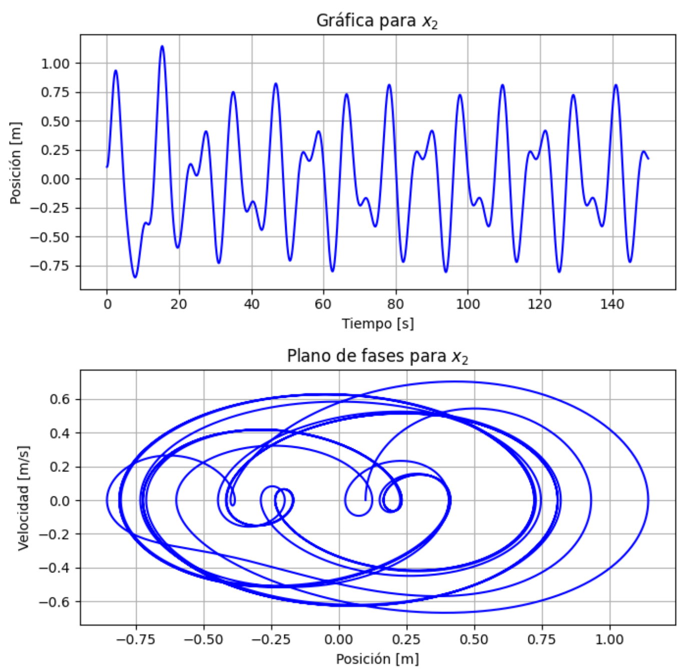

Figura 5: Plano de fase y gráfica de x_2 de la solución numérica

Discusión.

En el código se definió el sistema de ecuaciones mas general que es el del ejercicio 2 donde se considera la fuerza de forzamiento siendo un caso especial el ejercicio 1 para cuando estas fuerzas son nulas. Con esto las gráficas del ejercicio 1 muestran como es esperado por los parámetros utilizados que su movimiento no es amortiguado y solo siguen el movimiento regido por la fuerza no linear, además se muestra que tienen unas oscilaciones en magnitud parecida como si oscilaran a una frecuencia similar a pesar de las diferentes condiciones iniciales y parámetros, en el caso de los planos de fase se notan que tienen la similitud de tener una curva que genera tipo elipses. En el caso del ejercicio 2 para el caso para ambas masas se puede notar que a pesar de que haya una fuerza de amortiguamiento esta no frena el movimiento debido a que las fuerzas de forzamiento en las masa contrarrestan esta perdida de energía, y ambas gráficas de la posición tienen un efecto transitorio que es notorio en el inicio de las oscilaciones pero a lo largo del tiempo es opacado por el movimiento del péndulo, esto se pude ver relacionado con las frecuencias de las fuerzas de forzamiento y la frecuencia de oscilación natural de ambas masas. En el caso de los plano de fase es notorio que no es regular pero si sigue un ciclo que se desplaza como se ve en el caso para la masa 2, en cambio la masa 1 no deja menos claro como puede ser su comportamiento con esta gráfica.