Mathematik I

https://vfhgdm1.eduloop.de

Stand 2024-03-15 11:14:49

Inhalt

Anhang

Mathematik I

Gliederung

Hinweis

Das Erstellen der PDF-Version dieses Moduls kann etwas dauern.

1 Mengen

Gliederung

In diesem Abschnitt lernen Sie die Grundbegriffe der Mengenlehre kennen.

- Sie lernen, wie man Mengen darstellen kann.
- Sie lernen die grundlegenden Zahlenmengen der Mathematik sowie die Intervallschreibweise kennen.
- Sie lernen die wichtigsten Mengenoperationen (Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Differenzmenge, Komplementmenge, Potenzmenge, kartesisches Produkt) kennen.
- Sie lernen den Binomialkoeffizienten, einen wichtigen Begriff der Kombinatorik, kennen.

Lernziele

Wenn Sie diesen Abschnitt bearbeitet haben, können Sie

- die Mengenschreibweise lesend und schreibend korrekt verwenden;
- Ausdrücke mit Mengen und Mengenoperationen korrekt interpretieren;
- Mengen aus vorgegebenen Grundmengen mithilfe der Mengenoperationen zusammensetzen;
- Mengendiagramme in Mengenausdrücke umwandeln und umgekehrt;
- Binomialkoeffizienten korrekt per Hand berechnen.

1.1 Notation

Zwei Arten, Mengen darzustellen

Eine Menge kann durch Aufzählung ihrer Elemente, eingeschlossen in geschweifte Klammern, dargestellt werden. Die Elemente werden durch Komma getrennt.

Beispiel

Einige Beispiele:

a) $F = \{\text{rot}, \text{blau}, \text{gelb}\}$

b) $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

c) $G = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Hinweis zur Schreibweise

Enthält eine Menge Dezimalzahlen mit Dezimalkomma, dann kann es schnell unübersichtlich werden: {2,5, 3,7, 4,0}.

In solchen Fällen ist es ratsam, das Komma, das die Elemente der Menge trennt, durch ein Semikolon ersetzen: {2,5; 3,7; 4,0}.

Da in diesem Skript jedoch nur sehr selten Dezimalzahlen vorkommen, wird stets das Komma als Trennzeichen in Mengen verwendet.

Wichtig

Folgendes ist bei Mengen zu beachten:

- Mengen enthalten keine Doppelvorkommen.
- Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle.

So ist etwa

$$\{\text{rot}, \text{blau}, \text{gelb}\} = \{\text{blau}, \text{gelb}, \text{rot}\}\,.$$

Wir schreiben $x \in M$, wenn x ein Element der Menge M ist, andernfalls $x \notin M$. Im obigen Beispiel ist also $13 \in P$ und $13 \notin G$. Wie Sie an dem Beispiel schon sehen, wählen wir stets Großbuchstaben, um Mengen zu bezeichnen.

Frage

Erkennen Sie einen grundlegenden Unterschied zwischen den Mengen F und P einerseits und der Menge G andererseits?

Lösung

Die beiden erstgenannten Mengen sind endlich, die Menge G hingegen ist unendlich.

Mengen können alle möglichen Objekte als Elemente enthalten, auch Mengen selbst können als Elemente von Mengen auftreten, etwa:

$$M = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Man spricht in einem solchen Fall auch von einer «geschachtelten Menge».

Die Darstellung einer Menge M durch Aufzählung der Elemente ist nur dann vollständig möglich, wenn die Menge M endlich ist und nicht allzu viele Elemente hat. Oft kann man sich durch die Auslassungszeichen (die Pünktchen) behelfen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Darstellung dem Leser oder der Leserin eindeutig vermittelt, wie es weitergeht. So ist etwa eine Mengenbeschreibung der Art $M = \{1, 2, \dots\}$ wenig hilfreich.

Frage

Sei $M = \{1, 2, \dots\}$.
Geben Sie zwei Möglichkeiten an, wie es weitergehen könnte.

Lösung

Es könnten sowohl die natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4, 5, ... als auch die Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... gemeint sein.

Aber auch wenn eine bestimmte Menge endlich ist, kann eine Aufzählung ihrer Elemente schwierig werden. Sei etwa S die Menge der an der Technischen Hochschule Brandenburg zum Sommersemester 2016 immatrikulierten Studierenden. Die Menge ist dadurch eindeutig beschrieben, aber aufzählen kann ich sie nicht, weil ich bei Weitem nicht alle Namen kenne.
Als alternative Darstellungsform einer Menge bietet sich die Beschreibung durch eine Eigenschaft an: Alle x, die eine bestimmte Bedingung erfüllen. So lässt sich die Menge G von oben beispielsweise auch wie folgt beschreiben:

$$G = \{x \,|\, x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist gerade}\}$$

(lies: «Menge aller x, für die gilt: x ist eine natürliche Zahl und x ist gerade», oder kurz «Menge aller geraden natürlichen Zahlen»).

Entsprechend können wir die Menge S von oben beschreiben durch

$$G = \{x \,|\, x \text{ ist im Sommersemester 2016 an der THB immatrikuliert}\}$$

Wichtig dabei ist, dass der Ausdruck, der rechts vom senkrechten Strich steht, ein Ausdruck ist, der für jedes einzelne x mit «ja» oder «nein» (bzw. mit «wahr» oder «falsch») beantwortet werden kann.

Frage

Stellen Sie die obige Menge P in dieser Form dar.

Lösung

P ist die Menge aller Primzahlen kleiner als 20. Das können wir so schreiben: $P = \{x \,|\, x \text{ ist Primzahl und } x < 20\}$

Wenn Sie eine eigene «Konstruktion» der Form $\{x \mid ...\}$ prüfen wollen, rate ich Ihnen, sich das, was Sie geschrieben haben, laut vorzulesen. Und zwar stets in der Form: «Menge aller x für die gilt ...».

Testen Sie dies mit folgendem Beispiel:

$$\{x \mid x+3\}$$

Lesen Sie sich das laut vor:

«Menge aller x, für die gilt $x+3$».

Merken Sie, dass da etwas nicht stimmt? Der Ausdruck $x+3$ ist kein Ausdruck, der für ein konkretes x mit «ja» oder «nein» beantwortet werden kann.

Die leere Menge

Wie Sie wissen, kann eine quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung haben, je nachdem, ob in der p-q-Formel der Term unter der Wurzel positiv, Null oder negativ ist. Ungleichungen wie $2x < 8$ können sogar unendlich viele Lösungen haben. Aus diesem Grund geben wir die Lösung(en) als Lösungs**menge** (d.h., Menge aller Lösungen der Gleichung oder Ungleichung) an.

Was ist die Lösungsmenge der Ungleichung $x > x+1$?

Nun, die Ungleichung hat offenbar keine Lösung. Wir sagen, die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist die **leere Menge**, das ist die Menge, die kein Element enthält. Diese Menge wird alternativ $\emptyset$ oder $\{\}$ geschrieben. In diesem Skript werden je nach Kontext beide Symbole benutzt.

Die Mächtigkeit einer Menge

Ist M eine endliche Menge, so bezeichnet $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente. Für die ganz oben definierten Mengen gilt also $|F| = 3$ und $|P| = 8$. Ferner ist $|\emptyset| = 0$.

Der Ausdruck $|M|$ wird auch **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** von M genannt.

Die Grundmenge

In vielen Fällen bezieht man sich auf eine aus dem Kontext gegebene Grundmenge. Für das Lösen von quadratischen Gleichungen etwa braucht man im Allgemeinen reelle Zahlen. Wenn die Grundmenge aus dem Kontext ersichtlich ist, kann man sie in der Mengenbeschreibung weglassen. So kann man etwa im obigen Beispiel kurz $G = \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$ schreiben, wenn klar ist, dass es um natürliche Zahlen geht.

Mengengleichheit und Teilmenge

Zwei Mengen A und B sind **gleich** ($A = B$), wenn sie die selben Elemente enthalten.

Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, geschrieben $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Beachten Sie: Dies schließt nicht aus, dass die Mengen auch gleich sein können!

Wichtig

Für alle Mengen A gilt:

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$

Die Aussage $\emptyset \subseteq A$ kann man sich wie folgt klarmachen: $A \subseteq B$ heißt, dass jedes Element von A auch Element von B ist. Anders formuliert: Es gibt kein Element von A, das nicht Element von B ist. Mit dieser Formulierung wird es klarer, dass die leere Menge Teilmenge jeder Menge A ist.

Die Menge $G = \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, also $G \subseteq \mathbb{N}$. Allerdings ist G nicht gleich $\mathbb{N}$.

Will man allgemein betonen, dass A eine Teilmenge von B ist und A und B nicht gleich sind, so schreibt man $A \subset B$ (lies: «A ist echte Teilmenge von B».

Hinweis

Das Verhältnis von $\subset$ zu $\subseteq$ ist das gleiche wie das von $<$ zu $\leq$.

Oben haben wir gesagt: Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten. Anders formuliert: Jedes Element von A kommt auch in der Menge B vor und jedes Element von B kommt auch in A vor. Das kann man auch so formulieren:

Wichtig

Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Sind A und B endliche Mengen, so gilt offenbar:

- Aus $A = B$ folgt $|A| = |B|$.
- Aus $A \subseteq B$ folgt $|A| \leq |B|$.
- Aus $A \subset B$ folgt $|A| < |B|$.

Frage

Sei $M = \{a, \{b, c\}\}$. Was ist richtig, was ist falsch?

1.) $a \in M$.

2.) $b \in M$.

3.) $a \subseteq M$

4.) $\{a\} \subseteq M$

5.) $\{b, c\} \in M$

6.) $\{b, c\} \subseteq M$

Lösung

Richtig: 1), 4) und 5)

Die obige Festlegung, wann zwei Mengen gleich sind, klingt einfach. In der Praxis kann die Prüfung auf Gleichheit jedoch durchaus aufwendig werden. Betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel

Der örtliche Handballverein und der Schachclub sollen organisatorisch zusammengelegt werden. Der Schatzmeister des Handballvereins sagt: «Ich glaube, die beiden Vereine haben sowieso genau die selben Mitglieder.»

Um das zu überprüfen, vergleicht er die beiden Mitgliederlisten. Dummerweise führen beide Vereine ihre Mitglieder nicht im Computer, sondern auf Papier. Außerdem sind sie nicht alphabetisch sortiert, sondern nach Mitgliedsnummern.

Mathematisch formuliert: Wir haben zwei Mengen, H (Handballverein) und S (Schachclub) und wollen wissen, ob $H = S$ gilt. Frage: Wie würden Sie diese Überprüfung durchführen?

Lösung

Ich würde zuallererst die Mitglieder jedes Vereins zählen (d.h., ich würde überprüfen, ob $|H| = |S|$ gilt). Falls die beiden Anzahlen nicht gleich sind, weiß ich sofort, dass die beiden Mengen nicht gleich sind. Sind sie gleich, so reicht es aus, die Liste von H Mitglied für Mitglied durchzugehen, und jeweils zu prüfen, ob das Mitglied auch Mitglied in S ist.

1.2 Komplizierte Ausdrücke verstehen

Schauen Sie sich dazu das folgende Video an!

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Komplizierte_Ausdr%C3%BCcke_verstehen

Die Sprache der Mathematik

1.3 Zahlenmengen der Mathematik

Zahlenmengen

In der Mathematik arbeiten wir mit folgenden Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen inklusive der Null
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	nicht-negative reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

Die natürlichen, ganzen, rationalen und die reellen Zahlen sind Schulstoff und werden hier als bekannt vorausgesetzt. Die komplexen Zahlen habe ich nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Sie sind weder Schulstoff noch Gegenstand dieses Skripts.

Die ganzen Zahlen entstehen durch Erweiterung der natürlichen Zahlen (um die 0 und die negativen Zahlen); die rationalen Zahlen entstehen durch Erweiterung der ganzen Zahlen (um die echten Brüche) usw. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Es heißt oft, in der Informatik bestehe alles nur aus 0 und 1. Da ist zweifellos etwas dran, und aus diesem Grund geben wir der Menge {0, 1} auch ein Symbol. Wir definieren:

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Hinweis

Die Wahl des Buchstabens $\mathbb{B}$ hat zwei Gründe: Zum einen stehen die Werte 0 und 1 in der Aussagenlogik für die Wahrheitswerte «wahr» und «falsch», und diese werden auch Boolesche Werte genannt (nach dem englischen Mathematiker George Boole). Die meisten Programmiersprachen haben einen Datentyp «boolean», der die logischen Werte wahr / falsch bzw. 1 / 0 bezeichnet. Der zweite Grund für den Buchstaben B ist der Bezug zu dem Begriff «Binärsystem».

Intervalle

Bei Intervallen können wir unterscheiden zwischen einem Intervall in den ganzen Zahlen und einem Interval in den reellen Zahlen.

Intervall in den ganzen Zahlen

Seien a und b ganze Zahlen. Der Ausdruck $[a{:}b]$ bezeichnet die Menge aller ganzen Zahlen zwischen a und b (jeweils einschließlich).

Dies kann auch so geschrieben werden:

$$[a{:}b] := \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } a \leq n \leq b\}$$

Intervall in den reellen Zahlen

In den reellen Zahlen gibt es folgende Möglichkeiten, Intervalle darzustellen (die Kennzeichnung $x \in \mathbb{R}$ lassen wir weg!):

$[a,b] :=$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$(a,b) :=$	$\{x \mid a < x < b\}$
$(a,b] :=$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$[a,b) :=$	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$(-\infty,b] :=$	$\{x \mid x \leq b\}$	$(-\infty,b) :=$	$\{x \mid x < b\}$
$[a,\infty) :=$	$\{x \mid a \leq x\}$	$(a,\infty) :=$	$\{x \mid a < x\}$

? Frage

Was ist der Unterschied zwischen der runden und der eckigen Klammer?

Lösung

Bei $[a,b]$ sind die beiden Eckpunkte a und b im Intervall enthalten, bei (a,b) sind sie nicht darin enthalten.

Beachten Sie:

Ganzzahlige Intervalle werden mit dem Doppelpunkt, reelle Intervalle mit dem Komma (oft auch Semikolon) geschrieben.

Hinweis zum Symbol ∞ :

Das Zeichen ∞ steht in der Mathematik für «unendlich». Es handelt sich dabei jedoch nicht um eine Zahl, mit der man rechnen kann! Bei dem Symbol ∞ steht stets eine runde Klammer.

1.4 Mengenoperationen

Die im Folgenden definierten Mengenoperationen sollen anhand von drei Beispielgruppen verdeutlicht werden.

Gruppe 1 (Buchstabenmengen):

$$M_1 = \{a, b, c, d\}$$

$$M_2 = \{b, d, e, f\}$$

$$M_3 = \{e, f, g\}$$

Gruppe 2 (reelle Zahlenintervalle):

$$I = [-2, 4]$$

$$J = [3, \infty)$$

Gruppe 3 (Studierende): An der Henrik-Abel-Universität (HAU) seien in verschiedenen Studiengängen Studierende unterschiedlicher Nationalität eingeschrieben. Seien

M = Menge der Mathematikstudierenden (kurz: «die Mathematiker»)

P = Menge der polnischen Studierenden (kurz: «die Polen»)

Die Schnittmenge

Die Schnittmenge zweier Mengen A und B, geschrieben $A \cap B$, ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Beispiel

Beispiele Gruppe 1:

$$M_1 \cap M_2 = \{b, d\}$$

$$M_1 \cap M_3 = \emptyset$$

Beispiele Gruppe 2:

$$I \cap J = [3, 4]$$

Beispiele Gruppe 3:

$M \cap P =$ Menge der polnischen Mathematiker.

Die beiden Mengen M_1 und M_3 haben offenbar keine gemeinsamen Elemente. Man sagt, die beiden Mengen sind disjunkt.

Definition

Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, das heißt, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Die Schnittmenge kann auch von mehr als zwei Mengen gebildet werden. Der Operator $\cap$ ist dabei assoziativ zu verstehen. Das heißt beispielsweise, dass

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

gilt. Da es auf die Klammerung nicht ankommt, verzichten wir im Allgemeinen auf die Klammern. Die Menge $A \cap B \cap C$ besteht aus denjenigen Objekten, die in allen drei Mengen (A, B und C) vorkommen.

Die Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B, geschrieben $A \cup B$, ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B (oder in beiden)

Hinweis

Das Wort «oder» ist in der Mathematik stets inklusiv gemeint, also nicht wie «entweder ... oder» zu verstehen. Siehe auch Die Disjunktion

enthalten sind.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Beispiel

Beispiel Gruppe 1:

$$M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Beispiel Gruppe 2:

$$I \cup J = [-2, \infty)$$

Beispiel Gruppe 3:

$M \cup P$ enthält alle Polen und alle Mathematiker.

Frage

An der HAU gibt es 30 polnische Studierende sowie 180 Mathematiker. Von diesen 180 sind 10 Polen. Berechnen Sie $|M \cup P|$.

Lösung

Es sind 180 + 30 - 10 = 200 Personen. Die 10 polnischen Mathematiker muss man von der Summe 180 + 30 abziehen, weil sie doppelt gezählt wurden.

Allgemein gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Ebenso wie für die Schnittmenge lässt sich auch die Vereinigungsmenge von mehr als zwei Mengen bilden.

Die Differenzmenge

Die Differenzmenge zweier Mengen A und B, geschrieben $A - B$, ist die Menge aller Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind. Die Differenzmenge wird oft auch $A \backslash B$ geschrieben. In diesem Text wird ausschließlich das Minuszeichen verwendet.

$$A - B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Beispiel

Beispiele Gruppe 1:

$$M_1 - M_2 = \{a, c\}$$

$$M_2 - M_1 = \{e, f\}$$

Beispiel Gruppe 2:

$$I - J = [-2, 3)$$

$$J - I = (4, \infty)$$

Warum steht bei $I - J$ rechts eine runde Klammer?

Antwort

Das Intervall J enthält die Zahl 3. Wenn ich das Intervall J aus I herausnehme, dann nehme ich auch die Zahl 3 heraus.

Beispiele Gruppe 3:

$M - P$ = alle nicht-polnischen Mathematiker

$P - M$ = alle Polen, die nicht Mathematik studieren

Aufgabe

Zwischenaufgabe 1.1

Berechnen Sie $|P - M|$ mit den Zahlen aus der obigen Aufgabe!

Lösung

Es gibt 30 - 10 = 20 polnische Nicht-Mathematiker.

Allgemein gilt:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|.$$

Die Komplementmenge

Die Komplementmenge (meist kurz *das Komplement* genannt) nimmt Bezug auf eine (im Allgemeinen durch den Kontext gegebene) Grundmenge (hier U genannt, U steht für «Universalmenge»).

In den Beispielen der Gruppe 1 könnte U die Menge aller Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets sein, in Gruppe 2 ist U die Menge der reellen Zahlen, in Gruppe 3 die Menge aller Studierenden der HAU.

Die Komplementmenge $\overline{A}$ der Menge A ist wie folgt definiert:

$$\overline{A} = \{x \,|\, x \notin A\} = U - A\,.$$

Beispiel

Beispiel Gruppe 1:

$$\overline{M_1} = \{e, f, g, h, \ldots, z\}$$

Beispiele Gruppe 2:

$$\overline{I} = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

$$\overline{J} = (-\infty, 3)$$

Beispiele Gruppe 3:

$\overline{P}$ = alle HAU-Studierenden außer den Polen

$\overline{M}$ = alle HAU-Studierenden außer den Mathematikern

Frage

a) Was ist das Komplement der Menge G der geraden natürlichen Zahlen?

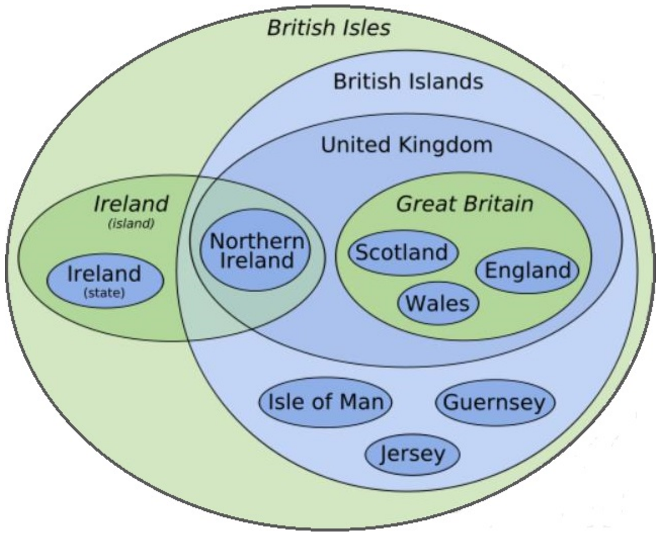
b) Was ist $\overline{\overline{A}}$ (das Komplement des Komplements)?

Lösung

a) Die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

b) $\overline{\overline{A}} = A$

1.5 Mengendiagramme



Mengendiagramm der Britischen Inseln

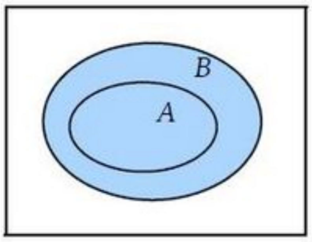
Die obige Abbildung zeigt, wie Mengen mithilfe von Diagrammen dargestellt werden können. Wenn Sie nun einwenden, dass beispielsweise Schottland oder Jersey keine Menge ist, so stellen Sie sich diese Länder einfach als Menge von Menschen vor, die in dem betreffenden Land geboren sind.

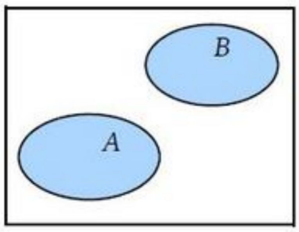
Mithilfe dieses Diagramms kann u.a. man auf den ersten Blick erkennen, dass...

- ...Großbritannien eine Teilmenge des Vereinigten Königreichs ist,
- ...die drei Kanalinseln nicht zum Vereinigten Königreich gehören (und somit erst recht nicht zu Großbritannien),
- ... Nordirland sowohl zur Insel Irland als auch zum Vereinigten Königreich gehört, jedoch nicht zu Großbritannien,
- usw.

Diagramme dieser Art heißen Euler-Diagramme oder Venn-Diagramme (tatsächlich gibt es einen geringfügigen Unterschied zwischen den beiden. Wenn Sie mehr darüber wissen wollen, schlagen Sie bei Wikipedia nach). Diese Diagramme können sehr hilfreich sein, um Beziehungen zwischen Mengen zu veranschaulichen.

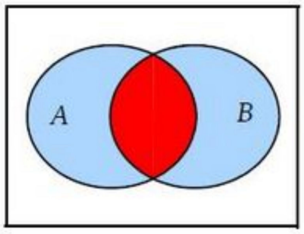
Die beiden folgenden Abbildungen veranschaulichen mögliche Beziehungen zwischen zwei Mengen A und B. Das umgebende Fensterrechteck stellt jeweils die Universalmenge U dar.

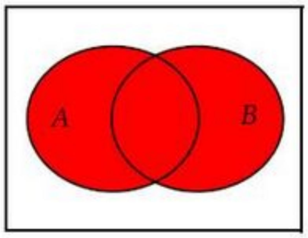




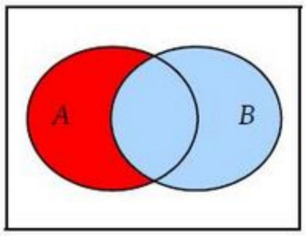
"'`UNIQ--postMath-00000004-QINU`"' "'`UNIQ--postMath-00000005-QINU`"'

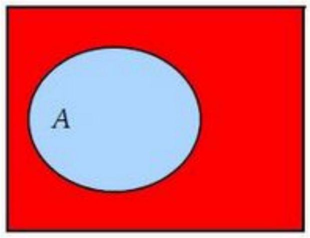
Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die Mengenoperationen. Die von dem jeweiligen Mengenausdruck dargestellte Menge ist jeweils rot gefärbt.





"'`UNIQ--postMath-00000006-QINU`"' "'`UNIQ--postMath-00000007-QINU`"'



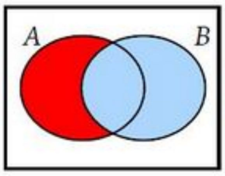


"'`UNIQ--postMath-00000008-QINU`"' "'`UNIQ--postMath-00000009-QINU`"'

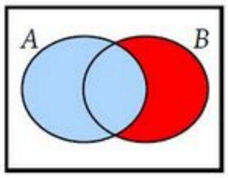
Mithilfe von Mengendiagrammen kann man beispielsweise veranschaulichen, dass

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

gilt:

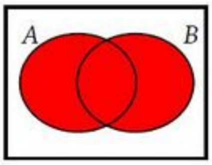


'"`UNIQ--postMath-0000000B-QINU`"'

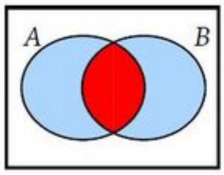


'"`UNIQ--postMath-0000000C-QINU`"'

'"`UNIQ--pc



'"`UNIQ--postMath-0000000E-QINU`"'



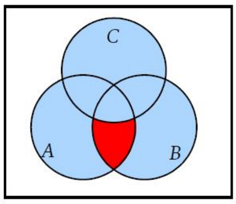
'"`UNIQ--postMath-0000000F-QINU`"'

'"`UNIQ--pc

Aufgabe

Zwischenaufgabe 1.2

Geben Sie die in der Abbildung rot schraffierte Menge unter Verwendung der Mengen A, B und C sowie der Mengenoperationen an.



Lösung

$(A \cap B) - C$

1.6 Die Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge M wird geschrieben $\mathcal{P}(M)$ (manchmal findet man auch die Schreibweise 2^M) und ist definiert als die Menge aller Teilmengen von M.

Am besten stellen Sie sich das so vor: Sie haben einen Gutschein für maximal 3 Bücher Ihrer Wahl aus einer Gesamtliste von 3 Büchern. Nennen wir die Bücher A, B, C (Ich gebe zu, das sind ziemlich einfallslose Titel! Aber einen Roman namens "F" gibt es tatsächlich !!). Sie packen die ausgewählten Bücher in Ihren Einkaufskorb.

Welche Möglichkeiten gibt es, den Korb zusammenzustellen?

Sie können z.B. alle 3 Bücher A, B und C einpacken. Sie können A und C reinlegen. Oder vielleicht interessiert Sie kein einziges der drei Bücher, also packen Sie gar nichts ein.

Hier folgt eine Aufzählung aller Möglichkeiten (jeder mögliche Einkaufskorb ist eine Menge):

{A, B, C}

{A, B}

{A, C}

{B, C}

{A}

{B}

{C}

{}

Die letzte Zeile ist der leere Einkaufskorb (= die leere Menge). Nun packen wir alle möglichen Einkaufskörbe in einen großen Korb zusammen und erhalten die folgende Menge:

{{A, B, C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A}, {B}, {C}, {}}

Das ist die Potenzmenge von M = {A, B, C}, geschrieben $\mathcal{P}(M)$.

Zum besseren Verständnis:

{ {A, B, C} , {A, B} , {A, C} , {B, C} , {A} , {B} , {C} , {} }

Die Potenzmenge des vorangegangenen Beispiels ist durch die beiden großen geschweiften Klammern außen eingerahmt. Sie besteht aus insgesamt acht Elementen, jedes Element ist hier gelb hervorgehoben und stellt für sich betrachtet wieder eine Menge dar. Die Potenzmenge ist somit eine Menge, deren Elemente wiederum Mengen sind.

Definition

Sei A eine Menge. Die **Potenzmenge** von A, geschrieben $\mathcal{P}(A)$, ist die Menge aller Teilmengen von A. Mit anderen Worten:

$X \in \mathcal{P}(A)$ genau dann, wenn $X \subseteq A$.

Daraus folgt nach Abschnitt 1.1:

Wichtig

Für alle Mengen A gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 1.3

Machen Sie dasselbe, wenn es sich nur um zwei Bücher A und B handelt! Mit anderen Worten, berechnen Sie die Potenzmenge der Menge M = {A, B}.

Lösung

Es ist $\mathcal{P}(M) = \{\{A, B\}, \{A\}, \{B\}, \{\}\}$

Mächtigkeit der Potenzmenge

! Wichtig

Es gilt: Eine Menge von n Elementen hat 2^n verschiedene Teilmengen. Mathematisch kurz und bündig ausgedrückt:

Ist $|M| = n$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Es geht sogar noch kürzer (aber dafür umso schwerer lesbar!):

$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Also: Eine Menge mit 3 Elementen hat $2^3 = 8$ Teilmengen (siehe oben), eine Menge mit 4 Elementen hat 16 Teilmengen usw.

Wie lässt sich das erklären?

Bleiben wir beim Beispiel mit den drei Büchern. Wir können jede mögliche Auswahl mit einem einfachen Code notieren: Für jedes Buch A, B oder C schreiben wir eine 1, wenn das Buch eingepackt ist, eine 0, wenn es nicht eingepackt ist. Und das in der festen Reihenfolge ABC. Sind alle 3 eingepackt, so ist dies 111. Sind A und C eingepackt, B aber nicht, so ist dies 101 usw. Also:

111 = {A, B, C}

110 = {A, B}

101 = {A, C}

...

000 = {}

Die Anzahl aller Teilmengen der Menge mit 3 Elementen entspricht also der Menge aller Binärwörter mit drei Bit (000 bis 111), und das sind $2^3 = 8$.

Und allgemein bei einer Menge von n Elementen entspricht dies der Menge aller Binärwörter mit n Bit und davon gibt es 2^n.

?

Wozu ist es gut, zu wissen, dass eine Menge mit n Elementen 2^n Teilmengen hat?

Frage

Lösung

Stellen Sie sich vor, Sie müssten (z.B. in der Klausur) alle Teilmengen einer Menge mit 10 Elementen aufzählen. Dann ist es gut zu wissen, dass es 1024 Elemente sein müssen, denn auf diese Weise können Sie Ihr Ergebnis kontrollieren. Haben Sie weniger als 1024, so haben Sie etwas vergessen. Haben Sie mehr als 1024, so haben Sie Dubletten drin.

? Frage

Was ist wohl $\mathcal{P}(\{\})$?

Lösung

Nein, $\mathcal{P}(\{\}) = \{\}$ (falls Sie das dachten), kann nicht sein. Warum nicht? Ganz einfach:

$$|\mathcal{P}(\{\})| = 2^0 = 1\,, \text{ aber } |\{\}| = 0\,,$$

also kann $\mathcal{P}(\{\})$ nicht gleich $\{\}$ sein. Was ist es dann? Ganz einfach:

$$\mathcal{P}(\{\}) = \{\{\}\},$$

das ist die Menge, die die leere Menge als einziges Element enthält.

1.7 Binomialkoeffizienten

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Das wurde im vorigen Abschnitt mit einem Einkaufskorb illustriert, in den man eine beliebige Auswahl von Büchern aus einer vorgegebenen Menge hineinlegen durfte.

Nun variieren wir die Situation etwas: Sie sollen aus einer Liste von 5 Büchern genau 3 Bücher (nicht mehr, aber auch nicht weniger) auswählen und in ihren Korb legen. Die Bücher heißen wieder ziemlich einfallslos A, B, C, D und E.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 1.4

Zählen Sie sämtliche Möglichkeiten in Form von Mengen auf!

Lösung

{A,B,C},{A,B,D},{A,B,E},{A,C,D},{A,C,E},{A,D,E},
{B,C,D},{B,C,E},{B,D,E}, {C,D,E}

Also insgesamt 10 Möglichkeiten, 3 Bücher aus einer Gesamtheit von 5 auszuwählen.

Wir interessieren uns nun nicht für die vielen konkreten Einkaufskörbe, sondern nur für deren Anzahl. Also: Wie viele Möglichkeiten gibt es,... Das mathematische Gebiet, das sich fast ausschließlich mit dieser Frage (in unterschiedlichen Varianten) beschäftigt, heißt Kombinatorik.

In der Sprache der Mengenlehre können wir unsere obige Frage wie folgt formulieren: Gegeben ist eine Menge M mit 5 Elementen. Wie viele Teilmengen der Mächtigkeit 3 hat M?

Beispiel

Dasselbe Beispiel mit anderen Zahlen: Gegeben ist eine Menge M mit 49 Elementen. Wie viele Teilmengen der Mächtigkeit 6 hat M?

Kommen Ihnen die Zahlen bekannt vor? 6 aus 49... Die Frage lautet also: Wie viele Ergebnismöglichkeiten gibt es im Zahlenlotto 6 aus 49? Ich will es Ihnen gleich verraten: Es sind knapp 14 Millionen Möglichkeiten. Und eine davon ist mein Lottotip vom letzten Samstag.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den knapp 14 Millionen Möglichkeiten ausgerechnet meine 6 Zahlen alle richtig sind? Nun ja, 1:14 Millionen, das ist ungefähr 0,000007 % und das ist nun wirklich nicht gerade viel.

Definition

Seien n und k nichtnegative ganze Zahlen mit $k \leq n$. Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Beispiel

Wir berechnen den Binomialkoeffizienten $\binom{8}{3}$. Es ist

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Es ist kein Zufall, dass in diesem Beispiel der gesamte Ausdruck $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ gekürzt werden kann. Das ist immer so. Daher kann man statt der etwas umständlichen Formel aus der obigen Definition die folgende etwas etwas handlichere Form benutzen:

Wichtig

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

Dabei ist zu beachten, dass im Zähler und im Nenner des Bruchs die gleiche Anzahl von Faktoren, nämlich jeweils k stehen.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 1.5

Berechnen Sie $\binom{10}{4}$!

Lösung

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210\,.$$

Der Binomialkoeffizient ist unsere Antwort auf die obige Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten.

Wichtig

Eine Menge M mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen der Mächtigkeit k.

Mit anderen Worten: Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus einer Gesamtheit von n Objekten k Objekte auszuwählen.

Dies hat insbesondere zur Folge, dass der Binomialkoeffizient stets eine natürliche Zahl ist, denn er bezeichnet ja eine Anzahl von Möglichkeiten. Dies heißt, dass sich der Nenner in der Berechnungsformel für Binomialkoeffizienten stets komplett wegkürzen lässt!

Sei M eine beliebige Menge mit n Elementen. Dann hat M genau eine Teilmenge mit 0 Elementen (die leere Menge) und genau eine Teilmenge mit n Elementen (M selbst). Daher gilt:

Wichtig

Für beliebiges n gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Kommen wir zurück zu dem obigen Beispiel mit der Auswahl 3 Bücher aus der Liste A, B, C, D, E. Im vorigen Abschnitt haben wir eine Auswahl aus einer Gesamtheit mit einem einfachen 0/1-Code notiert: Für jedes Buch schreiben wir eine 1, wenn das Buch eingepackt ist, eine 0, wenn es nicht eingepackt ist. Und das in der festen Reihenfolge ABCDE. Die verschiedenen Dreier-Einkaufskörbe sind dann in dieser Notation:

11100, 11010, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111

Es handelt sich also um sämtlich 5-Bit-Binärwörter mit 3 Einsen (und damit 2 Nullen).

Wichtig

Die Anzahl der n-Bit-Binärwörter mit genau k Einsen (und somit $n-k$ Nullen) beträgt $\binom{n}{k}$.

Offensichtlich läuft es auf das Gleiche hinaus, ob ich k Bücher auswähle, die ich mitnehmen möchte, oder ob ich $n-k$ Bücher auswähle, die ich verwerfe. Daher muss die Anzahl der Möglichkeiten, k Bücher auszuwählen, gleich der Anzahl der Möglichkeiten sein, $n-k$ Bücher auszuwählen:

Wichtig

Es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dieser Satz ist dann hilfreich bei der Berechnung von Binomialkoeffizienten, wenn der Wert von k größer als $\frac{n}{2}$ ist.

Beispiel

Wir berechnen $\binom{10}{8}$ und benutzen dafür den Satz von eben. Statt 8 Faktoren im Zähler und im Nenner haben wir dann nur noch jeweils 2:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

1.8 Das kartesische Produkt

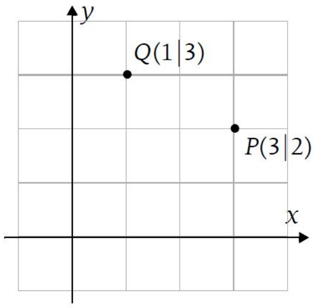
Paare, Tripel und Quadrupel

Ein **Paar** (a, b) ist eine geordnete Menge, bei der Doppelvorkommen erlaubt sind.

Eine Platzkarte im Kino oder Theater etwa besteht aus der Angabe der Reihe und des Platzes in der Reihe: Reihe 7, Platz 3. Das ist natürlich etwas anderes als Reihe 3, Platz 7.
Auch Doppelvorkommen sind erlaubt: Reihe 7, Platz 7.

Auch beim Schachbrett gibt es eine ähnliche Nummerierung der Felder: Die Reihen werden mit den Buchstaben a, b,..., h durchnummeriert, die Spalten mit den Zahlen 1 bis 8.

Damit kann jedes Feld mit einem Paar (Reihe, Spalte) nummeriert werden, von (a, 1) (links unten) bis (h, 8) (rechts oben). Allerdings schreibt man das nicht so umständlich, sondern verzichtet auf die umschließenden Klammern und das Komma als Trennzeichen, etwa e4 statt (e, 4).



In der Mathematik werden Zahlenpaare als Koordinaten für Punkte in der Ebene verwendet (siehe Abb. rechts). Dort kann man auf die Klammern und das Trennzeichen jedoch nicht verzichten.

Für räumliche Koordinaten benötigt man entsprechend drei Komponenten, etwa P(3|-1|5).

Ein solches Objekt aus 3 Komponenten nennt man ein **Tripel**. Weiter geht's mit dem **Quadrupel** (4 Komponenten) und **Quintupel** (5 Komponenten). Ab dann spricht man vom 6-Tupel, 7-Tupel usw. und allgemein von einem n-Tupel (n Komponenten).

Die Uhrzeitangabe in der Form hh:mm:ss lässt sich als Tripel von Zahlen beschreiben, mit $hh \in [0{:}23], mm \in [0{:}59], ss \in [0{:}59]$. Auch hier haben wir nicht die «klassische» Schreibweise mit Kommata als Trennzeichen und umschließenden Klammern.

Das kartesische Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen A und B, geschrieben $A \times B$, ist die Menge aller Paare der Form (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ ist.

Entsprechend ist das dreifache kartesische Produkt $A \times B \times C$ die Menge aller Tripel (a, b, c) mit $a \in A, b \in B$ und $c \in C$ und entsprechend für Quadrupel usw.

Beispiel

Beispiel 1:

Sei $R = \{a, b, c, ..., h\}$ und $S = \{1, 2, 3, ..., 8\}$.

Dann ist $R \times S = \{a1, a2, ..., h8\}$ die Menge der Felder des Schachbretts.

Beispiel 2:

Die Menge $[0{:}23] \times [0{:}59] \times [0{:}59]$ ist die Menge aller gültigen Uhrzeitangaben in der Form hh:mm:ss.

Beispiel

Es ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Punkte der Ebene.

Der Ausdruck $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird auch abgekürzt geschrieben als $\mathbb{R}^2$.

Analog ist $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte des Raums.

Ist M eine Menge und n eine natürliche Zahl, so vereinbaren wir folgende Schreibweise:

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n}.$$

Beispiel

Die Menge $M = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aller Binärwörter mit 3 Bit lässt sich als dreifaches kartesisches Produkt auffassen:

$M = \mathbb{B}^3$ mit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Frage

Sei $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Wie viele Elemente hat die Menge $A \times B$?

Lösung

Die Menge $A \times B$ hat $5 \cdot 4 = 20$ Elemente.

Allgemein gilt:

Wichtig

Besteht die Menge A aus n Elementen und B aus m Elementen, so hat die Menge $A \times B$ $n \cdot m$ Elemente.

Anders ausgedrückt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Insbesondere gilt:

$$|A^n| = |A \times A \times \ldots \times A| = |A| \cdots |A| = |A|^n.$$

Daraus folgt sofort, dass die Menge $\mathbb{B}^n$ der Binärwörter mit n Bit $|\mathbb{B}|^n = 2^n$ Elemente hat. Anders ausgedrückt: Es gibt 2^n Binärwörter mit n Bit.

1.9 Aufgaben zu Mengen

Aufgabe

Aufgabe 1.1

Geben Sie die folgenden Mengen durch vollständige Aufzählung ihrer Elemente an. Die Grundmenge ist die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

1.) $\{x \mid 5 < x \leq 9\}$

2.) $\{x \mid x^2 \leq 10\}$

3.) $\{x \mid x < 25$ und x ist Primzahl$\}$

Aufgabe

Aufgabe 1.2

Geben Sie die folgenden Mengen durch vollständige Aufzählung ihrer Elemente an. Die Grundmenge ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

1.) $\{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$

2.) $\{x \mid x^2 - 2x + 2 = 0\}$

Aufgabe

Aufgabe 1.3

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{g, d, a, f\}$$

$$C = \{c, d, f, h\}$$

Bestimmen Sie:

1.) $A \cup B \cup C$

2.) $A \cap B \cap C$

3.) $(A - B) - C$

4.) $A - (B - C)$

Aufgabe

Aufgabe 1.4

Gegeben die Intervalle

$$I = [3, 7) \text{ und } J = (5, \infty)\,.$$

Bestimmen Sie:

1.) $I \cup J$

2.) $I \cap J$

3.) $I - J$

4.) $J - I$

5.) $\overline{J}$

Aufgabe

Aufgabe 1.5

An der HAU (Henrik-Abel-Universität) gibt es die Studienfächer Mathematik (M), Informatik (I), Biologie (B) und Philosophie (P). Die Studierenden kommen aus Deutschland (D), Finnland (F), Griechenland (G), Korea (K) und Australien (A). Die Buchstaben geben jeweils die entsprechende Menge an (z.B.: G = Menge aller griechischer Studierenden).

Sei ferner W die Menge der weiblichen Studierenden. Außer weiblich und männlich gibt es an der HAU keine weiteren Geschlechter.

Formulieren Sie mithilfe der Mengen M, I, B, P, D, F, G, K, A, W und der Mengenoperationen folgende Mengen:

1.) Die Menge aller (männlichen) Studenten.

2.) Die Menge der deutschen Mathestudentinnen.

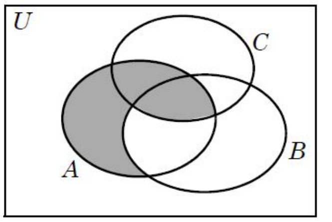
3.) Die Menge der Philosophiestudierenden, die aus einem europäischen Land kommen.

4.) Die Menge der Studierenden, die entweder Mathe oder Informatik studieren, aber nicht beides zusammen.

Aufgabe 1.6

Aufgabe

Stellen Sie die grau gefärbte Menge X als Kombination der Mengen A, B und C mithilfe der bekannten Mengenoperationen dar.



Aufgabe

Aufgabe 1.7

Bei der Wahl zum Fachbereichsrat haben Katja und Sonja kandidiert. Die Wähler konnten eine Kandidatin oder beide Kandidatinnen ankreuzen. Stimmzettel ohne Kreuz werden als ungültig gezählt.

Die Auszählung brachte folgendes Ergebnis:

- Es wurden 25 gültige Stimmzettel abgegeben.
- Katja erhielt 20 Stimmen.
- Sonja erhielt 19 Stimmen.

Wie viele Wähler haben zwei Kreuze auf dem Wahlzettel gemacht?

Aufgabe

Aufgabe 1.8 (schwer)

Dies ist eine veritable Knobelaufgabe!

Die Einwohner des kleinen märkischen Dorfs Meuselwitz sind wahre Vereinsmeier. Jeder Einwohner ist Mitglied in mindestens einem der folgenden vier Vereine:

- Der Fußballclub Meuselwitz (FCM)
- Der Handballverein Meuselwitz (HVM)
- Der Schachverein «Königsspringer Meuselwitz» (KSM)
- Der Tennisclub «Rot-Weiß Meuselwitz» (RWM)

Jeder, der Fußball (Handball, Schach, Tennis) spielt, ist auch ein Mitglied des entsprechenden Vereins. Wenn ich im Folgenden beispielsweise sage: «25 Personen spielen X und Y», so ist damit keine Aussage getroffen, wer von diesen 25 evtl. noch in weiteren Vereinen Mitglied ist. Von diesen 25 könnten also einige zusätzlich in Verein Z Mitglied sein, andere vielleicht nicht. Man weiß es eben nicht!

Was man aber weiß ist:

- 12 Personen spielen Fußball und Tennis.
- 9 Personen spielen Handball und Schach.
- Nur eine einzige Person ist Mitglied in allen vier Vereinen.
- Würde man den FCM und den HVM zusammenlegen, so hätte der neue Verein 45 Mitglieder.
- Würde man den KSM und den RWM zusammenlegen, so hätte der neue Verein 60 Mitglieder.
- 2 Personen spielen Fußball und Schach, aber nicht Handball oder Tennis.
- 3 Personen spielen Handball und Tennis,aber nicht Fußball oder Schach.

Wie viele Einwohner hat Meuselwitz?

Aufgabe

Aufgabe 1.9

Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{c, d, e, f\}$.

1.) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(A \times B)|$.
2.) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$.
3.) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(C)|$
4.) Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))|$

Aufgabe

Aufgabe 1.10

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d\}$.

Bestimmen Sie $|\{X \in \mathcal{P}(M) \,|\, a \in X\}|$.

Aufgabe

Aufgabe 1.11

Gegeben seien die Mengen $A = \{a\}, B = \{\#, \&\}$ und $C = \{1, 2, 3\}$.

Geben Sie $A \times B \times C$ durch vollständige Aufzählung der Elemente an.

Hinweis: Trennzeichen und umschließende Klammern dürfen Sie weglassen!

Aufgabe

Aufgabe 1.12

Französische Autokennzeichen sind nach folgendem Muster konstruiert:

Zwei Großbuchstaben, Bindestrich, gefolgt von 3 Ziffern, Bindestrich, gefolgt von zwei Großbuchstaben.

Sei $\mathcal{B} = \{A, B, C, ..., Z\}$ die Menge der Buchstaben und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ die Menge der Ziffern.

1.) Geben Sie die Menge aller gültigen französischen KFZ-Kennzeichen als kartesisches Produkt an. Denken Sie an den Bindestrich!

2.) Wie viele mögliche französische KFZ-Kennzeichen gibt es?

Aufgabe

Aufgabe 1.13

Auf der Speisekarte der Königsberger Klause stehen 3 Vorspeisen, 5 Hauptgerichte und 4 Desserts.

1.) Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein 3-Gänge-Menü zusammenzustellen?
2.) Jonas hat keinen großen Hunger und wählt ein 2-Gänge-Menü, bestehend aus Vorspeise und Hauptgericht oder Hauptgericht und Dessert. Wie viele Möglichkeiten hat er, sein Menü zusammenzustellen?

Aufgabe

Aufgabe 1.14

1.) Ein Radio-DJ hat 20 Songs zur Auswahl. In einer Sendung kann er fünf Songs präsentieren. Wie viele Möglichkeiten hat er, die 5 Stücke auszuwählen?
2.) Arne, Birgit und Carla bestellen beim DJ Songs, die in der Disco gespielt werden sollen. Sie dürfen aus 9 Songs auswählen. Arne wählt 4 Songs, Birgit wählt 3 und Carla wählt 2 Songs. Alle Songs müssen verschieden sein. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Verteilung der Songs auf die Arne, Birgit und Carla?

Aufgabe

Aufgabe 1.15

Sie haben einen Preis gewonnen und dürfen insgesamt 5 Bücher aus zwei verschiedenen vorgegebenen Bücherkörben auswählen.

- In Korb A befinden sich 8 Romane.
- In Korb B befinden sich 5 Fachbücher.
- In Ihrer Auswahl müssen mindestens 3 Fachbücher sein.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Sie genau 5 Bücher auswählen?

Aufgabe

Aufgabe 1.16 (schwer)

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Finden Sie eine Erklärung für folgenden Sachverhalt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Lösungshinweis

Benutzen Sie die Tatsache, dass der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller Teilmengen der Mächtigkeit k einer Grundmenge der Mächtigkeit n ist.

2 Relationen und Funktionen

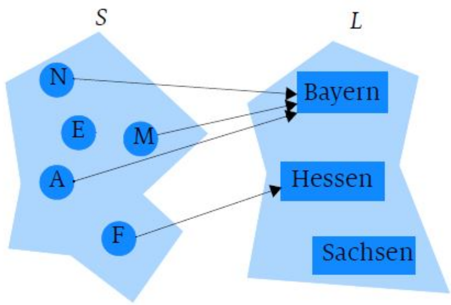
Gliederung

Da es ein eigenes Modul zum Thema «Relationen und Funktionen» gibt, sollen hier nur die grundlegenden Begriffe kurz dargestellt werden.

2.1 Relationen

Relationen und Funktionen werden im gleichnamigen Modul dieses Studiengangs behandelt. Hier möchte ich Ihnen nur diejenigen grundlegenden Eigenschaften von Funktionen und Relationen vorstellen, die in diesem Modul benötigt werden.

Das englische Wort «relatives» bedeutet auf deutsch «Verwandte». Es bezeichnet Beziehungen zwischen Personen: A ist Mutter von B, C ist Cousine von D usw.



Ein zweites alltägliches Beispiel für Relationen (Beziehungen) ist die Beziehung zwischen Städten (KFZ-Kennzeichen: A, E, F, M, N) und Bundesländern (Bayern, Hessen und Sachsen).

Augsburg, München und Nürnberg liegen in Bayern, Frankfurt/Main liegt in Hessen. Für Essen hingegen fehlt das Bundesland (NRW). Und für Sachsen gibt es keine zugehörige Stadt.

Machen wir das Ganze etwas formaler: Sei S = {A, E, F, M, N} die Menge der Städte und L = {B, H, S} die Menge der Bundesländer. Dann können wir die Relation «Stadt x liegt in Land y» als Menge von Paaren darstellen:

$$R = \{(A,B),(M,B),(N,B),(F,H)\},$$

wobei der Buchstabe R für die Relation steht.

Es ist damit $(M,B) \in R$ (München liegt in Bayern) und $(E,H) \notin R$ (Essen liegt nicht in Hessen). Eine Relation R ist also nichts anderes als eine Menge von Paaren. Anders ausgedrückt:

Relation

Definition

a) Eine **Relation** R *zwischen zwei Mengen* A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$, kurz: $R \subseteq A \times B$.
Zwei Elemente a und b stehen genau dann in Relation zueinander, wenn $(a, b) \in R$ gilt.

b) Eine Relation *auf einer Menge* A ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times A$.

Aus der Arithmetik kennen Sie folgende Relationen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

$<$ (kleiner),
$\leq$ (kleiner oder gleich),
$>$ (größer),
$\geq$ (größer oder gleich),
$\neq$ (ungleich),
$=$ (gleich).

Kein Mensch würde jedoch auf die Idee kommen, etwa zu schreiben:

$(2, 7) \in \ <$

(In Worten: Das Paar (2,7) ist Element der Relation «kleiner»).

Die Sache mit den Paaren und dem kartesischen Produkt dient einzig und allein der formalen Definition des Begriffs «Relation». Für praktische Zwecke ist diese Schreibweise unbrauchbar.

Statt $(2, 7) \in \ <$ schreiben wir einfach $2 < 7$.

2.2 Funktionen

Gliederung

Der Begriff der Funktion ist einer der wichtigsten und grundlegendsten der ganzen Mathematik.

In diesem Abschnitt lernen Sie den Begriff der Funktion auf eine eher anschauliche Weise kennen. Sie lernen ferner die Begriffe Definitionsmenge, Wertevorrat und Wertemenge einer Funktion kennen. Es gibt sehr viele unterschiedliche Arten, Funktionen zu definieren. Einige davon, unter anderem die rekursive Funktionsdefinition, lernen Sie in diesem Abschnitt kennen.

Ausgehend vom Beispiel der Codierung und Decodierung lernen Sie den wichtigen Begriff der Umkehrfunktion kennen.

Lernziele

Wenn Sie diesen Abschnitt bearbeitet haben,

- können Sie Funktionsdefinitionen mit Definitionsbereich und Wertevorrat interpretieren und auf Korrektheit prüfen;
- können Sie einfache Funktionen mit Funktionsvorschrift, Definitionsbereich und Wertevorrat konstruieren;
- kennen Sie die Beziehung zwischen Funktion und Umkehrfunktion und können diese für einfache Beispiele nachprüfen.
- können Sie in einfachen Fällen prüfen, ob eine gegebene Funktion umkehrbar ist.

2.2.1 Was sind Funktionen?

Eine **Funktion** ist, zunächst einmal sehr allgemein gesprochen, eine Zuordnung. Der Begriff der Funktion ist einer der wichtigsten und grundlegendsten der ganzen Mathematik.

Hinweis

In der Mathematik gibt es auch den Begriff der «**Abbildung**». Dieser ist synonym zum Begriff «Funktion». Der Unterschied ist nur der, dass das Wort «Abbildung» in bestimmten mathematischen Kontexten bevorzugt anstelle des Worts «Funktion» verwendet wird.

Aber auch im Alltag begegnen einem ständig Funktionen. Einige Beispiele:

Beispiel

1.) Die Zuordnung von Matrikelnummern ist eine Funktion. Jedem Student und jeder Studentin wird eine Zahl (die Matrikelnummer) zugeordnet.
2.) Der Preis einer Ware in Abhängigkeit von der gekauften Menge ist eine Funktion. Jeder Mengeneinheit wird ein Preis (eine Zahl) zugeordnet.

3.) Sie fahren im Auto von A nach B. Sie starten um 12 Uhr und kommen um 13 Uhr an. Dann hat das Auto zu jedem Zeitpunkt zwischen 12 und 13 Uhr eine bestimmte Geschwindigkeit. Jedem Zeitpunkt im fraglichen Zeitraum wird die Geschwindigkeit (eine Zahl) zugeordnet.
4.) Umrechnung zwischen verschiedenen Einheiten, z.B. von Celsius nach Fahrenheit: Jeder Celsius-Temperatur (eine Zahl) wird die Fahrenheit-Temperatur (ebenfalls eine Zahl) zugeordnet.

Was müssen Sie wissen, wenn Sie mit einer Funktion arbeiten? Stellen Sie sich etwa vor, Sie sollten eine der obigen Funktionen als Programm implementieren. Sie müssen wissen...

- ...für welche Objekte die Funktion definiert ist
  (im ersten Beispiel: Eine Menge von Studierenden),
- ...von welchem Typ die Funktionswerte sind
  (im ersten Beispiel: Matrikelnummern, also ganze Zahlen) und
- ... wie der Funktionswert bestimmt werden kann (im ersten Beispiel: In einer Datenbank anfragen).

Beispiel

Nun noch ein rein mathematisches Beispiel: Die Wurzelfunktion. Sie ordnet jeder reellen Zahl x ihre Wurzel, also $\sqrt{x}$ zu - halt: Jeder reellen Zahl? Aus negativen Zahlen kann man doch keine Wurzeln ziehen! Also:

Die Wurzelfunktion ordnet jeder nicht-negativen reellen Zahl ihre Quadratwurzel, und das ist ebenfalls eine nicht-negative reellen Zahl, zu. Wir schreiben dies wie folgt:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{R}_0^+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Die Funktionsvorschrift kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Aus diesem Beispiel sehen Sie, wie wichtig die Angabe des Definitionsbereichs der Funktion ist!

Wichtig

Eine mathematische Funktion wird wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} f:\ A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Dabei ist f der Name der Funktion.

Die Menge A heißt **Definitionsbereich** und die Menge B heißt **Wertevorrat** von f.

Die Zeile $x \mapsto f(x)$ heißt **Funktionsvorschrift**. Sie gibt an, wie der Funktionswert berechnet wird. Dabei muss **jedem** Element des Definitionsbereichs A ein eindeutiger Funktionswert zugeordnet sein!

Der Wert $f(x)$ wird auch **Funktionswert** von x (unter der Funktion f) genannt.

Hinweis

Verwendet man den Begriff "Abbildung", so spricht man statt vom "Funktionswert von x" vom "**Bild** von x (unter der Abbildung f)".

Der Teil $x \mapsto f(x)$ wird dann gelesen als "x wird abgebildet auf f von x". </p>

Frage

Was ist falsch an folgender Funktionsdefinition?

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Korrigieren Sie die Definition!

Lösung

Die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert! Eine Funktion muss aber für jedes Element ihres Definionsbereichs definiert sein. Die korrekte Definition lautet:

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} - \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Bei dem Ausdruck $\mathbb{R} - \{0\}$ handelt es sich um die Differenzmenge. Aus der Menge $\mathbb{R}$ wird die Menge, die nur die 0 enthält, herausgenommen, sprich: Die Zahl 0 wird herausgenommen.

Beispiel

Betrachten wir das Beispiel mit den Matrikelnummern.

Definitionsbereich ist die Menge der Studierenden z.B. der Henrik-Abel-Universität (HAU), nennen wir diese Menge S.

Was ist der Wertevorrat? Nun, welche Zahlen als Matrikelnummern auftreten, wissen wir natürlich nicht genau. Aber auf jeden Fall sind es natürliche Zahlen, und diese Angabe reicht völlig aus.

Nun braucht die Funktion selbst noch einen Namen, etwa m.

Eine konkrete Funktionsvorschrift können wir jedoch nicht angeben. Wir notieren die Funktion als

$$\begin{aligned} m\colon\; S &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \text{Matrikelnummer von } x \end{aligned}$$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 2.1

Beschreiben Sie die Umrechnungsfunktion von Celsiusgraden nach Fahrenheitgraden! Hinweise:

- Die Einheiten können Sie weglassen.
- Die Tatsache, dass es einen absoluten Nullpunkt der Temperatur gibt, dürfen Sie getrost ignorieren!

Lösung

$$\begin{aligned} f\colon\; \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1{,}8 \cdot x + 32 \end{aligned}$$

Definition

Der **Wertebereich** einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge aller auftretenden Funktionswerte, also die Menge $\{f(x) \mid x \in A\}$.

Der Wertebereich einer Funktion ist stets eine Teilmenge des Wertevorrats.

Im Beispiel mit den Matrikelnummern ist der Wertebereich die Menge aller Zahlen, die tatsächlich als Matrikelnummern von Studierenden auftreten.

Beispiel

Ein weiteres Beispiel zu den Begriffen Wertevorrat und Wertebereich.

Betrachten wir die Funktion, die jeder/jedem Studierenden der HAU sein oder ihr Alter zuordnet. Dann wissen wir lediglich, dass die Funktionswerte natürliche Zahlen sind. Als Wertevorrat können wir also $\mathbb{N}$ angeben.

Die Wertemenge wäre die Menge der Zahlen, die tatsächlich als Alter eines oder einer Studierenden auftreten.

2.2.2 Darstellung von Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Funktionsvorschrift $x \mapsto f(x)$ näher unter die Lupe nehmen. Im einfachsten Falle ist die Funktionsvorschrift eine mathematische Formel, etwa $x \mapsto \sqrt{x}$. Aber einfache Fälle sind langweilig, schauen wir uns lieber die komplizierten Fälle an:

Funktionsdefinition mithilfe einer Wertetabelle

Beispiel

1.) Die ASCII-Codierung.
   Diese ordnet jedem ASCII-Zeichen ein 7-Bit-Binärwort (oder eine natürliche Zahl zwischen 0 und 127) zu, etwa 'A' $\mapsto$ 1000001 (oder 'A' $\mapsto$ 65).
   Definitionsbereich ist die Menge der ASCII-Zeichen, Wertevorrat ist die Menge [0:127].
   Aber was ist die Funktionsvorschrift? Sie kann nur mithilfe einer Wertetabelle dargestellt werden.

2.) Der Cäsar-Code.
   Hierbei handelt es sich um einen (historischen) Geheimcode, bei dem jeder Buchstabe des lateinischen Alphabets um einen bestimmten Versatz (den so genannten «Schlüssel») verschoben wird. Hier sehen Sie die Wertetabelle der Funktion für den Schlüssel 3. Die Klartextzeichen sind mit Kleinbuchstaben, die Geheimtextzeichen mit Großbuchstaben dargestellt.

a	b	c	d	...	w	x	y	z
D	E	F	G	...	Z	A	B	C

Im Alltag gibt es sehr viele weitere Beispiele für Funktionen, die durch Tabellen definiert sind. Das bedeutet, dass der Funktionswert sich nur aus einer Tabelle ablesen lässt. Denken Sie etwa an Bruttosozialprodukt, Arbeitslosenquote, Börsenkurse etc. Zu deren Berechnung gibt es naturgemäß keine mathematische Formel.

Funktionsdefinition durch Fallunterscheidung

Beispiel

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Betragsfunktion, die jeder reellen Zahl ihren Absolutbetrag zuordnet:

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

So weit, so gut. Was aber, wenn jemand nicht weiß, wie der Ausdruck $|x|$ zu berechnen ist?

Dann müssen wir mit einer Fallunterscheidung arbeiten:

$$
\begin{aligned}
f\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\
f(x) &= \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{, wenn } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Man kann auch schreiben:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{,sonst} \end{cases}$$

Erkennen Sie in diesem Ausdruck das if-then-else-Muster aus dem Programmieren?

Aufgabe

Zwischenaufgabe 2.2

Die Flasche «Gimmeldinger Meerspinne», Riesling Kabinett, kostet beim Erzeuger 5,30 Euro. Wenn ich mir den Wein per Post schicken lasse, kommen Portokosten in Höhe von 8 Euro dazu, falls die Bestellmenge kleiner als 20 Flaschen ist. Ab einer Bestellmenge von 20 Flaschen wird kein Porto berechnet.

Geben Sie den Preis p als Funktion der Bestellmenge an. Die Einheit (Euro) können Sie weglassen.

Lösung

$$p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$p(x) = \begin{cases} 5,3 \cdot x + 8 & \text{, wenn } x < 20 \\ 5,3 \cdot x & \text{, wenn } x \geq 20 \end{cases}$$

Rekursive Funktionsdefinition

Beispiel

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Fakultätsfunktion.

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n wird geschrieben $n!$ (eine höchst ungewöhnliche Schreibweise!). Sie ist definiert als

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\,.$$

$n!$ ist also das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Allerdings ist die Fakultätsfunktion auch für 0 definiert, aber das passt irgendwie nicht in das Schema. Also müssen wir wieder mit Fallunterscheidung arbeiten:

$$\text{fak}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$$

$$\text{fak}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

So richtig schön ist das immer noch nicht wegen der «Pünktchen». Schöner wäre es ohne. Das geht mit einer so genannten rekursiven Definition:

$$\text{fak}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$$

$$\text{fak}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot \text{fak}(n-1) & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Mit dieser Definition kann für jede natürliche Zahl der Funktionswert berechnet werden (zugegebenermaßen etwas umständlich):

$$\text{fak}(4) = 4 \cdot \text{fak}(3) = 4 \cdot 3 \cdot \text{fak}(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \text{fak}(1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \text{fak}(0) = 4. \\ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Funktionen von mehreren Variablen

Beispiel

In diesem Beispiel betrachten wir die Funktion «größter gemeinsamer Teiler» (ggT). Dieser ordnet zwei natürlichen Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler zu, etwa $ggT(6,9) = 3$.

Diese Funktion ist abhängig von zwei Variablen, x und y.

Was ist dann die Definitionsmenge dieser Funktion?

Nun, wir können auch sagen, die Funktion ordnet jedem Paar (x, y) natürlicher Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler zu. Die Definitionsmenge ist dann die Menge aller Paare natürlicher Zahlen, also das kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Damit können wir die Funktion wie folgt beschreiben:

$$\text{ggT}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\text{ggT}(x, y) = \max \{ t \mid t \text{ teilt } x \text{ und } t \text{ teilt } y \}$$

2.2.3 Die Umkehrfunktion

Codes spielen in der Informatik eine große Rolle, etwa der bekannte ASCII-Code, aber auch kryptografische Codes (Verschlüsselung) und fehlererkennende Codes (EAN-Code, ISBN-Code, IBAN usw.).

Einen Code kann man als Funktion betrachten. Jedem Klartextzeichen wird ein Codezeichen zugeordnet (z.B. 'A' $\mapsto$ 1000001).

? Frage

Professor Quak hat einen eigenen Geheimcode geschrieben, den er benutzen will, um mit seinen Kollegen zu kommunizieren. Hier ein Ausschnitt aus der Codetabelle:

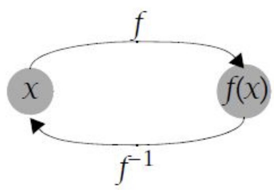
a	b	c	d	e	...
¿	‡	¶	¿		1...

Was halten Sie von diesem Code? Warum kann das nicht funktionieren? Was genau geht schief?

Lösung

Der Code kann nicht eindeutig decodiert werden. Z.B. könnte "¿¿#" sowhl "ade", als auch "aae", "dae" oder "dde" bedeuten.

Ein Code umfasst stets zwei Funktionen: Das Codieren und das Decodieren.



Wenn wir das Codieren (also die Zuordnung Klartextzeichen $\mapsto$ Codezeichen) als Funktion f bezeichnen, dann ist das Decodieren die so genannte **Umkehrfunktion** f^{-1} (auch **inverse Funktion** genannt).

Der Zusammenhang zwischen Funktion und Umkehrfunktion kann wie folgt beschrieben werden: Wenn wir auf ein Objekt x erst die Funktion anwenden, dann die Umkehrfunktion, dann landen wir wieder bei x.

Professor Quaks «Code» ist demnach kein echter Code, denn er lässt sich nicht decodieren, anders gesagt, die Codierungsfunktion ist nicht umkehrbar. Dagegen ist der ASCII-Code umkehrbar. Die Umkehrfunktion, die ASCII-Decodierung, ist die Funktion, die jeder Zahl aus dem Bereich [0:127] ihr ASCII-Zeichen zuordnet.

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **Bild** und **Urbild**. So wie 1000001 das Bild von 'A' unter der ASCII-Codierungsabbildung ist, so ist 'A' das Urbild von 1000001.

? Frage

Ist der Cäsar-Code umkehrbar?

Lösung

Ja. Die Umkehrfunktion, die Decodierung, ist die Funktion, die jedes Zeichen um die durch den Schlüssel gegebene Anzahl zurückverschiebt.

Beispiel

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Quadratfunktion. Ist sie umkehrbar, und wenn ja, was ist ihre Umkehrfunktion? Sie werden vielleicht sagen: Die Umkehrung des Quadrierens ist das Wurzelziehen. Der Gedanke ist richtig, aber er bedarf einer Präzisierung.

Zunächst: Was ist überhaupt die Quadratfunktion? Nun ja, die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = x^2$. Aber da fehlt etwas ganz Wichtiges: Die Angabe des Definitionsbereichs und des Wertevorrats. Wenn wir nun die Quadratfunktion wie folgt definieren:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

dann ist diese Funktion aus zwei Gründen nicht umkehrbar.

Frage: Welches sind die beiden Gründe?

Antwort

1.) Aus negativen Zahlen kann keine Wurzel gezogen werden.
2.) Positive Zahlen haben zwei Urbilder, beispielsweise hat $f(x) = 4$ die zwei Urbilder $x = 2$ und $x = -2$.

Wenn wir hingegen die Quadratfunktion wie folgt definieren:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

so sind beide Probleme gelöst: Für jedes Element des Wertevorrats (nichtnegative Zahlen) gibt es genau ein Urbild aus dem Definitionsbereich (ebenfalls Menge der nichtnegativen Zahlen).

Definition

Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion.

1.) Die Funktion f heißt **umkehrbar** (oder **invertierbar**) falls es für jedes $y \in B$ genau ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.
   Anders formuliert: Falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ eindeutig lösbar ist.
   Weitere synonyme Begriffe für «umkehrbar» sind **bijektiv** und **ein-eindeutig**. Insbesondere der Begriff «bijektiv» wird sehr häufig als Synonym für «umkehrbar» verwendet.

2.) Ist f eine umkehrbare Funktion, so gibt es eine Funktion $g\colon B \to A$, die jedem $y \in B$ ein eindeutiges x zuordnet, sodass $y = f(x)$.

Mit anderen Worten: Es gilt $y = f(x)$ genau dann, wenn $x = g(y)$.

Die Funktion g heißt Umkehrfunktion von f und wird geschrieben f^{-1}.

Diese Definiton liefert uns auch gleich ein Rezept, wie wir die Umkehrfunktion (falls sie existiert.) einer Funktion bestimmen können.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion f_{CF}, die Celsiusgrade in Fahrenheitgrade umrechnet (siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Fahrenheit):

$$\begin{aligned} f_{CF}\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{9}{5} \cdot x + 32 \end{aligned}$$

Was ist die Umkehrfunktion? Nun, offensichtlich die Funktion, die Fahrenheitgrade zurückrechnet in Celsiusgrade. Die Funktion f_{CF} ist invertierbar, denn die Gleichung $f_{CF}(x) = y$ ist für jedes $y \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar:

$$f_{CF}(x) = \frac{9}{5} \cdot x + 32 = y$$

Diese Gleichung lösen wir nach x auf. Dazu multiplizieren wir zunächst die ganze Gleichung mit $\frac{5}{9}$ und erhalten

$$x + \frac{5}{9} \cdot 32 = \frac{5}{9} \cdot y\,.$$

Nun subtrahieren wir $\frac{5}{9} \cdot 32 = \frac{160}{9}$ auf beiden Seiten und erhalten

$$x = \frac{5}{9} y - \frac{160}{9}\,.$$

Damit ist die Gleichung eindeutig lösbar. Die Lösung liefert uns auch gleich die Umkehrfunktion. In dieser setzen wir allerdings wieder statt des Parameters y den gewohnten Parameter x ein und erhalten

$$f_{CF}^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_{CF}^{-1}(x) = \frac{5}{9} x - \frac{160}{9}$$

In dem Kurs «Relationen und Funktionen» wird das Thema der Umkehrbarkeit einer Funktion sehr viel ausführlicher und mathematisch formaler diskutiert werden. Für diesen Kurs («Lineare Algebra») reicht die informelle und anschauliche Darstellung in diesem Abschnitt völlig aus.

2.3 Aufgaben zu Relationen und Funktionen

Aufgabe

Aufgabe 2.1

Welche der folgenden Vorschriften sind zulässige Funktionsvorschriften? Versuchen Sie, die Unzulässigen zu «reparieren».

1.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array}$$

2.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

3.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

4.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Aufgabe

Aufgabe 2.2

Bestimmen Sie jeweils den Wertebereich der folgenden Funktionen. Hinweis: $x \bmod n$ ist der Rest bei Division der ganzen Zahl x durch die positive Zahl n. Beispielsweise ist 8 mod 3 = 2.

1.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$$

2.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

3.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & x \bmod 10 \end{array}$$

4.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

5.) $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}$$

6.) $$f\colon \begin{array}{ccc} [2,5) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3-2x \end{array}$$

Aufgabe

Aufgabe 2.3

Die folgenden Funktionen sind durch Wertetabellen gegeben.

Welche davon sind umkehrbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

1.) $f: \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	a	b	c	d	e
$f(x)$	3	4	3	1	2

2.) $f: \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	a	b	c	d	e
$f(x)$	3	4	2	5	1

3.) $f: \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	a	b	c	d	e
$f(x)$	2	3	4	5	1

Aufgabe

Aufgabe 2.4

Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

1.) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$$

2.) $$f: \begin{array}{ccc} [1, \infty) & \to & [0, \infty) \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$$

3.) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

4.) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{0\} & \to & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

3 Bausteine der Aussagenlogik

Gliederung

«Wenn es heute Abend nicht regnet, dann gehe ich noch eine Runde joggen oder ich spiele mit Jochen eine Partie Tennis.»

Dieser Satz besteht aus mehreren elementaren Aussagen:

- «Es regnet heute Abend»,
- «Ich gehe joggen»,
- «Ich spiele Tennis».

Diese Aussagen sind mit so genannten Junktoren verknüpft. Junktoren sind Wörter wie

- «nicht»,
- «oder»,
- «wenn ... dann».

Aussagen sind (im Gegensatz zu Fragen oder Befehlen) Sätze, die wahr oder falsch sein können: Entweder ich gehe heute Abend joggen oder ich gehe nicht joggen. Die Wahrheit oder Falschheit von zusammengesetzten Sätzen hängt nun von der Wahrheit der Bestandteile ab und von den Junktoren, mit denen die Aussagen verknüpft werden.

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, nach welchen Regeln Aussagen mithilfe der Junktoren zu komplexeren Ausagen zusammengesetzt werden können und welche Bedeutung diese komplexen Aussagen haben.

Mit anderen Worten: Es geht um die Syntax und um die Semantik der formalen logischen Sprache. Diese unterscheidet sich von der Alltagssprache durch ihre Eindeutigkeit.

Wenn ich sage: «Heute Abend gehe ich ins Kino oder ins Theater», so lasse ich offen, ob es sich bei dem Wörtchen «oder» um ein «entweder ... oder» handelt, oder ob ich vielleicht sogar nacheinander erst ins Theater und danach noch in die Spätvorstellung ins Kino gehe.

In der Sprache der formalen Logik dagegen ist die Bedeutung des Junktors «oder» klar und eindeutig festgelegt. Da kann ich mir kein Hintertürchen offenhalten.

Die formale Sprache der Logik ist hervorragend geeignet, um Sachverhalte und Problemstellungen eindeutig und unmissverständlich zu formulieren, beispielsweise, um sie zu programmieren oder um mathematische Beweise zu führen. Außerdem kann die Sprache der Logik benutzt werden, um komplexe digitale Schaltungen zu modellieren und zu simulieren.

Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie

- logische Formeln auf syntaktische Korrektheit analysieren,
- logische Formeln interpretieren und ihren Wahrheitswert bestimmen,
- einfache Sachverhalte in der Sprache der Aussagenlogik formulieren.

3.1 Wozu ist Logik nütze?

In diesem Kapitel werden Sie erkennen, dass viele Aussagen unserer alltäglichen Sprache logische Strukturen beinhalten, die wir mehr oder weniger unbewusst verwenden. Außerdem werden Sie einige Anwendungsgebiete der Logik kennenlernen.

Gliederung

3.1.1 Logik in der Alltagssprache

Betrachten wir einen alltäglichen Satz, eine **Aussage**, in der, ohne dass man sich dessen unbedingt bewusst wird, Logik eingesetzt wird:

> *Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.*
>
> (Satz 1)

Ein bestimmtes Ereignis zieht also ein anderes Ereignis nach sich - so etwas heißt in der Logik eine **Implikation**.

Nun stellen Sie sich vor, Sie stehen morgens auf, schauen aus dem Fenster und sehen: Die Straße ist trocken. Frage: Was können Sie daraus schließen?

Lösung

Sie können schließen, dass es nicht regnet (denn wenn es regnete, dann wäre ja die Straße nass).

Schauen wir uns eine andere, in diesem Fall mathematische Aussage an:

> *Wenn eine ganze Zahl (ohne Rest) durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar (d.h. sie ist gerade).*
>
> (Satz 2)

Die Zahl 7 ist ungerade. Frage: Was können Sie daraus schließen, was die Teilbarkeit durch 4 betrifft?

Lösung

Sie können schließen, dass die Zahl 7 nicht durch 4 teilbar ist (denn wenn sie es wäre, dann wäre sie ja auch durch 2 teilbar).

Erkennen Sie das gemeinsame abstrakte Muster? Wir versuchen dieses zu konstruieren. Zunächst haben wir es mit folgenden elementaren Sätzen zu tun:

- Die Straße ist nass.
- Es regnet.
- Die vorliegende Zahl ist durch 2 teilbar.
- Die vorliegende Zahl ist durch 4 teilbar.

Bei diesen Sätzen handelt es sich um Aussagesätze; sie machen jeweils eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Im obigen Beispiel (Sie stehen morgens auf, schauen aus dem Fenster usw.) ist die Aussage «Die Straße ist nass» falsch. Hingegen wäre die Aussage «Die Zahl 4 ist durch 2 teilbar» wahr.

Die beiden obigen Sätze (Satz 1 und Satz 2) haben das gemeinsame Muster:

> Wenn A, dann B.

wobei A und B Aussagen sind. In der Sprache der Logik schreibt man

$$A \rightarrow B\,.$$

Nun kommt folgende Information hinzu: Sie schauen aus dem Fenster und sehen: Die Straße ist trocken (das heißt: nicht nass). Das entspricht der Aussage «nicht B». In der Sprache der Logik bezeichnen wir dies mit $\neg B$.

Frage: Was können Sie nun schließen?

Lösung

Sie können schließen: Die Aussage $\neg A$ ist wahr.

Somit erhalten wir folgendes abstraktes Schema (in der Informatik benutzt man auch den Begriff «generisches Schema»):

Wir wissen:

> Die Aussage $A \rightarrow B$ ist wahr.
> Die Aussage $\neg B$ ist wahr.

Dann können wir schließen:

Die Aussage $\neg A$ ist wahr.

Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit solchen abstrakten Schemata. Mit welchen abstrakten Schemata können wir aus vorhandenem Wissen neues Wissen ableiten? Wie können wir sicher sein, dass unsere Schlussweisen korrekt sind? Oder handelt es sich vielleicht um einen Trugschluss?

Sie schauen am nächsten Morgen aus dem Fenster und sehen: Die Straße ist nass. Sie denken: Oh Mist, es regnet (oder es hat bis vor kurzem geregnet). Naheliegend, nicht wahr? Ist der Schluss aber auch korrekt?

Lösung

Nun ja, wenn ich schon so frage... Nein, diese Schlussweise ist natürlich nicht korrekt. Es könnte ja auch einen Wasserschaden oder sonstige Widrigkeiten gegeben haben, die die Straße fluten.

Was lernen wir daraus? Aus $A \rightarrow B$ und B können wir gar nichts schließen.

Frage:
Was können wir aus der Gültigkeit von $A \rightarrow B$ und von A schließen?

Lösung

Wir können schließen, dass die Aussage B wahr ist.

Nun noch eine kompliziertere Aufgabe:

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.1

Mein Lieblingsrestaurant, die «Königsberger Klause», hat Montags geschlossen, außer wenn Montag ein Feiertag ist (z.B. Ostermontag oder wenn der 1. Mai auf einen Montag fällt usw.). Den ganzen Juli fahren die Inhaber in Urlaub, da bleibt die Klause komplett geschlossen.

Eines schönen Montags Abends spaziere ich an der Klause vorbei und sehe, dass sie geöffnet hat. Was kann ich daraus schließen?

Lösung

Ich kann schließen:

1.) Es ist nicht Juli.
2.) Heute ist ein Feiertag.

3.1.2 Anwendungsbereiche der Aussagenlogik

Mathematische Beweisverfahren

Beweise in der Mathematik sind (oft lange) Ketten von Schlussfolgerungen und machen ausgiebig Gebrauch von Regeln der Aussagenlogik. Man soll beispielsweise beweisen, dass für alle reellen Zahlen x folgendes gilt:

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

Eine typische Beweismethode der Mathematik geht so:

> Nehmen wir mal an, das wäre falsch.
>
> Falsch heißt: Es gäbe eine Zahl x für die $x^2 + 1 < 2x$ gilt.
>
> Frage: Was folgt daraus?
>
> Formen Sie diese Aussage um! Tipp: Binomische Formeln!

Lösung

Aus $x^2 + 1 < 2x$ folgt $x^2 - 2x + 1 < 0$.

Also folgt unter Anwendung der zweiten Binomischen Formel $(x-1)^2 < 0$.

Das kann aber nicht sein, denn ein Quadrat kann nie negativ sein. Das bedeutet, dass die Annahme, der Satz sei falsch, unhaltbar ist. Also ist der Satz richtig!

Die Beweismethode, die wir hier angewendet haben, heißt «Beweis durch Widerspruch». Die Theorie der Aussagenlogik wiederum sagt uns, das diese Beweismethode korrekt ist. Mehr zu diesem Thema erfahren Sie im Abschnitt "Mathematische Beweisverfahren".

Programmierung

Auch in der **Programmierung** sind die Gesetze der Aussagenlogik von zentraler Bedeutung, ganz besonders, wenn man die logische Programmiersprache PROLOG einsetzt - aber das ist nicht unser Thema. Schon in der alltäglichen Programmierpraxis ist ein Wissen über grundlegende Gesetze der Aussagenlogik wichtig.

Betrachten wir die folgende Bedingung, die sich auf reelle Variablen a, b, c und d bezieht:

$$\text{Falls } (a < b) \text{ oder } \Big((a \geq b) \text{ und } (c = d)\Big).$$

Diese Bedingung ist entweder wahr oder falsch, je nachdem, welche Werte die Variablen a, b, c und d haben. Ein kurzer Moment des Nachdenkens zeigt nun, dass sich die Bedingung gleichwertig, aber einfacher, wie folgt formulieren lässt:

Falls $(a < b)$ oder $(c = d)$.

Diese Gleichwertigkeit gilt offenbar, weil $a < b$ gerade die Negation, also das Gegenteil von $a \geq b$ darstellt.

Die formale Verallgemeinerung dieser Erkenntnis, die wieder völlig unabhängig von den Inhalten der Aussagen ist, lautet:

A oder $(\neg A$ und $B)$ ist gleichwertig zu A oder B.

Dieses Gesetz werden wir im späteren Abschnitt "Tautologien und logische Identitäten" beweisen.

Schaltnetze in der Digitaltechnik

Das dritte der oben genannten Anwendungsfelder, die **Digitaltechnik**, werden wir in Abschnitt "Digitale Schaltnetze" diskutieren.

Zeit für eine Aufgabe

Bisher war alles ganz gut überschaubar, und es erscheint für Probleme wie die gerade vorgestellten nicht zwingend erforderlich, mit beträchtlichem Aufwand Aussagenlogik zu betreiben, aber versuchen Sie einmal, die folgende Aufgabe zu lösen:

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.2

Logikaufgabe zum Knobeln

Besuch von Familie Schulze, bestehend aus Vater, Mutter sowie den Töchtern Anne, Birte und Christiane. Es kommen aber unter Umständen nicht alle.

- Wenn Vater Schulze kommt, dann bringt er auch seine Frau mit.
- Mindestens eine der beiden Töchter Birte und Christiane kommt.
- Entweder kommt Mutter Schulze oder Anne.
- Entweder kommen Anne und Birte zusammen oder beide nicht.
- Und wenn Christiane kommt, dann auch Birte und Vater Schulze.

Ja, wer kommt denn nun?

Versuchen Sie Ihr Glück bei der Lösung dieser Aufgabe. In den nächsten Abschnitten werden Sie die Vorgehensweisen kennen lernen, Aufgaben dieses Typs systematisch zu lösen - wir kommen dann auf diese Aufgabe zurück.

3.2 Aussagen und ihre Verknüpfungen

Gliederung

3.2.1 Aussagen, Aussagenvariablen und Wahrheitswerte

Definition

Eine **Aussage** ist ein Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist.

Eine Aussage kann also nicht gleichzeitig wahr und falsch sein - eines von beiden muss sie aber sein. Im Folgenden werden die beiden Wahrheitswerte «wahr» und «falsch» mit 1 für wahr und 0 für falsch bezeichnet.

Nicht alle Sätze der natürlichen Sprache sind Aussagen in diesem Sinne, dazu die folgende Aufgabe:

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.3

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

a) Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.
b) Guten Tag, Herr Meier!
c) Es gibt intelligentes Leben in fremden Planetensystemen.
d) Wie viel Uhr ist es?
e) $\{2, 3\} \subseteq \{3, 4\}$
f) $3 + 4 = 9$
g) 3+(6-9)

Lösung

a) (wahre) Aussage
b) Keine Aussage
c) Aussage: Niemand weiß um den Wahrheitswert dieser Aussage, aber sie kann nur wahr oder falsch sein. Einschränkung: Genau genommen braucht man eine saubere Definition von *intelligentem Leben*. Kritische Frage: Gibt es intelligentes Leben auf der Erde? Manche bezweifeln das. Wenn Sie selber bei

der Suche nach extraterristischer Intelligenz mitmachen wollen, besuchen Sie die Internetadresse: http://setiathome.berkeley.edu/ oder die deutsche Übersetzung auf http://www.alien.de/alien/info/seti.htm.

d) Keine Aussage

e) (falsche) Aussage

f) (falsche) Aussage

g) keine Aussage

Wie bereits erwähnt, kümmert sich die Aussagenlogik nicht um den Inhalt von Aussagen, sondern nur um ihre Wahrheitswerte; daher führt man *Platzhalter* für Aussagen ein, sogenannte Aussagenvariablen, auch Boolesche Variablen (nach George Boole) genannt.

Die Verwendung von Aussagenvariablen ist immer dann erforderlich, wenn man die Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagen offen lassen möchte - was in der Aussagenlogik die Regel ist. Wir werden Aussagen im Folgenden mit Großbuchstaben A, B, C usw. bezeichnen.

Der Begriff *Variable* ist vermutlich nicht neu für Sie. Sie kennen bereits reelle Variablen, symbolisiert durch $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Der entscheidende Unterschied: Während reelle Variablen stellvertretend für reelle Zahlen stehen, sind Aussagenvariablen nur der Werte 0 oder 1 fähig, die aber eben keine Zahlen darstellen, mit denen man wie üblich rechnen kann, sondern Wahrheitswerte.

3.2.2 Verknüpfungen von Aussagen

Aussagen der natürlichen Sprache können auf vielfältige Weise mit Hilfe von Bindewörtern miteinander verknüpft werden.

Beispiel

- Paris ist *nicht* die Hauptstadt von Deutschland.
- Ich studiere Informatik *und* ich spiele Tennis.
- Ich lerne Aussagenlogik *oder* ich höre Musik.
- *Wenn* ich Zeit habe, *dann* spiele ich Tennis.

Genau solche Verknüpfungen (nicht, und, oder, wenn ... dann) stehen im Mittelpunkt der Aussagenlogik. Die Verknüpfungssymbole der Aussagenlogik werden **Junktoren** genannt. Diese Junktoren haben durchaus eine Ähnlichkeit mit den Operationen der Arithmetik, also der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Die Bedeutung der Junktoren ergibt sich daraus, wie sich die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussagen aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen berechnen.

Die Negation

Die Negation ist das logische «nicht», (Symbol $\neg$):

A	$\neg A$
0	1
1	0

Die Tabelle liest sich wie folgt:

- Ist $A = 0$, so ist $\neg A = 1$. (Ist A falsch, so ist $\neg A$ wahr.)
- Ist $A = 1$, so ist $\neg A = 0$. (Ist A wahr, so ist $\neg A$ falsch.)

$\neg A$ hat also immer den zu A entgegengesetzten Wahrheitswert.

Die Konjunktion

Die Konjunktion ist das logische «und», (Symbol $\wedge$):

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Die Tabelle besteht (außer der Zeile mit den Spaltenüberschriften) aus vier Zeilen und liest sich wie folgt:

- Sind A und B beide falsch, so ist auch $A \wedge B$ falsch. (Erste Zeile)
- Ist A falsch und B wahr oder umgekehrt, so ist $A \wedge B$ falsch. (Zweite und dritte Zeile)
- Sind dagegen A und B beide wahr, so ist auch $A \wedge B$ wahr. (Vierte Zeile)

Offenbar sind $A \wedge B$ und $B \wedge A$ gleichwertig.

Die Festlegung der Wahrheitswerte von $A \wedge B$ entspricht im Wesentlichen dem Gebrauch der Alltagslogik. Allerdings macht es in der natürlichen Sprache durchaus einen Unterschied, ob man die Aussagen

A : *Michael wird krank.*
B : *Der Arzt gibt Michael eine Medizin.*

zu $A \wedge B$ oder zu $B \wedge A$ verknüpft.

Der Ausdruck $A \wedge B$ beinhaltet keine zeitliche Reihenfolge und erst recht keinen kausalen Zusammenhang zwischen A und B.

Die Disjunktion

Die Disjunktion ist das logische «oder», (Symbol $\vee$):

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \vee B$ ist also genau dann wahr, wenn A oder B (oder beide) wahr sind.

Die logischen Junktoren sind auch Teil der Alltagssprache. Dort haben sie jedoch manchmal eine andere Bedeutung als in der Logik. In der Alltagssprache möchte man sich oft nicht zu genau festlegen, man möchte sich «ein Hintertürchen offen lassen». Außerdem hängt es oft vom Kontext ab, wie ein Junktor zu interpretieren ist. Wenn ich etwa sage: *«Heute Abend gehe ich ins Kino oder ins Theater.»*, so weiß jeder, dass es zeitlich kaum möglich ist, beides an einem Abend zu machen.

Das Wörtchen «oder» wird hier im Sinne von «entweder ... oder» verwendet; man spricht auch von einem *exklusiven oder*. In der logischen Sprache ist das "oder" stets inklusiv gemeint. Das heißt, im Ausdruck $A \vee B$ können auch A und B beide wahr sein.

In der logischen Sprache hängt der Wahrheitswert einer zusammengesetzen Aussage nur vom Wahrheitswert ihrer Variablen ab, nicht jedoch von irgendeinem Kontext.

Die Implikation

Die Implikation ist das logische «wenn - dann», (Symbol $\rightarrow$). Den Teil links vom Pfeil einer Implikation nennt man auch die **Prämisse**, den Teil rechts vom Pfeil die **Konklusion**.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

1	1	1

Ein Beispiel soll dies veranschaulichen. Ich behaupte: «Dienstags gibt es in der Mensa Fisch.» Sei D die Aussage «Es ist Dienstag» und sei F die Aussage «In der Mensa gibt es Fisch». Die Aussage «Dienstags gibt es in der Mensa Fisch.» lautet dann in logischer Sprache:

$D \to F$ (Wenn es Dienstag ist, dann gibt es Fisch.)

Dabei ist D die Prämisse, F die Konklusion.

Nun sagt mein Kommilitone Karl: «Das stimmt nicht!» Überlegen Sie: Wann nur kann mich Karl der Lüge bezichtigen? Nun, wenn es Dienstag ist und keinen Fisch gibt. Was es Mittwochs oder Donnerstags in der Mensa gibt, spielt dabei überhaupt keine Rolle. Eine Implikation ist also nur dann falsch, wenn ihre Prämisse wahr und ihre Konklusion falsch ist.

Ein zweites Beispiel. Ich sage: *«Wenn 4 > 7 ist, dann bin ich der Kaiser von China.»* Ist diese Aussage wahr oder falsch?

Lösung

Sie könnte nur dann falsch sein, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch wäre. Da jedoch die Prämisse 4 > 7 falsch ist, ist die gesamte Implikation auf jeden Fall wahr.

Die Äquivalenz

Die Äquivalenz, (Symbol $\leftrightarrow$):

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A \leftrightarrow B$ ist also genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Ich möchte den Unterschied zwischen der Implikation und der Äquivalenz am Mensabeispiel erläutern: Die Aussage *«Dienstags gibt es Fisch»* (in logischer Sprache: $D \to F$) sagt nur etwas über den Dienstag aus, nichts jedoch über ander Wochentage. Mittwochs oder Donnerstags kann es Fisch geben oder auch nicht.

Der Ausdruck $D \leftrightarrow F$ dagegen bedeutet: Dienstags gibt es Fisch und sonst nicht. Man könnte das wie folgt in logische Sprache «übersetzen»:

$$(D \to F) \land (\neg D \to \neg F)\,.$$

Der Vollständigkeit halber seien noch drei weitere Junktoren aufgeführt; besonders die NAND- und die NOR-Verknüpfung spielen eine wichtige Rolle in der Schaltalgebra (s. Abschnitt Digitale Grundschaltungen).

Das Exklusive Oder

Das Exklusive Oder (auch XOR abgekürzt) ist das logische entweder - oder, (Symbol $\oplus$):

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Das XOR ist offensichtlich die Negation der Äquivalenz: Die zu XOR gehörige Wahrheitstafel hat genau dort Nullen, wo die Wahrheitstafel der Äquivalenz Einsen hat, und umgekehrt.

Das NAND

Das NAND, (Symbol NAND oder $\uparrow$):

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND ist die Verneinung der Konjunktion ("NOT AND").

Das NOR

Das NOR, (Symbol NOR, $\downarrow$):

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0

1	0	0
1	1	0

NOR ist die Verneinung der Disjunktion ("NOT OR").

Wichtig

Die Wahrheitstafeln der hier genannten Junktoren bilden das Grundhandwerkszeug der Aussagenlogik. Es schadet deshalb nicht, zumindest die Tafeln der Negation, der Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz ständig im Gedächtnis zu haben.

Zeit für eine Aufgabe

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.4

Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Aussagenvariablen (denen Sie passende Bedeutungen zuweisen) und Junktoren.

a) Ich spiele Klavier und Saxofon.
b) Ich spiele Tennis oder Fußball.
c) Wenn ich nicht Klavier spiele, spiele ich Tennis.
d) Entweder ich spiele Klavier oder ich spiele Saxofon.
e) Wenn ich Klavier spiele, dann spiele ich nicht Tennis und nicht Fußball.

Lösung

Festlegung der Bedeutungen der eingesetzten Aussagenvariablen:

K : Ich spiele Klavier.
S : Ich spiele Saxofon.
T : Ich spiele Tennis.
F : Ich spiele Fußball.

(Es ist sehr wichtig, dass zuerst die jeweilige Bedeutung dieser Aussagenvariablen definiert wird, denn ohne diese Festlegung könnten die folgenden Aussagen in logischer Sprache nicht angegeben werden!)

a) $K \wedge S$

b) $T \vee F$

c) $\neg K \rightarrow T$

d) $K \oplus S$

e) $K \to (\neg T \land \neg F)$

3.2.3 Einige Fallstricke

Verwechslung von Implikation und Äquivalenz

Im Abschnitt Logik in der Alltagssprache hatte ich bereits mein Lieblingsrestaurant, die «Königsberger Klause» erwähnt.

Die Königsberger Klause hat Montags geschlossen.

Stellen wir uns eine konkrete Situation vor, in der ich aus dem vorhandenen Wissen Schlussfolgerungen ziehen will. Etwa: Heute ist Montag. Ich will wissen: Ist die Klause heute geschlossen? Anders gesagt: Ist die Aussage «Heute ist die Klause geschlossen» wahr oder falsch?

Und damit haben wir schon zwei Aussagen, die in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen:

Variable	**Bedeutung**
M	Heute ist Montag
G	Heute ist die Klause geschlossen

Den obigen Satz können wir nun so formulieren:

Wenn heute Montag ist, dann ist die Klause geschlossen.
$M \to G$

Heute ist Montag, und ich weiß, dass der Satz «Die Klause hat Montags geschlossen» wahr ist. Das heißt:

$M \to G$ ist wahr und M ist ebenfalls wahr.

Aus der Tafel der Implikation kann ich dann schließen, dass auch G wahr sein muss. Das heißt, ich brauche gar nicht erst in die Königsberger Straße zu fahren, denn die Klause hat heute geschlossen.

Einen Tag später: Es ist Dienstag (also: $\neg M$). Ich denke: Heute muss die Klause dann ja wohl geöffnet haben (also: $\neg G$) und fahre in die Königsberger Straße. So ein Pech: An der Tür der Klause hängt ein Schild: «Wegen Krankheit geschlossen.»

Offenbar bin ich einem weit verbreiteten Irrtum aufgesessen. Aus der Tatsache, dass die Klause Montags geschlossen hat, kann ich **nicht** ableiten, dass sie an anderen Tagen immer geöffnet hat!

In der Sprache der Logik: Aus $M \rightarrow G$ folgt nicht $\neg M \rightarrow \neg G$.
Ich habe hier die Implikation $M \rightarrow G$ mit der Äquivalenz $M \leftrightarrow G$ verwechselt.

Nun noch ein Beispiel aus der Mathematik. Im Abschnitt Mengen (Notation) haben wir festgestellt: Wenn zwei Mengen A und B gleich sind, dann haben sie auch die selbe Mächtigkeit. In der Sprache der Logik:

$$A = B \quad \rightarrow \quad |A| = |B|$$

Das klingt zunächst banal, kann aber nützlich sein, um zwei Mengen A und B auf Gleichheit zu prüfen. Wenn die beiden Mengen unterschiedlich viele Elemente enthalten, dann können die beiden auch nicht gleich sein.

Aber: Wenn A und B gleich viel Elemente haben, dann kann ich daraus selbstverständlich nicht schließen, dass A und B gleich sind!

In der Mathematik spricht man auch von **notwendigen** und von **hinreichenden** Bedingungen. Die Tatsache, dass zwei Mengen die gleiche Mächtigkeit haben, ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, dass die Mengen gleich sind.

Allgemein kann man sagen: Ist die Implikation $A \rightarrow B$ wahr, so ist die Prämisse A eine hinreichende, aber nicht unbedingt eine notwendige Bedingung für die Konklusion B.

Im Falle einer Äquivalenz, etwa $D \leftrightarrow F$ (*Dienstags gibt es Fisch, aber an anderen Tagen nicht*), ist die Prämisse (*Heute ist Dienstag*) eine hinreichende und notwedndige Bedingung für die Konklusion (*Heute gibt's Fisch*).

Fassen wir nun einen korrekten und zwei Fehlschlüsse im Umgang mit der Implikation zusammen:

Wichtig

- Aus $A \rightarrow B$ kann ich schließen: $\neg B \rightarrow \neg A$
- Aus $A \rightarrow B$ kann ich **nicht** schließen: $\neg A \rightarrow \neg B$
- Aus $A \rightarrow B$ kann ich **nicht** schließen: $B \rightarrow A$

Fehlerhafte Interpretation des "Und"

Seit neuestem ist die Klause Montags und Dienstags geschlossen. Es liegt nahe, dies mit $M \wedge D \rightarrow G$ zu formulieren, wobei D für die Aussage «Heute ist Dienstag» steht. Moment - überlegen Sie mal genau, was das bedeutet! Es bedeutet

Wenn heute Montag ist und Dienstag ist, dann ist die Klause geschlossen.

Unsinn, nicht wahr? Wie kann es denn gleichzeitig Montag und Dienstag sein? Nein, das umgangssprachliche «Montags und Dienstags geschlossen» muss so interpretiert werden:

> *Montags ist geschlossen und Dienstags ist geschlossen.* Also:
> $(M \to G) \land (D \to G)$

Man könnte jedoch auch so formulieren:

> *Wenn heute Montag oder Dienstag ist, dann ist die Klause geschlossen.* Also:
> $(M \lor D) \to G$

Diese Formel sagt tatsächlich dasselbe aus wie die Formel $(M \to G) \land (D \to G)$.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.5

Konstruieren Sie die Wahrheitstafel der Formel $(M \lor D) \to G$.

Machen Sie dazu eine Spalte für M , eine Spalte für D , eine Spalte für G , eine Spalte für $M \lor D$ und eine Spalte für $(M \lor D) \to G$.

Lösung

M	D	G	$M \lor D$	$(M \lor D) \to G$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

3.2.4 Zusammenfassung - Aussagen und ihre Verknüpfungen

Aussagen im Sinne der Aussagenlogik sind entweder wahr oder falsch. Ein Satz ist also genau dann eine Aussage, wenn man ihm eindeutig und objektiv einen **Wahrheitswert** von 1 (wahr) oder 0 (falsch) zuordnen kann. Auch falsche Aussagen sind Aussagen!

Aussagenvariablen sind abkürzende Symbole, die stellvertretend für Aussagen stehen. Sie können nur die (Wahrheits-)Werte 0 oder 1 annehmen.

Aussagen und Aussagenvariablen können mittels **Junktoren** zu komplizierteren, logisch verknüpften Aussagen zusammengesetzt werden.

Zu den Junktoren zählen:

Negation	$\neg$
Konjunktion	$\wedge$
Disjunktion	$\vee$
Implikation	$\rightarrow$
Äquivalenz	$\leftrightarrow$
Exklusiv-ODER	$\oplus$
Nicht-UND	$\uparrow$
Nicht-ODER	$\downarrow$

Solche aus Aussagenvariablen und Junktoren zusammengesetzte Ausdrücke nennt man **aussagenlogische Formeln**. Auch sie haben Wahrheitswerte 0 oder 1.

Der Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der in dieser Formel auftretenden Aussagenvariablen wird auf übersichtliche Weise durch Wahrheitstafeln beschrieben.

3.3 Aussagenlogische Formeln

Gliederung

Lernziele

In diesem Kapitel werden Sie sehen, wie man mit Aussagenvariablen und Junktoren, mit denen Sie sich im vorigen Kapitel vertraut gemacht haben, **aussagenlogische Formeln** konstruieren kann.

Außerdem werden Sie lernen, wie man den Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel aus den Wahrheitswerten ihrer Variablen mit Hilfe von Wahrheitstafeln berechnet.

3.3.1 Korrekter Aufbau aussagenlogischer Formeln

Mit den Verknüpfungen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ kann man nun aus gegebenen Aussagen (bzw. Aussagenvariablen) beliebig komplizierte zusammengesetzte Aussagen aufbauen.

Bindungsstärken der Junktoren

Dabei ist eine Hierarchie von Bindungsstärken festgelegt - entsprechend der Regel *Punktrechnung geht vor Strichrechnung* in der Arithmetik. Diese Hierarchie bestimmt also, wo innerhalb einer Formel Klammern gesetzt werden müssen und wo nicht. Nach abnehmender Bindungsstärke geordnet lautet die Reihenfolge:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Beispiel

$$\neg A \vee B \wedge C \rightarrow D$$

ist gleichwertig mit

$$((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D\,.$$

Zwar ist die offizielle Vereinbarung die, dass die Konjunktion ($\wedge$) stärker bindet als die Disjunktion ($\vee$). Trotzdem würde ich Ihnen **dringend** raten, in Formeln, die Konjunktion und Disjunktion enthalten, Klammern zu setzen. Dadurch vermeiden Sie fehlerhafte Interpretationen! Wenn Sie beispielsweise $A \vee (B \wedge C)$ schreiben anstatt $A \vee B \wedge C$, sind Sie auf der sicheren Seite!

Das selbe gilt für die Implikation und die Äquivalenz. Lassen Sie die Klammern in der Formel $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$ lieber nicht weg, auch wenn diese nach offizieller Regelung überflüssig sind!

Definition

Exakte Definition des Begriffes **Formel**:

1.) Einzelne Aussagenvariablen sind Formeln.

2.) 0 (die immer falsche Aussage) und 1 (die immer wahre Aussage) sind Formeln.

3.) Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, so sind ihrerseits Formeln:

   - $\neg F_1$
   - $(F_1 \wedge F_2)$
   - $(F_1 \vee F_2)$
   - $(F_1 \rightarrow F_2)$
   - $(F_1 \leftrightarrow F_2)$

Hinweis

Offenbar werden bei wörtlicher Befolgung dieser Regeln teilweise Klammern gesetzt, die gemäß unserer Reihenfolge von Bindungsstärken überflüssig sind - aber das tut nichts zur Sache: Man darf sie weglassen oder auch stehen lassen.

Formeln, die gemäß obiger Definition gebildet werden (unter eventuellem Weglassen der überflüssigen Klammern), heißen **syntaktisch korrekt.** Durch mehrfache Anwendung von 3.) in der obigen Definition kann man aus einfachen Formeln beliebig kompliziert aufbauen.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.6

Welche der folgenden Ausdrücke sind syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln?

a) $(A \rightarrow B) \wedge ((C \rightarrow A) \vee (C \wedge B))$

b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (AC)\neg$

c) $\rightarrow (A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee C)$

d) $\neg A \vee B \wedge C \rightarrow B$

e) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg(B \wedge C))$

Lösung

a), d) und e) sind korrekt.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.7

Klammern Sie die nachfolgenden Formeln sinngemäß!

1.) $A \wedge B \rightarrow A \vee B$

2.) $\neg A \vee \neg B \wedge C$

Lösung

1.) $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

2.) $(\neg A) \vee ((\neg B) \wedge C)$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 3.8

Entfernen Sie überflüssige Klammern unter Beachtung der Vorrangregeln!

1.) $\neg(A \wedge (\neg B))$

2.) $A \leftrightarrow (B \vee (C \rightarrow D))$

Lösung

1.) $\neg(A \wedge \neg B)$

2.) $A \leftrightarrow B \vee (C \rightarrow D)$

3.3.2 Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln dienen dazu, den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Formel aus den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile zu ermitteln. Im folgenden Video zeige ich Ihnen anhand eines Beispiels, wie das funktioniert.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Wahrheitstafeln

Wie konstruiere ich eine Wahrheitstafel?

Im Folgenden das Video zusätzlich in Textform.

Betrachten wir folgendes Beispiel: Es soll die Wahrheitstafel der Formel

$$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$$

aufgestellt werden.

Dazu werden die folgenden Schritte der Reihe nach durchgeführt:

Schritt 1

Erkenne wie viele unterschiedliche Aussagenvariablen in der Formel vorkommen.

Im Beispiel sind es drei, nämlich $A, B,$ und C.

Schritt 2

Ermittle die Anzahl der Zeilen für die Tabelle.

Da jede der drei Aussagenvariablen die beiden Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" annehmen kann, gibt es $2^3 = 8$ Kombinationsmöglichkeiten. Die Tabelle bekommt deshalb acht Zeilen (zuzüglich der obersten Zeile mit den Spaltenüberschriften).

Allgemein: *"Anzahl der Wahheitswerte"* hoch *"Anzahl der Aussagenvariablen"*

Schritt 3

Bereite die Tabelle mit der ermittelten Anzahl an Zeilen vor. Jede Aussagenvariable bekommt eine eigene Spalte. Weitere Spalten werden in einem späteren Schritt noch ergänzt.

A	B	C	

Schritt 4

Fülle die Zeilen in den Spalten der Aussagenvariablen mit allen möglichen Kombinationen aus "Nullen" und "Einsen".

A	B	C	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	

1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Schritt 5

Für jede sinnvolle Teilformel, deren Wahrheitswert hilfsweise berechnet wird, und für die Gesamtformel wird eine weitere Spalte ergänzt.

Im Beispiel gibt es drei sinnvolle Teilformeln sowie die Gesamtformel. Es kommen also vier Spalten hinzu, an den jeweiligen Spaltenüberschriften erkennt man die Teilformeln. Um die "sinnvollen Teilformeln" korrekt bestimmen zu können, sei an die Bindungsstärke der Junktoren erinnert.

A	B	C	$\neg A$	$(B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Schritt 6

Ergänze der Reihe nach die Wahrheitswerte in den Spalten der Teilformeln.

Für die 4. Spalte:

A	B	C	$\neg A$	$(B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
0	0	0	1			
0	0	1	1			
0	1	0	1			
0	1	1	1			
1	0	0	0			

1	0	1	0			
1	1	0	0			
1	1	1	0			

Für die 5. Spalte:

A	B	C	$\neg A$	$(B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
0	0	0	1	0		
0	0	1	1	0		
0	1	0	1	0		
0	1	1	1	1		
1	0	0	0	0		
1	0	1	0	0		
1	1	0	0	0		
1	1	1	0	1		

Für die 6. Spalte:

A	B	C	$\neg A$	$(B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	1	

Schritt 7

Berechne im letzten Schritt die Wahrheitswerte für die Gesamtformel, also für die Spalte ganz rechts.

A	B	C	$\neg A$	$(B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$

0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1

Eigentlich ist man nun bereits fertig, aber die Spalten mit den Teilformeln können jetzt noch entfernt werden, damit die Wahrheitstafel nur die tatsächlich relevanten Spalten enthält. Das Endergebnis sieht damit wie folgt aus:

A	B	C	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Die ersten drei Spalten (für die Aussagenvariablen) geben in jeder Zeile eine **Belegung** der Variablen an. In der zugehörigen Zelle der vierten Spalte (in der selben Zeile!) kann der Wahrheitswert der Formel unter der gegebenen Belegung abgelesen werden.

Beispiel 1: In der zweiten Zeile (nach den Spaltenüberschriften) findet sich die Belegung $A = 0$, $B = 0$ und $C = 1$. Die Formel hat unter dieser Belegung den Wahrheitswert 0.

Beispiel 2: Unter der Belegung $A = 1$, $B = 1$ und $C = 0$ hat die Formel den Wahrheitswert 1.

	A	B	C	$\neg A \vee (B \wedge C) \rightarrow B$
	0	0	0	0
Beispiel 1 →	0	0	1	0
	0	1	0	1
	0	1	1	1
	1	0	0	1
	1	0	1	1
Beispiel 2 →	1	1	0	1
	1	1	1	1

3.4 Aufgaben zu den Bausteinen der Aussagenlogik

Aufgabe

Aufgabe 3.1

Seien a, b, c irgendwelche (festen) Zahlen. Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen?

1.) $a < 3$	2.) $\sqrt{c} = 2$	3.) $3 \cdot (2 + 4)$
4.) $\{a, b\} \cap \{b, c\}$	5.) $a \in \{b, c\}$	6.) $a \neq 5$

Aufgabe

Aufgabe 3.2

Seien A, B und C Aussagenvariablen. Welche der folgenden Ausdrücke sind syntaktisch korrekte Formeln?

1.) $\wedge A$	2.) $\neg(A \neg B)$	3.) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
4.) $A \neg \rightarrow B$	5.) $A \vee \neg B$	6.) $\neg\neg B$

Aufgabe

Aufgabe 3.3

Seien a, b und c irgendwelche reellen Zahlen. Welche der folgenden Ausdrücke sind syntaktisch korrekte Formeln? Ergänzen Sie gegebenenfalls Klammern.

1.) $a \leq 3 \rightarrow a < 4$

2.) $a < b \wedge b < c$

3.) $a < b \wedge c$

4.) $a + c > 5 \vee b + c$

Aufgabe

Aufgabe 3.4

Erstellen Sie die Wahrheitstafeln folgender Formeln:

1.) $A \rightarrow \neg A$

2.) $A \wedge (\neg A \vee B)$

3.) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

4.) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

5.) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

Aufgabe

Aufgabe 3.5

Die Königsberger Klause ist Montags geschlossen, außer wenn Montag ein Feiertag ist (z.B. Ostermontag). Im Juli fahren die Besitzer in Urlaub, da ist die Klause den ganzen Monat geschlossen.

a) Formulieren Sie mithilfe der Aussagenvariablen

- M = Es ist Montag.
- F = Es ist Feiertag.
- J = Es ist Juli.

eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn die Klause geschlossen hat.

b) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel dieser Formel.

Aufgabe

Aufgabe 3.6

Informieren Sie sich im Internet, welche Jahre Schaltjahre sind! Dann formulieren Sie mithilfe der Aussagenvariablen

- A = Das aktuelle Jahr ist durch 4 teilbar.
- B = Das aktuelle Jahr ist durch 100 teilbar.
- C = Das aktuelle Jahr ist durch 400 teilbar.

eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn das aktuelle Jahr ein Schaltjahr ist.

Aufgabe

Aufgabe 3.7

Die Prüfung in Lineare Algebra an der HAU umfasst 4 Teilprüfungen (A, B, C und D). Besteht jemand Prüfung A, so muss er nur noch eine der Prüfungen B, C und D schaffen, um das Modul zu bestehen. Andernfalls muss er alle drei Prüfungen, B, C und D schaffen, um zu bestehen.

Formulieren Sie mithilfe der Aussagenvariablen

- A = Prüfung A wurde bestanden.
- B = Prüfung B wurde bestanden.
- C = Prüfung C wurde bestanden.
- D = Prüfung D wurde bestanden.

eine Formel, die genau dann wahr ist, wenn die Gesamtprüfung bestanden ist.

Aufgabe

Aufgabe 3.8

«Wer von euch Rabauken hat den Ball in mein Fenster geschossen?» schreit der Mann wutschnaubend. Trotzig stehen die vier Kinder da.

> Anette sagt: «Ulf war es!»
> Ulf sagt: «Patrick hat es getan!»
> Lena sagt: «Ich war es nicht!»
> Patrick sagt: «Ulf hat gelogen!»

1.) Wenn nur eine(r) von den vieren gelogen hat, wer hat den Ball geschossen?

2.) Und wer war es, wenn nur eine(r) die Wahrheit gesagt hat?

Wir gehen dabei davon aus, dass es sich um einen Einzeltäter (eine Einzeltäterin) handelt.

4 Gesetze der Aussagenlogik

Gliederung

4.1 Tautologien und logische Identitäten

Gliederung

Lernziele

In diesem Kapitel werden Sie

- die wichtigen Begriffe *Tautologie*, *Kontradiktion* und *logische Äquivalenz* kennenlernen,
- die Gesetze und Regeln der Aussagenlogik kennenlernen,
- lernen, wie man mithilfe der Gesetze der Aussagenlogik
  - komplizierte Formeln in äquivalente, aber einfachere Formeln überführen kann,
  - beweisen kann, dass eine gegebene Formel eine Tautologie ist,
  - die Äquivalenz zweier Formeln beweisen kann.

4.1.1 Tautologien und Kontradiktionen

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.1

Erstellen Sie die Wahrheitstafel der Formel $A \wedge B \rightarrow A$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow A$
0	0	0	1

0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

In der ganzen Spalte stehen nur Einsen, das heißt, die Formel ist immer wahr. Das ist anschaulich klar, denn wenn A und B beide wahr sind, dann ist erst recht A wahr.

Definition

Eine Formel heißt

- **Tautologie** (oder **allgemeingültig**), wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen den Wahrheitswert 1 liefert, das heißt, wenn in der zugehörigen Spalte der Wahrheitstafel nur Einsen stehen,
- **Kontradiktion** (oder unerfüllbar), wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen den Wahrheitswert 0 liefert, das heißt, wenn in der zugehörigen Spalte der Wahrheitstafel nur Nullen stehen.

Offenbar gilt der folgende Satz:

Wichtig

Eine Formel F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Eine häufige Fragestellung in der Aussagenlogik lautet, ob eine gegebene Formel eine **Tautologie** ist. Eine Methode zur Lösung solcher Probleme kennen wir bereits: die **Wahrheitstafeln**. Diese Methode kann allerdings sehr rechenintensiv sein, da im Falle von n auftretenden Variablen 2^n Fälle durchprobiert werden müssen.

Im Folgenden werden wir Lösungsverfahren kennen lernen, die in vielen Fällen schneller zum Ziel führen.

4.1.2 Die Gesetze der Aussagenlogik

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.2

Erstellen Sie innerhalb einer Wahrheitstafel die Tafeln der beiden Formeln $F = A \rightarrow B$ und $G = \neg A \lor B$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung

A	B	F	$\neg A$	G
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Es fällt auf, dass die beiden Spalten für F und für G identisch sind! Das bedeutet, dass die beiden Formeln stets denselben Wahrheitswert haben.

Definition

Zwei aussagenlogische Formeln F und G heißen **logisch äquivalent**, falls sie in jeder Zeile der Wahrheitstafel übereinstimmende Wahrheitswerte haben. Wir schreiben $F \equiv G$.

Das Idempotenzgesetz

Die Formeln A und $A \wedge A$ sind logisch äquivalent, wie man leicht mithilfe der Wahrheitstafel nachprüfen kann. Wir können also schreiben:

Wichtig

$$A \wedge A \equiv A$$

Ebenso gilt

$$A \vee A \equiv A$$

Diese beiden Gesetze heißen auch **Idempotenzgesetze**. Solche Gesetze kann man nun als Regeln benutzen, um Formeln zu vereinfachen.

Beispielsweise kann die Formel $A \vee A \rightarrow B \wedge B$ vereinfacht werden, indem $A \vee A$ durch A ersetzt wird und $B \wedge B$ durch B. Auf diese Weise entsteht die einfachere Formel $A \rightarrow B$.

Das Kommutativgesetz

Mithilfe einer Wahrheitstafel lässt sich leicht nachprüfen, dass folgende Gesetze gelten:

Wichtig

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

und

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

Kommt Ihnen die Form dieser Gesetze bekannt vor?

Lösung

Sie entsprechen dem Kommutativgesetz der Addition (und ebenso der Multiplikation).

Das Assoziativgesetz

Mithilfe einer Wahrheitstafel lässt sich die Gültigkeit der folgenden Gesetze prüfen:

Wichtig

$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

und

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$

Kommt Ihnen die Form dieser Gesetze bekannt vor?

Lösung

Diese beiden Gesetze entsprechen dem Assoziativgesetz der Addition (und ebenso der Multiplikation).

Genau so wie bei einem Ausdruck mit "mal" und "plus" kann man in der Formel $A \lor (B \lor C)$ einfach die Klammern weglassen. Man schreibt also einfach $A \lor B \lor C$.

Beispiel

Wir wollen die Formel

$$A \land (B \land A)$$

vereinfachen. Zunächst können wir die Klammern weglassen und erhalten

$$A \land B \land A\,.$$

Als nächstes wenden wir das Kommutativgesetz an und erhalten

$$A \land A \land B\,.$$

Schließlich wenden wir das Idempotenzgesetz an und erhalten

$$A \land B\,.$$

Das Distributivgesetz

Mithilfe von Wahrheitstafeln kann man auch folgende Äquivalenzen beweisen:

Wichtig

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

und

$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Diese beiden entsprechen dem Distributivgestz der Multiplikation und Addition:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Interessanterweise gilt bei den logischen Junktoren das Gesetz auch dann, wenn man die beiden Operatoren vertauscht, was bei den Operatoren + und · jedoch nicht geht.

Die de Morgan'sche Regel

Weiter gelten folgende Gesetze, die auch die de Morgan'schen Regeln genannt werden.

Wichtig

$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

und

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$

All diese Gesetze lassen sich ganz formal (und mühsam!) mithilfe von Wahrheitstafeln beweisen. Manchmal ist es jedoch durchaus nützlich, sich mithilfe eines konkreten Beispiels die Bedeutung dieser Gesetze klar zu machen.

Ich werde gefragt: «Darf ich Ihnen eine Tasse Kaffee oder eine Tasse Tee anbieten?» Ich lehne dankend ab. Das heißt: Ich möchte nicht (Kaffee oder Tee), also weder Kaffee noch Tee, also nicht Kaffee und nicht Tee.

Schreiben wir T für «Ich trinke Tee», K für «Ich trinke Kaffee», so verdeutlicht das Beispiel die Identität $\neg(T \lor K) \equiv \neg T \land \neg K$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.3

Beweisen Sie die erste de Morgan'sche Regel mithilfe einer Wahrheitstafel!

Lösung

Die erste de Morgan'sche Regel lautet:

$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

Mit Hilfe der Wahrheitstafel ist zu zeigen, dass die linke und die rechte Formel aus der Regel in ihren jeweiligen Spalten identische Werte haben, was offensichtlich der Fall ist:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Damit ist diese Regel bewiesen.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.4

Jedes der bisher vorgestellten Gesetze besteht aus zwei Varianten. Fällt Ihnen dabei etwas auf?

Lösung

Die beiden Varianten entstehen auseinander durch Vertauschen von $\wedge$ und $\vee$.

Die Komplementaritätsgesetze

Weiter gelten folgende Gesetze:

Wichtig

$$A \vee \neg A \equiv 1$$

und

$$A \wedge \neg A \equiv 0$$

Auch diese sind anschaulich klar: $A \vee \neg A$ ist eine **Tautologie** («es regnet oder es regnet nicht») und deshalb äquivalent zum Wahrheitswert *wahr*, also zu 1.

Und $A \wedge \neg A$ ist eine **Kontradiktion** («es regnet und es regnet nicht») und deshalb äquivalent zum Wahrheitswert *falsch*, also zu 0.

Aber - Moment mal: In der obigen Aufgabe haben wir festgestellt, dass die beiden Varianten der Gesetze durch Vertauschen von $\wedge$ und $\vee$ zustande kommen. Das war offenbar noch nicht die ganze Wahrheit. Das Komplementaritätsgesetze zeigt uns, dass wir zusätzlich auch noch 1 und 0 vertauschen müssen!

Die Absorptionsregel

Weiter gelten folgende Gesetze:

Wichtig

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

und

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

Dieses Gesetz besagt: Steht eine Formel A außerhalb einer Klammer und kommt dieselbe Formel A innerhalb der Klammer vor, und sind außerhalb und innerhalb der Klammer unterschiedliche Junktoren und bzw. oder, dann kann die Klammer komplett gestrichen werden.

Auch hier lohnt es sich, die Regel an einem Beispiel zu verdeutlichen. Eine Prüfung besteht aus zwei Teilprüfungen, A und B. Die Prüfungsordnung besagt:

> Um die Prüfung zu bestehen, muss ich A bestehen oder A und B bestehen.

Man sieht sofort, dass der Zusatz «oder A und B bestehen» überflüssig ist. Es reicht aus zu sagen, dass ich A bestehen muss.

Machen Sie sich anhand dieses Beispiels auch die zweite Variante der Absorptionsregel klar!

Die Neutralitätsgesetze

Weiter gelten folgende Gesetze:

Wichtig

$$A \vee 0 \equiv A$$

und

$$A \wedge 1 \equiv A$$

Ein Beispiel für die Anwendung der Gesetze

Die Formel

$$A \wedge (A \rightarrow B)$$

soll mithilfe der obigen Gesetze vereinfacht werden.

Zunächst benutzen wir die Regel $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ aus der allerersten Aufgabe dieses Abschnitts, um die Implikation zu eliminieren. Wir erhalten:

$$A \wedge (\neg A \vee B)\,.$$

Nun können wir das Distributivgesetz anwenden und erhalten

$(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)$

Der erste Teilausdruck lässt sich mithilfe des Komplementaritätsgestzes vereinfachen zu

$0 \vee (A \wedge B)$

und schließlich wenden wir das Neutralitätsgesetz an und erhalten die Formel

$A \wedge B$

Weiter lässt sich nichts mehr vereinfachen.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.5

Ist die XOR-Verknüpfung (s. Verknüpfungen von Aussagen) assoziativ, mit anderen Worten: gilt folgende Gleichung?

$(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$?

Lösungstipp: Verwenden Sie Wahrheitstafeln!

Lösung

Ja! Den Beweis sollten Sie mit Hilfe der XOR-Wahrheitstafel selbst führen können.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.6

Ist die Implikation (s. Verknüpfungen von Aussagen) assoziativ, mit anderen Worten, gilt $(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$?

Lösung

Nein!

4.1.3 Auflistung der Gesetze

Hier werden noch einmal die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Gesetze und Regeln

Hinweis

Die beiden Begriffe «Gesetz» und «Regel» werden hier synonym gebraucht. Die Tatsache, dass einige der Gesetze Regeln heißen, hat historische Gründe

der Aussagenlogik aufgelistet, nebst einigen Ergänzungen. Ich verwende dabei die Buchstaben F, G und H, um zu verdeutlichen, dass es sich um beliebige Formeln (nicht nur um Aussagenvariablen) handeln kann.

Idempotenzgesetz (1)

$$F \wedge F \ \equiv \ F$$

$$F \vee F \ \equiv \ F$$

Kommutativgesetz (2)

$$F \wedge G \ \equiv \ G \wedge F$$

$$F \vee G \ \equiv \ G \vee F$$

Assoziativgesetz (3)

$$(F \wedge G) \wedge H \ \equiv \ F \wedge (G \wedge H) \ \equiv \ F \wedge G \wedge H$$

$$(F \vee G) \vee H \ \equiv \ F \vee (G \vee H) \ \equiv \ F \vee G \vee H$$

Absorptionsgesetz (4)

$$F \vee (F \wedge G) \ \equiv \ F$$

$$F \wedge (F \vee G) \ \equiv \ F$$

Neutralitätsgesetz (5)

$$F \wedge 1 \ \equiv \ F$$

$$F \vee 0 \ \equiv \ F$$

Distributivgesetz (6)

$$F \wedge (G \vee H) \ \equiv \ (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$F \vee (G \wedge H) \ \equiv \ (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Komplementaritätsgesetz (7)

$$F \wedge \neg F \ \equiv \ 0$$

$$F \vee \neg F \ \equiv \ 1$$

De Morgan'sche Regel (8)

$$\neg(F \wedge G) \ \equiv \ \neg F \vee \neg G$$

$$\neg(F \vee G) \ \equiv \ \neg F \wedge \neg G$$

Doppelte Negation (9)

$$\neg(\neg F) \ \equiv \ \neg\neg F \ \equiv \ F$$

Extremalgesetz (10)

$$F \wedge 0 \;\equiv\; 0$$
$$F \vee 1 \;\equiv\; 1$$

Implikation (11)

$$(F \rightarrow G) \;\equiv\; (\neg F \vee G)$$

Äquivalenz (12)

$$(F \leftrightarrow G) \;\equiv\; (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)$$

Erweiterte Komplementarität (13)

$$F \vee (\neg F \wedge G) \;\equiv\; (F \vee G)$$
$$F \wedge (\neg F \vee G) \;\equiv\; (F \wedge G)$$

4.1.4 Anwendung der Gesetze

Die logischen Gesetze des vorigen Abschnitts dienen vor allem zur äquivalenten Umformung und Vereinfachung von Formeln. Aus diesem Grund werden sie auch **Vereinfachungsregeln** (der Aussagenlogik) genannt.

Diese Technik ähnelt sehr den Umformungen von arithmetischen Ausdrücken, wie sie etwa zum Vereinfachen von Termen oder zum Lösen von Gleichungen benutzt werden. In diesem Fall benutzt man Gesetze der Arithmetik, im Fall der Aussagenlogik benutzt man die Gesetze der Aussagenlogik.

In diesem Abschnitt möchte ich die Anwendung der Vereinfachungsregeln an einigen Beispielen verdeutlichen.

Das folgende Video zeit einige Anwendungen der de Morganschen Regel (Regel Nr. 8)

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Anwendung_der_Gesetze

Anwendungen der Regeln Beispiel 1

Zweites Beispiel

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Anwendung_der_Gesetze

Anwendungen der Regeln Beispiel 2

DrittesBeispiel

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Anwendung_der_Gesetze

Anwendungen der Regeln Beispiel

Tautologien prüfen

Mithilfe der logischen Gesetze kann man nicht nur Formeln vereinfachen. Man kann auch prüfen, ob eine gegebene Formel eine Tautologie, eine Kontradiktion oder keins von beiden ist.

Beispiel

Wir betrachten die Formel

$$A \to (B \to A)$$

Mithilfe der Regeln vereinfachen wir diese Formel.

Die beiden Implikationspfeile können mithilfe der

Regel (11)

$$F \to G \equiv \neg F \vee G$$

eliminiert werden.

Wir machen dies schön Schritt für Schritt und beginnen mit der inneren Implikation, um dann im nächsten Schritt die äußere Implikation zu eliminieren:

$$\begin{aligned} A \to (B \to A) &\equiv A \to (\neg B \vee A) && (11) \\ &\equiv \neg A \vee \neg B \vee A && (11) \end{aligned}$$

Die Klammern dürfen wir wegen der Assoziativität weglassen.

Die nun entstandene Formel enthält $\neg A \vee A$ als Teilformel (hier benutzen wir die Kommutativität von $\vee$!).

Diese Teilformel kann mithilfe von Regel (7) durch 1 ersetzt werden. Auf diese Weise erhalten wir die vollständige Ableitung:

$$\begin{aligned} A \to (B \to A) &\equiv A \to (\neg B \vee A) && (11) \\ &\equiv \neg A \vee \neg B \vee A && (11) \\ &\equiv 1 \vee \neg B && (7) \text{ und } (3) \\ &\equiv 1 && (10) \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Ausgangsformel äquivalent zu 1 ist. Das bedeutet, es handelt sich um eine Tautologie.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.7

Handelt es sich bei der Formel $\neg(A \to A)$ um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder um keines von beiden?

Lösung

Es handelt sich um eine Kontradiktion:

$$\begin{array}{rcll} \neg(A \to A) & \equiv & \neg(\neg A \vee A) & (11) \\ & \equiv & A \wedge \neg A & (8) \text{ und } (9) \\ & \equiv & 0 & \end{array}$$

Logische Identitäten beweisen

Im Abschnitt Einige Fallstricke ging es (mal wieder) um die Königsberger Klause, die neuerdings Montags und Dienstags geschlossen hat. Dort haben wir festgestellt, dass dies sowohl mit $(M \to G) \wedge (D \to G)$ als auch mit $M \vee D \to G$ formuliert werden kann.

Aber sind denn diese beide Formeln überhaupt logisch äquivalent? Gilt die Gleichung

$$(M \to G) \wedge (D \to G) \quad \equiv \quad M \vee D \to G \ ?$$

Das beweisen wir am einfachsten, indem wir beide Seiten der Gleichung nacheinander vereinfachen und hoffen, dass zum Schluss dasselbe herauskommt.

Linke Seite:

$$(M \to G) \wedge (D \to G) \quad \equiv \quad (\neg M \vee G) \wedge (\neg D \vee G) \qquad (11) \text{ und } (11)$$

Dies lassen wir so stehen und vereinfachen die rechte Seite:

$$\begin{array}{rcll} M \vee D \to G & \equiv & \neg(M \vee D) \vee G & (11) \\ & \equiv & (\neg M \wedge \neg D) \vee G & (8) \\ & \equiv & (\neg M \vee G) \wedge (\neg D \vee G) & (6) \end{array}$$

Wir haben nun beide Seiten zur selben Formel vereinfacht. Dies beweist, dass sie äquivalent sind.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.8

Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$A \to B \wedge C \quad \equiv \quad (A \to B) \wedge (A \to C)$$

Lösung

Linke Seite:

$$\begin{aligned} A \to B \land C &\equiv \neg A \lor (B \land C) && (11) \\ &\equiv (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C) && (6) \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$(A \to B) \land (A \to C) \equiv (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C) \qquad \text{(11) und (11)}$$

4.1.5 Zusammenfassung (logische Identitäten)

In diesem Abschnitt haben wir festgestellt:

- Eine **Tautologie** ist eine Formel, die stets wahr ist (unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Aussagenvariablen).
- Eine **Kontradiktion** ist eine Formel, die stets falsch ist.
- Zwei Formeln F und G sind **logisch äquivalent** ($F \equiv G$), wenn sie in jeder Zeile der Wahrheitstafel jeweils die selben Werte haben.
- Die **Gesetze der Aussagenlogik** sind logische Identitäten der Form ($F \equiv G$). Sie können dazu benutzt werden
    - um Formeln zu vereinfachen,
    - um zu beweisen, dass eine gegebene Formel eine Tautologie (oder eine Kontradiktion) ist,
    - um eine logische Identität zu beweisen.

4.2 Normalformen

Gliederung

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass es im Allgemeinen viele Möglichkeiten gibt, einen Sachverhalt als logische Formel zu formulieren. Die Normalform einer Formel ist eine standardisierte Form, die mit lediglich drei Junktoren auskommt: Der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion. Dies ist insbesondere für Algorithmen nützlich, die logische Formeln weiterverarbeiten. Eine Normalform ist quasi eine standardisierte Schnittstelle.

Lernziele

- In diesem Kapitel lernen Sie zwei Arten von Normalformen für logische Formeln kennen: Die konjunktive und die disjunktive Normalform.

- Außerdem lernen Sie Algorithmen kennen, mit denen man logische Formeln in Normalform bringen kann.

4.2.1 Disjunktive und konjunktive Normalformen

Es gibt zwei Normalformen, die disjunktive Normalform und die konjunktive Normalform. Beide enthalten ausschließlich die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ und ansonsten nur Aussagenvariablen und Klammern.

Definition

Ein **Literal** ist eine Aussagenvariable (z.B. A) oder eine negierte Aussagenvariable (z.B. $\neg A$) oder eine logische Konstante (0 oder 1).

Disjunktive Normalform

Definition

Eine Formel in **disjunktiver Normalform (DNF)** kann sein:

(1) Ein einzelnes Literal,

(2) Eine Disjunktion von Literalen,

(3) Eine Konjunktion von Literalen,

(4) Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

Beispiel

Folgende Formeln sind in DNF:

$A \wedge \neg B$	(Typ 3)
$\neg A \vee \neg B \vee 1$	(Typ 2)
$\neg B$	(Typ 1)
$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	(Typ 4)

Man kann die DNF auch dadurch charakterisieren, was *nicht* vorkommen darf:

- In einer DNF-Formel kommen nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ vor.
- In einer DNF-Formel steht kein $\neg$ vor einer Klammer, sondern immer nur direkt vor einer Aussagenvariablen.
- In einer DNF-Formel steht kein $\wedge$ übergeordnet vor einem $\vee$. Beispielsweise wäre $A \wedge (B \vee C)$ keine DNF.

Konjunktive Normalform

Definition

Eine Formel in **konjunktiver Normalform (KNF)** kann sein:

(1) Ein einzelnes Literal,

(2) Eine Disjunktion von Literalen,

(3) Eine Konjunktion von Literalen,

(4) Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen.

Beispiel

Folgende Formeln sind in KNF:

$A \wedge \neg B$	(Typ 3)
$\neg A \vee \neg B \vee 1$	(Typ 2)
$\neg B$	(Typ 1)
$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C)$	(Typ 4)

Man kann die KNF auch dadurch charakterisieren, was *nicht* vorkommen darf:

- In einer KNF-Formel kommen nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ vor.
- In einer KNF-Formel steht kein $\neg$ vor einer Klammer, sondern immer nur direkt vor einer Aussagenvariablen.
- In einer KNF-Formel steht kein $\vee$ übergeordnet vor einem $\wedge$. Beispielsweise wäre $A \vee (B \wedge C)$ keine KNF.

Anmerkung

An den obigen Beispielen können Sie Folgendes sehen:

- Eine DNF-Formel oder KNF-Formel muss nicht vereinfacht sein.
- Eine Formel kann durchaus sowohl in KNF als auch in DNF sein (Obige Beispiele, Typ 1, 2 und 3). Dies ist dann der Fall, wenn sie entweder nur die Junktoren $\neg$ und $\vee$ oder $\neg$ und $\wedge$ enthält.

Aufgabe

Welche der folgenden Formeln sind in KNF, welche sind in DNF, welche sind sowohl KNF als auch DNF?

1.) $A \vee \neg(B \wedge C)$
2.) $\neg A \vee \neg B$
3.) $A \vee (B \wedge (A \vee C))$
4.) $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee C)$
5.) $(A \wedge B) \vee \neg C$

6.) $\neg\neg C$
7.) $A \wedge \neg B \wedge C$

Lösung

- Die Formeln 2) und 7) sind sowohl in KNF als auch DNF, die Formel 4) ist ausschießlich in KNF, die Formel 5) ist ausschließlich in DNF, die Formeln 1), 3) und 6) sind weder in DNF noch in KNF.

4.2.2 Formeln in Normalform bringen

Transformation in DNF

Jede Formel kann durch äquivalente Umformungen in DNF gebracht werden. Zu diesem Zweck geht man wie folgt vor:

1.) Zuerst werden die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mithilfe der Regeln für die Implikation und Äquivalenz eliminiert. Für weitere Junktoren ($\oplus$, $\uparrow$, $\downarrow$) gibt es entsprechende Eliminationsregeln.

2.) Nun besteht die Formel nur noch aus den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$. Nun werden unter Ausnutzung des Gesetzes von der doppelten Negation die Negationen mithilfe der Regel von de Morgan sukzessive nach innen vor die Aussagenvariablen gebracht.

3.) Im letzten Schritt wird jedes $\wedge$, das übergeordnet vor einem $\vee$ vorkommt, mithilfe des Distributivgesetzes nach innen gezogen, solange, bis keine solche Konstellation mehr vorkommt.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.9

Erstellen Sie Regeln, mit deren Hilfe die Junktoren $\oplus$, $\uparrow$ und $\downarrow$ eliminiert werden können!

Lösung

$$\begin{aligned}
F \oplus G &\equiv (F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G) \equiv (F \wedge \neg G) \vee (\neg F \wedge G) \\
F \uparrow G &\equiv \neg(F \wedge G) \\
F \downarrow G &\equiv \neg(F \vee G)
\end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Schritte ist zwar nicht zwingend vorgegeben, jedoch ist es im Allgemeinen sehr sinnvoll, sich an diese Reihenfolge zu halten, um unnötige Arbeit zu vermeiden!

Im zweiten Schritt, bei der Behandlung der Negationen, sollte man von außen nach innen vorgehen. Auch dies kann überflüssige Arbeit ersparen!

Eine weitere Arbeitserleichterung im Umgang mit Negationen können Sie in der folgenden Aufgabe selbst entwickeln.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.10

Formulieren Sie eine allgemeine Regel, mit der man Formeln wie $\neg\neg\neg A$, $\neg\neg\neg\neg A$ usw. vereinfachen kann!

Lösung

Steht vor der Aussagenvariablen eine gerade Anzahl von Negationen, so fallen alle Negationen weg, steht vor der Aussagenvariablen eine ungerade Anzahl an Negationen, so bleibt eine einzige übrig.

Die resultierende Formel ist nun in DNF, kann aber oft noch vereinfacht werden, z.B. unter Anwendung der Idempotenz-, Komplementaritäts- und Neutralitätsgesetze.

Beispiel

Die Formel $((A \to B) \to C) \to A$ soll in DNF transformiert werden.

Zunächst elimieren wir mithilfe

Regel (11)

$F \to G \quad \equiv \quad \neg F \vee G$

die Implikationen:

$$((A \to B) \to C) \to A \quad \equiv \quad \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee C) \vee A$$

Im nächsten Schritt ziehen wir mithilfe

Regel (8)

$\neg(F \wedge G) \quad \equiv \quad \neg F \vee \neg G$ und $\neg(F \vee G) \quad \equiv \quad \neg F \wedge \neg G$

die Negationen nach innen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) Man kann Regel 8 auf den inneren Teilausdruck $\neg(\neg A \vee B)$ anwenden;

2.) Man kann Regel 8 auf den äußeren Ausdruck $\neg(X \vee C)$ anwenden; dabei steht das X für die Formel $\neg(\neg A \vee B)$.

Die zweite Variante hat den Vorteil, dass sich die doppelte Negation sofort aufhebt. Dadurch benötigt man insgesamt einen Schritt weniger als in der ersten Variante. Auf diese Weise erhalten wir

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg C) \vee A\,.$$

Nun wenden wir

Regel (6)

$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

auf den Teilausdruck $(\neg A \vee B) \wedge \neg C$ an, um die Disjunktion nach außen zu ziehen und erhalten schließlich die DNF-Formel $(\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee A$.

Transformation in KNF

Die Transformation einer Formel in KNF verläuft analog zur Transformation in DNF.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.11

Erstellen Sie entsprechend dem obigen Muster einen Algorithmus zur Transformation einer Formel in KNF!

Lösung

Schritt 1) und 2) wie bei der DNF-Transformation. 3) Im letzten Schritt wird jedes $\vee$, das übergeordnet vor einem $\wedge$ vorkommt, mithilfe des Distributivgesetzes nach innen gezogen, solange, bis keine solche Konstellation mehr vorkommt.

Die DNF (bzw. die KNF) einer Formel ist in der Regel nicht eindeutig. Es gibt also i.Allg. mehrere verschiedene zueinander äquivalente Formeln, die alle in DNF (bzw. in KNF) sind.

Die Aufgabe, die kürzeste DNF (bzw. KNF) einer vorgegebenen Formel zu finden, ist oft schwer zu lösen. Solche Aufgaben stellen sich üblicherweise in der Schaltalgebra.

Beispiel

Die Formel $((A \to B) \to C) \to A$ aus dem obigen Beispiel soll nun in KNF transformiert werden.

Die ersten beiden Schritte (Elimination der Implikationen und Hineinziehen der Negationen) verlaufen exakt genau so wie im obigen Beispiel. Wir erhalten die Formel

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg C) \vee A\,.$$

Nun wenden wir

Regel (6)

$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

auf die gesamte Formel an, um die Konjunktion nach außen zu ziehen und erhalten die KNF-Formel

$$(\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg C \vee A)\,.$$

Diese Formel lässt sich mithilfe der Komplementarität

Regel (7)

$F \vee \neg F \equiv 1$

und der Neutralität

Regel (5)

$F \wedge 1 \equiv F$

noch vereinfachen zu

$$\neg C \vee A$$

Hinweis

Hinweis für die Klausur: Wenn die Aufgabenstellung lautet: «Transformieren Sie die Formel ... in DNF» (oder in KNF), so müssen Sie nicht vereinfachen. Nur wenn dies explizit in der Aufgabenstellung verlangt wird, müssen Sie dies tun!

Diese Formel ist nun sowohl in KNF als auch in DNF.

Beispiel

Die folgende Formel soll in KNF und in DNF transformiert werden:

$$(\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$

Wir eliminieren die Implikationen und erhalten:

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

Die enstandene Formel ist in KNF. Zur Transformation in DNF wenden wir zuerst das Distributivgesetz an:

$$(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$$

Diese Formel ist bereits in DNF, sie lässt sich jedoch weiter vereinfachen mithilfe der Komplementarität und der Neutralität. Auf diese Weise erhalten wir

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge C)$$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.12

Transformieren Sie die Formel $\neg(A \leftrightarrow B)$ in DNF und in KNF.

Lösung

DNF: $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
KNF: $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

4.2.3 Kanonische Normalformen

Eine andere Methode zur Umformung einer aussagenlogischen Formel F in DNF oder KNF ist anwendbar, wenn die Wahrheitstafel von F vorliegt. Sehen Sie dazu das folgende Video.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.
https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Kanonische_Normalformen

Erzeugung von DNF und KNF aus einer Wahrheitstafel

Die so resultierenden Formeln in DNF (bzw. in KNF) enthalten in jeder der inneren Klammern alle auftretenden Aussagenvariablen (positiv oder negativ). Außerdem gibt es keine zwei identische Klammern. Solche Normalformen heißen kanonische Normalformen.

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es genau eine äquivalente Formel in kanonischer DNF und genau eine äquivalente Formel in kanonischer KNF (bis auf Vertauschungen von Literalen oder Klammern).

Die DNF- bzw. KNF-Formeln, die mit obigen Methoden erzeugt wurden, sind in der Regel nicht die kürzestmöglichen. Das Problem, für gegebene Wahrheitstafeln möglichst kurze DNF- oder KNF-Formeln zu finden, ist ein Thema aus dem Bereich der Schaltnetze.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 4.13

Bestimmen Sie die kanonische DNF sowie die kanonische KNF der Formel F mit drei Variablen A, B und C, die genau dann 1 ist, wenn eine ungerade Anzahl der Variablen den Wert 1 hat.

Lösung

Die Wahrheitstafel der Formel F hat die Form

A	B	C	F

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Anwendung des Rezeptes zur Erzeugung einer Formel in DNF liefert:

$$F \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Und die Anwendung des Rezeptes zur Erzeugung einer Formel in KNF liefert:

$$F \equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

4.3 Aufgaben zu den Gesetzen der Aussagenlogik

Aufgabe

Aufgabe 4.1

Vereinfachen Sie die folgenden aussagenlogischen Formeln mithilfe der Vereinfachungsregeln.

a) $\neg(A \wedge \neg(A \wedge B))$	b) $A \vee (B \wedge (A \vee C))$
c) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$	d) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
e) $A \vee (B \wedge (\neg A \vee C))$	f) $A \wedge \neg(B \wedge \neg(A \wedge C))$
g) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)$	h) $((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$

Aufgabe 4.2

Aufgabe

Handelt es sich bei den folgenden Formeln jeweils um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder um keines von beiden?

a) $A \to \neg A$	b) $(A \wedge B) \to (A \vee B)$
c) $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B$	d) $(A \to B) \vee (B \to A)$
e) $A \to (\neg A \to B)$	f) $((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$

Aufgabe

Aufgabe 4.3

Beweisen Sie die folgenden logischen Identitäten.

a) $A \wedge (A \to B) \equiv B \wedge (B \to A)$	b) $A \leftrightarrow B \equiv (A \vee B) \to (A \wedge B)$
c) $(\neg A) \leftrightarrow B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)$	d) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
e) $A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$	f) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Aufgabe

Aufgabe 4.4

Welche der folgenden Formeln sind in DNF? Welche sind in KNF?

a) $A \vee (\neg B \wedge C)$	b) $A \wedge \neg(B \wedge C)$
c) $A \vee \neg B$	d) $(A \to B) \wedge C$
e) $(\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg C)$	f) $\neg A \wedge B$

Aufgabe

Aufgabe 4.5

Transformieren Sie die folgenden Formeln in DNF und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $(A \to B) \land (B \to C) \land (C \to A)$	b) $A \to (B \to C)$
c) $(A \to B) \to (A \to C)$	d) $A \land (B \lor (C \land (D \lor E)))$

Aufgabe

Aufgabe 4.6

Transformieren Sie die folgenden Formeln in KNF und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $(A \land B) \leftrightarrow (A \lor B)$	b) $(((A \to B) \to C) \to D) \to E$

Aufgabe

Aufgabe 4.7

Wie Sie bereits wissen, hat die Königsberger Klause den ganzen Juli wegen Betriebsurlaub geschlossen. Außerdem ist Montags geschlossen, außer wenn Montag ein Feiertag ist (z.B. Ostermontag).

Erstellen Sie mithilfe der Variablen J («es ist Juli»), M («es ist Montag») und F («es ist Feiertag») eine Formel G, die genau dann wahr ist, wenn die Klause geöffnet hat.

Gehen Sie zu diesem Zweck wie folgt vor: Erstellen Sie zunächst eine Wahrheitstafel für G und konstruieren Sie aus dieser eine kanonische DNF oder KNF für G.

Aufgabe

Aufgabe 4.8

Die Prüfung in Lineare Algebra an der HAU umfasst 4 Teilprüfungen (A, B, C und D). Besteht jemand Prüfung A, so muss er nur noch eine der Prüfungen B, C und D schaffen, um das Modul zu bestehen. Andernfalls muss er alle drei Prüfungen, B, C und D schaffen, um zu bestehen. Formulieren Sie mithilfe der Aussagenvariablen

- A = Prüfung A wurde bestanden
- B = Prüfung B wurde bestanden
- C = Prüfung C wurde bestanden

- D = Prüfung D wurde bestanden

eine Formel G, die genau dann wahr ist, wenn die Gesamtprüfung bestanden ist. Gehen Sie zu diesem Zweck wie folgt vor: Erstellen Sie zunächst eine Wahrheitstafel für G und konstruieren Sie aus dieser eine kanonische DNF oder KNF für G.

Aufgabe

Aufgabe 4.9

Frau Müller sagt zu ihrem Mann: «Du rauchst und siehst immer nur fern. Du solltest mal joggen!»

Ihr Gatte erwidert: «Ich verspreche dir für nächsten Sonntag Folgendes:

- Wenn ich jogge, dann rauche ich oder sehe fern.
- Wenn ich nicht fernsehe, dann jogge ich nicht oder rauche nicht.
- Wenn ich nicht rauche, dann jogge ich nicht oder sehe nicht fern.
- Auf keinen Fall aber tue ich am nächsten Sonntag alle drei Dinge.»

Falls Herr Müller seine Versprechen hält, wie könnten seine Aktivitäten am kommenden Sonntag aussehen?

Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie Herrn Müllers Aussagen in eine aussagenlogische Formel G umwandeln und diese durch äquivalente Umformungen in eine möglichst einfache Gestalt bringen. Gehen Sie zu diesem Zweck wie folgt vor: Erstellen Sie zunächst eine Wahrheitstafel für G und konstruieren Sie aus dieser eine kanonische DNF oder KNF für G.

Aufgabe

Aufgabe 4.10

Besuch von Familie Schulze, bestehend aus Vater, Mutter sowie den Töchtern Anne, Birte und Christiane. Es kommen aber unter Umständen nicht alle.

- Wenn Vater Schulze kommt, dann bringt er auch seine Frau mit.
- Mindestens eine der beiden Töchter Birte und Christiane kommt.
- Entweder kommt Mutter Schulze oder Anne.
- Entweder kommen Anne und Birte zusammen oder beide nicht.
- Und wenn Christiane kommt, dann auch Birte und Vater Schulze.

Ja, wer kommt denn nun?

Lösungstip

"Entweder M oder A" kann durch die Formel

$$(M \lor A) \land (\neg M \lor \neg A)$$

ausgedrückt werden.

Da Anne und Birte beide kommen oder beide nicht kommen, kann man ihr Kommen durch ein und dieselbe Aussagenvariable kennzeichnen - somit hat man die Anzahl der Variablen von 5 auf 4 reduziert.

Die Distributivgesetze gelten auch für mehr als zwei Terme in einer Klammer:

$$A \lor (B \land C \land D) \quad \equiv \quad (A \lor B) \land (A \lor C) \land (A \lor D)$$

$$A \land (B \lor C \lor D) \quad \equiv \quad (A \land B) \lor (A \land C) \lor (A \land D)$$

Aufgabe

Aufgabe 4.11

Als Klaus seine Freundin fragte, was er ihr beim Besuch denn mitbringen könne, antwortete sie:

- Bringe auf keinen Fall Schokolade ohne Rosen mit.
- Wenn du weder Schokolade noch Rosen dabei hast, so schenke mir jedenfalls Erdbeeren.
- Wenn du Schokolade mitbringst, solltest du zusätzlich noch Erdbeeren oder Rosen dabei haben.
- Wenn du Erdbeeren ohne Schokolade dabei hast, solltest du zusätzlich Rosen mitbringen.

Was kann Klaus denn nun mitbringen, wenn er alle diese Wünsche berücksichtigt?

Aufgabe

Aufgabe 4.12

Frau Konopka fragt an einem wunderschönen Sonntagmorgen ihren Mann: «Männe, schau das schöne Wetter an! Willst du nicht mal aktiv werden und schwimmen oder wandern oder Rad fahren?»

Ihr Mann antwortet: «Ich halte mich heute an die folgenden Regeln:

- Wenn ich wandere oder Rad fahre, werde ich auch schwimmen gehen.
- Wenn ich aber schwimme oder nicht Rad fahre, werde ich nicht wandern.
- Ich werde aber heute nicht beides tun: Rad fahren und schwimmen.

> - Und schwimmen werde ich nur dann, wenn ich auch wandere.»
>
> Wenn Herr Konopka diese Regeln einhält, wie könnten seine Aktivitäten an diesem Tag aussehen?

5 Anwendungen der Aussagenlogik

Gliederung

Dieses Kapitel zeigt Ihnen, wie

- gewisse mathematische Beweismethoden mit Hilfe der Aussagenlogik begründet werden können und
- digitale Schaltnetze mittels Konzepten der Aussagenlogik optimal entworfen werden können.

Hinweis

Die Inhalte des gesamten Kapitels werden in der Klausur nicht abgefragt!

5.1 Mathematische Beweisverfahren

Gliederung

In diesem Kapitel werden Sie erkennen, dass Beweise mathematischer Sätze sich ganz wesentlich auf Regeln der Aussagenlogik stützen. Sie werden sehen, dass erst die Aussagenlogik die Begründung für die Gültigkeit gewisser mathematischer Beweisverfahren liefert.

5.1.1 Typische Struktur mathematischer Sätze

Wir haben zwei Symbole kennengelernt, die beide «Äquivalenz» heißen. Die Äquivalenz mit dem Symbol $\leftrightarrow$ ist ein logischer Junktor (man sagt auch: ein Symbol der «Objektsprache»), während die logische Äquivalenz mit dem Symbol $\equiv$ kein Junktor, sondern ein Symbol der «Metasprache» ist. Die Objektsprache ist die Sprache, aus der logische Formeln aufgebaut sind, während die Metasprache die Sprache ist, in der wir über logische Formeln reden, sozusagen eine Ebene höher als die Objektsprache.

Mit dem Symbol $\equiv$ stellen wir eine Behauptung über zwei Formeln F und G auf: $F \equiv G$ behauptet, dass die beiden Formeln den selben Wahrheitswert (in Abhängigkeit von ihren Aussagenvariablen) haben.

Und der Zusammenhang zwischen dem Symbol der Objektsprache und dem Symbol der Metasprache wird hergestellt dadurch, dass $F \equiv G$ genau dann wahr ist, wenn $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie ist.

In der Mathematik wird die logische Äquivalenz meistens in der Form «genau dann, wenn» (meist abgekürzt mit gdw.) gebraucht:

> Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt (siehe Mengen: Notation).

Mithilfe der logischen Äquivalenz könnte man diese Behauptung auch in der Form

$$(A = B) \quad \equiv \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

schreiben. Ich sage: Man *könnte*. Man tut es aber besser nicht, denn in dieser Schreibweise ist die Behauptung extrem schwer zu lesen. Die Lesbarkeit ist eigentlich der Hauptgrund dafür, dass Mathematiker (und natürlich auch Mathematikerinnen) für den obigen Ausdruck lieber

$$A = B \text{ gdw. } A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

schreiben und oft auch die logischen Junktoren durch ihre natürlichsprachlichen Synonyma («und», «oder» etc) ersetzen, im obigen Beispiel also

$$A = B \quad \text{gdw.} \quad A \subseteq B \text{ und} \subseteq A$$

Haben Sie gemerkt, wie schwierig das Reden über Sprache sein kann? Fast so schwierig wie Mathematik!

Nun betrachten wir folgende Behauptung der Mengenlehre:

> Wenn A eine Teilmenge von B ist, so hat A nicht mehr Elemente als B.

Etwas formaler ausgedrückt:

> Aus $A \subseteq B$ folgt $|A| \leq |B|$.

Damit will ich sagen: Wenn ich weiß, dass eine konkrete Menge A eine Teilmenge einer Menge B ist, (also: wenn ich weiß, dass $A \subseteq B$ wahr ist), dann kann ich folgern, dass A nicht mehr Elemente hat als B. Diese Idee drückt man aus durch das Symbol $\Rightarrow$:

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad |A| \leq |B|.$$

Wir nennen dieses Symbol die **logische Implikation**. Der Zusammenhang zwischen dem Junktor Implikation und der logischen Implikation wird hergestellt durch:

$A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Und schließlich der Zusammenhang zwischen den beiden metasprachlichen Symbolen:

$A \equiv B$ ist genau dann wahr, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind.

Haben Sie gemerkt, dass wir hier sogar eine zweite Ebene höher gegangen sind, in dem wir hier über die Elemente der Metasprache reden? Wir befinden uns quasi in der Metmetasprache ... OK, ich kann verstehen, wenn Ihnen jetzt der Kopf brummt! Glücklicherweise ist ja das ganze Kapitel nicht klausurrelevant!

In der Alltagssprache verwenden wir auch metasprachliche Sätze, ohne jedoch zwischen Objektsprache und Metasprache zu unterscheiden. Damit kann man allerdings ziemlichen Unfug anrichten. Schauen Sie sich folgendes Filmchen an.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Typische_Struktur_mathematischer_S%C3%A4tze

Paradoxon

So etwas Merkwürdiges nennt man ein **Paradoxon**.

Kommen wir zurück zu unserer Anwendung: den mathematischen Beweisen. Praktisch alle mathematische Sätze haben die Gestalt einer logischen Äquivalenz $A \equiv B$, oder einer logischen Implikation $A \Rightarrow B$. Dabei repräsentieren A und B irgendwelche mathematischen Sachverhalte, also Aussagen über mathematische Objekte.

Oft sind solche Behauptungen nur schwer direkt zu beweisen, und der Beweis macht daher bisweilen *Umwege*, die durch Prinzipien der Aussagenlogik gerechtfertigt werden.

5.1.2 Der Kettenschluss

Ein einfaches Beispiel für eine logische Implikation innerhalb einer mathematischen Beweisführung bildet die folgende Tautologie, genannt **Kettenschluss**:

$$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 5.1

Beweisen Sie, dass obige Implikation wahr ist.

Lösung

Der Satz

$$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$$

ist genau dann wahr, wenn

$$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

eine Tautologie ist. Dies beweisen wir durch äquivalente Umformungen nach <u>Auflistung der Gesetze</u>

$$\begin{aligned}
& (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) & \\
\equiv\ & \neg((\neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \vee \neg A \vee B & (11) \\
\equiv\ & (A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B & (8) \\
\equiv\ & \neg A \vee (A \wedge \neg C) \vee B \vee (\neg B \wedge C) & (2) \\
\equiv\ & \neg A \vee \neg C \vee B \vee C & (13) \\
\equiv\ & \neg A \vee 1 \vee B & (2) \text{ und } (7) \\
\equiv\ & 1 & (10)
\end{aligned}$$

Die Methode des Kettenschlusses findet sich in fast allen mathematischen Beweisen: Anstatt B direkt aus A zu folgern (was eventuell schwierig ist), wird aus der Gültigkeit von A zunächst die von C hergeleitet. Im nächsten Schritt wird dann B aus C gefolgert.

Man erkennt leicht, dass man durch Hintereinanderschalten vieler Kettenschlüsse eine beliebig lange Kette von Implikationen erzeugen kann. Es gilt nämlich:

$$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$$

usw. Das folgende Beispiel für einen mathematischen Beweis zeigt eine solche lange Kette von Implikationen.

Beispiel

Behauptung:

Der Betrag des arithmetischen Mittels $\frac{a+b}{2}$ zweier verschiedener positiver reeller Zahlen a und b ist stets größer als ihr geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$.

Beweis:
Zu zeigen ist

$$a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq b \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}\,.$$

Beweisdurchführung:

$$
\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \quad &\Rightarrow \quad (a-b)^2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \\
&\Rightarrow \quad (a+b)^2 > 4ab \\
&\Rightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \\
&\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Kettenschlussmethode können wir nun folgern, dass $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ eine Tautologie ist.

5.1.3 Beweis durch Widerspruch

Aus dem Fernsehen oder der einschlägigen Literatur kennen Sie sicherlich folgende Situation:

Die (Fernseh-)Kommissare haben den Täter gefasst, nun wird er verhört. Er redet und redet und verstrickt sich immer mehr in Widersprüche. «Sie haben gesagt, Sie waren zur Tatzeit im Zug von Hamburg nach Berlin. Aber der Zug, der zur fraglichen Zeit hätte fahren sollen, ist an diesem Tag komplett ausgefallen. Also haben Sie gelogen!», sagt die Kommissarin. Oder so ähnlich...

Die Kommissare wissen: Wenn eine Aussage A des Angeklagten einem offensichtlich wahren Faktum widerspricht, dann war die Aussage A falsch.

Formal können wir das so beschreiben:

Aus der Aussage A folgt ein Widerspruch, also eine falsche Aussage. Das können wir wie folgt formulieren: $A \Rightarrow 0$. Und dies wiederum ist nach den Gesetzen der Logik äquivalent zu $\neg A$. Auf diese Weise wurde die Aussage A widerlegt.

Um nun eine mathematische Aussage A zu **beweisen**, versuchen wir, aus der Negation, $\neg A$ einen Widerspruch abzuleiten. Das können wir wie folgt formulieren: $\neg A \Rightarrow 0$. Und dies wiederum ist nach den Gesetzen der Logik äquivalent zu A. Damit ist die Aussage A als wahr bewiesen.

Beispiel

Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Zahl $n^2 + n$ gerade.

Beweis:

Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es eine natürliche Zahl n, für die $n^2 + n$ ungerade wäre. Nun gilt

$$n^2 + n = n(n+1).$$

Wäre $n^2 + n = n(n+1)$ ungerade, so müssten beide Faktoren, n und $n+1$, ebenfalls ungerade sein, denn ansonsten wäre das Produkt $n^2 + n = n(n+1)$ gerade.

Dies ist aber ein Widerspruch, denn die beiden aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen n und $n+1$ können nicht beide ungerade sein.

Dieser Widerspruch beweist nun, dass die Annahme, der Satz sei falsch, falsch ist. Also ist der Satz richtig.

Zunächst noch ein ganz kleines Beispiel, das wir gleich für den folgenden großen Beweis benötigen werden.

Wir beweisen folgenden Satz: Sei n eine ganze Zahl. Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

Beweis:

Sei n^2 gerade. Wäre nun n ungerade, so wäre $n^2 = n \cdot n$ als Produkt zweier ungerader Zahlen ebenfalls ungerade, im Widerspruch zur Annahme. Also muss n gerade sein.

Schauen wir uns nun noch ein ganz berühmtes, klassisches Beispiel an. Im antiken Griechenland glaubten die Menschen an die grundlegende Harmonie des Kosmos. Ein bestimmte philosophische Richtung, deren prominentester Vertreter der Philosoph und Mathematiker Pythagoras von Samos war (das war der mit dem rechtwinkligen Dreieck und $a^2 + b^2 = c^2$), war der Überzeugung, dass diese Harmonie sich in rationalen Zahlenverhältnissen ausdrückte (in der Musik, in der Astronomie usw.).

Pythagoras sagte: «Alles ist Zahl», und damit meinte er rationale Zahlen. Stellen Sie sich vor, wie groß sein Schock war, als einer seiner Schüler ganz aufgeregt zu ihm gelaufen kam, und ihm eröffnete, er habe bewiesen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ *keine* rationale Zahl sei. Dazu muss man sagen, dass $\sqrt{2}$ genau gleich der Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge eins beträgt, was die alten Griechen selbstverständlich schon wussten (auch wenn sie nicht das Wurzelzeichen benutzten). Der Schüler hat seine Behauptung wie folgt bewiesen:

Satz:

Beispiel

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, das heißt, sie lässt sich nicht in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind.

Beweis:

Angenommen, der Satz wäre falsch.

Dann gäbe es ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Wir können annehmen, dass dieser Bruch vollständig gekürzt ist (das geht ja immer), das heißt, dass die beiden ganzen Zahlen p und q keinen gemeinsamen Teiler haben.

Wir werden nun aus dieser Annahme einen Widerspruch ableiten:

$$
\begin{array}{ll}
 & \sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \\
\Rightarrow & 2 = \dfrac{p^2}{q^2} \\
\Rightarrow & 2q^2 = p^2 \\
\Rightarrow & p^2 \text{ ist gerade} \\
\Rightarrow & p \text{ ist gerade} \\
\Rightarrow & p^2 \text{ ist durch 4 teilbar} \\
\Rightarrow & 2q^2 \text{ ist durch 4 teilbar} \\
\Rightarrow & q^2 \text{ ist gerade} \\
\Rightarrow & q \text{ ist gerade}
\end{array}
$$

Aus der Annahme folgt also, dass sowohl p als auch q gerade sind, was der Annahme widerspricht, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Übrigens: Wollen Sie wissen, was aus dem Schüler geworden ist?

Er wurde von Pythagoras während einer Bootsfahrt ins Meer gestoßen, und da der arme Kerl zeit seines Lebens nichts anders getrieben hatte als Mathematik, konnte er nicht schwimmen und ertrank.

Eine nette Geschichte, an deren Wahrheitsgehalt jedoch große Zweifel bestehen...

5.2 Digitale Schaltnetze

Gliederung

Lernziele

Dieses Kapitel soll einen Einblick in einen wichtigen Anwendungsbereich der Boole'sche Algebra bzw. der Aussagenlogik bieten: in das Gebiet der **digitalen Schaltnetze.**

An den hier auftretenden typischen Fragestellungen und ihren Lösungen werden Sie erkennen, dass die Ihnen in den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels nahe gebrachten Konzepte und Methoden eine beträchtliche praktische Relevanz haben:

Genauso wie Sie **aussagenlogische Formeln** aus **Aussagenvariablen** und **Junktoren** zusammensetzen, so können Sie auch ein digitales Schaltnetz aus den sogenannten **digitalen Grundschaltungen** aufbauen.

Und die Regeln zur Vereinfachung von aussagenlogischen Formeln können dazu dienen, möglichst einfache digitale Schaltnetze zu konstruieren.

5.2.1 Eine digitale Abstimmungsmaschine

Was "digital" im Gegensatz zu *analog* bedeutet, ist wohl allgemein bekannt:

Analoge Geräte haben Betriebswerte (z.B. Eingangs- und Ausgangsgrößen), die kontinuierliche Werte annahmen können.

Digitale Geräte haben Betriebsgrößen, die nur endlich vieler diskreter Werte fähig sind; diese können als Zahlen auf einem Display angezeigt werden.

Beispiel

Analoge Anzeige: Zeiger auf Messskala- jeder Wert aus dem Skalenbereich ist möglich.

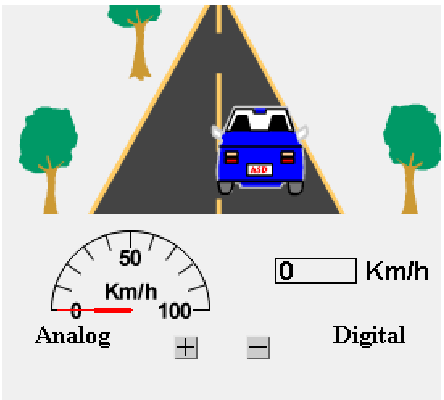
Digitale Anzeige: Nur einer von endlich vielen Werten ist möglich - wegen der begrenzten Stellenzahl der Dezimaldarstellung.

Schauen wir uns das Tachometer eines Autos an:

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Eine_digitale_Abstimmungsmaschine

Tachometer Auto



Mit Mausklicks auf "+" oder "-" wird die Geschwindigkeit des Fahrzeugs erhöht bzw. verringert.

Die jeweils aktuelle Geschwindigkeit wird sowohl analog als auch digital angezeigt.

Die elementaren Bestandteile von digitalen Geräten, die digitalen Grundschaltungen, kennen in der Regel nur zwei Betriebszustände (binäre Schaltungen):

Schalter offen		Schalter geschlossen
Lampe aus		Lampe an
niedriger Spannungspegel		hoher Spannungspegel
Bit 0		Bit 1
Nein		Ja

Auf solche binären Schaltungen wollen wir uns im Folgenden beschränken.

Was sind nun die in der Überschrift dieses Abschnitts genannten Schaltnetze? **Schauen wir uns dazu ein Beispiel an, das uns im gesamten vorliegenden Abschnitt begleiten wird:**

Wir wollen eine **"Abstimmungsmaschine"** bauen. Diese soll beispielsweise in einer Live-Fernsehsendung eingesetzt werden, wenn das Publikum im Studio über eine Fragestellung abstimmen soll. Dabei sind nur Ja-Nein-Antworten, also *binäre* Entscheidungen zwischen zwei Alternativen vorgesehen.

Jeder Zuschauer kann somit einen vor ihm angebrachten Schalter betätigen, der sich nur zwischen zwei Stellungen hin- und herschalten lässt.

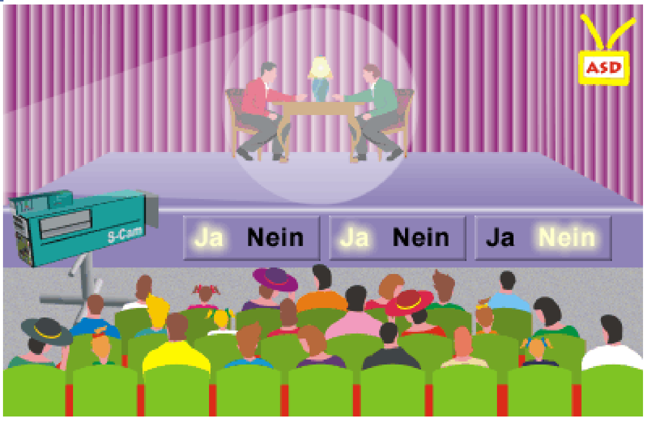
Wenn nun bei einer Abstimmung die Mehrheit der Zuschauer "ja" wählt, so soll auf der Bühne eine Lampe aufleuchten, sonst nicht.

Hier eine Veranschaulichung für den Fall von drei Voten:

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Eine_digitale_Abstimmungsmaschine

Abstimmungsmaschine



Durch Mausklicks auf die "Ja"s und "Nein"s werden die Mehrheiten geändert und so die Lampe auf der Bühne gesteuert.

Wie würden Sie eine solche Abstimmungsmaschine konstruieren?

So einfach ist das offenbar nicht. Aber wie überall in der Technik, so ist es vermutlich auch hier sinnvoll, ein kompliziertes Gerät wie dieses durch Zusammenfügen mehrerer möglichst einfacher Grundschaltungen zu konstruieren.

Zunächst erkennen wir, dass es sich bei der Abstimmungsmaschine um ein digitales, ja sogar binäres Gerät handelt: Die Eingangsgrößen sind jeweils die Voten *ja* oder *nein* von, sagen wir, n Zuschauerinnen (wir haben heute nur weibliches Publikum), die Ausgangsgröße ist auch nur zweier Werte fähig: die Lampe brennt (1) - oder eben nicht (0).

Und der Zusammenhang zwischen den Eingangs- und den Ausgangsgrößen ist durch das Mehrheitsvotum der Zuschauerinnen eindeutig festgelegt.

Definition

Geräte mit mehreren Eingangsgrößen und einer oder mehreren Ausgangsgrößen, die alle nur zwei Werte annehmen können, heißen **digitale Schaltnetze**. Dabei sind die Werte der Ausgangsgrößen eindeutig durch die Werte der Eingangsgrößen festgelegt.

Bei einem **digitalen Schaltwerk** dagegen hängt der Wert der Ausgangsgrößen außerdem von den Werten der Eingangsgrößen zu früheren Zeitpunkten ab. Ein Schaltwerk verfügt also über ein Gedächtnis bzw. einen Speicher.

In diesem Kapitel werden wir uns nur mit Schaltnetzen befassen.

5.2.2 Die Abstimmungsmaschine als Boole'sche Funktion

Eine Boole'sche Funktion ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}\,.$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ die Menge der Wahrheitswerte. Eine Boole'sche Funktion ist also eine Funktion von n Aussagevariablen, deren Funktionswert wieder ein Wahrheitswert ist.

Beispiel

Wir definieren eine Boole'sche Funktion

$$f : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$$
$$f(x, y, z) = x \wedge (y \vee z)$$

Das sieht zunächst etwas befremdlich aus, da wir Aussagenvariablen sonst immer mit Großbuchstaben geschrieben haben. Da wir sie hier jedoch als Variablen einer Funktion betrachten, schreiben wir sie mit Kleinbuchstaben, wie dies bei Funktionsparametern üblich ist.
Letztlich ist eine Boole'sche Funktion nichts anderes als eine aussagenlogische Formel, wie man leicht am obigen Beispiel sieht. Warum verwendet man dann überhaupt den Begriff der Boole'schen Funktion? Nun, es hängt davon ab, welche Aspekte des abstrakten Konzepts man betrachtet. Wenn man eine aussagenlogische Formel als ein Objekt mit mehreren Inputgrößen und einer Outputgröße betrachtet, so spricht man von einer Boole'schen Funktion. Wenn man jedoch an Aussagen über Äquivalenz von Formeln o.ä. interessiert ist, spricht man von einer Formel. Doch nun zurück zu den Schaltnetzen.

Ein digitales Schaltnetz mit n Eingängen und einem Ausgang, wie es unsere Abstimmungsmaschine darstellt, realisiert offenbar eine Boole'sche Funktion von n Variablen. Jede Zuschauerin entspricht einer Aussagenvariablen, die zweier Werte fähig ist («ja» oder «nein», 1 oder 0), und diese Belegung der Variablen legt eindeutig den Wahrheitswert der Funktion fest: Die Lampe leuchtet oder nicht (1 oder 0).

Jetzt können wir also unser gesammeltes mathematisches Know-how aus den vorigen Abschnitten zum Einsatz bringen! Aber inwieweit hilft uns das?

Zunächst können wir, wie in Abschnitt "Aussagenlogische_Formeln" gelernt, die Wahrheitstafel für unsere Boole'sche Funktion $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aufstellen, und das tun wir für den Fall von $n = 3$ Zuschauerinnen (schwach besuchtes Fernsehstudio - aber sehr übersichtliche Wahrheitstafel). $B(x_1, x_2, x_3)$ ist offenbar genau dann 1 (Lampe leuchtet), wenn mindestens zwei der Variablen x_1, x_2, x_3 gleich 1 sind (wenn die entsprechenden Zuschauerinnen also mit *ja* gestimmt haben):

x_1	x_2	x_3	B
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Wer Anwendungssoftware wie etwa Bürosoftware benutzt, kennt das leidige Problem der ständigen Umstellung der Benutzeroberfläche. Kaum hat man sich an eine bestimmte Bedienung gewöhnt, schon kommt die nächste Version und wirft alles wieder über den Haufen und man muss sich umgewöhnen. Und genau dieses Umgewöhnen kann ich Ihnen nun leider auch nicht ersparen. Da die Schaltnetze historisch unabhängig von der Aussagenlogik entwickelt wurden, haben sie auch ihre eigene Terminologie entwickelt. Und an die müssen Sie sich nun gewöhnen. Ab jetzt verwenden wir die folgenden Operatoren:

logische Schreibweise	**technische Schreibweise**
$A \wedge B$	$x \cdot y$
$A \vee B$	$x + y$
$\neg A$	$\bar{x}$
Beispiel	**Beispiel**
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$	$x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$

In der technischen Schreibweise darf man Gebrauch von Punkt vor Strich machen und überflüssige Klammern weglassen, so wie Sie das in dem Beispiel in der Tabelle sehen.

Im nächsten Schritt werden wir eine aussagenlogische Formel herleiten, die dieser Boole'schen Funktion entspricht. Wie das geht, haben wir im Abschnitt "Normalformen" gelernt.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 5.2

Erstellen Sie die zu obiger Wahrheitstafel gehörige aussagenlogische Formel

1.) in kanonischer DNF,
2.) in kanonischer KNF.

Lösung

$$B = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad \text{DNF}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \qquad \text{KNF}$$

Jetzt, nach Aufstellung einer aussagenlogischen Formel für unsere Abstimmungsmaschine, sind wir unserem Endziel, der Konstruktion dieses Gerätes, schon recht nahe gekommen. Um das einzusehen, muss man Folgendes wissen: Bei elektronischen digitalen Systemen entsprechen die Wahrheitswerte 0 bzw. 1 einer Variablen üblicherweise einem niedrigen bzw. hohen Spannungspegel (gegenüber Nullpotential) eines *Drahtes* oder Speicherelements, das diese Variable repräsentiert. So sind beispielsweise bei der sogenannten TTL (Transistor-Transistor-Logik) eine 1 durch einen Spannungswert von 2...5 V und eine 0 durch einen Spannungswert von 0...0,8 V dargestellt.

Vereinfachte Darstellung in unserem Fall: Von jedem Schalter bei den Zuschauerinnen führt eine elektrische Leitung zu der Abstimmungsmaschine, und diese Leitungen können jeweils nur zwei verschiedene Spannungswerte haben. Die Abstimmungsmaschine verarbeitet die n "Signale" von den Zuschauerinnen und legt als "Anwortsignal" auf eine herausführende Leitung wiederum einen von zwei möglichen Spannungswerten. Dieser Spannungswert bringt dann die Lampe zum Leuchten oder eben nicht. Die Verarbeitung der Eingangssignale in der Abstimmungsmaschine kann nun im Detail durch unsere aussagenlogische Formel beschrieben werden.

Von großer praktischer Bedeutung ist hierbei, dass die in der Formel auftretenden Verknüpfungen "$-$ " (NOT), "$\cdot$ " (UND), "$+$ " (ODER) durch sehr einfache digitale Grundschaltungen, so genannte **Gatter**, realisiert werden können. Aus diesen kann man dann, wie beim Spiel mit einem Baukasten, das Innenleben der Abstimmungsmaschine zusammenbauen. Digitale Grundschaltungen werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Haben wir genügend viele dieser Gatter zur Verfügung, können wir somit unsere Maschine (und noch viel kompliziertere Geräte) konstruieren, und die aussagenlogische Formel dient uns dabei als Vorlage für einen Bauplan.

5.2.3 Quizaufgabe aus der TV-Rateshow

Die 729 Kugeln des Prof. Schiffer

Prof. Schiffer erbte von seinem etwas wunderlichen und verschroben wirkenden Tutor, Sir Wieder, eine hübsch verzierte, nicht sehr große, aber schwere Truhe. In dieser fand er 729 Kugeln völlig gleichen Aussehens, eine gut funktionierende, uralte Balkenwaage - eine so genannte Apothekerwaage - mit sehr großen Waagschalen, diverse Gewichte und eine Pergamentrolle.

Aus dieser erfuhr er, wer es vermöchte, in der Zeit von Mitternacht bis 0:30 Uhr, nur bei Mondschein, diejenige einzige Kugel herauszufinden, die etwas schwerer sei als die anderen, der würde sehr, sehr klug.

Prof. Schiffer fand sie heraus und ward fortan klüger.

Frage: Kommt er mit 6 Wägungen zur Lösung? Ja oder nein?

Lösung

Ja, es geht mit 6 Wägungen!

Prof. Schiffer legte zunächst die Gewichte beiseite: Die brauchte er nämlich gar nicht.

Dann teilte er die 729 Kugeln in drei gleich große Haufen zu jeweils 243 Kugeln und legte auf jede der Waagschalen einen der Haufen - den dritten Haufen lies er liegen.

Die Wägung könnte drei verschiedene Ergebnisse liefern - mit jeweils einer klaren Schlussfolgerung:

- Die linke Waagschale senkt sich ⇒ Die schwerere Kugel ist im linken Haufen enthalten.
- Die rechte Waagschale senkt sich ⇒ Die schwerere Kugel ist im rechten Haufen enthalten.
- Die Waage ist im Gleichgewicht ⇒ Die schwerere Kugel ist im dritten Haufen enthalten.

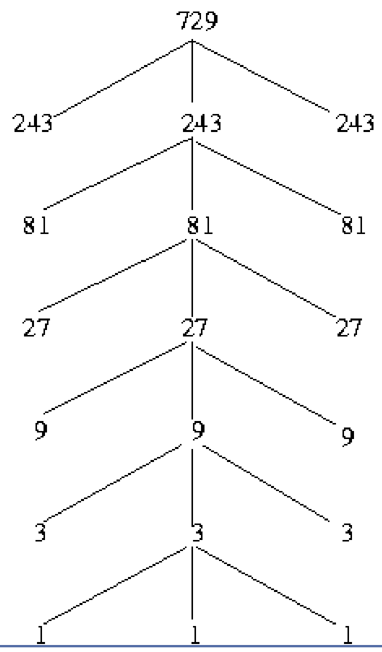
Auf diese Weise hatte Prof. Schiffer, schlau wie er ist, die Anzahl der zu untersuchenden Kugeln gedrittelt.

Genau so fuhr er nun fort: in drei gleiche Haufen teilen, zwei davon wägen usw.

Und jede dieser Wägungen reduzierte die Menge der Kugeln, unter denen die schwerere zu suchen war, auf ein Drittel.

Nach 5 Wägungen solcher Art hatte er in der Tat nur noch 3 Kugeln übrig, von denen eine die schwerere sein musste - eine letzte Wägung nach demselben Muster brachte endgültige Gewissheit.

Veranschaulichung:

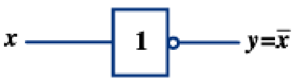


5.2.4 Digitale Grundschaltungen

Ein Bauplan für ein digitales Schaltnetz bedient sich bestimmter Symbole für die verschiedenen Gattertypen (nach DIN 40900 Teil 12). Diese sind im Folgenden dargestellt, wobei auch die häufig eingesetzten **NAND-** und **NOR-**Gatter berücksichtigt sind. $x_1, \ldots, x_n$ sind dabei die Eingangsgrößen, y ist die Ausgangsgröße.

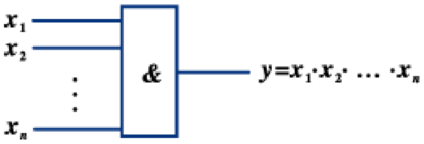
Die Diagramme sind also von links nach rechts zu lesen.

NICHT-Gatter



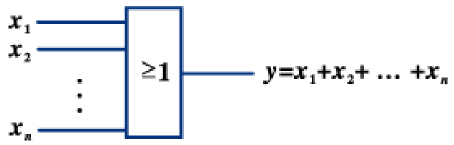
UND-Gatter

$y = 1$ genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$



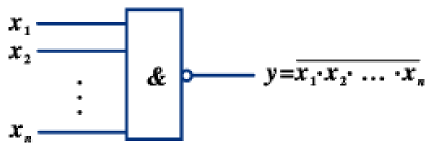
ODER-Gatter

$y = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 0$



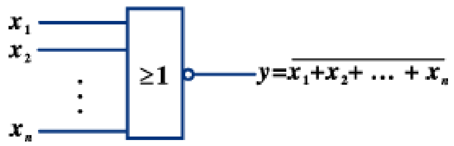
NAND-Gatter

$y = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$



NOR-Gatter

$y = 1$ genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 0$



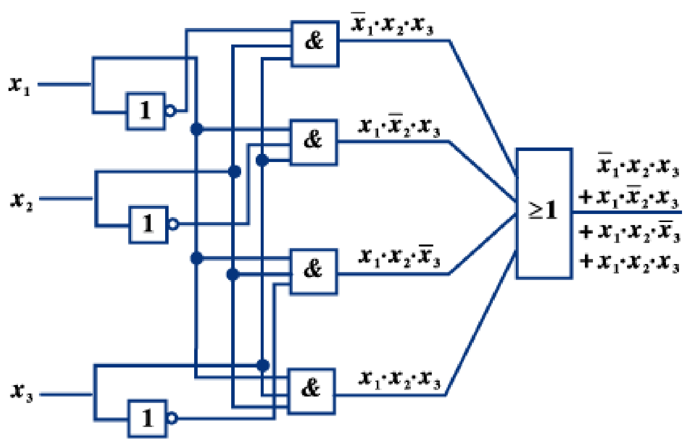
5.2.5 Ein Bauplan für die Abstimmungsmaschine

Nun wollen wir versuchen, einen Bauplan für unsere Abstimmungsmaschine (für drei Zuschauerinnen) zu erstellen, wobei wir die in Zwischenaufgabe 5.2 ermittelte aussagenlogische Formel in DNF zugrunde legen:

$$B(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)\,.$$

Dabei verarbeiten wir die Formel "von innen nach außen", beginnen also mit den innersten Klammern (hier den "· "-Verknüpfungen) und verknüpfen dann die Resultate durch die "+ "-Verknüpfungen. So kann man offenbar auch tiefer verschachtelte Formeln in Baupläne umsetzen.

Der Bauplan für obige Formel hat damit folgendes Aussehen:



Hinweis

Sich kreuzende Drähte haben keinen Kontakt; Kontakte an Verzweigungen sind durch fette Punkte gekennzeichnet.

Aufgabe

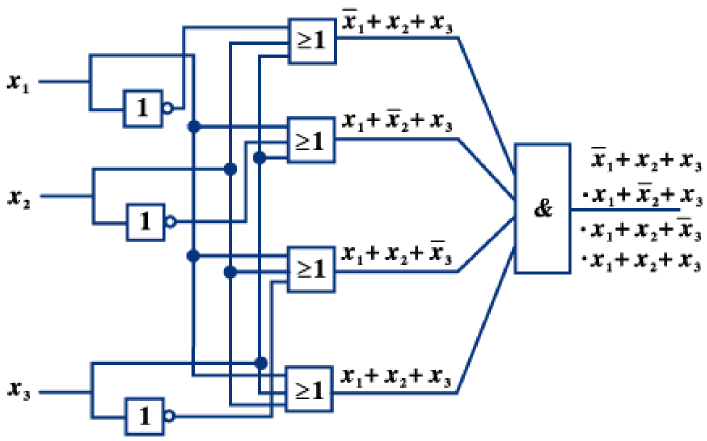
Zwischenaufgabe 5.3

Welches Aussehen hat der Bauplan für das Schaltnetz, dem die KNF-Formel von Aufgabe 6.1, nämlich

$$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

zugrunde liegt?

Lösung



Grund:

Die KNF-Formel dieser Aufgabe ergibt sich aus der DNF-Formel, die der Abbildung zugrunde liegt, indem man überall "+ " durch "· " ersetzt und umgekehrt und die Terme umordnet.

Hinweis

Bei unserem Beispiel sind die Baupläne für die DNF- bzw. die KNF-Formel offenbar von vergleichbarer Komplexität. Im allgemeinen Fall zieht man für die Bauplanerstellung die KNF-Vorlage vor, wenn mehr Einsen als Nullen in der rechten Spalte der Wahrheitstafel auftreten, sonst die DNF-Vorlage.

Warum?

Bei der Erstellung einer KNF-Formel aus der Wahrheitstafel liefert jede Null in der rechten Spalte einen Term und damit jeweils ein Gatter, bei der Erstellung einer DNF-Formel sind es gerade die Einsen.

Die im Hinweis dargelegte Wahl der Vorlage (KNF oder DNF) führt also zu einer geringeren Gatteranzahl im Bauplan.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 5.4

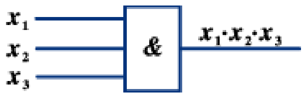
Erstellen Sie einen Bauplan für eine Abstimmungsmaschine für drei Zuschauervoten. Die Lampe soll aber nun genau dann leuchten, wenn alle drei Zuschauer zustimmen.

Lösung

Die zugehörige Boole'sche Funktion ist offenbar immer gleich 0, außer wenn alle drei Aussagenvariablen x_1, x_2 und x_3 gleich 1 sind.

Nachdem in Kapitel 3.5 "Gesetze der Aussagelogik" Gelernten liefert somit die DNF die einfachste Gestalt für die korrespondierende aussagenlogische Formel, sie enthält nämlich nur einen Term: $B(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Und der zugehörige Bauplan sieht folgendermaßen aus:



5.2.6 Ein vereinfachter Bauplan

Man muss zugeben: Unser Schaltnetz ist schon im Falle von drei Eingangsgrößen recht kompliziert. Man möchte aber, schon aus Kostengründen, mit möglichst wenig Gattern auskommen, um eine vorgegebene Boolesche Funktion zu realisieren.

Und in der Tat ist die "Schaltkreisminimierung" eines der zentralen Probleme in der Digitaltechnik.

Auch bei der Lösung solcher Probleme können uns nun unsere Kenntnisse auf dem Gebiet der Aussagenlogik und der Booleschen Algebra weiterhelfen: Einem Schaltnetz mit möglichst wenig Gattern entspricht offenbar eine "möglichst kurze" aussagenlogische Formel, also eine mit möglichst wenig Termen bzw. Junktoren.

Hier hilft uns das im Abschnitt "Tautologien und logische Identitäten" Gelernte, denn dort haben wir Methoden zur Vereinfachung von aussagenlogischen Formeln kennen gelernt, und die können wir jetzt anwenden.

Beispiel

Die kanonische DNF-Formel unserer Abstimmungsmaschine,

$$B(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

soll in möglichst einfache (DNF-)Gestalt gebracht werden. Das geht mit Hilfe der Axiome der Booleschen Algebra folgendermaßen:

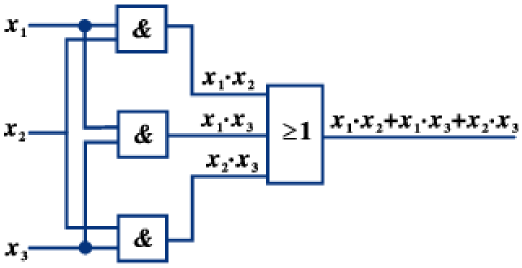
$$
\begin{aligned}
B(x_1, x_2, x_3) &= (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= (x_3 \cdot ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot \bar{x}_2))) + (x_1 \cdot x_2 \cdot (\bar{x}_3 + x_3)) \quad \text{(Distributivgesetz)} \\
&= (x_3 \cdot ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot \bar{x}_2))) + (x_1 \cdot x_2) \quad \text{(Tautologie, Neutralität)} \\
&= (x_3 + (x_1 \cdot x_2)) \cdot ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot \bar{x}_2) + (x_1 \cdot x_2)) \quad \text{(Distributivgesetz)} \\
&= ((x_3 + (x_1 \cdot x_2)) \cdot ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + x_1) \quad \text{(Distributivgesetz, Tautologie, Neutralität)} \\
&= ((x_3 + (x_1 \cdot x_2)) \cdot (x_1 + x_2) \text{(Distributivgesetz, Tautologie, Neutralität)} \\
&= x_3 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \quad \text{(Distributivgesetz)} \\
&= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3
\end{aligned}
$$

Es sei betont, dass die in diesem Beispiel vorgeführte Herleitung der vereinfachten DNF-Formel natürlich nicht die einzig mögliche ist. Eine alternative Herleitung läuft wie folgt:

$$
\begin{aligned}
B(x_1, x_2, x_3) &= (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= ((\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)) + ((x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)) + \\
&\quad ((x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)) \\
&\quad (\text{denn } x + x + x = x \text{ wobei hier } x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\
&= ((\bar{x}_1 + x_1) \cdot x_2 \cdot x_3) + ((\bar{x}_2 + x_2) \cdot x_1 \cdot x_3) + ((\bar{x}_3 + x_3) \cdot x_1 \cdot x_2) \\
&\quad \text{(Distributivgesetz)} \\
&= x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \\
&= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \quad \text{(Tautologie, Neutralität, Kommutativgesetz)}
\end{aligned}
$$

(Formeln s. Kapitel Die Gesetze der Aussagenlogik)

Der Bauplan für das zugehörige vereinfachte Schaltnetz sieht wie folgt aus:



Aufgabe

Zwischenaufgabe 5.5

a) Bringen Sie die kanonische KNF-Formel

$$B(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

in möglichst einfache (KNF-)Gestalt.

b) Zeichnen Sie den Bauplan für das zugehörige Schaltnetz.

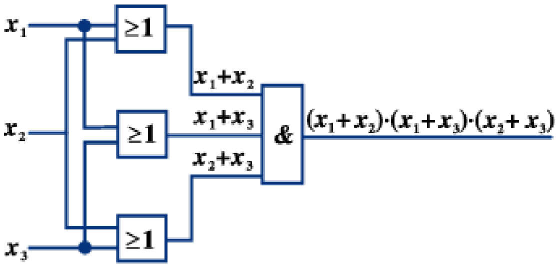
Lösung

a)

$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$
$= (x_1 + x_2 + (x_3 \cdot \bar{x}_3)) \cdot (((x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2)) + x_3)$ (Distributivgesetz)
$= ((x_1 + x_2) \cdot (((x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2)) + x_3)$ (Neutralität, Kontradiktion)
$= ((x_1 + x_2) \cdot x_3) + ((x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2))$ (Distributivgesetz)
$= ((x_1 + x_2) \cdot x_3) + (x_1 \cdot (\bar{x}_1 + x_2))$
(Distributivgesetz, Kontradiktion, Neutralität)
$= ((x_1 + x_2) \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2)$ (Distributivgesetz)
$= (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \cdot (x_2 + x_3)$ (Distributivgesetz)

(Formeln s. Kapitel Die Gesetze der Aussagenlogik)

b)



5.2.7 Zusammenfassung - Digitale Schaltnetze

In diesem Kapitel wurden Sie mit einer konkreten technischen Problemstellung konfrontiert, nämlich mit der Aufgabe, einen Bauplan für eine "Abstimmungsmaschine" zu erstellen, die ein Beispiel für ein digitales **Schaltnetz** darstellt.

Ein **digitales Schaltnetz** ist ein elektronisches Gerät mit n **binären Eingangssignalen** (binär: 0 oder 1) und einem oder mehr **binären Ausgangssignalen**.

Falls, wie hier, nur ein einziges Ausgangssignal vorliegt, hat man es offenbar mit der technischen Realisierung einer **Boole'schen Funktion** von n **Aussagenvariablen** zu tun.

Nun konnten wir unser in den vorigen Abschnitten erworbenes Wissen einsetzen, um aussagenlogische Formeln (eine in **DNF** und eine in **KNF**) zu konstruieren, die der vorgegebenen Boole'schen Funktion entsprachen.

Darauf aufbauend, waren wir in der Lage, Baupläne für unser digitales Schaltnetz zu erstellen, deren elementare Grundbausteine, die **Gatter** oder **digitalen Grundschaltungen**, gerade den Junktoren "∧", "∨" und "¬" entsprachen.

Mit Hilfe von **logischen Identitäten** konnten diese Baupläne noch erheblich vereinfacht werden, so dass man mit einer minimalen Anzahl von Gattern auskam.

Vermutlich erkennen Sie nun die **Praxisrelevanz** dieses teilweise etwas abstrakt anmutenden Kapitels über Aussagenlogik und Boole'sche Algebra - zumindest in Bezug auf das technisch geprägte Gebiet der Schaltnetze!

Vieles von dem, was Sie in früheren Abschnitten gelernt hatten, konnten Sie hier einsetzen, um ein möglichst einfaches Schaltnetz mit vorgegebenen Eigenschaften zu konstruieren oder jedenfalls einen Bauplan dafür zu erstellen.

5.2.8 Abschließende Worte - Digitale Schaltnetze

Wenn Sie bis zu diesem Abschnitt gelangt sind, dann haben Sie - vorausgesetzt, Sie haben keinen der zurückliegenden Abschnitte ausgelassen - ein gutes Stück Arbeit verrichtet.

Vermutlich war es durchaus mühsam, sich soweit durchzubeißen - aber seien Sie versichert: Die Mühe lohnt sich! Vieles von dem, was Ihnen (zu Recht) sehr abstrakt und abgehoben vorkommt, findet seine Anwendung erst in Lernmodulen, die noch vor Ihnen liegen - und das sind nicht etwa Mathematikmodule, sondern sie behandeln anwendungsbezogene Themen.

Immerhin das Kapitel 3 über die digitalen Schaltnetze wird Ihnen einen Eindruck vermittelt haben, wie beispielsweise die recht formalen und abstrakten Methoden zur Vereinfachung von aussagenlogischen Formeln bzw. Ausdrücken der Boole'schen Algebra bei praktischen Problemen helfen können - hier bei der Aufgabe, digitale Schaltnetze zu vereinfachen und so bei deren Konstruktion durch Minimierung der Gatteranzahl **Geld zu sparen!**

Sie sehen, dass die Beherrschung der Mathematik und der Logik sich in barer Münze auszahlen kann. Vielleicht gibt Ihnen diese (überraschende?) Erkenntnis zusätzliche Motivation, um sich auch durch die nachfolgenden Kapitel dieses Mathematikkurses hindurchzukämpfen!

5.2.9 Aufgaben - Digitale Schaltnetze

Aufgabe

Aufgabe 5.1

Entwerfen Sie einen Bauplan für ein Schaltnetz, das auf möglichst einfache Weise die Boole'sche Funktion dreier Vatiablen realisiert, die durch folgende Wahrheitstafel definiert ist:

x_1	x_2	x_3	B

0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Aufgabe

Aufgabe 5.2

Erstellen Sie einen möglichst einfachen Bauplan für

a) die Boolesche Funktion dreier Variablen, die dann und nur dann gleich 1 ist, wenn genau eine der Variablen gleich 1 ist;

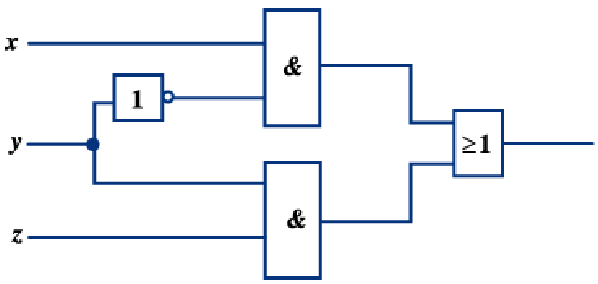
b) die Boolesche Funktion von vier Variablen, die immer gleich 1 ist, außer falls alle Variablen gleich 1 oder alle gleich 0 sind.

Aufgabe

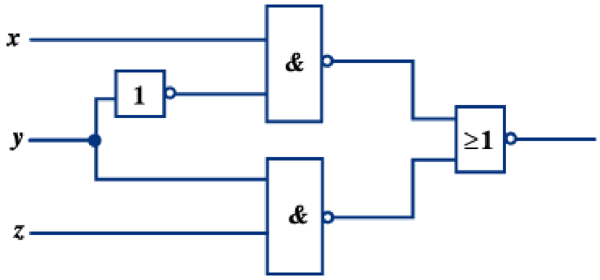
Aufgabe 5.3

Wie lauten die aussagenlogischen Formeln, die den folgenden Bauplänen entsprechen?

a)



b)



Entwerfen sie für b) ein Schaltnetz, das nur UND-, ODER- sowie NICHT-Gatter enthält.

6 Matrizen und Matrixoperationen

Gliederung

Dieses Kapitel macht Sie mit Matrizen und deren Rechenoperationen bekannt. Mithilfe einiger praktischer Anwendungen werden Sie sehen, dass Matrizen ein sehr nützliches mathematisches Werkzeug darstellen.

Lernziele

Nach Bearbeitung dieses Kapitels...

- kennen Sie die grundlegenden Begriffe wie Matrizen, Vektoren und Skalare,
- können Sie Rechenoperationen (Addition, skalare Multiplikation, Transposition, Matrixmultiplikation) auf Matrizen anwenden,
- können Sie einfache praktische Aufgaben mithilfe von Matrizen und Vektoren modellieren.

6.1 Matrizen: Grundlegende Begriffe

Was ist eine Matrix?

Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Zahlenschema, eingeschlossen in runde (in einigen Büchern auch eckige) Klammern.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 2,7 \\ 4 & 5 \\ 2\pi & 0,4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Matrizen:_Grundlegende_Begriffe

Wozu man Matrizen brauchen kann

Wir verwenden grundsätzlich Großbuchstaben als Namen von Matrizen. Die Matrix A im Beispiel hat 2 Zeilen und 3 Spalten. Es handelt sich um eine 2×3 -Matrix. Die Matrix B ist eine 3×2 -Matrix, während C eine 3×3 -Matrix ist. Allgemein ist eine $m \times n$ -Matrix eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Den Ausdruck $m \times n$ nennen wir auch die **Dimension** der Matrix.

Zugriff auf die Komponenten: Ist A eine Matrix, so bezeichnet a_{ij} den Eintrag in Zeile i und Spalte j. Im obigen Beispiel ist etwa $a_{23} = 6$ und $b_{32} = 0,4$ während a_{32} nicht definiert ist. Wir verwenden also grundsätzlich für die Matrixelemente den selben Buchstaben wie für die Matrix, nur als Kleinbuchstaben.

Frage

1. Welche Java-Datenstruktur ist die Entsprechung der Matrix? Wie funktioniert dort der Zugriff auf die Komponenten?

Antwort

Die Entsprechung in Java ist das Array. Ist etwa a ein Array, so liefert a[2][3] das Element in Zeile 2 und Spalte 3.

2. Welcher entscheidende Unterschied besteht zwischen Java-Arrays und Matrizen in der Mathematik? Hinweis: Es ist ein Unterschied, der einem beim Programmieren viel Verdruß bereiten kann...

Antwort

Bei Java-Arrays beginnt die Zählung bei 0 ("nullte Zeile"), bei Matrizen beginnt sie bei 1 (erste Spalte usw.)

Das allgemeine Schema einer $m \times n$ -Matrix ist:

Definition

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

In Java (wie in den meisten anderen Programmiersprachen auch) müssen Sie Variablen zunächst deklarieren, bevor Sie sie verwenden können. Bei Arrays würden Sie etwa schreiben: int[][] a; oder double[][] b;. Das heißt, Sie müssen den Datentyp der Elemente des Arrays (Integer, Double,...) angeben. Dasselbe gilt auch in der Mathematik. Wenn Sie eine Matrix definieren, müssen Sie dazu sagen, aus welchem Zahlenbereich die Elemente sind. Das könnten beispielsweise rationale Zahlen (Menge $\mathbb{Q}$) oder reelle Zahlen (Menge $\mathbb{R}$) sein. Wir vereinbaren folgende Notation:

$\mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus der Menge $\mathbb{R}$, und entsprechend für andere Grundkörper wie etwa $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$. Wenn wir also im Folgenden etwa schreiben: "Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$", so bedeutet dies: "Sei A eine 4×3-Matrix mit reellen Komponenten."

Vektoren

Einige spezielle Typen von Matrizen haben aufgrund ihrer großen Bedeutung in praktischen Anwendungen eigene Namen.

- Eine $1 \times n$'-Matrix, etwa $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ heißt **Zeilenvektor**.
- Eine $m \times 1$-Matrix, etwa $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ heißt **Spaltenvektor** oder einfach nur kurz **Vektor**.
- Ist A eine $m \times n$-Matrix, so bezeichnet $a_{i\,*}$ den i-ten Zeilenvektor von A und $a_{*\,j}$ den j-ten Spaltenvektor von A.
- Eine $n \times n$-Matrix, also eine Matrix mit gleichviel Zeilen wie Spalten, heißt **quadratische Matrix**.
- Eine 1×1-Matrix ist keine «echte» Matrix. Wir unterscheiden nicht zwischen der 1×1-Matrix (a) und der Zahl a.

Wenn wir betonen möchten, dass ein Objekt eine Zahl (also keine Matrix) ist, so nennen wir diese Zahl einen **Skalar**.
Im Folgenden verwenden wir folgende (Variablen-)Namen:

Großbuchstaben	$A, B, C, \ldots$	für Matrizen
Kleinbuchstaben	$v, w, u, \ldots$	für Vektoren
kleine griechische Buchstaben	$\lambda, \mu, \sigma, \ldots$	für Skalare

Ferner schreiben wir $\mathbb{R}^m$ anstelle von $\mathbb{R}^{m \times 1}$. Das heißt, $\mathbb{R}^m$ ist die Menge aller (Spalten-)Vektoren mit m Komponenten.

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen A und B sind genau dann gleich, wenn sie

- die selbe Dimension haben und
- die jeweils entsprechenden Einträge gleich sind.

In (präziser) mathematischer Kurznotation:

Definition

Sind A und B beides $m \times n$-Maztrizen, so gilt $A = B$ genau dann, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i \in [1{:}m]$ und alle $j \in [1{:}n]$ gilt.

Definition

Der Ausdruck $[1{:}n]$ ist eine Kurzschreibweise für die Menge der ganzen Zahlen zwischen 1 und n (jeweils inklusive).

Frage

Gegeben die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Von welcher Dimension ist die Matrix A?

Lösung

A ist eine 3×4-Matrix.

2. Welchen Wert hat a_{23}?

Lösung

$a_{23} = 7$

3. Welchen Wert hat a_{42}?

Lösung

a_{42} existiert nicht!

6.2 Addition und skalare Multiplikation

Addition und Subtraktion von Matrizen

Grundsätzlich gilt: Es können nur Matrizen gleicher Dimension addiert oder subtrahiert werden. Dabei werden die jeweils entsprechenden Einträge der beiden Matrizen addiert bzw. subtrahiert.

Mal wieder für die mathematischen Puristen:

Definition

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $C := A \pm B$ die $m \times n$-Matrix C mit $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ für alle $i \in [1{:}m]$ und $j \in [1{:}n]$.

Beispiel

Seien

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
Dann ist	
$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

skalare Multiplikation

Bei dieser Operation wird eine Matrix mit einer Zahl λ (einem Skalar) multipliziert. Dies geschieht, indem jeder Eintrag der Matrix mit λ multipliziert wird. Diese Operation ist immer möglich.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $C := \lambda A$ die $m \times n$-Matrix C mit $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ für alle $i \in [1:m]$ und $j \in [1:n]$.

Beispiel

Die Matrix A sei definiert wie im obigen Beispiel. Dann gilt:

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Frage

Der folgende Spaltenvektor

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

sieht ziemlich unübersichtlich aus. Wie könnte man ihn übersichtlicher schreiben?

Lösung

Die Darstellung wird übersichtlicher, wenn man den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{3}$ herauszieht:

$$v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze der Addition und skalaren Multiplikation

Wir vereinbaren zunächst folgende Notation: $\mathbf{0}_{mn}$ bezeichnet die $m \times n$-Nullmatrix, die nur aus Nullen besteht. Ergibt sich die Dimension aus dem Kontext, so lassen wir die Indizes m und n einfach weg.

Satz

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A + B &= B + A && \text{(1) Kommutativgesetz} \\
(A + B) + C &= A + (B + C) = A + B + C && \text{(2) Assoziativgesetz} \\
A + \mathbf{0} &= A && \text{(3) neutrales Element} \\
A + (-A) &= \mathbf{0} && \text{(4)} \\
1 \cdot A &= A && \text{(5)} \\
0 \cdot A &= \mathbf{0} && \text{(6)} \\
\lambda \cdot (\mu \cdot A) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot A && \text{(7)} \\
\lambda \cdot (A \pm B) &= (\lambda \cdot A) \pm (\lambda \cdot B) && \text{(8)} \\
(\lambda \pm \mu) \cdot A &= (\lambda \cdot A) \pm (\mu \cdot A) && \text{(9)}
\end{aligned}
$$

? Frage

1. Was ist der Unterschied in Regel Nr. 6 zwischen der fettgedruckten Null und der «normalen» 0?

Antwort

Die fettgedruckte Null ist die Nullmatrix, während die "normale" Null die Zahl 0 (also ein Skalar) ist.

2. Von welcher Dimension ist die Nullmatrix in Regel (3), (4) und (6)?

Antwort

Da die Matrix A die Dimension $m{\times}n$ hat, muss auch die Nullmatrix die Dimension $m{\times}n$ haben, damit die Addition möglich ist.

6.3 Die transponierte Matrix

Eine Matrix transponieren heißt, ihre Zeilen und Spalten vertauschen. Genauer gesagt, die Zeilen werden zu Spalten (und umgekehrt). Aus einer $m{\times}n$-Matrix A wird dabei eine $n{\times}m$-Matrix $A^{\top}$.

? Frage

Was wird aus einem Zeilenvektor bei Transposition? Was aus einem Spaltenvektor?

Antwort

Wird ein Zeilenvektor transponiert, so entsteht ein Spaltenvektor, während aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor wird.

Definition

Transposition von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $C := A^\top$ die $n \times m$-Matrix C mit $c_{ij} = a_{ji}$ für alle $i \in [1:m]$ und $j \in [1:n]$.

Beispiel

Seien

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Dann ist		
$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$B^\top = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$C^\top = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Offenbar gilt stets:

$$(A^\top)^\top = A$$

Anmerkung

Der Begriff «Vektor» bezeichnet traditionell einen Spaltenvektor. Die Darstellung als Spaltenvektor hat jedoch den Nachteil, dass sie «raumgreifend»ist. Schreibt man etwa: Sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ so wie hier innerhalb eines Absatzes, so reißt dies die Zeilen des Absatzes arg auseinander, was letztlich sehr unschön aussieht und unnötig Platz verbraucht. Man greift in solchen Fällen zu folgendem «Trick». Man schreibt stattdessen: Sei $v = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Damit ist sichergestellt, dass v selbst ein Spaltenvektor ist.

6.4 Matrixmultiplikation

Das Skalarprodukt: Vektor mal Vektor

Rechnungen, etwa im Biergarten, sehen typischerweise wie folgt aus:

Artikel	Menge	Einzelpreis	Gesamtpreis
Weißbier	5	3,20	16,00
Pils	4	2,80	11,20
Dunkles	8	3,00	24,00

Helles	2	2,50	5,00
Summe			**56,20**

Auf die selbe Art wie der Gesamtbetrag im obigen Beispiel wird allgemein das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet. Stellen wir die Mengenliste und die Preisliste als Vektoren v und w dar, also

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2,8 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

so ist der Gesamtpreis das Skalarprodukt der beiden Vektoren, geschrieben $v \cdot w$. Dabei werden die jeweils entsprechenden Komponenten multipliziert und die einzelnen Produkte anschließend aufaddiert. Voraussetzung dafür ist, dass beide Vektoren die gleiche Anzahl von Komponenten haben.

Definition

Seien

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n.$$

Das **Skalarprodukt** von v und w ist wie folgt definiert:

$$v \cdot w = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Der Name kommt daher, dass das Ergebnis ein Skalar ist. **Achtung**:

Wichtig

- Beim Skalarprodukt wird der Malpunkt nie weggelassen!
- Verwechseln Sie nicht das Skalarprodukt mit der skalaren Multiplikation (Skalar mal Matrix)!

Wir haben hier das Skalarprodukt als Produkt zweier Spaltenvektoren erklärt. Auf die selbe Art und Weise lässt sich auch das Produkt Zeilenvektor mal Spaltenvektor definieren. Ist etwa

$$v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

so ist

$$v \cdot w \ = \ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \ = \ 7\,.$$

Diese Form des Skalarprodukts ist insbesondere für die nachfolgenden Produktbildungen wichtig.

Matrix mal Spaltenvektor

Nun wollen Arne, Stella und Jonas ihre Rechnung im Biergarten bezahlen. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von welcher Biersorte jeder der drei konsumiert hat:

	Weißbier	**Pils**	**Dunkles**	**Helles**
Arne	2	0	1	1
Stella	0	3	0	1
Jonas	1	2	2	1

Die drei zahlen getrennt. Um die Rechnungen zu erstellen, verwenden wir für jede Person jeweils das bekannte Schema. Besonders übersichtlich wird es in der folgenden Darstellung, dem so genannten Falk'schen Schema.

				Weißbier	3,20
			Pils	2,80	
				Dunkles	3,00
	Weißbier	Pils	Dunkles	Helles	2,50
Arne	2	0	1	1	**11,90** = 2·3,20 + 0·2,80 + 1·3,00 + 1·2,50
Stella	0	3	0	1	**10,90** = 0·3,20 + 3·2,80 + 0·3,00 + 1·2,50
Jonas	1	2	2	1	**17,30** = 1·3,20 + 2·2,80 + 2·3,00 + 1·2,50

Die fett gedruckten Zahlen stellen jeweils die Rechnungssumme für die drei Freunde dar.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Matrixmultiplikation

Hier wird gezeigt, wie's geht!

Auf diese Weise ist das Produkt Matrix mal Spaltenvektor definiert. Dabei ist wichtig, dass die Anzahl der Spalten der Matrix (die Anzahl der Biersorten) mit der Anzahl der Komponenten des Vektors (ebenfalls die Biersorten) übereinstimmt.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Das Produkt $w := A \cdot v$ mit $w \in \mathbb{R}^m$ ist definiert durch

$$w_i = a_{i\,*} \cdot v\,.$$

Das heißt, das Produkt $A \cdot v$ ist der Spaltenvektor w, dessen i-te Komponente w_i das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von A und dem Vektor v ist.

Matrix mal Matrix

Firma Söder stellt Schoko-Osterhasen in zwei Varianten, Vollmilch-Osterhasen und Zartbitter-Osterhasen her. Dazu werden Vollmilchschokolade, Zartbitterschokolade und Nougatcreme in folgenden Mengen (angegeben in Mengeneinheiten) benötigt. Im Folgenden wird Vollmilch mit VM, Zartbitter mit ZB abgekürzt.

	VM-Osterh.	**ZB-Osterh.**
VM-Schok.	5	0
ZB-Schok.	0	5
Nougatcreme	4	3

Für diese Zwischenprodukte werden wiederum die Rohstoffe Zucker, Kakao, Milch und Nüsse in folgenden Mengen benötigt:

	VM-Schok.	**ZB-Schok.**	**Nougatcreme**
Zucker	4	4	3
Kakao	2	5	2
Milch	4	1	3
Nüsse	0	0	2

Aus diesen beiden Tabellen soll nun eine Tabelle erstellt werden, die den Bedarf der Rohstoffe für die Endprodukte angibt. Dazu benutzen wir wieder das Falk'sche Schema:

				VM-O	**ZB-O**
			VM-S	5	0
			ZB-S	0	5
	VM-S	ZB-S	NC	4	3
4	4	3	**32**	**29**	
Kakao	2	5	2	**18**	**31**
Milch	4	1	3	**32**	**14**
Nüsse	0	0	2	**8**	**6**

Die fett gedruckten Zahlen stellen die gesuchte Tabelle «Rohstoffe -> Endprodukte» dar.

Auf diese Weise ist das Produkt Matrix mal Matrix definiert. Dabei ist wichtig, dass die Anzahl der Spalten der ersten Matrix (die Anzahl der Zwischenprodukte) mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix (ebenfalls die Anzahl der Zwischenprodukte) übereinstimmt.

Definition

Matrixmultiplikation

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

Das Produkt $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ist definiert durch

$$c_{ij} = a_{i\,*} \cdot b_{*\,j}\,.$$

Das heißt, das Produkt $A \cdot B$ ist die Matrix C, deren i, j-te Komponente c_{ij} das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von A und dem j-ten Spaltenvektor von B ist.

Formel

Die Dimensionsformel

$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

Frage

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.) Welche Dimension hat das Produkt $A \cdot B$ (falls möglich)?

Lösung

Das Produkt ist von der Form $(3 \times 4) \cdot (2 \times 3)$, also nicht möglich.

2.) Welche Dimension hat das Produkt $B \cdot A$ (falls möglich)?

Lösung

Das Produkt ist von der Form $(2 \times 3) \cdot (3 \times 4) = (2 \times 4)$.

3.) Welche Dimension hat das Produkt $A^\top \cdot B^\top$ (falls möglich)?

Lösung

Das Produkt ist von der Form $(4 \times 3) \cdot (3 \times 2) = (4 \times 2)$.

6.5 Gesetze der Matrixmultiplikation

Die Einheitsmatrix

Frage

Denken Sie sich irgendeine 3×4-Matrix A aus. Dann multiplizieren Sie A nacheinander mit den Vektoren e_1, e_2, e_3 und e_4 mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fällt Ihnen etwas auf?

Lösung

Offenbar ist $A \cdot e_j = a_{*\,j}$, d.h. der j-ten Spalte von A.

Fügen wir die Vektoren e_1 bis e_4 aus der obigen Aufgabe zu einer Matrix zusammen, so erhalten wir die Matrix

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die auch als 4×4-**Einheitsmatrix** bezeichnet wird.

Frage

Was meinen Sie, wie sieht die 3×3-Einheitsmatrix E_3 aus?

Lösung

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei A die Matrix, die sich vorhin ausgedacht haben. Bilden Sie die beiden Produkte $A \cdot E_4$ und $E_3 \cdot A$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung

Richtig! $A \cdot E_4 = A$ und $E_3 \cdot A = A$.

Definition

Die $n \times n$-**Einheitsmatrix** E_n ist diejenige $n \times n$-Matrix, die in der absteigenden Diagonalen lauter Einsen hat, während alle anderen Einträge 0 sind:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergibt sich die Dimension aus dem Kontext, so lassen wir den Index n weg.

Satz

Rechenregeln der Matrixmultiplikation

Seien A, B und C Matrizen, deren Dimension so ist, dass die unten stehenden Produkte alle gebildet werden können. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
&(1) & (A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \\
&(2) & (\lambda A) \cdot B &= A \cdot (\lambda B) = \lambda (A \cdot B) \\
&(3.1) & A \cdot e_j &= a_{*\,j} \\
&(3.2) & e_i^\top \cdot A &= a_{i\,*} \\
&(4) & A \cdot E &= E \cdot A = A \\
&(5) & A \cdot \mathbf{0} &= \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0} \\
&(6.1) & A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
&(6.2) & (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\
&(7) & (A \cdot B)^\top &= B^\top \cdot A^\top
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle wollen wir einen Vergleich zwischen den obigen Regeln oder Gesetzen und den Rechenregeln der Multiplikation und Addition von Zahlen (ganzen, rationalen, reellen Zahlen) anstellen. Was ist gleich, was ist unterschiedlich? Einige Regeln sind identisch, nämlich das Assoziativgesetz (1) und das Distributivgesetz (6.1 und 6.2). Regel (5) ist die Multiplikation mit 0, im Bereich der Zahlen ist das die Regel $x \cdot 0 = 0$. Was ist mit Regel (3)?

Frage

Welcher speziellen ganzen Zahl entspricht die Matrix E in Regel (4)?

Lösung

Die Matrix E entspricht der Zahl 1, denn für Zahlen gilt $x \cdot 1 = x$.

Frage

Ein wichtiges Gesetz vom Rechnen mit Zahlen fehlt hier allerdings. Raten Sie mal, welches... Und anschließend überlegen Sie, warum es fehlt.

Lösung

Es fehlt das Kommutativgesetz ($x \cdot y = y \cdot x$). Für Matrizen wäre das $A \cdot B = B \cdot A$. Das kann aber allgemein gar nicht funktionieren. Ist A eine 2×3-Matrix, B eine 3×4-Matrix, so ist zwar das Produkt $A \cdot B$ möglich, jedoch nicht $B \cdot A$.

Potenzen

Frage

Welche Dimension muss eine Matrix A haben, damit das Produkt $A \cdot A$ möglich ist?

Antwort

Die Dimension von A sei $m \times n$. Die Multiplikation $A \cdot A$ ist dann vom Typ $(m \times n) \cdot (m \times n)$. Damit dies möglich ist, muss $m = n$ sein. Das heißt, die Matrix A muss quadratisch sein.

Ist A eine quadratische Matrix, so ist das Produkt $A \cdot A$ stets möglich. Wir vereinbaren dann folgende Potenzschreibweise für $n \geq 1$:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}.$$

Frage

Und was ist dann A^0?

Lösung

Ist x eine Zahl, so ist $x^0 = 1$. Die Entsprechung der 1 bei Matrizen ist die Einheitsmatrix E. Ist A eine $n \times n$-Matrix, so muss $A^0 = E_n$ sein.

6.6 Einführung in MATLAB/FREEMAT

Achtung: Dieser Abschnitt ist nicht klausurrelevant!

MATLAB und FREEMAT sind nützliche Werkzeuge, die das Rechnen mit Matrizen erleichtern. Das folgende Video gibt Ihnen eine kleine Einführung.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

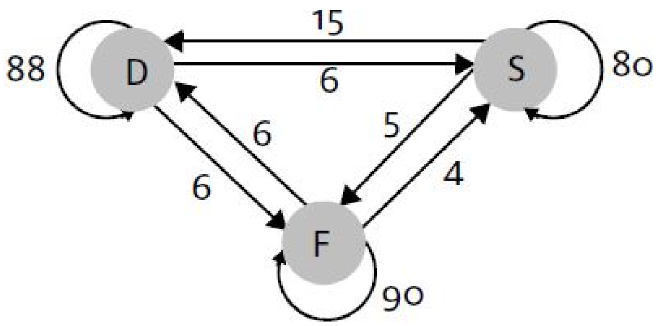
https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Einf%C3%BChrung_in_MATLAB/FREEMAT

Einführung in MATLAB/FREEMAT

6.7 Anwendung: Münzwanderungen

Die Eurozone
(Stand 1. Februar 2020)

Zum 1.1.2002 wurden in allen beteiligten EU-Ländern Euro-Münzen in Umlauf gebracht. In jedem Land wurden ausschließlich Münzen eigener Prägung eingesetzt. Für die dann einsetzende «Münzenwanderung pro Jahr» zwischen den Gebieten Deutschland (D), Frankreich (F) und Sonstige Länder (S) sollten sich die jährlichen Wanderungsanteile gemäß nebenstehendem Übergangsgraphen verhalten (Angaben in Prozent).



Münzwanderung zwischen Deutschland (D), Frankreich (F) und sonstigen Ländern (S)

Beispiel: 88 % aller in Deutschland befindlichen Münzen verbleiben in Deutschland, 6 % aller in Deutschland befindlichen Münzen wandern nach Frankreich und weitere 6 % gehen in die übrigen Länder.

Wir stellen die Wanderungsbewegungen zunächst tabellarisch dar:

	von D	**von F**	**von S**
nach D	0,88	0,06	0,15
nach F	0,06	0,9	0,05
nach S	0,06	0,04	0,8

Daraus extrahieren wir die folgende Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,06 & 0,15 \\ 0,06 & 0,9 & 0,05 \\ 0,06 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Zum 1.1.2002 wurde eine bestimmte Menge m deutscher Münzen (mit «deutsche Münzen» meine ich Münzen mit deutscher Prägung) geprägt und in Deutschland in Umlauf gebracht. Wie viele deutsche Münzen (in Prozent von m) gab es in jedem der drei Länder D, F, S zum 1.1.2003, zum 1.1.2004, zum 1.1.2005?

Zum 1.1.2002 befanden sich alle (das heißt, 100 %) deutsche Münzen in Deutschland und 0 in Frankreich und den sonstigen Ländern. Wir stellen diese Verteilung durch einen Vektor v_0 dar. Die Prozentangaben ersetzen wir durch Zahlen (100 % = 1,0).

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einträge stellen (von oben nach unten) die Münzmenge in D, in F und in S dar.

Ein Jahr später, am 1.1.2003, ist die Verteilung der deutschen Münzen offenbar wie folgt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,06 \\ 0,06 \end{pmatrix}$$

Ein weiteres Jahr später, am 1.1.2004, berechnen wir die neue Münzverteilung. Wie viele deutsche Münzen sind nun in D?

- Von den 0,88 in D befindlichen deutschen Münzen bleiben 88 % in D. Macht 0,88·0,88.
- Von den 0,06 in F befindlichen deutschen Münzen wandern 0,06 nach D. Macht 0,06·0,06.
- Von den 0,06 in S befindlichen deutschen Münzen wandern 0,15 nach D. Macht 0,06·0,15.

Hier wurde ganz offensichtlich die erste Zeile der Übergangsmatrix M mit dem Vektor v_1 skalar multipliziert. Die komplette Verteilung der deutschen Münzen am 1.1.2004 erhalten wir daher durch Multiplikation von M mit dem Vektor v_1 :

$$v_2 = M \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0,79 \\ 0,11 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

Am 1.1.2005 ist dann nach dem selben Verfahren die Verteilung wie folgt:

$$v_3 = M \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,15 \\ 0,13 \end{pmatrix}$$

Eine interessante Frage ist es, ob sich die Verteilung der deutschen Münzen einem stabilen Gleichgewichtszustand nähert oder ob sie ständig «in Bewegung bleibt». Führt man das obige Verfahren immer weiter, so landet man irgendwann bei

$$v_{31} = M \cdot v_{30} = \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,36 \\ 0,20 \end{pmatrix}$$

und ab dann ändert sich (zumindest bis zur zweiten Nachkommastelle nichts mehr. Diese «empirische» Vorgehensweise kann selbstverständlich eine mathematische Analyse nicht ersetzen. Dafür benötigt man jedoch mehr mathematisches Handwerkszeug, als wir zurzeit zur Verfügung haben.
Wir haben eben sukzessive folgende Produkte gebildet:

- $v_1 = M \cdot v_0$
- $v_2 = M \cdot v_1 = M \cdot M \cdot v_0 = M^2 \cdot v_0$
- $v_3 = M \cdot v_2 = M \cdot M^2 \cdot v_0 = M^3 \cdot v_0$
- ...

Das heißt, man kann die Änderung derMünzverteilung über mehrere Jahre hinweg durch Potenzen der Matrix M darstellen. Beispielsweise gibt die Matrix M^3 die Münzverteilung nach 3 Jahren wieder.

? Frage

Überlegen Sie, welche vereinfachenden Annahmen man bei diesem Modell der Münzwanderung getroffen hat.

Lösung

Das Modell beruht auf der Annahme, dass die Übergangsmatrix über mehrere Jahre hinweg konstant bleibt.

6.8 Anwendung: Bevölkerungswachstum

Permutationsmatrizen

Achtung: Dieser Abschnitt ist nicht klausurrelevant!

Als Beispiel betrachten wir die 4×4 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Was passiert, wenn wir die Matrix A auf einen Vektor, etwa $v = (a \quad b \quad c \quad d)^\top$ anwenden? Es ist $A \cdot v = (0 \quad a \quad b \quad c)^\top$ Offensichtlich bewirkt die Matrix A eine Verschiebung der Komponenten nach unten. Oben wird mit 0 aufgefüllt. Eine zweite Anwendung von A ergibt $A^2 \cdot v = (0 \quad 0 \quad a \quad b)^\top$ und es ist klar, wie es weitergeht.

? Frage

Wie sieht wohl die 4×4 -Matrix B aus, die einen zyklischen Shift bewirkt? Also abcd → dabc?

Lösung

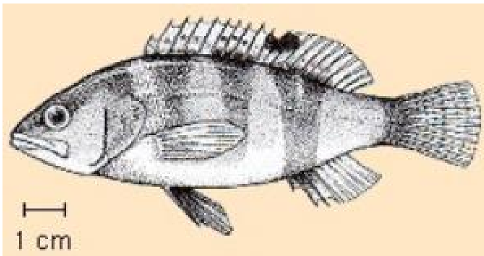
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Populationen

Mithilfe von Matrizen beschreibt man in der theoretischen Ökologie, wie sich die Größe einer Population von Organismen im Laufe der Zeit verändert. Dabei muss man natürlich einige vereinfachende Annahmen treffen.

Zunächst unterteilt man die Population in Altersklassen (die selbstverständlich stark von der Art des Organismus abhängen). Desweiteren betrachtet man die Änderung der Population stets über einen festen Zeitraum. In jeder Altersklasse benötigt man folgende Angaben: Die Überlebensrate in der Klasse (d.h. welcher Anteil über den betrachteten Zeitraum in die nächste Klasse überlebt), und schließlich die Fruchtbarkeitsrate in der Klasse.

Betrachten wir beispielsweise den pazifischen Teufelsbarsch (siehe Abb. rechts). Er lebt maximal 10 Jahre. Die folgende Tabelle zeigt die obigen Parameter in jeder Altersklasse.



Altersklasse	Überlebensrate	Fruchtbarkeitsrate
0 - 2	0,4	0,0
2 - 4	0,8	0,8
4 - 6	0,5	2,8

6 - 8	0,1	2,2
8 - 10	0,0	0,0

Daraus basteln wir nun die so genannte Leslie-Matrix M, die die Änderung der Population von einem Jahr zum nächsten beschreibt.
Eine Population lässt sich durch die Verteilung der Altersklassen zu einem bestimmten Zeitpunkt t beschreiben. Dafür benutzen wir wieder einen Vektor. So bezeichnet etwa

$$p_1 = \begin{pmatrix} 5,9 \\ 3,1 \\ 2,9 \\ 2,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

eine Population zu einem Zeitpunkt 1 bestehend aus 5900 Tieren zwischen 0 und 2 Jahren, 3100 Tieren zwischen 2 und 4 Jahren usw.

Ausgehend von einer bestimmten Population $p_t = \begin{pmatrix} n_0 & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}^\top$, besteht die Population p_{t+1} im darauffolgenden Zweijahreszeitraum zum einen aus den neu geborenen Tieren, zum anderen aus den Überlebenden des Vorjahres. Die Überlebenden des Vorjahres landen dabei in der nächsten Altersklasse. Der Populationsvektor wird also nach rechts geschoben. Die Anzahl der neu geborenen Tiere berechnet sich als Skalarprodukt von p und dem Vektor der Fruchtbarkeitsraten. Insgesamt erhalten wir folgende Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,8 & 2,8 & 2,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den obigen Vektor p_1 gilt dann:

$$p_2 = M \cdot p_1 = \begin{pmatrix} 16,1 \\ 2,36 \\ 2,48 \\ 1,45 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Langfristig würden die Populationszahlen weiter anwachsen, so wäre etwa

$$p_{20} = \begin{pmatrix} 231,24 \\ 79,68 \\ 54,80 \\ 23,52 \\ 2,03 \end{pmatrix}$$

Dafür, dass dies nicht geschieht, sorgen in der Natur jedoch die Fressfeinde.

6.9 Aufgaben zu Matrixoperationen

Aufgabe

Aufgabe 6.1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich:

1.) $A + B$	2.) $C + D$	3.) $C^\top$
4.) $C + D^\top$	5.) $(-\frac{1}{2}) \cdot D$	

Aufgabe

Aufgabe 6.2

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Produkte sind definiert? Berechnen Sie diese.

1.) $A \cdot v$	2.) $A \cdot v^\top$	3.) $A^\top \cdot v$
4.) $v \cdot A$	5.) $v^\top \cdot A$	6.) $v \cdot A^\top$

Aufgabe

Aufgabe 6.3

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Produkte sind definiert? Berechnen Sie diese.

1.) $A \cdot B$	2.) $A \cdot B^\top$	3.) $A^\top \cdot B$

4.) $B \cdot A$	5.) $B^{\top} \cdot A$	6.) $B \cdot A^{\top}$

Aufgabe

Aufgabe 6.4

Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix A, für die $A^{\top} = A$ gilt.

Damit es nicht zu einfach wird: Die Matrix A muss mindestens 3 Zeilen haben und mindestens die Einträge 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthalten.

Hinweis: Eine solche Matrix nennt man auch **symmetrisch**.

Aufgabe

Aufgabe 6.5

Sei $A = \begin{pmatrix} 21 & 35 & 14 \\ 7 & 0 & 28 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}$

Wie könnte man die Gesetze der Matrixmultiplikation nutzen, um das Produkt $A \cdot v$ (per Hand!) möglichst effizient zu berechnen?

Aufgabe

Aufgabe 6.6

Nach den Gesetzen der Matrixmultiplikation muss $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ sein. Das heißt, egal, wie man rechnet, es muss das selbe herauskommen.

Wie steht es jedoch mit dem Rechenaufwand? Ist der auch gleich? Machen Sie die Probe aufs Exempel!

Sei $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 10}, \qquad B \in \mathbb{R}^{10 \times 100}, \qquad C \in \mathbb{R}^{100 \times 2}$.

1.) Wie viele Multiplikationen benötigt die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$?

2.) Wie viele Multiplikationen benötigt die Rechnung $A \cdot (B \cdot C)$?

Lösungshinweis

Berechnen Sie zunächst allgemein, wie viele Multiplikationen für ein Produkt der Form $(m \times n) \cdot (n \times k)$ benötigt werden!

Aufgabe

Aufgabe 6.7

Sei A eine Matrix, sei $v \in \mathbb{R}^4$ ein Vektor und sei $w = A \cdot v$ mit $w \in \mathbb{R}^3$.

Welche Dimension hat die Matrix A?

Aufgabe

Aufgabe 6.8

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Ferner sei $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}$.

Geben Sie die Matrix A an!

Aufgabe

Aufgabe 6.9

Die bayerische Brauerei Kapfinger braut Helles, Weißbier, Dunkelbier und Pils. Zum Bierbrauen braucht man bekanntlich (außer Wasser) Hopfen, Malz und Hefe. Die folgende Tabelle gibt den Rohstoffbedarf (in Mengeneinheiten pro 100 l) an (Hinweis: Die Zahlen sind rein fiktiv!).

	Helles	**Weiße**	**Dunkles**	**Pils**
Hopfen	5	5	4	8
Malz	2	3	10	3
Hefe	10	15	12	8

1.) Ein Kunde bestellt (in 100 l): 4 Helle, 12 Weiße und 2 Pils. Der Kapfinger Schorsch möchte wissen, wieviel von jedem der Rohstoffe er für diese Bestellung benötigt.
   Lösen Sie diese Aufgabe mit einer geeigneten Matrixmultiplikation.

2.) Die Rohstoffpreise (in Euro pro Mengeneinheit) bei zwei verschiedenen Lieferanten "Hopfen & Malz" (H&M) sowie "Biomalz" (BM) sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben:

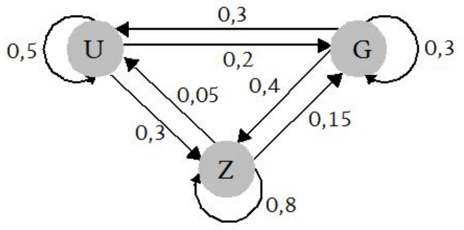
	H&M	**BM**
Hopfen	10	8
Malz	8	9
Hefe	15	16

Erstellen Sie per Multiplikation geeigneter Matrizen eine Tabelle, die angibt, wie hoch die Rohstoffkosten der 4 Biersorten (Helle, Weiße, Dunkle und Pils) jeweils bei H&M und bei BM sind.

Aufgabe

Aufgabe 6.10

Ein Meinungsforschungsunternehmen schätzt jeden Monat auf der Grundlage einer Umfrage ein, wie viel Prozent der Wahlberechtigten mit der Regierung unzufrieden sind (U), ihr gegenüber gleichgültig eingestellt sind (G) oder mit ihr zufrieden sind (Z). Das Diagramm zeigt vermutete Änderungen der Gruppenzugehörigkeit von Monat zu Monat.



1.) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

2.) Anfänglich gehören
   30% der Wahlberechtigten zu U,
   30% zu G und
   40% zu Z.
   Wie sieht die geschätzte Verteilung einen Monat später aus?

3.) Wie sieht die geschätzte Verteilung ein Jahr später aus?

Hinweis: Benutzen Sie FreeMat zur Lösung diese Aufgabe.

7 Lineare Gleichungssysteme

Gliederung

In diesem Kapitel lernen Sie eine sehr effiziente Methode kennen, um lineare Gleichungssysteme zu lösen, den Gauß-Algorithmus. Ferner lernen Sie einige weitere wichtige Begriffe der Linearen Algebra kennen, nämlich die der Linearkombination, der linearen Hülle und den Begriff des Vektorraums. Schließlich lernen Sie eine wichtige Matrixoperation kennen, die Bildung der Inversen und erfahren, wie man die Inverse einer Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus berechnen kann.

Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie

- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen bestimmen,
- die Inverse einer gegebenen Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus berechnen,
- die Determinante einer quadratischen Matrix berechnen.
- Sie kennen die Begriffe Linearkombination, lineare Hülle und Vektorraum und die Beziehung zwischen Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme und Unterräumen.

7.1 Lineare Gleichungssysteme: Grundlegende Begriffe

Im Abschnitt über Münzwanderungen haben wir uns mit folgender Frage beschäftigt: Wie kann man zu einer vorliegenden Münzverteilung v_t mithilfe der Übergangsmatrix M die Münzverteilung v_{t+1} des nächsten Jahres berechnen? Es stellte sich heraus, dass diese Berechnung durch Matrixmultiplikation, nämlich $v_{t+1} = M \cdot v_t$ geleistet wird.

In diesem Abschnitt fragen wir umgekehrt: Wie kann man zu einer vorliegenden Münzverteilung v_t mithilfe der Übergangsmatrix M die Münzverteilung v_{t-1} des *vorigen* Jahres berechnen? Anstatt in die Zukunft blicken wir also in die Vergangenheit. Dies geht offenbar nicht so einfach durch eine Matrixmultiplikation. Wir lösen das Problem, indem wir eine Gleichung aufstellen: Sei $u = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$ der gesuchte Vektor v_{t-1}. Dann gilt offenbar

$$M \cdot u = v_t.$$

Sei etwa

$$v_t = \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,36 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Mit den Zahlen aus Abschnitt 6.7 erhalten wir aus der Gleichung

$$M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,06 & 0,15 \\ 0,06 & 0,9 & 0,05 \\ 0,06 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,36 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,88x + 0,06y + 0,15z &= 0,44 \\ 0,06x + 0,90y + 0,05z &= 0,36 \\ 0,06x + 0,04y + 0,80z &= 0,2 \end{aligned}$$

Wir werden dieses Gleichungssystem an dieser Stelle nicht lösen. Es soll lediglich die folgende Definition motivieren.

Definition

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) ist eine Gleichung der Form

$$A \cdot u = b$$

Dabei ist A eine $m \times n$-Matrix, b ein Vektor mit m Komponenten und u ein Vektor von n Unbekannten $x_1, x_2, ..., x_n$. Ausgeschrieben lautet dieses System:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

In den folgenden Abschnitten stellen wir ein Verfahren vor, um lineare Gleichungssysteme (per Hand oder per Programm) zu lösen. Zunächst definieren wir dazu, wie die Lösung eines LGS überhaupt aussehen soll.

Definition

1.) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt eine **Lösung** des LGS $A \cdot u = b$, falls $A \cdot v = b$ gilt.
2.) Die Menge

$$\mathbb{L}(A, b) = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot v = b\}$$

heißt **Lösungsmenge** des LGS.

Frage

Diskutieren Sie anhand der folgenden drei LGSe, wie die Lösungsmenge eines LGS aussehen kann.

Beispiel 1	**Beispiel 2**	**Beispiel 3**
$x + y = 3$	$x - y = 0$	$x - y = 0$
$x - y = 1$	$2x - 2y = 0$	$2x - 2y = 4$

Lösung

Im ersten Beispiel gibt es genau eine Lösung (nämlich den Vektor $v = (2 \quad 1)^\top$.
Im zweiten Beispiel gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich alle Vektoren, bei denen die erste und die zweite Komponente gleich sind.
Im dritten Beispiel gibt es gar keine Lösung, das heißt, die Lösungsmenge ist die leere Menge.

Definition

Ein LGS der Form $A \cdot u = b$ mit $b = \mathbf{0}$ heißt **homogen**. Ist dagegen $b \neq \mathbf{0}$, so heißt das System **inhomogen**.

Bei einem homogenen System stehen also auf den rechten Seiten nur Nullen. Warum jedoch unterscheidet man zwischen homogenen und inhomogenen Systemen? Nun, homogene Systeme haben eine wichtige Eigenschaft: Sie sind stets lösbar, das heißt, sie besitzen stets mindestens eine Lösung.

Frage

Welche Lösung hat das homogene System $A \cdot u = \mathbf{0}$ in jedem Fall?

Lösung

Ein homogenes System hat stets die so genannte triviale Lösung, nämlich den Nullvektor (d.h. alle Variablen sind gleich Null).

7.2 Der Gauß-Algorithmus: Die Spielregeln

Der Gauß-Algorithmus ist ein Verfahren, mit dem man u.a. lineare Gleichungssysteme lösen kann. Der Name geht zurück auf den großen deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855).
Wir wollen die Methode an folgendem Beispiel erläutern:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -6 \\ 3x + 5y &= -4 \end{aligned}$$

Im Vorbereitungsschritt werden die Koeffizienten des Systems extrahiert und in eine Matrix geschrieben. Wir erhalten die Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 5 & -4 \end{array}\right).$$

Der senkrechte Strich symbolisiert die Gleichheitszeichen. Diese Matrix wird nun schrittweise transformiert. Dabei dürfen folgende Regeln angewandt werden:

! Wichtig

Die Regeln des Gauß-Algorithmus

1. Multipliziere eine Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.
2. Vertausche zwei Zeilen.
3. Addiere ein λ-faches einer Zeile zu einer anderen Zeile.
4. Lösche gegebenenfalls eine Nullzeile.
5. Vertausche ganz vorsichtig zwei Spalten

Was bedeutet «ganz vorsichtig» in der fünften Regel? Das Vertauschen zweier Zeilen ist offensichtlich völlig unproblematisch, denn jede Zeile entspricht einer Gleichung, und es ist ja letztlich gleichgültig, in welcher Reihenfolge diese aufgeschrieben sind. Eine Spalte jedoch gehört immer zu einer bestimmten Variablen, im Beispiel gehört die erste Spalte zu x, die zweite zu y. Beim Vertauschen zweier Spalten muss man daher darüber Buch führen!
Im folgenden Video können Sie sehen, wie die Regeln angewandt werden, um das Gleichungssystem zu lösen.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Der_Gau%C3%9F-Algorithmus:_Die_Spielregeln

Gauß-Algorithmus mit 2 Unbekannten

In diesem Video können Sie das angestrebte Ziel des Gauß-Algorithmus erkennen. Im Idealfall ist es von der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{array}\right),$$

die wir auch kurz $(E \mid b)$ schreiben, wobei b für den Vektor $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}^\top$ steht. Das heißt, auf der linken Seite (links vom Strich, der die Gleichheitszeichen repräsentiert) steht eine Einheitsmatrix. Dann ist die Lösung eindeutig und wir können sie direkt aus der Matrix ablesen: $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$. Dies ergibt den Lösungsvektor

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Diese Form lässt sich jedoch nicht immer erreichen. Sie lässt sich nur dann erreichen, wenn das LGS eine eindeutige Lösung hat. Hat das System keine Lösung, so merkt man das im Lauf des Algorithmus und bricht an der Stelle ab. Hat das System dagegen unendlich viele Lösungen, so lässt sich statt der obigen Form wenigstens folgende Zielform erreichen:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & b_n \end{array}\right)$$

Diese Form heißt die **Gauß-Jordan-Form**. Diese schreiben wir auch oft in der Kurzform $(EB \mid b)$. Dabei steht E für die Einheitsmatrix, B steht für die Teilmatrix mit den Sternchen rechts von der Einheitsmatrix und b steht für den Vektor der rechten Seiten.

Entfallen die Spalten mit den Sternen, so hat man die einfache Form $(E \mid b)$ von oben, die eine eindeutige Lösung besitzt.

Nun kennen wir die Spielregeln und das Spielziel (die Gauß-Jordan-Form). Die Situation ist ähnlich wie bei einem Spiel, etwa dem Schachspiel: Die Spielregeln legen lediglich die erlaubten Züge fest, sie sagen jetzt nichts darüber aus, wie man spielen muss, um zu gewinnen. Dafür benötigt man eine Gewinnstrategie. In unserem Fall benötigen wir eine Steuerung, die zu jeder Zeit genau vorschreibt, welche Regel anzuwenden ist. Das wollen wir uns im folgenden Abschnitt anschauen.

7.3 Der Gauß-Algorithmus: Die Strategie

Ziel des Gauß-Algorithmus ist die Gauß-Jordan-Form $(EB\,|\,b)$, wobei die Matrix B auch verschwinden kann. Der Gauß-Algorithmus arbeitet spaltenweise von links nach rechts. Er ist beendet, wenn entweder Unlösbarkeit festgestellt wurde oder die Einheitsmatrix E komplett erstellt wurde.

In jedem Schritt j heißt das Diagonalelement a_{jj} das **Pivot-Element** (*pivot*, frz.: Dreh-/Angelpunkt). Die Zeile j heißt die **Pivot-Zeile**. Ziel im j-ten Schritt ist es zunächst, das Pivot-Element zu 1 zu machen. Anschließend werden alle anderen Elemente in der j-ten Spalte zu 0 gemacht.

- Das Pivot-Element a_{jj} wird wie folgt zu 1 gemacht:
    - Ist $a_{jj} \neq 0$, so dividiere die Pivot-Zeile durch a_{jj}.
    - Ist $a_{jj} = 0$, so vertausche die Pivot-Zeile mit einer darunterliegenden Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element ungleich Null hat. Anschließend dividiere die (neue) Pivotzeile durch das Pivot-Element.
    - Ist $a_{jj} = 0$, und ist in allen darunterliegenden Zeilen, das Element in der Pivot-Spalte gleich Null, so vertausche die j-te Spalte mit einer rechts davon liegenden Spalte, die in der Pivotzeile einen Eintrag ungleich Null hat. Anschließend dividiere die (neue) Pivotzeile durch das Pivot-Element.
- Die anderen Elemente in der j-ten Spalte werden wie folgt zu 0 gemacht:
    - Subtrahiere von Zeile i ein Vielfaches der Pivotzeile, sodass das Element a_{ij} zu 0 wird.

Beispiel

Im folgenden Beispiel ist die erste Spalte bereits in der gewünschten Form.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) :2 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ -3\cdot\mathrm{II} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right)$$

Aktuelle Spalte ist die zweite Spalte. Pivot-Element ist $a_{22} = 2$ (blau markiert). Wir dividieren die Pivotzeile durch 2, um das Pivot-Element zu 1 zu machen. Anschließend werden die Elemente oberhalb und unterhalb durch Addition/Subtraktion eines entsprechenden Vielfachen der Pivotzeile zu 0 gemacht. Die römischen Zahlen in den Anmerkungen bezeichnen jeweils die Zeilennummer.

Beispiel

Im folgenden Beispiel ist wieder die zweite Spalte die Aktuelle Spalte.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \mathrm{III} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Dieses Mal ist das Pivot-Element gleich 0. Wir vertauschen die Pivotzeile mit der dritten Zeile. Damit ist das Pivot-Element gleich 1. Anschließend wird das Element oberhalb zu 0 gemacht.

Frage

Warum ist es wichtig, dass die Pivotzeile nur mit einer darunterliegenden Zeile getauscht werden darf?

Lösung

Würde man die Pivotzeile mit einer darüberliegenden Zeile tauschen, würde man die bereits erreichte Struktur der ersten Spalte kaputt machen.

Beispiel

Zu guter Letzt noch ein Beispiel, in dem Spalten getauscht werden müssen.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \\ \leftrightarrow \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -3\cdot\mathrm{II} \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Das Pivot-Element ist 0, unterhalb ist ebenfalls alles 0, daher vertauschen wir die zweite und die dritte Spalte und notieren dies in den Variablen (in rot) oberhalb der Matrix.

Das folgende Video zeigt Ihnen einen kompletten Durchlauf des Algorithmus.

▶ An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Der_Gau%C3%9F-Algorithmus:_Die_Strategie

▶ Gauß-Algorithmus mit 3 Unbekannten
Achtung: Fehlerkorrektur. Bei 2:56 muss es am Rand der dritten Zeile heißen: +3*(II), anstatt +3*(III)

Und hier sehen Sie noch ein Beispiel für ein unlösbares System.

▶ An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Der_Gau%C3%9F-Algorithmus:_Die_Strategie

▶ Gauß-Algorithmus mit 3 Unbekannten (ohne Lösung)

7.4 Die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme näher anschauen. Dabei können wir drei Fälle unterscheiden:

- Endet der Gauß-Algorithmus mit der Form $(E\,|\,b)$, so hat das LGS eine eindeutige Lösung, nämlich $\mathbb{L} = \{b\}$.

- Entsteht irgendwann im Lauf des Algorithmus eine Zeile der Form $(0 \quad 0 \quad \cdots 0 \,|\, a)$ mit $a \neq 0$, so ist das LGS unlösbar, das heißt $\mathbb{L} = \emptyset$.
- Endet der Gauß-Algorithmus mit einer Matrix der Form $EB\,|\,b$, so hat das LGS unendlich viele Lösungen. Diesen Fall wollen wir in diesem Abschnitt etwas näher betrachten. Eine Frage, die sich sofort aufdrängt, ist die Frage nach der Darstellung: Wie kann eine unendliche Menge mit endlichen Mitteln dargestellt werden?

Als Beispiel betrachten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Führen Sie den Gauß-Algorithmus an diesem Beispiel durch! Sie sollten dann folgende Matrix erhalten haben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Wenn wir diese Matrix wieder rückübersetzen in ein Gleichungssystem, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt 3 Unbekannte, jedoch nur 2 Gleichungen. Dies reicht nicht aus, um die Unbekannten eindeutig zu bestimmen. Als Folge daraus gibt es unendlich viele Lösungen. Beispielsweise gibt es die Nulllösung ($x = y = z = 0$). Daneben gibt es jedoch noch viele andere Lösungen, etwa

- $x = 1, y = -2, z = 1$
- $x = -1, y = 2, z = -1$
- $x = -5, y = 10, z = -5$

bzw. als Lösungsvektoren geschrieben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}, \cdots$$

? **Frage**

- Prüfen Sie nach, dass diese Vektoren tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems darstellen.
- Versuchen Sie, weitere Lösungen zu finden.
- Was fällt Ihnen an den Lösungsvektoren auf?

Lösung

> Alle Lösungen sind Vielfache voneinander! Anders ausgedrückt, alle Lösungen sind Vielfache eines der Vektoren, z.B. v_1.

Wählen wir eine beliebige dieser Lösungen (außer der Nulllösung) aus, etwa v_1, so lässt sich die (unendliche!) Lösungsmenge wie folgt darstellen:

$$\mathbb{L} = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Das bedeutet:

- Für jeden Wert von λ ist λv_1 eine Lösung des LGS.
- Jede Lösung des LGS ist von der Form λv_1.

Definition

Ist v ein beliebiger Vektor, so schreiben wir

$$\langle v \rangle := \{\lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Mit dieser Kurznotation können wir die obige Lösungsmenge wie folgt darstellen:

$$\mathbb{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

In diesem Beispiel haben wir die Lösungsmenge mehr oder weniger «erraten». Nun wollen wir eine allgemeine Methode zur Berechnung der Lösungsmenge angeben. Nehmen wir an, wir haben eine Gauß-Jordan-Form $(EB\,|\,b)$ erhalten.

- Die Variablen, die zu den Spalten der Teilmatrix B gehören, können frei gewählt werden. Wir setzen Sie der Reihe nach gleich $\lambda, \mu, \sigma, \ldots$ usw. (griechische Buchstaben stehen für Skalare!).
- Anschließend übersetzen wir die Zeilen der Matrix $(EB\,|\,b)$ wieder zurück in Gleichungen und lösen diese nach den restlichen Variablen auf und erhalten somit einen allgemeinen Lösungsvektor.

Im obigen Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

besteht die Teilmatrix B aus einer Spalte, zu der die Variable z gehört. Wir setzen $z = \lambda$. Aus den Zeilen der Matrix machen wir wieder Gleichungen und berücksichtigen dabei $z = \lambda$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x - \lambda &= 0 \\ y + 2\lambda &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Wir erhalten $x = \lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$. Somit ergibt sich der Lösungsvektor

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel. Nehmen wir an, der Gauß-Algorithmus für ein LGS mit den Unbekannten x, y, z und w habe folgende Ergebnismatrix erzielt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Teilmatrix B besteht aus zwei Spalten, zu denen die Variablen z und w gehören. Wir setzen $z = \lambda$ und $w = \mu$. Aus den Zeilen der Matrix machen wir wieder Gleichungen und erhalten:

$$\begin{aligned} x - \lambda + 2\mu &= 0 \\ y + 3\lambda &= 0 \\ z &= \lambda \\ w &= \mu \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$x = \lambda - 2\mu, y = -3\lambda, z = \lambda, w = \mu.$$

Somit ergibt sich der Lösungsvektor

$$v = \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu \\ -3\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für jede Wahl von λ und μ erhalten wir auf diese Weise eine Lösung des LGS. Die Lösungsmenge ist dann

$$\mathbb{L} = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Die abkürzende Schreibweise für diese Menge lautet:

$$\mathbb{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

7.5 Linearkombinationen und lineare Hülle

Im vorigen Abschnitt haben wir Beispiele für homogene lineare Gleichungssysteme gesehen, deren Lösungsmengen von der Form

$$\mathbb{L} = \langle v \rangle = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

oder

$$\mathbb{L} = \langle v, w \rangle = \{ \lambda v + \mu w \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$$

war. Wir führen nun zwei wichtige neue Begriffe ein.

Definition

Sind $v_1, v_2, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ Skalare, so heißt der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, v_2, \dots v_k$.

Die Menge

$$\langle v_1, v_2, \dots v_k \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

aller Linearkombinationen von $v_1, v_2, \dots v_k$ heißt **lineare Hülle** (oder auch **Spann**) der Vektoren $v_1, v_2, \dots v_k$.

Es gilt: Die lineare Hülle einer Menge von Vektoren enthält stets den Nullvektor.

Frage

Warum enthält die lineare Hülle $v_1, v_2, \dots v_k$ den Nullvektor?

Lösung

Wenn wir $\lambda_i = 0$ wählen, für alle $i \in [1 : k]$, so erhalten wir den Nullvektor.

Beispielsweise ist der Ausdruck $2u - 3v + 0,8w$ eine Linearkombination der Vektoren u, v und w. Statt «Linearkombination» könnte man auch «gewichtete Summe» sagen.

Es gilt:

Wichtig

Lösungsmenge eines homogenen Systems

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen lässt sich stets in der Form $\langle v_1, v_2, \dots v_k \rangle$ darstellen, wobei $v_i \in \mathbb{R}^n$ für alle $i \in [1 : k]$.

Bisher haben wir die Lösungsmengen homogener Systeme analysiert. Wie sehen die Lösungsmengen inhomogener Systeme aus? Betrachten wir folgendes Beispiel.

Endergebnis des Gauß-Algorithmus sei folgende Matrix entsprechend den Unbekannten x, y und z:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Wir setzen wieder $z = \lambda$ und erhalten

$$x = 2 + \lambda, \qquad y = -3 - 2\lambda, \qquad z = \lambda$$

und somit den Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -3-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

was wir mit

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

abkürzen.

Allgemein gilt:

Wichtig

Lösungsmenge eines inhomogenen Systems

Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen lässt sich stets in der Form $u + \langle v_1, v_2, \dots v_k \rangle$ darstellen, wobei $u \in \mathbb{R}^n$ und $v_i \in \mathbb{R}^n$ für alle $i \in [1 : k]$.

7.6 Vektorräume

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass sich die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems stets in der Form $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$, das heißt, als lineare Hülle einer endlichen Menge von Vektoren, darstellen lässt.
In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Charakterisierung von Lösungsmengen linearer Systeme geben. Ein homogenes System ist von der Form

$$A \cdot u = \mathbf{0},$$

wobei A eine $m \times n$-Matrix und u der Vektor der Unbekannten ist. Sind die Vektoren v und w Lösungen dieses Systems, so gilt $A \cdot v = b$ und $A \cdot w = b$. Somit folgt

$$A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

und das bedeutet, dass auch $v + w$ eine Lösung des Systems ist. Ist ferner $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt

$$A \cdot (\lambda v) = \lambda(A \cdot v) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

das heißt, λv ist ebenfalls eine Lösung des Systems. In Kürze zusammengefasst:

!
Wichtig

- Ist $v \in \mathbb{L}(A, \mathbf{0})$ und $w \in \mathbb{L}(A, \mathbf{0})$, so ist auch $v + w \in \mathbb{L}(A, \mathbf{0})$
- Ist $v \in \mathbb{L}(A, \mathbf{0})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda v \in \mathbb{L}(A, \mathbf{0})$

Allgemein nennen wir eine Menge M **abgeschlossen** unter einer bestimmten Verknüpfung, wenn die Verknüpfung zweier Elemente aus M wieder ein Element aus M ist.

?
Frage

a) Ist die Menge der ganzen Zahlen abgeschlossen unter der Addition?
b) Ist die Menge der geraden ganzen Zahlen abgeschlossen unter der Addition?
c) Ist die Menge der ungeraden ganzen Zahlen abgeschlossen unter der Addition?

Lösung

Antwort

a) Ja, die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.
b) Ja, die Summe zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl.
c) Nein, die Summe zweier ungerader Zahlen ist keine ungerade, sondern eine gerade Zahl.

Definition

a) Eine nicht leere Menge von Vektoren, die abgeschlossen unter den beiden Grundoperationen Vektoraddition und skalare Multiplikation ist, heißt **Vektorraum**. Wir bezeichnen Vektorräume mit den Großbuchstaben $V, W, \ldots$.
b) Sind V und W Vektorräume mit $V \subseteq W$, so heißt V ein **Unterraum** von W.

Ich möchte an dieser Stelle gleich darauf hinweisen, dass der Begriff des Vektorraums in der Mathematik sehr viel weiter (und damit sehr viel abstrakter und unanschaulicher) gefasst wird. Näheres finden Sie in guten Lehrbüchern der linearen Algebra. Für unsere Zwecke jedoch reicht die hier gegebene Definition völlig aus.

Beispiel

a) Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich ein Vektorraum. Ist V ein beliebiger Vektorraum mit Vektoren in $\mathbb{R}^n$, so können wir also sagen: V ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

b) Die Menge

$$\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | \, a, b \in \mathbb{R}\}$$

aller Vektoren, deren dritte Komponente 0 ist, ist offensichtlich abgeschlossen unter den beiden Grundoperationen

Begründung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ 0 \end{pmatrix}$$

, und somit ein Vektorraum, genauer gesagt, ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Mithilfe des Vektorraumbegriffs können wir unseren obigen Satz wie folgt umformulieren:

Wichtig

Satz

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Weiterhin besteht folgende wichtige Beziehung zwischen den Begriffen «Vektorraum» und «lineare Hülle»:

Wichtig

Satz

a) Jede Menge der Form $\langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$ ist ein Vektorraum.

b) Jeder Vektorraum lässt sich in der Form $\langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$, das heißt, als lineare Hülle einer endlichen Menge von Vektoren, darstellen.

Ist $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$, so sagt man auch, die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ **erzeugen** den Vektorraum V. Die Menge $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ heißt dann ein **Erzeugendensystem** von V.

Da eine lineare Hülle stets den Nullvektor enthält, gilt folgende wichtige Eigenschaft von Vektorräumen:

Wichtig

Jeder Vektorraum enthält den Nullvektor.

Diese Eigenschaft hätte man auch mithilfe der Abgeschlossenheit unter der skalaren Multiplikation beweisen können, indem man $\lambda = 0$ wählt.

7.7 Die inverse Matrix

In Abschnitt Grundlegende Begriffe fragten wir uns: Wie kann man zu einer vorliegenden Münzverteilung v_t mithilfe der Übergangsmatrix M die Münzverteilung v_{t-1} des vorigen Jahres berechnen? In jenem Abschnitt haben wir das Problem mithilfe eines linearen Gleichungssystems und des Gauß-Algorithmus gelöst.

In diesem Abschnitt nun verfolgen wir einen alternativen Ansatz, der uns jedoch auch wieder zum Gauß-Algorithmus führen wird. Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung der Münzverteilungen in die Zukunft:

v_t	v_{t+1}	v_{t+2}	v_{t+3}	...
v_t	Mv_t	$MMv_t = M^2v_t$	$MM^2v_t = M^3v_t$	...

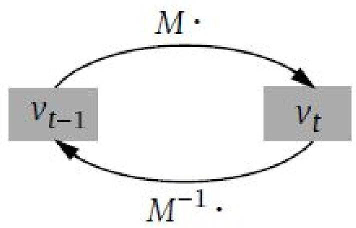
Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass $v_t = Ev_t = M^0v_t$ und $Mv_t = M^1v_t$ ist, so können wir schreiben:

v_t	v_{t+1}	v_{t+2}	v_{t+3}	...
M^0v_t	M^1v_t	M^2v_t	M^3v_t	...

Diese Tabelle legt folgende Erweiterung nach links (das heißt, in die Vergangenheit) nahe:

v_{t-1}	v_t	v_{t+1}	v_{t+2}	v_{t+3}	...
$M^{-1}v_t$	M^0v_t	M^1v_t	M^2v_t	M^3v_t	...

An dieser Stelle wissen wir zwar noch nicht, ob die Matrix M^{-1} überhaupt existiert und wenn ja, wie man sie berechnen könnte. Eines jedoch können wir sagen: Während die Multiplikation mit der Matrix M einen «Schritt in die Zukunft» bewirkt, steht die Multiplikation mit M^{-1} für einen «Schritt in die Vergangenheit» (siehe dazu auch die nebenstehende Abbildung)



Die Matrix M^{-1} müsste dann offenbar folgende Bedingungen erfüllen:

$$M \cdot M^{-1} \cdot v_t = v_t = M^0 \cdot v_t$$

$$M^{-1} \cdot M \cdot v_{t-1} = v_{t-1} = M^0 \cdot v_{t-1}$$

und dies Gleichungen müssen für alle Vektoren v_t, v_{t-1} gelten. Dies ist nur möglich wenn $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E$ gilt.

Definition

Die inverse Matrix

Eine $n \times n$-Matrix A heißt **regulär** (auch **invertierbar**), falls es eine Matrix B gibt, sodass folgende Gleichung gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

In diesem Fall heißt B die **Inverse** von A. Wir schreiben $B = A^{-1}$.

Beachten Sie:

Wichtig

- Nur quadratische Matrizen können invertierbar sein! Und auch diese sind es nicht immer!
- Ist die Matrix A invertierbar, so ist die Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt. Daher dürfen wir auch schreiben "**die** Inverse" anstatt "eine Inverse".

Beispiel

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass $A \cdot B = B \cdot A = E_2$ gilt. Daher ist $B = A^{-1}$.

Beispiel

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun B eine beliebige 2×2-Matrix,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Das Ergebnis der Multiplikation kann niemals eine Einheitsmatrix sein, weil im Ergebnis rechts unten eine Null steht. Aus diesem Grund kann A nicht invertierbar sein.

Frage

Was ist die Inverse einer 1×1-Matrix $A = (a)$? Hinweis: Denken Sie daran, dass die 1×1-Matrix $A = (a)$ mit dem Skalar a identifiziert werden kann.

Lösung

Für 1×1-Matrizen ist die Multiplikation sehr einfach: Ist $A = (a)$ und $B = (b)$, so ist $A \cdot B = (a \cdot b)$. Aus diesem Grund gilt $A^{-1} = (a^{-1}) = (\frac{1}{a})$.

Invertierbare Matrizen sind auch im Zusammenhang von linearen Gleichungssystemen wichtig. Es gilt:

Wichtig

Ist die $n \times n$-Matrix A invertierbar, so ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot u = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

7.8 Berechnung der inversen Matrix mit dem Gauß-Algorithmus

Wir wissen bereits, dass nur quadratische Matrizen (also $n \times n$-Matrizen) invertierbar sein können. Für $n = 1$ und $n = 2$ benötigen wir keinen Gauß-Algorithmus, sondern geben einfach eine fertige Formel zur Berechnung der inversen Matrix an.

Für $n = 1$ gilt: $(a)^{-1} = (a^{-1}) = \frac{1}{a}$.

Für $n = 2$ gilt:

Formel

Inverse und Determinante einer 2×2-Matrix

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Der in dieser Formel vorkommende Ausdruck $ad-bc$ wird auch als **Determinante** der Matrix A (geschrieben $\det A$, oft findet man auch das Symbol $|A|$) bezeichnet. Es gilt also

$$\det A = ad - bc\,.$$

Frage

Wie kann man überprüfen, ob die angegebene Inverse korrekt ist?

Lösung

Man prüft, ob $A \cdot A^{-1}$ und $A^{-1} \cdot A$ jeweils die Einheitsmatrix ergeben!

Für $n \geq 3$ gibt es ebenfalls explizite Formeln, die jedoch sehr schnell sehr unhandlich werden. Für das Beispiel $n = 3$ sei auf Wikipedia verwiesen. In diesen Fällen ist es sinnvoller, die Inverse (falls sie existiert!) mithilfe des Gauß-Algorithmus zu berechnen.

Wichtig

Berechnung der Inversen mithilfe des Gauß-Algorithmus

Die Inverse einer quadratischen Matrix A wird wie folgt berechnet:

1. Bilde die erweiterte Matrix $(A\,|\,E)$, das heißt, füge rechts von A eine gleich große Einheitsmatrix hinzu.
2. Wende die Regeln des Gauß-Algorithmus mit Ausnahme der Spaltenvertauschung an mit der selben Strategie wie beim Lösen eines LGS.
3. Fall 1: Links (das heißt: links vom Strich) ist nach n Schritten die Einheitsmatrix hergestellt. Dann kann man rechts die Inverse A^{-1} ablesen.
4. Fall 2: Irgendwann entsteht links eine Nullzeile (rechts kann dies nicht passieren!). In diesem Fall ist die Matrix A nicht invertierbar.

Das folgende Video zeigt, wie's geht!

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Berechnung_der_inversen_Matrix_mit_dem_Gau%C3%9F-Algorithmus

Berechnung der Inversen mithilfe des Gauß-Algorithmus

7.9 Die Determinantenfunktion

Im vorigen Abschnitt wurde die Determinante einer 2×2 -Matrix A als Hilfsgröße zur Berechnung der Inversen von A definiert. Auch für größere Matrizen gibt es Determinanten, jedoch nur für quadratische. Der Berechnungsaufwand steigt jedoch mit der Dimension der Matrix rapide an.
Allgemein ist die Determinante eine Funktion, die einer $n \times n$ -Matrix A eine (reelle) Zahl $\det A$ (oft auch $|A|$ geschrieben) nach einer bestimmten Berechnungsvorschrift zuordnet.

Definition

Die **Determinante** ist eine Funktion

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Statt $\det(A)$ schreiben wir $\det A$.

Dabei fehlt natürlich das Wichtigste: Wie berechne ich die Determinante? Wie das geht, zeigt Ihnen das folgende Video.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Die_Determinantenfunktion

Berechnung der Determinante

Anmerkung

Achtung: In das Video hat sich ein Fehler eingeschlichen. Im zweiten Beispiel ist der Wert der 4x4-Determinante nicht 3, sondern -3. Ich habe die Vorzeichenmarkierung (Schachbrettmuster) nicht beachtet!

Die formale Berechnungsvorschrift ist rekursiv definiert:

Definition

Die Berechnungsvorschrift für die Determinante einer nxn-Matrix A **durch Entwicklung nach der i-ten Zeile** lautet wie folgt:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{(i,j)} & \text{für } n > 1 \end{cases}.$$

Dabei ist $A_{(i,j)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der „i"-ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Der Faktor $(-1)^{i+j}$ sorgt für das «Schachbrettmuster» aus +1 und -1.
Hinweis Die Determinante kann analog **durch Entwicklung nach der j -ten Spalte** berechnet werden. Die Formel lautet:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{(i,j)} & \text{für } n > 1 \end{cases}.$$

Eigenschaften der Determinante

Die Determinante kann unter anderem verwendet werden, um zu prüfen, ob eine Matrix invertierbar ist oder ob ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

Wichtig

Satz

Sei A eine quadratische Matrix.

1.) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist.
2.) Ein lineares Gleichungssystem $A \cdot u = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ ist.

Außerdem gilt:

Wichtig

Satz

1.) $\det E = 1$. Dabei ist E die Einheitsmatrix.
2.) Sind A und B quadratische Matrizen gleicher Dimension, so ist

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

7.10 Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen

Aufgabe

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme.

1.)	$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+z &= 0 \end{aligned}$	2.)	$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x-z &= 0 \end{aligned}$

3.)	$\begin{aligned} 3x+5y-2z &= 4 \\ x+2y-z &= 1 \\ x+z &= 1 \end{aligned}$	4.)	$\begin{aligned} x+w &= 3 \\ x+z+3w &= 3 \\ x+2y+z+w &= 5 \end{aligned}$

5.)	$\begin{aligned} y+3z &= 1 \\ x+2y+4z &= 1 \\ -2x+4z &= 1 \end{aligned}$	6.)	$\begin{aligned} y+3z+4w &= -1 \\ x+2y+5w &= 1 \\ 2w &= 2 \end{aligned}$

Aufgabe

Aufgabe 7.2

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gilt.

Aufgabe

Aufgabe 7.3

Prüfen Sie jeweils, ob die angegebene Menge abgeschlossen unter der jeweiligen Operation ist.

	Menge	**Operation**
1.)	$\mathbb{N}$	Subtraktion
2.)	$\mathbb{Z}$	Subtraktion
3.)	$\mathbb{Z}$	Division
4.)	$\mathbb{Q}$	Division

Aufgabe

Aufgabe 7.4

Gegeben sei die Menge $\mathcal{M}$ aller Matrizen der Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei a eine beliebige ganze Zahl ($a \in \mathbb{Z}$) ist.

Frage: Ist die Menge $\mathcal{M}$ abgeschlossen unter der Matrixmultiplikation?

Aufgabe

Aufgabe 7.5

In dieser Aufgabe sei die Grundmenge $\mathbb{R}^3$.

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: v_i bezeichnet die i-te Komponente des Vektors v.

1.) $M_1 = \{ v \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0 \}$

2.) $M_2 = \{ v \mid v_1 + v_2 + v_3 = 1 \}$

3.) $M_3 = \{ v \mid v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 > 0 \}$

4.) $M_4 = \{ v \mid v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0 \}$

Aufgabe

Aufgabe 7.6

Prüfen Sie jeweils, ob die Inverse der folgenden Matrizen existiert. Falls ja, berechnen Sie sie.

1.)	$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	2.)	$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$	3.)	$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.)	$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	5.)	$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	6.)	$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 7.7

1.) Angenommen, wir wissen, dass die Matrix A invertierber ist und wir kennen die Inverse A^{-1}. Wie können wir dieses Wissen nutzen, um das LGS $A \cdot u = b$ ohne Gauß-Algorithmus zu lösen?
2.) Wenden Sie diese Methode an, um das folgende LGS zu lösen:

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 2 \\ -2x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Anmerkung: Falls Sie diese Aufgabe korrekt gelöst haben, so haben Sie damit einen Beweis für den Satz gefunden, dass ein LGS mit einer invertierbaren Koeffizientenmatrix stets eine eindeutige Lösung hat.

Aufgabe

Aufgabe 7.8

Berechnen Sie

1.)	$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	2.)	$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 7.9

Finden Sie vier verschiedene Beispiele für eine $(2 \times 2) -$ Matrix A mit der Eigenschaft $A = A^{-1}$

Hinweis Das erste Beispiel ist ganz einfach, aber bei den drei anderen müssen Sie entweder ein bisschen rumprobieren oder einen systematischen Ansatz wählen. Wie, das erfahren Sie

Hier

Verwenden Sie die Formel für die Berechnung der Inversen einer $(2 \times 2) -$ Matrix (siehe Abschnitt 7.8).

Aufgabe

Aufgabe 7.10

Beweisen Sie folgenden Satz: Sind A und B quadratische Matrizen gleicher Dimension, so ist $A \cdot B$ genau dann invertierbar, wenn sowohl A als auch B invertierbar sind.

Lösungstipp

Sie brauchen nur zwei Sätze über invertierbare Matrizen und Determinanten miteinander zu kombinieren...

Aufgabe

Aufgabe 7.11

Beweisen Sie folgenden Satz: Ist A eine quadratische Matrix mit $\det A \neq 0$ so gilt:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

Lösungstipp

Wenden Sie den Satz $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ an!

8 Fehlerkorrigierende Codes

Gliederung

Bei der Übertragung von Daten kann es passieren, dass durch menschliche Irrtümer oder technische oder physikalische Umstände Daten zerstört oder verfälscht werden. Denken Sie etwa an falsch eingetippte IBAN's auf Banküberweisungen, an Störungen in Funkleitungen oder Kratzer auf CD's. In vielen Fällen möchte man eine bestimmte Sicherheit haben, dass die empfangenen Daten fehlerfrei sind. So ist etwa die IBAN mit zwei Prüfziffern ausgestattet, die es in gewissem Rahmen gestatten, Tippfehler bei der Eingabe zu erkennen. Noch besser ist es, wenn man Fehler nicht nur erkennen, sondern auch noch korrigieren kann. Dann ist z. B. der Kratzer auf der Musik-CD nicht mehr zu hören.

In diesem Kapitel werden Sie sehen, wie man die Begriffe und Methoden der Linearen Algebra nutzen kann, um fehlererkennende und fehlerkorrigierende Codes zu konstruieren und mit ihnen zu arbeiten. Sie lernen, wie man mithilfe von Generatormatrizen aus einem Standardcode einen fehlererkennenden Code erzeugen kann und wie man mithilfe von Prüfmatrizen empfangene Nachrichten auf Korrektheit prüfen kann.

Des Weiteren lernen Sie einige wichtige Begriffe der Linearen Algebra kennen: Den Begriff der linearen Unabhängigkeit und den der Basis und der Dimension eines Vektoraums.

...und, last not least, lernen Sie einige Mathematikerwitze kennen!

Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel durchgearbeitet haben, können Sie ...

- anhand einer Generatormatrix oder einer Prüfmatrix den dazugehörigen Code bestimmen,
- Generator- und Prüfmatrix eines gegebenen linearen Codes konstruieren,
- erkennen, ob ein gegebener Code linear ist,
- eine Basis eines linearen Codes bestimmen.

8.1 Codes: Grundlegende Begriffe

Sollen Daten gespeichert oder übertragen werden, müssen sie zunächst auf irgendeine Weise «codiert» werden. Diese Codierung muss an das jeweilige Speicherungs- oder Übertragungsmedium angepasst sein. Das folgende Video gibt Ihnen eine kleine Einführung in die Welt der Codes.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Codes:_Grundlegende_Begriffe

Codes

Einer der einfachsten fehlererkennenden Codes ist die so genannte Prüfsumme. Die Zeichen werden zunächst in binärer Form (das heißt, als Folge von Nullen und Einsen), etwa mithilfe des ASCII-Codes, codiert. Anschließend wird an jedes Codewort ein Prüfbit (auch «Paritätsbit» genannt) angehängt, und zwar so, dass die Gesamtzahl der Einsen gerade ist.

Beispiel

Der Buchstabe «E» wird im ASCII-Code durch das Binärwort 01000101 codiert. Dieses Wort hat 3 Einsen. Das Prüfbit muss daher 1 sein, damit die Gesamtzahl der Einsen gerade ist. Damit lautet das prüfsummencodierte Wort: 01000101**1** (Das Prüfbit ist fett gedruckt). Wird nun das Wort bei der Übertragung in einem Bit gestört («gestört» bedeutet: Aus 0 wird 1 oder umgekehrt), etwa 010001**0**11 → 010001**1**11, so hat das Wort anschließend eine ungerade Anzahl von Einsen, sodass der Empfänger erkennen kann, dass ein Fehler passiert ist.

Im Folgenden interessieren wir uns weniger für die *Codierung*, also die Vorschrift, nach der den Originalzeichen die Codewörter zugeordnet werden, als für den Code selbst, das heißt die Menge aller Codewörter. Im obigen Beispiel ist der Code die Menge aller 9-Bit-Binärwörter mit einer geraden Anzahl von Einsen. Ein solcher Code, dessen Codewörter alle eine gerade Anzahl von Einsen haben, nennt man auch einen «Paritätscode».

Definition

Binärer Blockcode

Ein **binärer Blockcode** C (im Folgenden kurz Code genannt) der Länge n ist eine Menge von Binärwörtern, also Wörtern über dem Alphabet $\{0, 1\}$, die alle die selbe Länge n haben. Die Elemente von C heißen **Codewörter**.

Das Wort «Block» bedeutet, dass alle Codewörter die selbe Länge haben. Der oben erwähnte Code für ASCII-Zeichen mit Prüfbit ist also ein Blockcode der Länge $n = 9$. Komprimierende Codes wie der Huffman-Code oder der Morse-Code, haben diese Eigenschaft nicht.

Wir werden in diesem ganzen Kapitel den Buchstaben C ausschließlich für Codes und n ausschließlich für deren Länge verwenden.

Frage

Geben Sie den Paritätscode der Länge 4 an.

Lösung

Der Paritätscode der Länge 4 besteht aus allen 4-Bit-Wörtern mit einer geraden Anzahl von Einsen. Also:

$$C = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}$$

Beispiel

Angenommen, die vier Zeichen ↑, ↓, → und ← sollen binär codiert werden. Die folgende Tabelle zeigt drei verschiedene Codes.

Klartext	**Quellcode C_1**	**fehlererk. Code C_2**	**fehlerkorr. Code C_3**
↑	00	000	000000
↓	01	011	010101
→	10	101	101010
←	11	110	111111

Der Code C_1 ist offenbar minimal in dem Sinne, dass es keinen Code kleinerer Länge gibt, mit dem alle vier Zeichen eindeutig codiert werden können. Er ermöglicht jedoch keine Fehlererkennung. Wird ein Codewort in einem Bit gestört (denken Sie daran: gestört heißt: aus 0 wird 1 oder aus 1 wird 0), so entsteht offenbar ein anderes Codewort. Daher lässt sich der Fehler nicht erkennen. Einen solchen minimalen Code nennt man «Quellcode». Der ASCII-Code ist ebenfalls ein Quellcode.

Beim Code C_2 handelt es sich offenbar um den Paritätscode der Länge 3. Er ermöglicht es, einen Bitfehler zu erkennen. Werden dagegen zwei Bits gestört, so kann der Fehler nicht erkannt werden.

Der Code C_3 ist wie folgt konstruiert: Das quellencodierte Wort wird insgesamt dreimal wiederholt. Damit lässt sich ein einzelner Bitfehler nicht nur erkennen, sondern sogar auch korrigieren, denn bei einem Bitfehler sind immer noch zwei Kopien des Quellworts intakt. Ein Code dieser Art heißt «dreimaliger Wiederholungscode».

Weiter oben habe ich dem Sinn nach geschrieben: «Wir interessieren uns weniger für die *Codierung*, als für den Code selbst». Stellen Sie sich vor, Sie sind auf der Suche nach einem fehlererkennenden oder einem fehlerkorrigierenden Code. Sie haben bereits einige Angebote gefunden. Welche Fragen stellen Sie an die Angebote - abgesehen von der Frage nach dem Preis? Nun, vielleicht wollen Sie wissen, wie «gut» der Code ist. Was bedeutet das? Das könnte beispielsweise heißen, wie viele Bitfehler der Code erkennen bzw. korrigieren kann. So kann etwa der Paritätscode (Beispiel C_2) einen Bitfehler erkennen und 0 Bitfehler korrigieren.

Frage

- Wie viele Bitfehler kann der 3-fache Wiederholungscode erkennen?
- Wie viele Bitfehler kann er korrigieren?

Lösung

- Er kann 2 Bitfehler unanhängig von der Art der Fehler erkennen. In speziellen Fällen kann er sogar bis zu 5 Bitfehler erkennen (z. B. Störung der ersten 5 Bit). Werden jedoch Bit Nr. 1, 3 und 5 gestört, so kann der Fehler nicht bemerkt werden. In diesem Sinne ist die Anzahl der Bitfehler, die korrigiert werden können, quasi eine «worst-case-Betrachtung».
- Er kann (im «worst case») einen Bitfehler korrigieren.

Definition

Sei C ein Code der Länge n und $k \in [1:n]$. Wir sagen, der Code C kann k Bitfehler erkennen, wenn folgendes gilt:

- Wenn in einem beliebigen Codewort k beliebige Bit gestört werden, so ist das entstehende Wort kein Codewort und kann dadurch als fehlerhaft erkannt werden.

Beim Paritätscode (Beispiel C_1) wird an das Quellcodewort ein Bit (das Paritätsbit) angehängt. Genauso könnte man das Paritätsbit aber auch dem Quellcodewort voranstellen. Die Codierung der Originalwörter wäre eine andere, der Code selbst (als Menge von Binärwörtern) wäre jedoch der selbe.
Was hat das Ganze nun mit Vektoren und Matrizen zu tun? Das werden wir im folgenden Abschnitt sehen...

8.2 Die Systeme Z2 und Z2-hoch-n

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, wie man (a) die Generierung von Codewörtern (z.B. das Anhängen des Prüfbits) und (b) die Prüfung eines eingehenden Wortes auf Korrektheit mithilfe von Matrizen sehr effizient durchführen kann. Zu diesem Zweck identifizieren wir ein Binärwort, etwa w = 1011, mit dem Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir werden im Folgenden bevorzugt die kompakte Schreibweise als Binärwort verwenden, manchmal jedoch auch (aus «didaktischen Gründen») die Vektorschreibweise. Um mit Vektoren und Matrizen rechnen zu können, müssen wir Addition und Multiplikation auf der Menge {0, 1} definieren.

Definition

Das Zahlensystem Z2

Auf der Menge {0, 1} sind die Addition und die Multiplikation wie folgt definiert:

	0+0 = 0	0·0 = 0
	0+1 = 1	0·1 = 0
	1+0 = 1	1·0 = 0
	1+1 = 0	1·1 = 1

Die Menge {0, 1} zusammen mit den beiden oben definierten Operationen, nennen wir $\mathbb{Z}_2$.

Das einzige Überraschende an den Rechenoperationen ist die Gleichung 1+1 = 0. Das hat zur Folge, dass im System $\mathbb{Z}_2$ die Zahlen -1 und 1 identisch sind.

Wieso?

Wenn wir in der Gleichung 1+1 = 0 auf beiden Seiten -1 addieren, erhalten wir 1+1+(-1) = 0+(-1), also 1+0 = -1, woraus folgt 1 = -1.

Außer wenn es ausdrücklich anders angegeben ist, rechnen wir in diesem gesamten Kapitel im System $\mathbb{Z}_2$.

Frage

Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_2$: a) 1+1+1+1

b) 1+1+1+1+1+1+1

Lösung

a) 0

b) 1

Offenbar ist jede geradzahlige Summe von Einsen gleich 0, jede ungeradzahlige gleich 1.

Ein Binärwort der Länge n ist nach unserer Vereinbarung dasselbe wie ein Vektor mit Komponenten aus $\mathbb{Z}_2$, also ein Element aus $(\mathbb{Z}_2)^n$ (kurz $\mathbb{Z}_2^n$). Somit können wir unsere Definition von oben wie folgt umformulieren:

Definition

Ein **binärer Blockcode** C ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}_2^n$. Die Elemente von C heißen **Codewörter**.

Frage

Wie viele Elemente hat die Menge $\mathbb{Z}_2^n$?

Antwort

Die Menge $\mathbb{Z}_2^n$ hat 2^n Elemente.

Frage

Sei $w = 0110$ und $v = 1100$.

a) Was ist $w + v$? Hinweis: w und v sind Vektoren mit Komponenten in $\mathbb{Z}_2$.

b) Was ist $w \cdot v$? (Das Skalarprodukt von w und v)

Lösung

a) $w + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+1 \\ 1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1010$

b) $w \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$

8.3 Generatormatrix und Prüfmatrix

Das folgende Video zeigt das Schema der Nachrichtenübertragung mit einem fehlererkennenden und einem fehlerkorrigierenden Code anhand des Beispiels aus dem vorletzten Abschnitt.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Generatormatrix_und_Pr%C3%BCfmatrix

Schema der Nachrichtenübertragung mit einem fehlererkennenden und einem fehlerkorrigierenden Code

Die Generatormatrix

Die Generatormatrix ist für die Codierung des bereits quellcodierten Worts zuständig. Im Fall des Paritätscodes heißt das, die Generatormatrix muss an das Quellcodewort ein Prüfbit anhängen. Für die folgenden Ausführungen schreiben wir die Binärwörter als Vektoren. Die Generatormatrix, nennen wir sie G, muss also folgende Eigenschaft haben:

$$G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

? Frage

Welche Dimension muss die Matrix G haben?

Lösung

Die Matrix G ist eine 3×2-Matrix.

Die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

leistet genau dies, wie man leicht nachprüfen kann (Denken Sie an das Rechnen in $\mathbb{Z}_2$!). Die obere 2×2-Teilmatrix von G ist eine Einheitsmatrix, das heißt, die reproduziert einfach nur den Eingabevektor. Die dritte Zeile sorgt für das Anhängen des Prüfbits.

Wieso???

Die dritte Zeile bewirkt, dass alle Bit des Eingabevektors aufaddiert werden. Hat dieser eine gerade Anzahl von Einsen, so ergibt sich durch Addition der Wert 0, also Prüfbit 0. Hat der Eingabevektor eine ungerade Anzahl von Einsen, so entsteht das Prüfbit 1.

		v1	v2	v3	v4
		0	0	1	1
		0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
		Gv1	Gv2	Gv3	Gv4

Die nebenstehende Rechnung zeigt (unter Verwendung des Falk'schen Schemas), dass G tatsächlich jedes Wort des Quellcodes in das entsprechende Wort des Paritätscodes umwandelt. Nun machen wir dasselbe für den 3-fachen Wiederholungscode. Die Generatormatrix G muss beispielsweise folgende Gleichungen erfüllen:

$$G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

Frage

Welche Dimension muss die Matrix G haben?

Lösung

Die Matrix G ist eine 6×2 -Matrix.

Frage

Versuchen Sie, die Matrix G zu konstruieren!

Lösung

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Generatormatrix besteht aus 3 aufeinander aufgetürmten Einheitsmatrizen, von denen jeweils eine eine Kopie des Eingabewortes erzeugt.

Frage

a) Konstruieren Sie die Generatormatrix für einen Paritätscode der Länge $n = 4$ (d.h., der Quellcode hat Länge 3, der Paritätscode hat Länge 4)

Lösung

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Konstruieren Sie die Generatormatrix für einen 3-fachen Wiederholungscode der Länge $n = 9$ (d.h., der Quellcode hat Länge 3, der 3-fache Wiederholungscode hat Länge 9)

Lösung

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Prüfmatrix

Die Prüfmatrix ist für die Prüfung eines eingegangenen Worts auf Korrektheit zuständig. Ist das Wort korrekt, gibt sie den Nullvektor (bzw. den Skalar 0) zurück, ist das Eingabewort fehlerhaft, so gibt sie einen vom Nullvektor verschiedenen Wert zurück. Im Fall des Paritätscodes ist dies ganz einfach: Die Prüfmatrix (wir verwenden stets den Buchstaben H), sieht folgendermaßen aus:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie bewirkt, dass alle Bit des Eingabevektors aufaddiert werden. Hat dieser eine gerade Anzahl von Einsen, so ergibt sich durch Addition der Wert 0, also Eingabewort korrekt. Hat der Eingabevektor eine ungerade Anzahl von Einsen, so entsteht der Wert 1, d.h. das Wort ist fehlerhaft.

Im Falle des 3-fachen Wiederholungscodes ist die Prüfmatrix H komplizierter:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile von H prüft durch Addition, ob die Bits Nr. 1 und 3 identisch sind. Falls ja, gibt sie 0 zurück, andernfalls 1. Die zweite Zeile prüft Bit Nr. 2 und Nr. 4, die dritte prüft Bit Nr. 3 und Nr. 5, die vierte prüft Bit Nr. 4 und 6.

? Frage

a) Konstruieren Sie die Prüfmatrix für einen Paritätscode der Länge $n = 4$ (d.h., der Quellcode hat Länge 3, der Paritätscode hat Länge 4)

Lösung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Konstruieren Sie die Prüfmatrix für einen 3-fachen Wiederholungscode der Länge $n = 9$ (d.h., der Quellcode hat Länge 3, der 3-fache Wiederholungscode hat Länge 9)

Lösung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir die Begriffe «Generatormatrix» und «Prüfmatrix» formal definieren.

Definition

Generatormatrix und Prüfmatrix

Sei C ein Code der Länge n.

a) Eine $n \times k$-Matrix G heißt **Generatormatrix** für C, falls

$$C = \{G \cdot w \,|\, w \in \mathbb{Z}_2^k\}$$

b) Eine $m \times n$-Matrix H heißt **Prüfmatrix** für C, falls

$$C = \{w \in \mathbb{Z}_2^n \,|\, H \cdot w = \mathbf{0}\}$$

Teil a) dieser Definition bedeutet: Wenn w alle Wörter des Quellcodes $\mathbb{Z}_2^n$ durchläuft, so durchläuft $G \cdot w$ alle Wörter des Codes C. Dies lässt auch sehr gut an der obigen Tabelle erkennen.

Teil b) bedeutet: Der Code C besteht genau aus den Binärwörtern w, für die $H \cdot w$ der Nullvektor ist. Das heißt, C ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $H \cdot w = \mathbf{0}$.

8.4 Lineare Codes

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass Generatormatrizen und Prüfmatrizen nützliche Werkzeuge zum Umgang mit Codes sind. Nicht alle Codes jedoch besitzen Generator- und Prüfmatrizen. Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir: Ist die Matrix H eine Prüfmatrix für den Code C, so ist C die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $H \cdot w = \mathbf{0}$. Da ein homogenes System stets den Nullvektor als Lösung hat, muss C den Nullvektor (d.h. das Nullwort) enthalten.

Ist G eine Generatormatrix für C, so wissen wir: Durchläuft v alle Wörter aus $\mathbb{Z}_2^k$, so durchläuft $G \cdot w$ alle Wörter aus C. Da $\mathbb{Z}_2^k$ natürlich den Nullvektor enthält, muss C den Vektor $G \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ enthalten.

Beispiel

Gegeben sei folgender Code

$$C = \{100, 010, 001, 111\}.$$

Dieser Code enthält nicht das Nullwort, kann also weder Prüfmatrix noch Generatormatrix besitzen.

Wir wollen im Folgenden präzisieren, welche Codes Generator- und Prüfmatrizen besitzen.

Definition

Linearer Code

Ein Code C der Länge n heißt **linear**, wenn er ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ ist, das heißt, wenn er abgeschlossen unter der Addition und der skalaren Multiplikation ist.

Ist ein Code C abgeschlossen unter der Addition, so ist die Summe zweier Codewörter stets wieder ein Codewort. Ist ein Code C abgeschlossen unter der skalaren Multiplikation, so sind alle skalaren Vielfachen eines Codewortes wieder Codewörter. In unserem Fall gibt es jedoch nur zwei Skalare: 0 und 1. Das heißt: Ist w ein Codewort, so müssen $0 \cdot w = \mathbf{0}$ und $1 \cdot w = w$ ebenfalls Codewörter sein. Die erste Bedingung besagt, dass das Nullwort ein Codewort sein muss, die zweite ist trivialerweise immer erfüllt. Zusammenfassend können wir die obige Definition wie folgt umformulieren:

Definition

Linearer Code (2. Version)

Ein Code C ist genau dann linear, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- C enthält das Nullwort.
- C ist abgeschlossen unter Addition, d.h. die Summe zweier Codewörter ist stets wieder ein Codewort.

Diese Definition eines linearen Codes ist praktisch etwas leichter zu überprüfen als die erste Version. Beispielsweise ist sofort klar, dass der Code aus dem obigen Beispiel nicht linear sein kann, weil er das Nullwort nicht enthält.

Frage

Ist der Code

$$C = \{000, 100, 010, 001, 111\}.$$

linear?

Lösung

Der Code C enthält zwar das Nullwort, ist aber dennoch nicht linear, denn er ist nicht abgeschlossen unter der Addition. Beispielsweise sind 100 und 010 beides Codewörter, jedoch ist 100 + 010 = 110 kein Codewort.

Es gilt:

Wichtig

Satz: Eigenschaften linearer Codes

- Ein Code C ist genau dann linear, wenn er eine Generatormatrix besitzt.
- Ein Code C ist genau dann linear, wenn er eine Prüfmatrix besitzt.

Anders gesagt, ein linearer Code besitzt stets eine Generator- und eine Prüfmatrix, ein nicht linearer Code besitzt weder das eine noch das andere.
Im Abschnitt Vektorräume haben wir festgestellt, dass sich Vektorräume stets in der Form $\langle w_1, w_2, \cdots, w_n \rangle$, das heißt, als lineare Hülle einer endlichen Menge von Vektoren, darstellen lassen. Dasselbe gilt dann auch für lineare Codes.

Wichtig

Satz

Ein Code C ist genau dann linear, wenn er sich in der Form $C = \langle w_1, w_2, \cdots, w_n \rangle$, das heißt, als lineare Hülle einer endlichen Menge von Wörtern, darstellen lässt.

Ist $C = \langle w_1, w_2, \cdots, w_n \rangle$, so heißt die Menge $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ auch ein Erzeugendensystem von C.

Beispiel

Sei C der Paritätscode der Länge n = 4, also

$$C = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}$$

Die Wörter $u = 1001, v = 0101, w = 0011$ bilden ein Erzeugendensystem von C, das heißt, jedes Codewort lässt sich als Linearkombination $\lambda u + \mu v + \delta w$ dieser drei Wörter darstellen. Da die Skalare λ, μ und δ nur jeweils die Werte 0 und 1 annehmen können, lässt sich die Menge der Linearkombinationen problemlos aufzählen.

λ	μ	δ	$\lambda u + \mu v + \delta w$
0	0	0	0000
0	0	1	0011
0	1	0	0101
0	1	1	0110
1	0	0	1001
1	0	1	1010
1	1	0	1100
1	1	1	1111

Es gilt:

Wichtig

Satz: Zusammenhang zwischen Generatormatrix und Erzeugendensystem

Sei C ein linearer Code.

1.) Ist G eine Generatormatrix von C, so bilden die Spaltenvektoren von G ein Erzeugendensystem von C.
2.) Ist die Menge $\{w_1, ..., w_m\}$ ein Erzeugendensystem von C, so so ist die Matrix, deren Spalten die Vektoren $w_1, ..., w_m$ sind, eine Generatormatrix von C.

8.5 Lineare Unabhängigkeit und Basis

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich ein linearer Code sowohl durch eine Generatormatrix als auch durch ein Erzeugendensystem darstellen lässt, wobei jede Generatormatrix in ein Erzeugendensystem umgewandelt werden kann und umgekehrt. Dieses Prinzip der Darstellung einer großen oder sogar unendlichen Menge kennen wir auch schon von den Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, die ebenfalls durch ein Erzeugendensystem dargestellt werden können.
Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel

Welcher Code wird durch die Wörter $u = 1010, v = 1111, w = 0101$ erzeugt? Wie im vorigen Abschnitt erstellen wir eine Tabelle, in der sämtliche Linearkombinationen der Vektoren u, v und w erzeugt werden. Jede Zeile entspricht einer Linearkombination:

λ	μ	δ	$\lambda u + \mu v + \delta w$
0	0	0	0000
0	0	1	0101
0	1	0	1111
0	1	1	1010
1	0	0	1010
1	0	1	1111
1	1	0	0101
1	1	1	0000

Es ist also $C = \{0000, 0101, 1111, 1010\}$. In der rechten Spalte der Tabelle kommt jedes Codewort doppelt vor. Wenn Sie einen scharfen Blick auf die Tabelle werfen, werden Sie sehen, dass man den Vektor u aus dem Erzeugendensystem löschen könnte, denn der Code C wird auch schon von v und w erzeugt. Das Wort u ist im Erzeugendensystem überflüssig, und Überflüssiges sollte man streichen. Genausogut könnte man jedoch auch v oder w streichen, in jedem Fall reichen die beiden übriggebliebenen Wörter aus, um den Code C zu erzeugen.

Frage

Schauen Sie sich die Wörter u, v und w genau an! Fällt Ihnen etwas auf, was dafür verantwortlich sein könnte, dass nur zwei der drei Wörter für ein Erzeugendensystem benötigt werden?

Lösung

Jedes der drei Wörter lässt sich als Summe aus den beiden anderen darstellen:

$$u = v + w$$
$$v = w + u$$
$$w = u + v$$

Frage

Die Vektoren $u = 0000, v = 1100, w = 0011$ bilden ein Erzeugendensystem des Codes $C = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$. Welches der drei Worte lässt sich aus dem Erzeugendensystem löschen, sodass die restlichen Wörter immer noch den Code C erzeugen?

Lösung

Das Nullwort lässt sich offenbar immer in einem Erzeugendensystem löschen. Die Wörter v und w können jedoch nicht gelöscht werden.

Das Beispiel zeigt, dass ein Erzeugendensystem überflüssige Elemente enthalten kann, die gelöscht werden können. Wir nennen ein Element v einer Menge M überflüssig, wenn es aus M gelöscht werden kann, ohne die lineare Hülle von M zu ändern.

Definition

Sei M eine Menge von Vektoren. Ein Vektor $v \in M$ heißt **überflüssig in** M, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\langle M - \{v\} \rangle = \langle M \rangle$$

Denken Sie daran: Ein Vektor an sich kann nicht überflüssig sein. Der Begriff überflüssig macht nur Sinn, wenn die Menge angegeben wir, inder er überflüssig ist. Beispielsweise ist $w = 1100$ überflüssig in der Menge $M = \{0011, 1100, 1111\}$, aber nicht überflüssig in der Menge $M = \{0011, 1100\}$.

Dies führt uns einigen zentralen Begriffen der linearen Algebra, nämlich den Begriffen *Basis*, *Dimension* und *lineare Unabhängigkeit*. Diese Begriffe werden zwar hier aus didaktischen Gründen im Kontext linearer Codes, also für Vektorräume über dem System $\mathbb{Z}_2$ eingeführt, sie gelten jedoch genauso für Vektorräume über den reellen Zahlen.

Definition

Basis eines Vektorraums

Eine **Basis** B eines Vektorraums V ist ein minimales Erzeugendensystem, das heißt:

1.) B erzeugt V;
2.) Keine echte Teilmenge von B erzeugt V.

Anders ausgedrückt: B ist ein Erzeugendensystem von V und B enthält keine überflüssigen Elemente.
Sei nun V ein beliebiger Vektorraum. Die Menge V ist ganz sicher ein Erzeugendensystem von V, denn als Vektorraum ist V abgeschlossen unter den Grundoperationen und somit gilt $\langle V\rangle = V$. Nun löschen wir solange überflüssige Vektoren aus V, bis es keine solchen mehr gibt. Auf diese Weise finden wir ein minimales Erzeugendensystem von V, sprich, eine Basis von V. Dies zeigt:

Wichtig

Satz: Existenz einer Basis

Jeder Vektorraum hat (mindestens) eine Basis.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ hat eine besonders einfache Basis. Sie besteht aus den in Abschnitt 6.5 eingeführten Vektoren $e_1, e_2, ..., e_n$. Beispielsweise hat $\mathbb{R}^3$ die Basis $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dasselbe gilt übrigens auch für den Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$.

Nun stellen Sie sich vor, Sie haben ein Erzeugendensystem für einen linearen Code C gefunden und wollen prüfen, ob es minimal ist. Sie müssten dazu versuchsweise nacheinander alle Elemente löschen und prüfen, ob das so entstehende System immer noch C erzeugt. Das klingt recht aufwendig. Es gibt glücklicherweise ein einfacheres Verfahren, dass auf dem Konzept der überflüssigen Elemente beruht.

Definition

linear unabhängige Menge

Eine Menge, die keine überflüssigen Vektoren enthält, heißt **linear unabhängig**, andernfalls heißt sie linear abhängig.

Der Begriff der Basis ist einer der wichtigsten in der linearen Algebra. Der folgende Satz zeigt weitere Eigenschaften einer Basis.

Wichtig

Satz: Eigenschaften einer Basis

Sei B eine Menge und V ein Vektorraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.) B ist eine Basis von V, d.h. ein minimales Erzeugendensystem von V, d.h. löscht man einen Vektor aus B, so ist die so entstandene Menge kein Erzeugendendsystem von V mehr.
2.) B ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.
3.) B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. fügt man einen Vektor aus V zu B hinzu, so ist die so entstandene Menge nicht mehr linear unabhängig.
4.) Jeder Vektor aus V lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus B darstellen, d.h., in der rechten Spalte der $\lambda, \mu, \ldots$-Tabelle kommt jeder Vektor aus V genau einmal vor.

Für einen Vektorraum gibt es im Allgemeinen mehrere Basen. Im allerersten Beispiel dieses Abschnitts ist jede der drei Mengen $1010, 1111, 1010, 0101$ und $1111, 0101$ eine Basis. Eine jedoch haben alle Basen eines Vektorraums gemeinsam: Sie haben alle gleich viele Elemente.

Wichtig

Satz und Definition: Dimension

Sind B_1 und B_2 beide Basen eines Vektorraums V, so gilt $|B_1| = |B_2|$, d.h. alle Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente. Diese gemeinsame Anzahl heißt **Dimension** des Vektorraums V.

Es gilt:

Wichtig

Satz

Die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Z}_2^n$ haben jeweils die Dimension n.

Betrachten wir ein weiteres Mal die obige Tabelle (siehe erstes Beispiel in diesem Abschnitt), in der sämtliche Linearkobinationen der Vektoren u, v und w erzeugt werden. Jede Zeile entspricht einer Kombination der drei Skalare λ, μ und δ.

Frage

a) Wie viele Zeilen hat die Tabelle, wenn es sich um vier Vektoren u, v, w und x handelt (und dementsprechend um 4 Skalare)?

Lösung

In diesem Fall hat die Tabelle 16 Zeilen, da es 16 Kombinationen der 4 Skalare gibt.

b) Wie viele Zeilen hat die Tabelle, wenn es sich um k verschiedene Vektoren und k Skalare handelt?

Lösung

In diesem Fall hat die Tabelle 2^k Zeilen, da es 2^k Kombinationen der k Skalare gibt.

Bilden nun die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine Basis des Codes C, so sind die Elemente in der rechten Spalte der Tabelle alle verschieden. Die Tabelle hat Zeilen, das heißt, C hat genau 2^k Elemente. Gleichzeitig ist k die Dimension von C, denn $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ist eine Basis von C. Dies führt zu folgendem Satz:

Wichtig

Ein linearer Code der Dimension k hat 2^k Codewörter.

Das heißt, die Anzahl der Wörter eines linearen Codes ist stets eine Zweierpotenz und der Exponent gibt die Dimension des Codes an.

Frage

Der Code

$$C = \{0000, 1010, 1100, 1111, 0101, 0011, 0110, 1001\}$$

ist linear. Welche Dimension hat C?

Lösung

Es gilt $|C| = 8 = 2^3$. Also ist $\dim C = 3$.

8.6 Der Rang einer Matrix

Definition

Der **Zeilenraum** einer Matrix A ist definiert als die lineare Hülle ihrer Zeilenvektoren. Der **Zeilenrang** von A ist definiert als die Dimension ihres Zeilenraums.

Entsprechend ist der **Spaltenraum** von A definiert als die lineare Hülle ihrer Spaltenvektoren und der Spaltenrang von A als die Dimension ihres Spaltenraums.

Um den Zeilenrang einer Matrix A zu bestimmen, formt man die Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus in die Gauß-Jordan-Form um. Der Zeilenrang von A ist dann die Anzahl der Zeilen, die zum Schluss (nach Streichung von Nullzeilen) übrig geblieben sind.

Beispiel

Wir berechnen den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Umformung in Gauß-Jordan-Form ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat zwei Zeilen, daher hat die Matrix A den Zeilenrang 2.

Es gilt nun folgender Satz:

Wichtig

Der Zeilenrang einer Matrix A ist gleich ihrem Spaltenrang. Man spricht daher allgemein vom **Rang** der Matrix, geschrieben $\operatorname{rang}(A)$.

Weiterhin gilt:

Wichtig

Eine quadratische Matrix A der Dimension $n \times n$ ist gemau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ ist, das heißt, wenn bei der Transformation in die Gauß-Jordan-Form keine Zeilen gestrichen wurden.

8.7 Auf der Suche nach einer Basis

Gegeben ist der Code

$$C = \{0000, 0001, 0010, 0011, 1111, 1110, 1101, 1100\}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass der Code C linear ist, das heißt:

- er enthält das Nullwort und
- die Summe zweier Codewörter ist wieder ein Codewort.

Um die zweite Eigenschaft zu prüfen, nummerieren wir die Codewörter von w_0 bis w_7 durch und prüfen dann systematisch alle Summen. So ist etwa $w_2 + w_3 = w_1$ oder $w_3 + w_5 = w_6$ usw.

Frage

Wenn man auf diese Weise alle Paare (w_i, w_j) prüfen wollte, wie oft müsste man prüfen?

Lösung

Da bekanntlich $w_i + w_0 = w_i$ sowie $w_i + w_i = w_0$ gilt, brauchen wir nur Paare zu prüfen, die nicht das Nullwort w_0 enthalten und die nicht aus zwei gleichen Wörtern bestehen. Davon gibt es $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Stück.

Gesucht ist eine Basis von C. Wir prüfen auf Verdacht folgende Mengen:

$$M_1 = \{0010, 1110\}$$
$$M_2 = \{0001, 0011, 1111\}$$
$$M_3 = \{0000, 0011, 1111\}$$
$$M_4 = \{0001, 0011, 1111, 1101\}$$

? Frage

Welche dieser 4 Mengen können Sie sofort als Basen von C ausschließen?

Lösung

Der lineare Code C hat 8 = 2^3 Elemente. Daraus folgt, dass C die Dimension 3 hat, das heißt, jede Basis von C umfasst 3 Wörter. Aus diesem Grund können wir M_1 und M_4 sofort ausschließen.

Die Menge M_3 enthält das Nullwort 0000. Eine Menge, die das Nullwort enthält, ist linear abhängig. Da eine Basis stets eine linear unabhängige Menge ist, kann auch M_3 ausgeschlossen werden.

Es bleibt die Menge M_2. Sie lässt sich nicht mit derart einfachen Mitteln ausschließen, was jedoch noch nicht automatisch bedeutet, dass sie eine Basis ist. Dies werden wir gleich weiter untersuchen.

Wir wollen nun prüfen, ob die Menge $M_2 = \{0001, 0011, 1111\}$ eine Basis von C sein kann. Der Satz «Eigenschaften einer Basis» aus dem vorigen Abschnitt bietet dazu eine Reihe von alternativen Prüfkriterien an. Insbesondere das folgende Kriterium ist praktisch gut nachprüfbar:

- Die Menge M_2 ist eine Basis von C, wenn sich jeder Vektor aus C eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus M_2 darstellen lässt.

Dazu müssen wir die $\lambda, \mu, \ldots$-Tabelle erstellen und prüfen, ob in der rechten Spalte jedes Element von C genau einmal vorkommt.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 8.1

Erstellen Sie die $\lambda, \mu, \ldots$-Tabelle für die Menge M_2!

Lösung

Sei $u = 0001, v = 0011, w = 1111$.

λ	μ	δ	$\lambda u + \mu v + \delta w$
0	0	0	0000
0	0	1	1111
0	1	0	0011
0	1	1	1100
1	0	0	0001
1	0	1	1110
1	1	0	0010
1	1	1	1101

Jedes Element von C kommt in der rechten Spalte genau einmal vor. Daraus folgt, dass die Menge M_2 tatsächlich eine Basis von C ist.

Dieses Verfahren ist allerdings nur sinnvoll bei linaeren Codes, sprich Vektorräumen über $\mathbb{Z}_2$ und auch dort nur bei kleineren Dimensionen. Schon bei einer Dimension von 5 hat die Tabelle 32 Zeilen!
Etwas einfacher ist die Prüfung auf lineare Unabhängigkeit. Es gilt folgender Satz:

Wichtig

Satz: Prüfung auf lineare Unabhängigkeit

Gegeben sei eine Menge $M = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Wir wollen prüfen, ob M linear unabhängig ist. Wir bilden die Matrix A, deren Spalten die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ sind und lösen anschließend das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A. Genau dann ist M linear unabhängig, wenn für die Lösungsmenge gilt:

$$\mathbb{L}(A, \mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$$

Beispiel

Ist die Menge $M = \{1100, 0111, 1111, 1011\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}_2$? Zur Beantwortung dieser Frage erstellen wir das homogene LGS mit der Matrix, deren Spalten die Vektoren aus M sind und erhalten folgende erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Der Gauß-Algorithmus kommt in 4 Schritten zum Ziel. Beachten Sie das Rechnen in $\mathbb{Z}_2$, das kein Minuszeichen benötigt!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +\mathrm{I}\\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II}\\ +\mathrm{II} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\mathrm{III}\\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{del} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{array}\right)$$

Offensichtlich gibt es mehr Lösungen als nur die Nullösung. Daraus folgt, dass die Menge M linear abhängig ist.

Der folgende Satz kann die Suche nach einer Basis vereinfachen, sofern man die Dimension des Vektorraums schon kennt:

! **Wichtig**

Satz: Lineare Unabhängigkeit und Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension k und sei M eine Teilmenge von V.

- Ist M linear unabhängig, so ist $|M| \leq k$.
- Ist M ein Erzeugendensystem von V, so ist $|M| \geq k$.
- Ist $|M| = k$ und ist M linear unabhängig, so ist M eine Basis von V.
- Ist $|M| = k$ und ist M ein Erzeugendensystem von V, so ist M eine Basis von V.

8.8 Mathematikerwitze

Achtung: Der Inhalt dieses Abschnitts ist nicht klausurrelevant ;-)

Witz

Im dichten Nebel verliert ein Ballonfahrer die Orientierung. Er lässt seinen Ballon langsam ab, bis er am Boden einen Menschen sieht, und ruft herab: «Wo bin ich hier?» Daraufhin grübelt der Passant eine Weile und antwortet: «Im Korb eines Ballons!» Woran erkennt man, dass der Mann ein Mathematiker ist?

- Er überlegt lange.
- Seine Antwort ist wahr.
- Seine Aussage ist zu nichts zu gebrauchen.

Vor einiger Zeit fragte mich während der Vorlesung ein Student:

> Ist die Menge, die nur aus dem Nullvektor besteht, linear abhängig oder linear unabhängig?

Frage: Woran erkennt man, dass der Student ein Mathematiker ist?

- Er stellt Fragen, die keinen Nicht-Mathematiker interessieren würden, weil sie in der Praxis niemals vorkommen.

Frage

Wie würden Sie die Frage des Studenten beantworten? Überlegen Sie nicht, sondern geben Sie eine Antwort «aus dem Bauch heraus».

Ich muss gestehen, ich wusste auf die Schnelle keine Antwort. Einerseits: Jede Menge M, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig, weil man den Nullvektor aus M löschen kann, ohne dass sich die lineare Hülle der Menge M ändert. Andererseits: Wenn ich aus der Menge $\{\mathbf{0}\}$ den Nullvektor lösche, so erhalte ich die leere Menge. Die lineare Hülle der Menge $\{\mathbf{0}\}$ ist die Menge $\{\mathbf{0}\}$ selbst. Und die lineare Hülle der leeren Menge ist offenbar die leere Menge:

1.) $\langle\{\mathbf{0}\}\rangle = \{\mathbf{0}\}$
2.) $\langle\{\}\rangle = \{\}$

Also ist die Menge $\{\mathbf{0}\}$ linear unabhängig. Was ist denn nun richtig?
Im vorigen Abschnitt haben wir gelernt, dass es eine praktische Methode gibt, um eine Menge $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen: Wir lösen das homogene lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = \mathbf{0}$$

Ist die Lösung eindeutig, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, so ist die Menge linear unabhängig.

Aufgabe

Ist die Menge $\{\mathbf{0}\}$ linear unabhängig oder linear abhängig?

Lösung

Das homogene LGS $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ hat unendlich viele Lösungen. Also ist die Menge $\{\mathbf{0}\}$ linear abhängig.

Das heißt: Eine der beiden Aussagen 1.) oder 2.) (siehe oben) ist falsch. Welche?

Antwort

Es kann nur die zweite sein, die falsch ist.

Wenn die lineare Hülle der leeren Menge nicht die leere Menge ist, was ist sie dann?

Nähern wir uns der Angelegenheit von einer zweiten Seite: Wir betrachten den linearen Code $C = \{\mathbf{0}\}$. Welche Dimension hat C? Nun C hat ein Element, wegen $2^0 = 1$ hat C die Dimension 0. Das heißt, jede Basis von C hat null Elemente. Das wiederum heißt, die Basis von C muss die leere Menge sein. Also gilt:

$$\langle\{\}\rangle = \{\mathbf{0}\}$$

Aus der Definition der linearen Hülle ist dies sicherlich nicht zu entnehmen. Wir müssten also die dortige Definiton erweitern, sodass sie auch die lineare Hülle der leeren Menge definiert!

Natürlich: Praktische Relevanz hat dies alles überhaupt nicht! Wer kommt schon auf die Idee, die lineare Hülle der leeren Menge zu bilden?

Witz

Ein Theologe, ein Physiker und ein Mathematiker fahren in einem Zug durch Schottland. Sagt der Theologe: «Da ist ein schwarzes Schaf!» Daraufhin fügt der Physiker hinzu: «Da ist mindestens ein schwarzes Schaf!» Doch auch diese Aussage wird von dem Mathematiker korrigiert: «Da ist mindestens ein schwarzes Schaf, das von mindestens einer Seite schwarz ist!»

Und noch ein allerletzter...

Witz

Ein Mathematiker, ein Physiker und ein Biologe beobachten, dass in einen Bus 10 Leute einsteigen und an der nächsten Haltestelle 11 aussteigen. Ihre Kommentare dazu:

- Der Biologe: «Die müssen sich unterwegs vermehrt haben.»
- Der Physiker: «10% Messtoleranz müssen halt drin sein.»
- Der Mathematiker: «Wenn jetzt wieder einer reingeht, ist der Bus leer.»

8.9 Aufgaben zu fehlerkorrigierenden Codes

Falls nicht explizit anders gesagt, sind in allen Aufgaben die Vektorräume über $\mathbb{Z}_2$ zu verstehen.

Aufgabe

Aufgabe 8.1

Seien

$$C_1 = \{1010, 1111, 0101, 1100\}$$
$$C_2 = \{1010, 1111, 0101, 1101\}$$
$$C_3 = \{111000, 111111, 000111, 000000\}$$

Wie viele Bitfehler können die Codes jeweils erkennen?

Aufgabe

Aufgabe 8.2

Bestimmen Sie $C = \langle 1110, 1100, 1000 \rangle$, indem Sie sämtliche Elemente von C aufzählen.

Aufgabe

Aufgabe 8.3

Gegeben sei folgende Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Code C an, der von G erzeugt wird.

Aufgabe

Aufgabe 8.4

Der Code C sei ein Blockcode der Länge $n = 6$. Davon seien die ersten 3 Bits die Datenbits, die letzten 3 Bits die Prüfbits, und zwar wie folgt:

- Das 4. Bit ist die Summe der ersten beiden Bits
- Das 5. Bit ist die Summe des ersten und dritten Bits
- Das 6. Bit ist die Summe des zweiten und dritten Bits

1.) Geben Sie den Code als Menge von Wörtern an.
2.) Geben Sie eine Generatormatrix dieses Codes an.
3.) Geben Sie eine Prüfmatrix dieses Codes an.

Aufgabe

Aufgabe 8.5

Beweisen Sie, dass die folgenden Codes nicht linear sind.

1.) $C_1 = \{0000, 1100, 1001, 1111, 1110\}$
2.) $C_2 = \{1100, 0011, 1111, 1011\}$
3.) $C_3 = \{0000, 1000, 0100, 0010\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.6

Beweisen Sie, dass die folgenden Codes linear sind.

Lösungstipp

Sie können entweder:

- zeigen, dass alle Summen der Form $w_i + w_j$ wieder in C sind,
- eine Generatormatrix für C finden oder
- eine Prüfmatrix für C finden.

1.) $C_1 = \{00000, 10101, 01010, 11111\}$
2.) $C_2 = \{00000, 00100, 01010, 01110, 10001, 10101, 11011, 11111\}$
3.) $C_3 = \{00000, 00101, 01000, 01101, 10010, 10111, 11010, 11111\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.7

Für diese Aufgabe sei die Grundmenge $\mathbb{Z}_2^5$. Welche der folgenden Codes sind linear? Ist der Code linear, so geben Sie eine Prüfmatrix an. Hinweise:

- $\gamma(w)$ bezeichnet die Anzahl der Einsen im Wort w.
- Ein Palindrom ist ein Wort, das vorwärts wie rückwärts gelesen gleich ist, z.B. «Kajak».

1.) $C_1 = \{w \mid \gamma(w) \text{ ist ungerade}\}$
2.) $C_2 = \{w \mid \gamma(w) \leq 3\}$
3.) $C_3 = \{w \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.8

Gegeben der lineare Code

$$C = \{00000, 00100, 01010, 01110, 10001, 10101, 11011, 11111\}$$

Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von C?

1.) $M_1 = \{00100, 01110\}$
2.) $M_2 = \{00100, 01010, 10001\}$
3.) $M_3 = \{00100, 01110, 10001, 11111\}$
4.) $M_4 = \{00100, 01110, 01010\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.9

In dieser Aufgabe ist $\mathbb{R}$ der Grundkörper. Welche der folgenden Mengen von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Basen von $\mathbb{R}^3$?

a) $M_1 = \{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

b) $M_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

c) $M_3 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.10

Gegeben sei die folgende Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Code C an, für den H eine Prüfmatrix ist.

Lösungstipp

Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix H!

Aufgabe

Aufgabe 8.11

Finden Sie eine Basis für den folgenden linearen Code:

C = {00000, 10000, 11100, 01100, 01110, 11110, 10010, 00010, 00111, 10111, 11011, 01011, 01001, 11001, 10101, 00101}

Lösungstipp

Bauen Sie die Basis von unten auf!

- Klären Sie zuallererst, wieviel Wörter Sie für die Basis benötigen.
- Anschließend beginnen Sie mit einem beliebigen Wort $w \in C$ (außer natürlich dem Nullwort!). Dann nehmen Sie ein zweites, ein drittes,... dazu. Dabei müssen Sie nur darauf achten, dass keine linearen Abhängigkeiten entstehen.

Aufgabe

Aufgabe 8.12

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus den Elementen des Codes C aus Ausgabe 8.11 eine Basis zu wählen?

9 Analytische Geometrie

Gliederung

In diesem Kapitel werden Sie erfahren, wie man die Methoden der Linearen Algebra in der ebenen und räumlichen Geometrie anwenden kann. Ein sehr wichtiges Anwendungsgebiet ist die Computergrafik. Dabei geht es im Wesentlichen darum, ebene oder räumliche Szenen auf dem Monitor oder dem Drucker darzustellen und dem Benutzer Möglichkeiten zur Interaktion zu geben, etwa in einem Zeichensystem wie CorelDraw.
Ich möchte dies mit zwei einfachen Beispielen illustrieren.
Im ersten Beispiel geht es um die ebene Geometrie. Wenn Sie in einem solchen Zeichensystem mit der Maus auf eine Figur klicken, so wird die Figur markiert. Dazu müssen Sie tatsächlich auf die Figur klicken. Klicken Sie nebendran, so passiert gar nichts. Woher weiß denn nun das Programm, ob der Punkt, auf den die Maus geklickt hat, innerhalb oder außerhalb der Figur liegt? Diese Frage lässt sich zumindest für alle Polygone mithilfe von Vektoren und Matrizen sehr einfach beantworten. Wie das funktioniert, werden Sie im Abschnitt Liegt der Punkt im Dreieck? sehen.
Im zweiten Beispiel geht es um die räumliche Geometrie. Ich lege einen Körper, beispielsweise einen großen Würfel mit verschiedenfarbigen Seiten (stellen Sie sich einen Rubik-Cube vor), auf einen Tisch, an dem zwei Personen auf entegengesetzten Seiten sitzen. Dann werden die beiden ganz unterschiedliche Seiten des Würfels sehen. Was die Eine sieht, ist für die Andere verdeckt und umgekehrt. Wie kann ein Programm aus der Kenntnis der Würfelposition und der Position der Betrachter berechnen, wie der Würfel für den jeweiligen Betrachter aussieht? Wie das funktioniert, werden ich Ihnen im Abschnitt über Sichtbarkeitsbestimmung erläutern.

9.1 Analytische Geometrie in der Ebene

Gliederung

Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie ...

- Länge und Steigungswinkel von Vektoren berechnen
- Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen
- Fläche von Dreiecken und allgemein von Polygonen berechnen
- den Abstand eines Punkts von einer Geraden berechnen
- Schnittpunkte von Geraden bestmmen
- Matrizen als geometrische Transformationen auf geometrische Figuren anwenden
- Die Matrix einer gegebenen geometrischen Abbildung bestimmen

9.1.1 Grundlegende Begriffe der analytischen Geometrie

In diesem Abschnitt werden Sie sehen, wie Vektoren und die Grundoperationen im Kontext der ebenen Geometrie interpretiert werden.

Vektoren

Im folgenden Video geht es um Vektoren.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

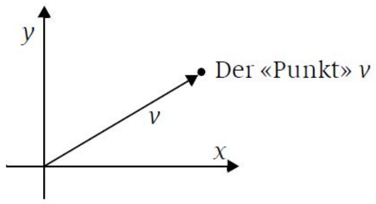
https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Grundlegende_Begriffe_der_analytischen_Geometrie

Geometrische Interpretation von Vektoren

Kurze Zusammenfassung des Videos:

- Ein Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ stellt eine Verschiebung um a in horizontaler und um b in vertikaler Richtung dar.
- Der Vektor vom Punkt $P(a\,|\,b)$ zum Punkt $Q(c\,|\,d)$ ist $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$

In vielen Fällen ist es praktisch, den Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ als Punkt $P(a\,|\,b)$ zu interpretieren. Wir sagen dann «der Punkt v» und meinen damit den Endpunkt des Vektors v, dessen Basis im Ursprung liegt (siehe nebenstehende Abbildung).



Der Ursprung des Koordinatensystems, also der Punkt (0|0), wird im Folgenden mit dem Buchstaben O bezeichnet. Der **Ortsvektor** eines Punktes $P(a|b)$ ist der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Die Grundoperationen

Im folgenden Video wird die geometrische Interpretation der beiden Grundoperationen, der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation, erläutert.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Grundlegende_Begriffe_der_analytischen_Geometrie

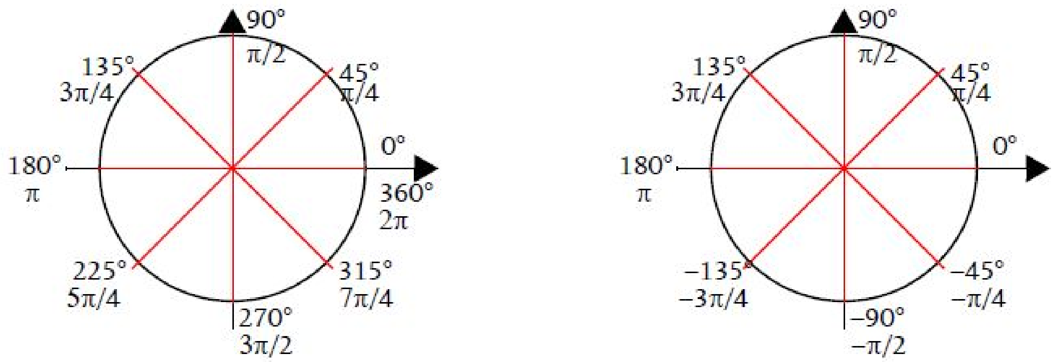
Geometrische Interpretation der Grundoperationen

9.1.2 Winkel, Skalarprodukt und Determinante

In der Physik unterscheidet man zwischen skalaren und vektoriellen Größen. Skalare Größen, wie Masse, Ladung und Temperatur haben nur einen Betrag (z.B. 1 kg). Vektorielle Größen, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Kraft, besitzen außer dem Betrag auch eine Richtung. Die Schwerkraft, die an einem Körper mit der Masse m angreift, hat den Betrag $m \cdot g$, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Sie ist stets vom Körper zum Erdmittelpunkt gerichtet.

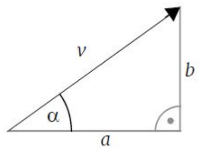
Winkelangaben

Bevor wir Betrag und Richtung eines Vektors allgemein bestimmen, erst noch ein Wort zu den Winkelangaben: Winkel werden üblicherweise entweder in Winkelgrad zwischen 0° und 360° oder im Bogenmaß zwischen 0 und 2π angegeben (siehe folgende Abbildung links).



Im Kontext der analytischen Geometrie wird meist die Darstellung, die Sie in der Abbildung rechts sehen, bevorzugt. Die Winkel der «südlichen Hemisphäre» werden als negative Winkel dargestellt. Damit laufen die Winkelangaben von -180° bis 180° bzw. von $-\pi$ bis π .

Der Betrag eines Vektors



Der Betrag (die Länge) des Vektors $v = (a \quad b)^{\top}$ wird mit $|v|$ bezeichnet. Er ergibt sich durch den Satz des Pythagoras. Im rechtwinkligen Dreieck gilt $|v|^2 = a^2 + b^2$, also

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{v \cdot v}.$$

Ein Vektor v heißt Einheitsvektor oder **normiert**, wenn er eine Länge von 1 hat. Man normiert einen Vektor $v \neq \mathbf{0}$ wie folgt:

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|}.$$

$\hat{v}$ hat dann dieselbe Richtung wie v, aber eine Länge von 1.

Beispiel

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soll normiert werden. Die Länge von v beträgt $|v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Somit ist

$$\hat{v} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung eines Vektors

Die Richtung des Vektors v wird durch den Steigungswinkel α (den Winkel zwischen v und der Horizontalen) dargestellt. Im rechtwinkligen Dreieck gilt $\cos\alpha = \frac{a}{|v|}$. Der Winkel α lässt sich daraus mithilfe der Umkehrfunktion des Cosinus berechnen: $\alpha = \arccos\frac{a}{|v|}$.

Wie bestimme ich den Arcuscosinus?

Im Allgemeinen benötigt man einen Taschenrechner, um Arcuscosinuswerte zu bestimmen. Dort wird die Funktion meistens $\cos^{-1}$ geschrieben. Einige spezielle Werte lassen sich aus der folgenden Tabelle ablesen.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

So ist etwa $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, also 60°.

Der Arcuscosinus gibt jedoch nur einen Winkel im Bereich $[0, \pi]$ zurück, denn es gilt $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$. Mithilfe des Arcuscosinus können wir also nicht erkennen, ob der Steigungswinkel positiv oder negativ ist. Dies lässt sich jedoch an der zweiten Komponente des Vektors v ablesen: Ist b positiv, so ist auch α positiv, ist b negativ, so ist auch α negativ. Anders ausgedrückt: α hat dasselbe Vorzeichen (lat. *signum*) wie b. Dafür schreiben wir: $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn} b$.

Wir fassen zusammen:

Wichtig

Betrag und Steigungswinkel eines Vektors

Sei $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Der Betrag (die Länge) von v ist gegeben durch

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{v \cdot v}.$$

Die Richtung von v ist gegeben durch den Steigungswinkel α. Für diesen gilt

$$\cos\alpha = \frac{a}{|v|} \text{ und } \sin\alpha = \frac{b}{|v|}.$$

Der Winkel α lässt sich bestimmen durch

$$|\alpha| = \arccos\left(\frac{a}{|v|}\right) \text{ und}$$

$$\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn} b.$$

Frage

Schauen Sie sich die beiden Formeln für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ genau an! Welches Problem könnte auftreten? Wie kann es gelöst werden?

Lösung

Der Nenner darf nicht 0 werden! Ist $|v| = 0$, so ist v offenbar der Nullvektor. Dass dieser keinen Steigungswinkel haben kann, ist klar!

Beispiel

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Länge $|v| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und einen Steigungswinkel α mit $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daraus ergibt sich (siehe obige Tabelle) $|\alpha| = \frac{\pi}{4} = 45°$

???

Haben Sie sich gefragt, wo der Wert $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in der Tabelle abgelesen werden kann? Nun, es gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und so kann der Wert in der Tabelle gefunden werden.}$$

und da die zweite Komponente von v positiv ist, ist auch α positiv. Also ist $\alpha = \frac{\pi}{4}$ = 45°.

Beispiel

Der Vektor $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ hat die Länge $|w| = 2$ und einen Steigungswinkel α mit $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Daraus ergibt sich (siehe obige Tabelle) $|\alpha| = \frac{2\pi}{3}$ = 120° und da die zweite Komponente von w negativ ist, ist auch α negativ. Also ist $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ = -120°.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Wichtig

Der Winkel φ zwischen den Vektoren $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

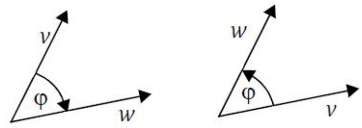
$$\cos\varphi = \frac{v \cdot w}{|v|\,|w|} \text{ und } \sin\varphi = \frac{\det(v,w)}{|v|\,|w|}$$

Für den Winkel φ gilt:

$$|\varphi| = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{|v|\,|w|}\right) \text{ und}$$

$$\operatorname{sgn}\varphi = \operatorname{sgn}(\sin\varphi)) = \operatorname{sgn}(\det(v,w)).$$

Dabei ist $\det(v,w) = ad - bc$ die Determinante der 2×2-Matrix, deren Spalten durch v und w gegeben sind. Die Drehrichtung lässt sich wie folgt bestimmen:

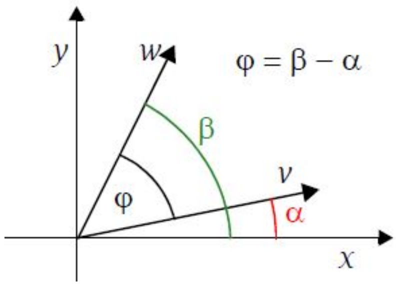


- Ist $\varphi < 0$, so ist die Drehung von v nach w eine Rechtsdrehung, d.h. im Uhrzeigersinn (Abb. links).
- Ist $\varphi > 0$, so ist die Drehung von v nach w eine Linksdrehung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn (Abb. rechts).

Wenn Sie wissen möchten, warum dies so ist, können Sie die Herleitung

hier

Wir führen die Berechnung des Winkels φ zurück auf die Berechnung der Steigungswinkel α von v und β von w (siehe Abb.). Es gilt $\varphi = \beta - \alpha$. Damit ist



$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{a}{|v|}\frac{c}{|w|} + \frac{b}{|v|}\frac{d}{|w|} = \frac{ac+bd}{|v|\,|w|} = \frac{v\cdot w}{|v|\,|w|} \\ \sin\varphi &= \sin(\beta-\alpha) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ &= \frac{a}{|v|}\frac{d}{|w|} - \frac{b}{|v|}\frac{c}{|w|} = \frac{ad-bc}{|v|\,|w|} = \frac{\det(v,w)}{|v|\,|w|}\end{aligned}$$

Die Formeln für $\cos(\beta-\alpha)$ und $\sin(\beta-\alpha)$ können Sie übrigens in jeder guten mathematischen Formelsammlung oder bei Wikipedia nachlesen.

nachlesen.

Ein in der Praxis wichtiger Sonderfall des obigen Satzes ist der folgende Satz:

Wichtig

Satz (Orthogonale und parallele Vektoren)

- Es gilt $v\cdot w = 0$ genau dann, wenn die beiden Vektoren *v* und *w* orthogonal sind, d.h., einen rechten Winkel einschließen.
- Es gilt $\det(v,w) = 0$ genau dann, wenn die beiden Vektoren *v* und *w* parallel sind, d.h., den Winkel 0° 0der 180° einschließen.

Dies folgt aus dem obigen Satz und aus der Tatsache, dass $\cos 90^\circ = 0$ und $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ gilt.

Beispiel

Sei

$$v = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 3\end{pmatrix}$$

Sei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel. Es gilt:

$$\begin{aligned} v\cdot w &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 1\cdot 3 = 6 \\ |v| &= 2 \text{ und } |w| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \cos\varphi &= \frac{6}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Aus der obigen Tabelle können wir ablesen: $|\varphi| = 30^\circ$. Wegen

$$\det(v,w) = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0$$

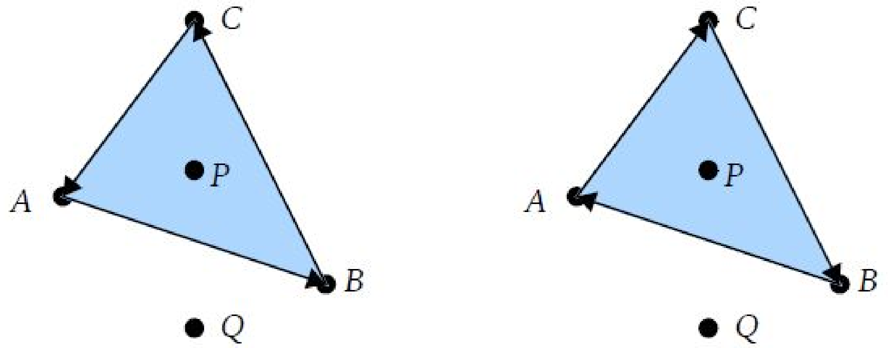
ist $\varphi > 0$, also $\varphi = 30^\circ$. Die Drehung von *v* nach *w* ist also eine Linksdrehung.

9.1.3 Anwendungen

Gliederung

9.1.3.1 Liegt der Punkt im Dreieck?

Stellen Sie sich ein Grafikprogramm vor, mit dem man geometrische Figuren zeichnen kann. Sie zeichnen ein (gefülltes) Dreieck. Später wollen Sie es markieren. Dazu klicken Sie mit der Maus in das Dreieck... Aber woher weiß das Grafikprogramm, dass der Mausklickpunkt innerhalb des Dreiecks und nicht außerhalb liegt?
Mathematisch können wir das Problem wie folgt formulieren: Gegeben ein Dreieck ABC und ein Punkt P (der Mausklickpunkt). Liegt der Punkt P innerhalb oder außerhalb des Dreiecks?



Welcher Punkt liegt im Dreieck?

Die obige Abbildung zeigt: Durchlaufen wir das Dreieck ABC gegen den Uhrzeigersinn (Abb. links), so sehen wir den Punkt P stets auf der linken Seite. Den Punkt Q jedoch sehen wir von AB aus rechts, von BC und von CA aus links. Durchlaufen wir das Dreieck ABC dagegen im Uhrzeigersinn (Abb. rechts), so sehen wir den Punkt P stets auf der rechten Seite. Den Punkt Q jedoch sehen wir teils links, teils rechts. Damit ergibt sich folgendes Verfahren: Um zu testen, ob ein Punkt P innerhalb eines Dreiecks ABC liegt, prüfen wir nacheinander, auf welcher Seite P von AB aus, von BC aus und von CA aus gesehen liegt. Liegt er stets auf der selben Seite (immer rechts oder aber immer links), so liegt er innerhalb des Dreiecks. Liegt er jedoch teils links, teils rechts, so liegt er außerhalb des Dreiecks.
Wie finden wir heraus, auf welcher Seite wir einen Punkt P sehen, wenn wir uns entlang eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ bzw. entlang der Geraden AB in Richtung von A nach B bewegen? Eine Gerade hat keine Richtung, die Gerade AB ist die selbe Gerade wie BA. Daher verwenden wir hier den Begriff des *Strahls*. Ein Strahl AB ist eine Gerade AB mit der Orientierung von A nach B.

Um die obige Frage beantworten zu können, hilft uns der Satz aus dem vorigen Abschnitt. Er besagt Folgendes: Ist $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) > 0$, so handelt es sich bei der Drehung von $\overrightarrow{AB}$ nach $\overrightarrow{AP}$ um eine Linksdrehung. Das heißt, der Punkt P liegt links vom Strahl AB (wenn man die Gerade von A nach B durchläuft). Entsprechendes gilt für $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) < 0$.

Wichtig

- Ist $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) > 0$, so liegt der Punkt P links vom Strahl AB.
- Ist $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) < 0$, so liegt der Punkt P rechts vom Strahl AB.
- Ist $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 0$, so liegt der Punkt P auf der Geraden AB.

Beispiel

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Punkten $A(0|2)$, $B(6|0)$ und $C(3|6)$ sowie der Punkt $P(5|4)$. Zeichnen Sie das Dreieck und den Punkt P auf kariertem Papier!
Als erstes bestimmen wir die Vektoren, die wir benötigen. Es ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

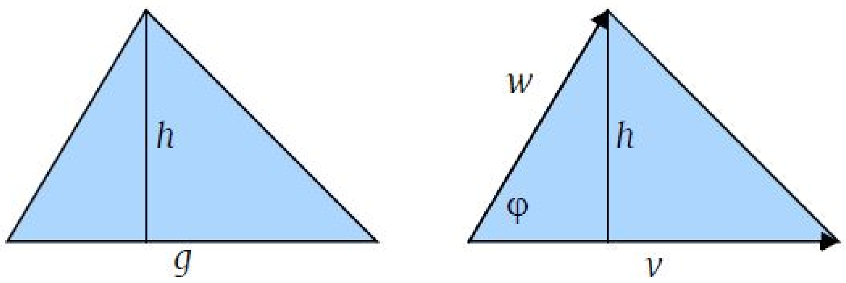
Als Nächstes bestimmen wir die Determinanten:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 6 \cdot 2 - (-2) \cdot 5 = 22$$
$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}) = (-3) \cdot 4 - 6 \cdot (-1) = -6$$
$$\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = (-3) \cdot (-2) - (-4) \cdot 2 = 14$$

Der Punkt P liegt also links von AB und von CA, jedoch rechts von BC und damit nicht innerhalb des Dreiecks ABC.

9.1.3.2 Dreiecksfläche und Abstand Punkt - Gerade

Flächeninhalt eines Dreiecks



Flächeninhalt eines Dreiecks

In diesem Abschnitt soll der Flächeninhalt eines Dreiecks mithilfe der bisher bekannten Vektoroperationen bestimmt werden. In der Schule lernt man die Formel $F = \frac{1}{2}gh$, wobei g die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks ist (siehe Abb. links). Wenn nun das Dreieck durch zwei Vektoren v und w gegeben ist (Abb. rechts), so gilt:

$$g = |v| \text{ und } h = |w| \cdot \sin\varphi .$$

Somit erhalten wir für die Dreiecksfläche:

$$F = \frac{1}{2} \cdot |v| \cdot |w| \cdot |\sin\varphi|$$

Aus Abschnitt 9.1.2 wissen wir:

$$\sin\varphi = \frac{|\det(v,w)|}{|v| \cdot |w|} .$$

Dies setzen wir in die obige Formel für die Dreiecksfläche ein und erhalten:

$$F = \frac{1}{2} \cdot |v| \cdot |w| \cdot \frac{|\det(v,w)|}{|v| \cdot |w|} = \frac{1}{2} \cdot |\det(v,w)| .$$

Beispiel

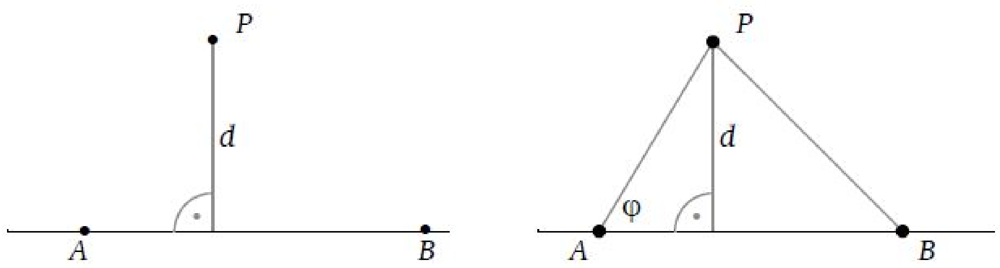
Das Dreieck ABC sei gegeben durch die Punkte $A(2|1)$, $B(5|4)$ und $C(\text{-}1|6)$. Wir bestimmen zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet sich dann zu:

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \cdot |15 - (-9)| = 12$$

Distanz eines Punktes zu einer Geraden



Distanz des Punktes P zur Geraden AB

Der Abstand $d(P, AB)$ des Punktes P zur Geraden AB ist gleich der Höhe im Dreieck ABP. Diese haben wir bereits weiter oben bestimmt zu

$$d(P, AB) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{AP}| \cdot \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AP}|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Wichtig

Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden AB ist gegeben durch

$$d(P, AB) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

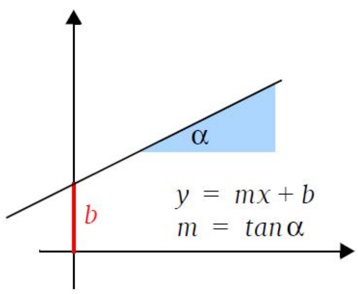
Insbesondere ist $d(P, AB) = 0$, das heißt, der Punkt P liegt auf der Geraden AB, genau dann, wenn $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 0$ ist.

9.1.4 Geraden in der Ebene

Aus der Schule kennen Sie sicherlich die Geradendarstellung in der Form $y = mx + b$. Dabei ist m die Steigung der Geraden (genauer: der Tangens des Steigungswinkels) und b der Achsenabschnitt. Man nennt diese Darstellung auch die funktionale Darstellung von Geraden.

Sie hat jedoch einen gravierenden Nachteil: Ein bestimmter Typ von Geraden lässt sich damit nicht darstellen. Welcher Typ ist das?

Lösung

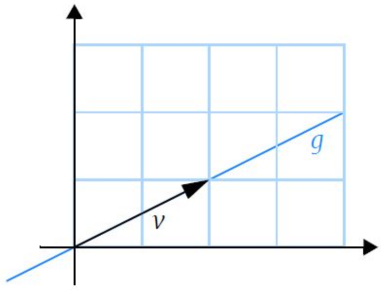


Vertikale Geraden lassen sich nicht in dieser Form darstellen, denn sie haben den Steigungswinkel 90° und für diesen Winkel ist der Tangens undefiniert.

Im Folgenden werden wir eine Geradendarstellung kennenlernen, mit der alle möglichen Geraden in der Ebene (und später auch im Raum) dargestellt werden können.

Ursprungsgeraden

Die lineare Hülle $\langle v \rangle$ eines Vektors v ist definiert als die Menge $\{\lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ aller skalarer Vielfachen von v (→ Linearkombinationen und lineare Hülle). Die Abbildung rechts
zeigt, dass die Spitzen der Vektoren aus $\langle v \rangle$ alle auf einer Ursprungsgeraden g liegen, die dieselbe Steigung hat wie der Vektor v. Wenn wir nun den Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit dem Punkt $P(a\,|\,b)$ identifizieren, so stellt der Ausdruck $\langle v \rangle$ die Menge aller Punkte auf der Ursprungs-



geraden mit der selben Steigung wie v dar. Ist etwa $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so stellt $\langle v \rangle$ die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ dar. Man nennt diese Art der Darstellung die **Parameterdarstellung**.

Wichtig

Parameterdarstellung einer Ursprungsgeraden

Ist v ein Vektor, so stellt

$$g : \langle v \rangle$$

eine Ursprungsgerade g dar, deren Steigungswinkel gleich dem Steigungswinkel von v ist.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.1

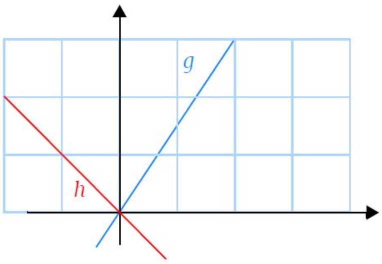
Zeichnen Sie die Geraden

$$g : \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } h : \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

auf kariertem Papier!

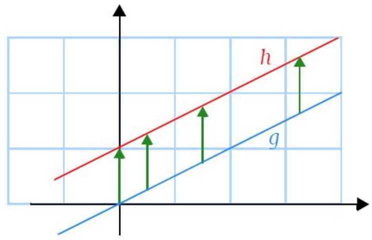
Lösung

So sieht's aus:



Beliebige Geraden

Bisher können wir nur Ursprungsgeraden darstellen. Andere Geraden erhalten wir durch Parallelverschiebung. Wenn wir etwa die Ursprungsgerade $g\colon\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ um den Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ verschieben, das heißt, um eine Einheit nach oben verschieben, so erhalten wir die rechts in der Abbildung dargestellte Gerade h mit der Darstellung



$$h\colon\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Man kann die Gerade h auch wie folgt beschreiben: Sie hat dieselbe Steigung wie der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und verläuft durch den Punkt mit den Koordinaten $(0|1)$.

Wichtig

Parameterform der Geradendarstellung

Der Ausdruck

$$g\colon u+\langle v\rangle$$

stellt eine Gerade dar, die durch den «Punkt» u geht und dieselbe Steigung wie v hat. Diese Form nennt man die **Parameterform** der Geradendarstellung. Der Vektor u heißt **Stützvektor**, der Vektor v heißt **Richtungsvektor** der Geraden g.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.2

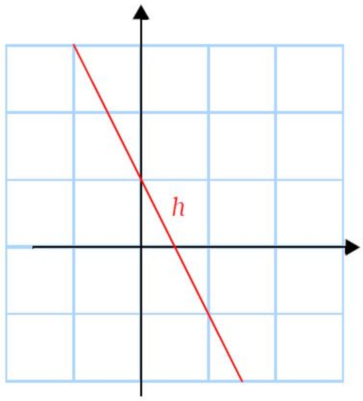
Zeichnen Sie die Gerade

$$g\colon\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

auf kariertem Papier!

Lösung

So sieht's aus:



Der Stützvektor einer Geraden zeigt auf einen beliebigen Punkt auf der Geraden, der Richtungsvektor zeigt in Richtung der Geraden. Damit ist schon klar, dass die Parameterdarstellung einer Geraden g nicht eindeutig ist. Es gibt unendlich viele verschiedene Stützvektoren und Richtungsvektoren für eine bestimmte Gerade g.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.3

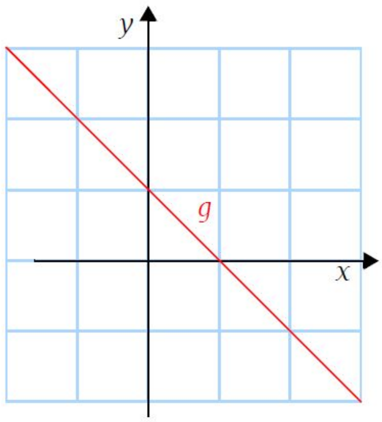
Welche der folgenden Ausdrücke sind korrekte Darstellungen der Geraden g aus der Abbildung?

a) $g\colon \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

b) $g\colon \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

c) $g\colon \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

d) $g\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$



Lösung

b) und d) sind korrekt. Bei a) ist der Stützvektor falsch, bei c) ist der Richtungsvektor falsch.

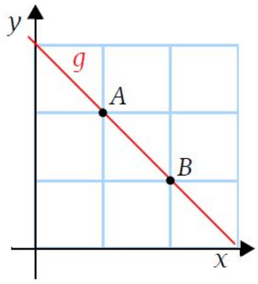
Gerade durch zwei Punkte

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.4

Seien die Punkte $A(1|2)$ und $B(2|1)$ gegeben.

Geben Sie die Parameterform der Geraden $g = AB$ an! Hinweis: Sie müssen einen Stützvektor und einen Richtungsvektor bestimmen.



Lösung

Als Stützvektor bietet sich einer der beiden Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ an.

Als Richtungsvektor bietet sich der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ an. Mögliche Darstellungen sind damit (nebst unendlich vielen weiteren!)

$$g: \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

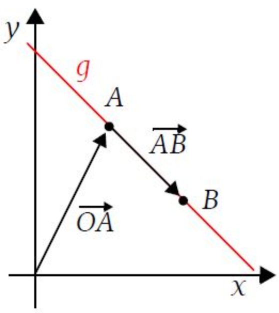
und

$$g: \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Wichtig

Die Parameterdarstellung der Geraden $g = AB$ durch die zwei Punkte A und B ist gegeben durch

$$g: \overrightarrow{OA} + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$$



Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.5

Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(2|1)$ auf der Geraden $g: \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ liegt.

Lösung

Wenn der Punkt $P(2|1)$ auf der Geraden g liegt, so muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir:

$$\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

Hier brauchen wir keinen Gauß-Algorithmus zu bemühen, denn man sieht sofort, dass $\lambda = 2$ eine Lösung der Gleichung ist. Somit liegt der Punkt P auf der Geraden g.

Alternativ können wir das Problem wie folgt lösen: Wir wählen einen Punkt Q auf der Geraden g und prüfen dann mithilfe der Determinante, ob der Vektor $\overrightarrow{QP}$ parallel zum Richtungsvektor der Geraden ist. Den Punkt Q erhalten wir am einfachsten, indem wir $\lambda = 0$ setzen. Dies liefert den Punkt Q(-2|3) und daraus ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$. Wegen

$$\det\left(\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right) = -4+4=0$$

ist der Vektor $\overrightarrow{QP}$ parallel zum Richtungsvektor von g, das heißt, der Punkt P liegt auf der Geraden g.

Schnittpunkt zweier Geraden

Die Gerade $g\!:u+\langle v\rangle$ stellt die Menge aller Punkte der Form $u+\lambda v$ dar, wobei λ alle reellen Zahlen durchläuft. Für jeden Wert von λ bekommt man einen Punkt auf der Geraden g und umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $Q(a\,|\,b)$ auf der Geraden g eine reelle Zahl λ, sodass $u+\lambda v = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ist.

Wenn wir nun einen Schnittpunkt $Q(x\,|\,y)$ der beiden Geraden $g\!:u+\langle v\rangle$ und $h\!:r+\langle s\rangle$ suchen, so muss Q sowohl auf g als auch auf h liegen. Das bedeutet, es muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass $u+\lambda v = \overrightarrow{OQ}$ ist, und es muss ein $\mu \in \mathbb{R}$ geben, sodass $r+\mu s = \overrightarrow{OQ}$ ist. Daraus erhalten wir die Gleichung

$$u+\lambda v = r+\mu s\,,$$

mit den beiden Unbekannten λ und μ, die wir mithilfe des Gauß-Algorithmus lösen können.

Beispiel

Wir wollen den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g\!:\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

und

$$h: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

bestimmen. Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -5 + 2\lambda &= -\mu \\ -4 + \lambda &= 3 + \mu \end{aligned}$$

Dieses formen wir um zu

$$\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 5 \\ \lambda - \mu &= 7 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung $\lambda = 4, \mu = -3$. Der gesuchte Schnittpunkt ist somit der Vektor $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, als Punkt geschrieben P(3|0).

9.1.5 Matrizen und geometrische Transformationen

Das folgende Video zeigt Ihnen, um was es in diesem Kapitel geht.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Matrizen_und_geometrische_Transformationen

Matrizen und geometrische Transformationen

Es geht weiter mit dem Zoom und der Skalierung.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Matrizen_und_geometrische_Transformationen

Zoom und Skalierung

Die Skalierung

Matrix der Skalierung:

$$S(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Sie bewirkt eine Streckung/Stauchung um λ in x-Richtung und um μ in y-Richtung. Zentrum der Streckung bzw. Stauchung ist der Ursprung. Spezialfälle:

	Matrix	**geom. Bedeutung**

$S(\lambda, \lambda)$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	Zoom um den Faktor λ
$S(-1, 1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an der y-Achse
$S(1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an der x-Achse
$S(-1, -1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Punktspiegelung am Ursprung

Die Rotation

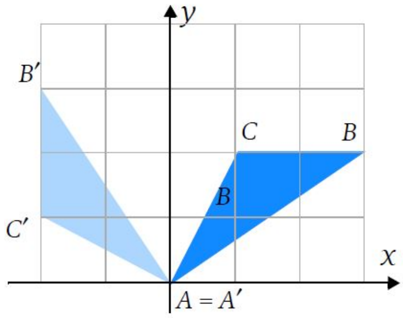
Der Ausdruck $R(\varphi)$ bezeichnet eine Rotation um den Winkel φ mit dem Ursprung als Rotationszentrum. Sie lässt sich durch folgende Matrix darstellen.

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Beispiel

Das Dreieck ABC mit A(0|0), B(3|2) und C(1|2) soll um 90°

Hinweis



Denken Sie daran: Ein positiver Winkel entspricht einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn!

gedreht werden. Wegen cos 90° = 0 und sin 90° = 1 erhalten wir folgende Drehmatrix:

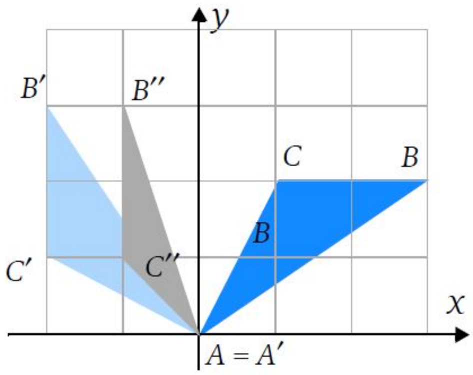
$$R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die Drehmatrix nacheinander mit den Punkten A, B und C (bzw. den entsprechenden Vektoren!) und erhalten auf diese Weise mithilfe des Falkschen Schemas:

		A	B	C
		0	3	1
		0	2	2
0	-1	0	-2	-2
1	0	0	3	1
		A'	B'	C'

und damit die Bildpunkte A'(0|0), B'(-2|3) und C'(-2|1).

Hintereinanderausführung von Transformationen



Das Dreieck aus dem obigen Beispiel soll erst um 90° gedreht und anschließend um den Faktor ½ in x-Richtung skaliert werden. Wenn wir nun das Dreieck ABC symbolisch als Matrix Δ notieren, entspricht diese zweifache Transformation der Multiplikation

$$S(\tfrac{1}{2},1)\cdot(R(90^\circ)\cdot\Delta)$$

Da die Matrixmultiplikation assoziativ ist, können wir umklammern und erhalten:

$$(S(\tfrac{1}{2},1)\cdot R(90^\circ))\cdot\Delta$$

Das bedeutet, dass das Produkt $S(\frac{1}{2},1)\cdot R(90^\circ)$ die Hintereinanderausführung der Rotation, gefolgt von der Skalierung, darstellt.

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.6

Berechnen Sie die Matrix $S(\frac{1}{2},1)\cdot R(90^\circ)$!

Lösung

Es gilt:

$$S(\tfrac{1}{2},1)\cdot R(90^\circ)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Wichtig

Hintereinanderausführung von Transformationen

Sind A und B die Matrizen zweier geometrischer Transformationen, so ist das Produkt $A \cdot B$ die Matrix der Transformation, die entsteht, wenn zuerst B und dann A angewendet wird. Man beachte dabei die Umkehrung der Reihenfolge!

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.7

Wenn eine Figur nacheinander erst um den Winkel φ und dann um den Winkel ψ gedreht wird, so entspricht dies offenbar einer Drehung um den Winkel $\varphi + \psi$. Rechnen Sie dies nach! Hinweis: Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen sind hilfreich!

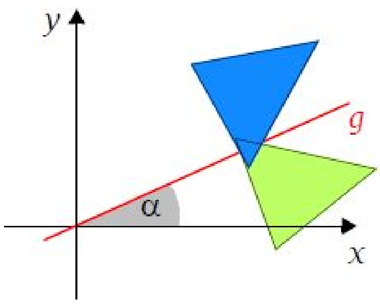
Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} R(\psi) \cdot R(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \\ &= R(\varphi+\psi) \end{aligned}$$

9.1.6 Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Eine Figur soll an einer Geraden g, die durch den Koordinatenursprung geht und mit der x-Achse den Winkel α einschließt, gespiegelt werden.



Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Wir wollen die Matrix dieser Transformation berechnen. Sehen Sie dazu folgendes Video.

An dieser Stelle befindet sich online ein Video.

https://vfhgdm1.eduloop.de/loop/Spiegelung_an_einer_Ursprungsgeraden

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Die Matrix $Sp(\alpha)$ der Spiegelung an der Ursprungsgeraden g mit Steigungswinkel α ist

$$Sp(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.8

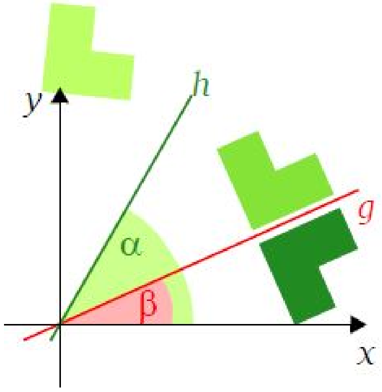
Was passiert, wenn man erst an einer Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel β, dann an einer Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel α spiegelt? Finden Sie es heraus!

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} Sp(\alpha)\cdot Sp(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) & \cos(2\alpha)\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\sin(2\beta) & \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\beta - 2\alpha) & \sin(2\beta - 2\alpha) \\ -\sin(2\beta - 2\alpha) & \cos(2\beta - 2\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\beta - \alpha)) & \sin(2(\beta - \alpha)) \\ -\sin(2(\beta - \alpha)) & \cos(2(\beta - \alpha)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha - \beta)) & \sin(-2(\alpha - \beta)) \\ -\sin(-2(\alpha - \beta)) & \cos(2(\alpha - \beta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha - \beta)) & -\sin(2(\alpha - \beta)) \\ \sin(2(\alpha - \beta)) & \cos(2(\alpha - \beta)) \end{pmatrix} \\ &= R(2(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also wieder eine Drehung, und zwar um den Winkel $2(\alpha - \beta)$.



9.1.7 Homogene Koordinaten

Achtung: Dieser Abschnitt ist nicht klausurrelevant!

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich bestimmte ebene geometrische Transformationen wie Spiegelungen, Skalierungen und Rotation durch 2×2-Matrizen darstellen lassen. Die Anwendung einer Transformation auf einen Punkt wird durch die Multiplikation der jeweiligen Matrix mit dem Vektor, der den Punkt darstellt, realisiert. Diese Darstellung hat für die Praxis zwei große Vorteile:

- Die Darstellung einer Transformation durch eine 2×2-Matrix ist sehr kompakt und damit platzsparend.
- Die Berechnung der Bildpunkte mittels Matrixmultiplikation ist sehr einfach. Sie erfordert nur Addition und Multiplikation.

Definition

Lineare Abbildungen

Eine geometrische Transformation, die sich durch eine Matrix darstellen lässt, heißt **lineare Abbildung**.

Die Matrixmultiplikation hat die grundlegende Eigenschaft $M \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Das heißt, dass eine lineare Abbildung den Ursprung des Koordinatensystems nicht bewegt. Man spricht auch von einem **Fixpunkt** der Abbildung.

Wichtig

Alle linearen Abbildungen haben den Ursprung als Fixpunkt.

Daraus folgt sofort, dass die Verschiebung (auch **Translation** genannt) nicht linear sein kann, denn sie hat gar keinen Fixpunkt. Dies trifft ebenso für alle anderen Transformationen zu, die nicht auf den Ursprung zentriert sind:

- Rotation um einen Punkt, der nicht der Ursprung ist
- Spiegelung an einer Achse, die nicht durch den Ursprung geht
- Skalierung relativ zu einem Punkt, der nicht der Ursprung ist.

Nun möchte man die Vorteile, die die Matrixdarstellung bietet, auch für solche nicht linearen Abbildungen nutzen. Dafür gibt es einen Trick: Die Darstellung durch homogene Koordinaten.

Definition

Homogene Koordinaten

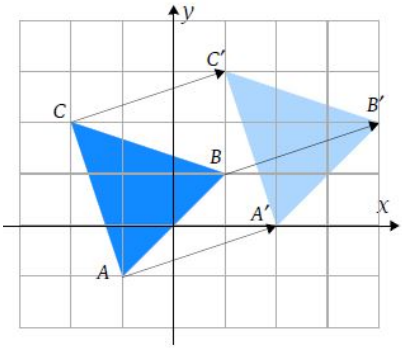
- Alle Vektoren werden um eine dritte Komponente erweitert, die stets den Wert 1 hat.
- Alle Matrizen werden um eine dritte Zeile und eine dritte Spalte erweitert. Die dritte Zeile hat stets den Wert $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Die aus dem letzten Abschnitt bekannten Matrizen werden wie folgt in homogene Koordinaten «eingebettet»:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Das in der Abbildung gezeigte Dreieck soll um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben werden, das heißt, um 3 nach rechts und um 1 nach oben. Zunächst wandeln wir die Punkte A, B und C in Vektoren in homogenen Koordinaten um:



$$v_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Die Matrix $T(3,1)$ der Translation lautet:

$$T(3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$T(3,1) \cdot v_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T(3,1) \cdot v_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, T(3,1) \cdot v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anschließend müssen wir die dritten Komponenten wieder entfernen und erhalten somit die Bildpunkte A'(2|0), B'(4|2), C'(1|3).

Definition

Matrix der Translation in homogenen Koordinaten

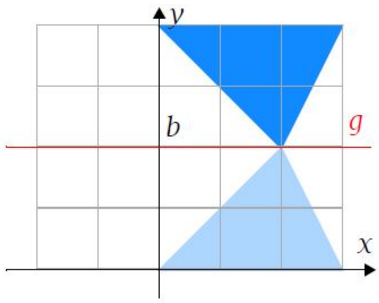
Die Matrix der Translation um den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ lautet:

$$T(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere geometrische Transformation, die nicht auf den Ursprung zentriert sind, können nun mithilfe der Translation zusammengesetzt werden.

Beispiel

Gesucht ist die Matrix $Sp_{y=b}$ der Spiegelung an der horizontalen Geraden mit der Geradengleichung $y = b$. Zu diesem Zweck verschieben wir zunächst die Gerade g mithilfe der Translation $T(0, -b)$, sodass sie auf die x-Achse zu liegen kommt. Anschließend führen wir eine Spiegelung Sp_x an der x-Achse durch. Schließlich verschieben wir die Gerade g mithilfe der Translation $T(0, b)$ wieder zurück an ihren ursprünglichen Platz.

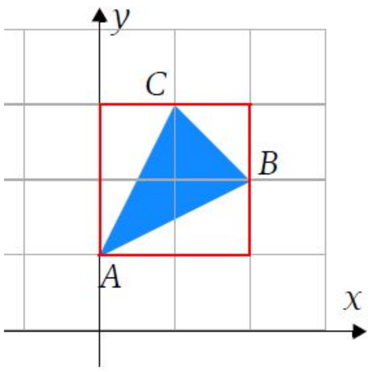


Wir müssen also das Produkt $T(0, b) \cdot Sp_x \cdot T(0, -b)$ (denken Sie an die Umkehrung der Reihenfolge!) berechnen.

$$\begin{aligned} Sp_{y=b} &= T(0,b) \cdot Sp_x \cdot T(0,-b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe

Das in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Dreieck soll relativ zu seinem Mittelpunkt um den Faktor 2 vergrößert werden. Der Mittelpunkt wird üblicherweise als Mittelpunkt des die Figur umschließenden Rechteck berechnet (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Matrix M dieser Transformation sowie die Bildpunkte A', B' und C' und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem.



Lösung

Der Mittelpunkt der Figur ist der Punkt P(1|2). Die Skalierung relativ zum Punkt P wird wie folgt zusammengesetzt:

- Verschiebe den Punkt P in den Koordinatenursprung mittels der Translation T(-1,-2).
- Zoome um den Faktor 2 mittels der Matrix S(2,2).
- Verschiebe den Punkt P zurück an seine ursprüngliche Position mittels der Translation T(1,2).

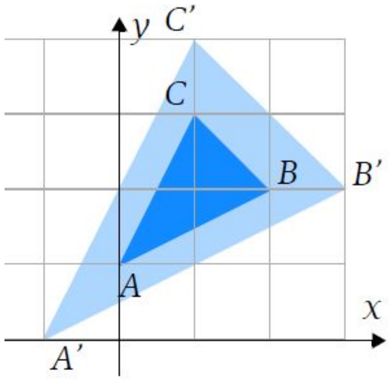
Wir müssen also das Produkt $T(1, 2) \cdot S(2, 2) \cdot T(-1, -2)$ (denken Sie an die Umkehrung der Reihenfolge!) berechnen.

$$M = T(1,2) \cdot S(2,2) \cdot T(-1,-2)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend wandeln wir die Punkte A, B und C in Vektoren in homogenen Koordinaten um:

$$v_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und dann wenden wir die Matrix M auf diese Vektoren an und erhalten:



$$M \cdot v_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, M \cdot v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M \cdot v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Daraus erhalten wir die Bildpunkt A'(-1|0), B'(3|2) und C'(1|4).

9.2 Analytische Geometrie im Raum

Gliederung

Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie ...

- Kreuzprodukt und Spatprodukt berechnen,
- Parameterdarstellung und Gleichungsdarstellung von Ebenen bestimmen,
- Den Normalenvektor einer Eebene berechnen,
- Die Sichtbarkeitsbestimmung für Körper durchführen,
- Räumliche Transformationen und Projektionen anwenden.

9.2.1 Kreuzprodukt und Spatprodukt

Im dreidimensionalen Raum haben die Vektoren drei Komponenten. Alles, was in Abschnitt 9.1 über die geometrische Bedeutung der Grundoperationen, über Winkel zwischen Vektoren sowie über Geraden gesagt wurde, bleibt im dreidimensionalen Raum im Wesentlichen unverändert bestehen.
Die Länge (der Betrag) des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Das Kreuzprodukt

Zu den bekannte Operationen kommt im dreidimensionalen Raum (und nur dort!) eine weitere Operation hinzu: Das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt). Es ist wie folgt definiert.

Definition

Seien

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt von v mit w ist wieder ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, der definiert ist durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Am einfachsten kann man sich diese komplizierte Berechnungsvorschrift mit dem folgenden Schema merken. Das Schema verwendet die drei Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das obige Kreuzprodukt ist dann die Determinante der folgenden 3x3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante lässt sich durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnen (→Die Determinantenfunktion). Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det M &= e_1(v_2w_3 - v_3w_2) - e_2(v_1w_3 - v_3w_1) + e_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften:

Wichtig

Eigenschaften des Kreuzprodukts

Seien v und w Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

- $v \times w = -w \times v$
- Der Vektor $v \times w$ ist orthogonal zu v und zu w.
- Die Zahl $|v \times w|$ ist gleich dem Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms.
- Ist weder v noch w der Nullvektor, so gilt $v \times w = \mathbf{0}$ genau dann, wenn v und w kollinear sind, das heißt, einen Winkel von 0° oder 180° einschließen.
- Die drei Vektoren v, w und $v \times w$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, das heißt, sie verhalten sich wie Daumen, Zeigefinger und Ringfinger der rechten Hand (rechte-Hand-Regel).

Aufgabe

Zwischenaufgabe 9.9

Rechnen Sie nach, dass der Vektor $v \times w$ orthogonal zu v und zu w ist!

Tipp

Wie kann man "nachrechnen", ob zwei Vektoren orthogonal sind? Man bildet das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Ist dieses gleich 0, so sind die Vektoren orthogonal, andernfalls sind sie es nicht.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} v \cdot (v \times w) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_2v_1w_3 + v_3v_1w_2 - v_3v_2w_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies beweist, dass die Vektoren v und $v \times w$ orthogonal sind. Der Beweis für w und $v \times w$ verläuft analog.

Das Spatprodukt

Definition

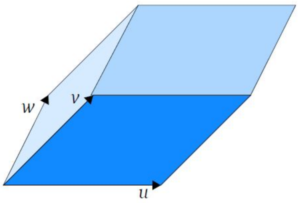
Das Spatprodukt von drei Vektoren u, v und w wird geschrieben $[uvw]$. Es ist definiert durch

$$[uvw] = u \cdot (v \times w)$$

Wichtig

Eigenschaften des Spatprodukts

Seien u, v und w Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:



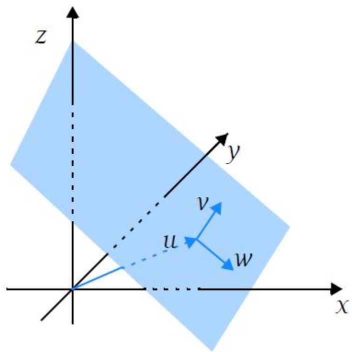
- Die Zahl $|[uvw]|$ ist gleich dem Volumen des von u, v und w aufgespannten Parallelepipeds (auch Spat genannt, siehe Abb.).
- Ist $[uvw] > 0$, so bilden die Vektoren u, v und w in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.
- Ist $[uvw] < 0$, so bilden die Vektoren u, v und w in dieser Reihenfolge ein Linkssystem.
- Ist A die Matrix mit den Spaltenvektoren u, v und w (von links nach rechts), so gilt $[uvw] = \det A$.

9.2.2 Ebenen im Raum

Definition

Die Parameterform einer Ebene E ist gegeben durch

$$E: u + \langle v, w \rangle .$$



Dies ist eine Kurzschreibweise für die Menge

$$\{u + \lambda v + \mu w \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

Dabei gilt:

- u ist ein Stützvektor der Ebene, das heißt, Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene,
- v und w sind Richtungsvektoren der Ebene,
- die Menge $\{v, w\}$ ist linear unabhängig, das heißt, die beiden Vektoren sind nicht kollinear.

Weiter gilt: Sind P, Q und R drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist die durch diese drei Punkte eindeutig bestimmte Ebene E gegeben durch

$$E : \overrightarrow{OP} + \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle$$

Ist der Stützvektor der Nullvektor, so können wir die Ebene E auch in der Form $E : \langle v, w \rangle$ schreiben. Es handelt sich dann um eine Ebene durch den Ursprung. Wie wir im Kapitel Vektorräume gesehen haben, ist ein Gebilde der Form $\langle v, w \rangle$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Also sind Ursprungsebenen Unterräume der Dimension 2 des $\mathbb{R}^3$. Ebenso sind Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^3$ Unterräume der Dimension 1.

Wichtig

Unterräume des $\mathbf{R}^3$

Die folgende Aufzählung listet alle Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$:

- Ein Unterraum der Dimension 0: Ein einzelner Punkt, der Koordinatenursprung
- Unterräume der Dimension 1: Ursprungsgeraden
- Unterräume der Dimension 2: Ursprungsebenen
- Ein Unterraum der Dimension 3: Der $\mathbb{R}^3$ selbst

Frage

Warum müssen die beiden Richtungsvektoren v und w einer Ebene linear unabhängig sein?

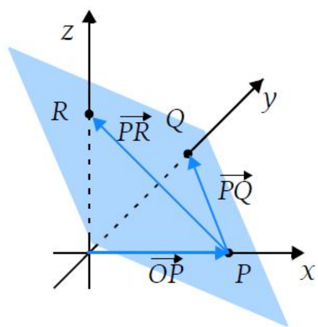
Lösung

Wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind, so sind sie kollinear, das heißt, sie haben die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung. Somit können Sie keine Ebene aufspannen.

Beispiel

Die drei Punkte $P(1|0|0), Q(0|1|0)$ und $R(0|0|1)$ bestimmen eindeutig eine Ebene E. Wir berechnen zunächst einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



Daraus ergibt sich folgende Parameterdarstellung der Ebene E:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Genau so wie die Parameterdarstellung der Geraden ist die Parameterdarstellung der Ebene nicht eindeutig. Jeder beliebige Punkt der Ebene kann als Stützvektor gewählt werden und jedes Paar von linear unabhängigen Vektoren, die in die Richtung der Ebene zeigen, kann als Paar von Richtungsvektoren gewählt werden.

Der Normalenvektor einer Ebene

Ein Vektor, der orthogonal zu einer Ebene $E: u + \langle v, w\rangle$ steht, heißt auch Normalenvektor der Ebene. Ist beispielsweise w ein Vektor, der in z-Richtung des Koordinatensystems zeigt, so ist w ein Normalenvektor der x-y-Ebene. Der Normalenvektor einer Ebene spielt u.a. eine wichtige Rolle bei der Sichtbarkeitsbestimmung.
Ein Normalenvektor lässt sich einfach berechnen, indem man das Kreuzprodukt $v \times w$ der beiden Richtungsvektoren bildet, denn der Vektor $v \times w$ ist orthogonal zu v und zu w, und somit auch zur Ebene E. Durch die Bedingung, dass der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene E steht, ist nur die Richtung, jedoch nicht die Länge des Normalenvektors bestimmt. Aus diesem Grund verlangen wir noch, dass es sich um einen Vektor der Länge 1 handeln muss. Aber auch dann gibt es immer noch zwei mögliche Vektoren, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Ist beispielsweise E die x-y-Ebene, so sind

$$n_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } n_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

beides Normalenvektoren der Ebene E der Länge 1. Trotzdem sprechen wir von «dem» Normalenvektor n_E.

Beispiel

Betrachten wir noch einmal die Ebene aus dem obigen Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Wir bestimmen einen Normalenvektor n_E mithilfe des Kreuzprodukts:

$$v = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Anschließend normieren wir den Vektor v. Es gilt $|v| = \sqrt{3}$. Somit ergibt sich als Normalenvektor der Ebene

$$n_E = \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:

Wichtig

Der Normalenvektor n_E der Ebene $E: u + \langle v, w\rangle$ ist gegeben durch

$$n_E = \widehat{v \times w} = \frac{v \times w}{|v \times w|}$$

Die Gleichungsform der Ebenendarstellung

Wir betrachten die Ebene $E: u + \langle v, w\rangle$ mit dem Stützvektor u und den beiden Richtungsvektoren v und w. Sei nun $P(x\,|\,y\,|\,z)$ ein beliebiger Punkt der Ebene und sei

$$p = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

der Ortsvektor von P. Dann ist der Vektor $p - u$ ein Vektor, der in der Ebene E liegt und somit orthogonal zum Normalenvektor n_E ist. Daraus folgt:

$$n_E \cdot (p - u) = 0\,,$$

bzw.

$$n_E \cdot p = n_E \cdot u\,,$$

Mithilfe dieser Gleichung können wir eine Gleichungsform der Ebene E erstellen.

Beispiel

Wir betrachten noch einmal die Ebene E aus dem vorigen Beispiel:

$$E: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Als Normalenvektor hatten wir berechnet

$$n_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Nach dem, was oben gesagt wurde, gilt für einen beliebigen Punkt $P(x\,|\,y\,|\,z)$ der Ebene folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Den Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ können wir wegkürzen und erhalten dann

$$x + y + z = 1\,.$$

Diese gilt für jeden Punkt $P(x|y|z)$ der Ebene E. Somit haben wir eine Gleichungsdarstellung der Ebene E bestimmt.

Wichtig

Gleichungsdarstellung der Ebene

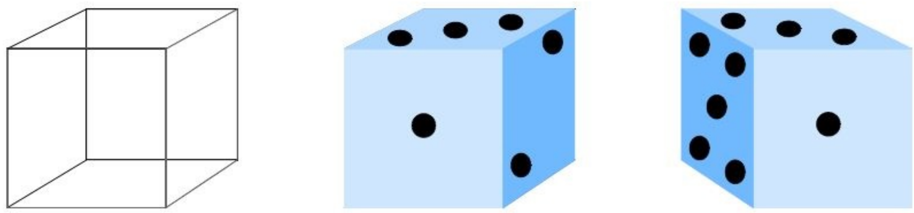
Ist n_E ein Normalenvektor und u ein Stützvektor der Ebene E, so liefert

$$n_E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n_E \cdot u$$

eine Gleichungsdarstellung der Ebene E.

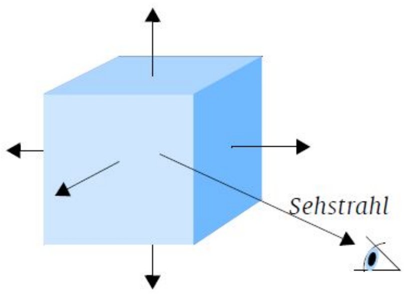
9.2.3 Anwendung: Sichtbarkeitsbestimmung

Stellen Sie sich vor, Sie sollen einen dreidimensionalen Würfel als zweidimensionale Projektion zeichnen. Zunächst muss man sicherlich die zweidimensionalen Koordinaten der acht Eckpunkte berechnen und zeichnen. Anschließend muss man diese Punkte durch Kanten in der richtigen Weise verbinden. Handelt es sich bei dem Würfel um ein «Drahtmodell» (Abb. links), so ist man nun schon fertig.



Drahtmodell eines Würfels und ein solider Würfel aus unterschiedlichen Perspektiven

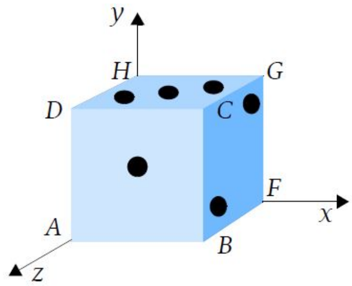
Handelt es sich jedoch um einen soliden Würfel, so benötigt man noch die Information, welche Seitenflächen für den Beobachter sichtbar sind und welche nicht. Der selbe Würfel sieht für zwei Beobachter an unterschiedlichen Positionen unterschiedlich aus (Abb. Mitte und links). Aus der einen Position sind Seiten sichtbar, die für den anderen Beobachter verdeckt sind und umgekehrt.



Die Sichtbarkeitsbestimmung, also die Berechnung, welche Seitenflächen des Körpers von einer bestimmten Beobachtungsposition sichtbar und welche verdeckt sind, gelingt am einfachsten mithilfe von Normalenvektoren. Wie wir wissen, gibt es zwei Normalenvektoren einer Ebene bzw. Fläche, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Zu unserem Zweck benötigen wir diejenigen Normalenvektoren, die von einer Seitenfläche des Würfels nach außen zeigen. Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich: Eine Fläche ist genau von einer Position P aus sichtbar, wenn der Winkel zwischen dem Sehstrahl, d.h. dem Vektor vom Körpermittelpunkt zur Beobachterposition P, und der nach außen zeigenden Flächennormale kleiner als 90° ist.

Um die Flächennormale berechnen zu können, werden die Eckpunkte jeder Seitenfläche von außen betrachtet entgegen dem Uhrzeigersinn notiert (s. Abb. rechts). Bildet man nun das Kreuzprodukt zweier aufeinanderfolgender Kantenvektoren, etwa $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, so zeigt der Ergebnisvektor aufgrund der Rechte-Hand-Regel nach außen.

Beispiel



Ein Würfel der Kantenlänge 1 ist so in einem Koordinatensystem platziert, dass eine Ecke im Ursprung liegt und die Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen sind. Für die interne Darstellung dieses Objekts werden folgende Daten gespeichert:

- Die Eckpunkte $A(0|0|1)$, $B(1|0|1)$, $C(1|1|1)$, $D(0|1|1)$ usw.
- Die Würfelflächen durch die Folge der Eckpunkte, von außen betrachtet entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, dargestellt. Die Seite mit der Eins (also mit einem Punkt) wird dargestellt durch die Folge *ABCD*. Die Seite mit der Zwei durch die Folge *BFGC*, die Seite mit der Drei durch die Folge CGHD usw. Somit ergeben sich die folgenden Normalenvektoren (der Index i bei n_i gibt jeweils die auf der Würfelfläche aufgedruckte Würfelzahl an

  ???

  > Sie wissen nicht, welche Zahlen auf den verdeckten Seiten aufgedruckt sind? Nun, Sie haben doch sicherlich einen Würfel zuhause?! Schauen Sie ihn an!

  ):

$$n_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = \overrightarrow{BF} \times \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_3 = \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_4 = \overrightarrow{FB} \times \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_5 = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_6 = \overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nehmen wir an, ein Beobachter schaut auf die Ecke C. Der Sehstrahl verläuft vom Ursprung zur Ecke C. Dies ergibt den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen: Eine Würfelfläche F ist genau dann sichtbar, wenn der Winkel zwischen dem nach außen gerichteten Normalenvektor n_F und dem Sehstrahlvektor v kleiner als 90° ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Cosinus des Winkels positiv ist und dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren positiv ist (→Winkel zwischen zwei Vektoren). Die Berechnung der Skalarprodukte ergibt:

$$v \cdot n_1 = v \cdot n_2 = v \cdot n_3 = 1$$

und

$$v \cdot n_4 = v \cdot n_5 = v \cdot n_6 = -1$$

Das bedeutet: Die Seiten 1, 2 und 3 sind sichtbar, die Seiten 4, 5 und 6 sind verdeckt.

9.2.4 3 D-Transformationen

Skalierung und Rotation

Eine 3×3-Matrix bildet einen räumlichen Vektor auf einen anderen räumlichen Vektor ab und stellt somit eine geometrische Transformation im Raum dar. Die wichtigsten Transformationen und ihre Matrizen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

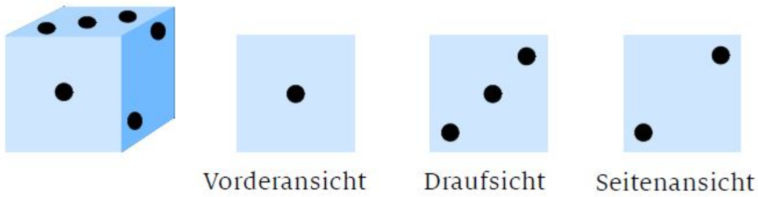
	Matrix	**geom. Bedeutung**
$S(\kappa,\lambda,\mu)$	$\begin{pmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$	Skalierung um κ in x-, um λ in y- und um μ in z-Richtung.
$R_x(\varphi)$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$	Rotation um den Winkel φ um die x-Achse
$R_y(\varphi)$	$\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$	Rotation um den Winkel φ um die y-Achse
$R_z(\varphi)$	$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	Rotation um den Winkel φ um die z-Achse

Analog zu den ebenen Transformationen gibt es folgende Spezialfälle der Skalierung:

	geom. Bedeutung
$S(\lambda,\lambda,\lambda)$	Zoom um den Faktor λ
$S(-1,1,1)$	Spiegelung an der yz-Ebene
$S(1,-1,1)$	Spiegelung an der xz-Ebene
$S(1,1,-1)$	Spiegelung an der xy-Ebene

Projektionen

Eine 2×3-Matrix bildet einen räumlichen Vektor auf einen ebenen Vektor ab. Matrizen dieses Typs eignen sich daher, um Projektionen, also zweidimensionale Zeichnungen dreidimensionaler Körper anzufertigen. In der Architektur, im Bauwesen und im technischen Zeichnen kennt man die *Normalprojektion*, auch *Dreitafelprojektion* genannt, bei der das dreidimensionale Objekt mittels Draufsicht, Vorderansicht und Seitenansicht dargestellt wird.



Dreitafelprojektion

Hierbei handelt es sich um so genannte orthogonale Parallelprojektionen. «Parallelprojektion » meint (im Unterschied zur Zentralprojektion), dass die Projektionsstrahlen parallel verlaufen. «Orthogonal» bedeutet, dass die Projektionsstrahlen im rechten Winkel auf die Projektionsfläche treffen.

Bei jeder dieser drei Projektion wird von dem dreidimensionalen Originalpunkt jeweils eine Komponente weggelassen. Die Draufsicht bildet den dreidimensionalen Punkt P(a|b|c) auf den zweidimensionalen Bildpunkt P'(a|b) ab, die Vorderansicht auf den Punkt P'(a|c), die Seitenansicht auf den Punkt P'(b|c). Die folgende Tabelle zeigt die dazugehörigen Matrizen.

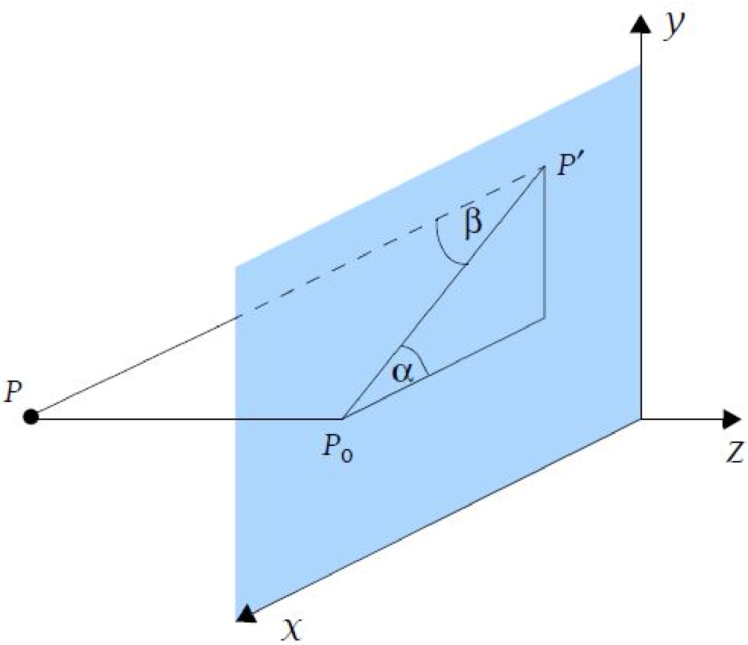
Matrix	Projektion
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	Draufsicht
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Vorderansicht
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Seitenansicht

Bei der schiefen Parallelprojektion verlaufen die Projektionsstrahlen ebenfalls parallel, treffen jedoch nicht im rechten Winkel auf die Projektionsebene. Ein Alltagsbeispiel für diese Projektion ist der Schattenwurf in Gegenden, in denen die Sonne nicht im Zenit steht.

Die Matrix der schiefen Parallelprojektion lautet wie folgt:

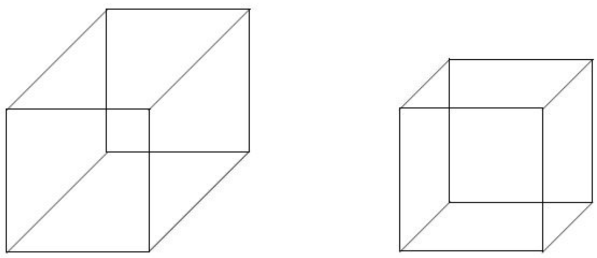
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\cos\alpha}{\tan\beta} \\ 0 & 1 & \frac{\sin\alpha}{\tan\beta} \end{pmatrix}$$

Die Bedeutung der Winkel α und β wird aus der folgenden Zeichnung ersichtlich. Dabei ist P der Originalpunkt, P' der Bildpunkt und P_0 wäre der Bildpunkt bei einer orthogonalen Projektion.



Schiefe Parallelprojektion

Zwei häufig verwendete Projektionen dieser Art sind die Kavalierprojektion mit $\alpha = \beta = 45^\circ$ und die Kabinettprojektion. Bei der Kavalierprojektion werden alle auf der Bildebene senkrecht stehenden Strecken unverkürzt abgebildet, bei der Kabinettprojektion werden sie auf die Hälfte verkürzt, was einen realistischeren Eindruck vermittelt.



Würfel in Kavalierprojektion (links) und Kabinettprojektion (rechts)

9.3 Aufgaben zur analytischen Geometrie

Aufgabe

Aufgabe 9.1

Gegeben seien die Punkte A(2|-3) und B(-1|5). Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$.

Aufgabe

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie jeweils Betrag und Steigungswinkel der folgenden Vektoren:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe

Aufgabe 9.3

Bestimmen Sie jeweils die Koordinatendarstellung des Vektors v bei gegebener Länge und Steigungswinkel.

1.) $|v| = 4, \alpha_v = 60^\circ$
2.) $|w| = 2, \alpha_w = 150^\circ$
3.) $|u| = 6, \alpha_u = -30^\circ$
4.) $|t| = 1, \alpha_t = -120^\circ$

Aufgabe

Aufgabe 9.4

Hinweis: Für diese Aufgabe benötigen Sie einen Taschenrechner!
Berechnen Sie jeweils den Winkel α zwischen den Vektoren v und w. Ist die Drehung von v nach w eine Rechts- oder eine Linksdrehung?

1.) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2.) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

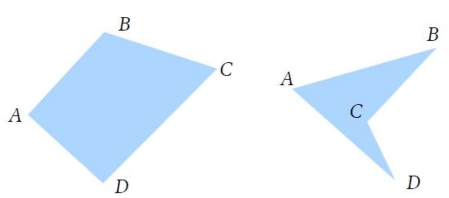
Aufgabe 9.5

Liegt der Punkt P(7|4) innerhalb oder außerhalb des Dreiecks ABC mit A(0|3), B(5|1) und C(8|5)?

Aufgabe

Aufgabe 9.6 (schwer)

Ein ebenes Viereck heißt **konkav**, wenn eine Seite «eingedellt» ist. Andernfalls heißt es **konvex**. Das linke Viereck in der Abbildung ist konvex,



das rechte ist konkav. Die formale Definition lautet wie folgt:

> Ein Viereck ABCD ist konvex, wenn es folgende Eigenschaft hat. Zieht man eine Diagonale, also eine Linie, die zwei nicht benachbarte Ecken verbindet (z.B. AC oder BD), so liegt die gesamte Diagonale im Innern des Vierecks.

Beispielsweise verläuft die Diagonale BD im rechten Viereck nicht innerhalb des Vierecks.
Finden Sie nur mithilfe der Vektorrechnung heraus, ob das Viereck ABCD mit A(6|-2), B(11|7), C(6|3), D(1|2) konvex oder konkav ist, ohne das Viereck zu zeichnen!

Aufgabe

Aufgabe 9.7
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(-1|2), B(4|5), C(3|6).

Aufgabe

Aufgabe 9.8
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks aus Aufgabe 6.

Aufgabe

Aufgabe 9.9
Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch die Punkte A(2|-5) und B(-3|-2) geht.

Aufgabe

Aufgabe 9.10
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(5|3) von der Geraden $g\colon \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe

Aufgabe 9.11
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } h\colon \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe

Aufgabe 9.12

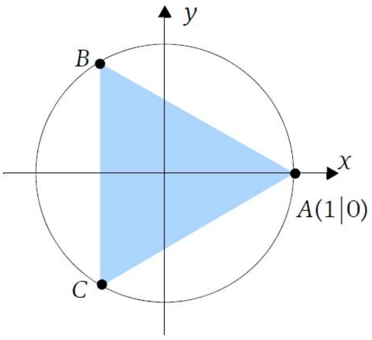
Gegeben sei das Dreieck ABC mit A(0|2), B(5|0) und C(2|5). Zeichnen Sie das Dreieck. Wenden Sie folgende Transformationen auf das Dreieck an, berechnen Sie die Bildpunkte und zeichnen Sie das Bilddreieck.

1.) Die Skalierung $S(2, 3)$
2.) Die Rotation $R(-60^{\circ})$

Aufgabe

Aufgabe 9.13

Das Dreieck ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, das in einen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (0|0) einbeschrieben ist. Der Punkt A hat die Koordinaten A(1|0).



1.) Bestimmen Sie die Koordinaten von B und C.
2.) Bestimmen Sie die Länge einer Dreiecksseite.
3.) Bestimmen Sie den Flächennhalt des Dreiecks.

Aufgabe

Aufgabe 9.14

Bestimmen Sie die Matrix A der folgenden Transformation:

- Zuerst wird um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
- Dann wird an der y-Achse gespiegelt.
- Dann wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht.

Aufgabe

Aufgabe 9.15

Bestimmen Sie die Matrix A der Rotation um den Winkel 90° mit Rotationszentrum P(2|1). Hinweis: Dafür benötigen Sie homogene Koordinaten!

Aufgabe

Aufgabe 9.16

Gegeben seien die räumlichen Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

1.) Das Kreuzprodukt $v \times w$
2.) Das Spatprodukt $[uvw]$

Aufgabe

Aufgabe 9.17

Die Ebene E sei definiert durch die drei Punkte $A(-2|1|3)$, $B(5|0|-1)$ und $C(2|2|1)$.

1.) Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene E.
2.) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E.
3.) Bestimmen Sie die Gleichungsform der Ebene E.

Aufgabe

Aufgabe 9.18

Gegeben seien die Ebene E und die Gerade g mit

$$E: \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$g: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E mit der Geraden g, sofern dieser existiert.

Aufgabe

Aufgabe 9.19

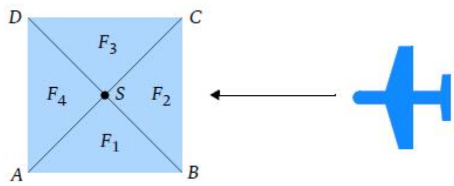
Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichungsform

$$E: x - 2y + z = 0$$

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E.

Aufgabe

Aufgabe 9.20



Die Cheops-Pyramide wurde um 2600 v.Chr. gebaut. Es handelt sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Grundseiten 230 m lang sind und deren Spitze (S) 140 m hoch ist. Die Abbildung zeigt die Pyramide aus der Vogelperspektive.
Ein Sportflugzeug fliegt in konstant 400 m Höhe entlang der gezeigten Linie auf die Spitze der Pyramide zu. Ein Passagier schaut die ganze Zeit gebannt auf die Spitze der Pyramide.

1.) Welche der 4 Pyramidenflächen kann er sehen, wenn das Flugzeug noch 1 km von Punkt S entfernt ist?
2.) Ab welcher Entfernung von Punkt S ist Fläche F_4 sichtbar?

10 Anhang: Lösungen der Aufgaben

Hier finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben der einzelnen Kapitel.

Gliederung

10.1 Lösungen zu Kapitel 1

Aufgabe

Aufgabe 1.1

1.) $\{6, 7, 8, 9\}$
2.) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
3.) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

Aufgabe

Aufgabe 1.2

1.) $\{-2, 1\}$
2.) $\{\}$

Aufgabe

Aufgabe 1.3

1.) $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
2.) $\{d\}$

3.) $\{b, e\}$

4.) $\{b, c, d, e\}$

Aufgabe

Aufgabe 1.4

1.) $[3, \infty)$

2.) $(5, 7)$

3.) $[3, 5]$

4.) $[7, \infty)$

5.) $(-\infty, 5]$

Aufgabe

Aufgabe 1.5

1.) $\overline{W}$

2.) $W \cap D \cap M$

3.) $P \cap (D \cup F \cup G)$

4.) $(M \cup I) - (M \cap I)$ oder $(M - I) \cup (I - M)$

Aufgabe

Aufgabe 1.6

$A - (B - C)$ oder $(A - B) \cup (A \cap C)$

Aufgabe

Aufgabe 1.7

14 Wähler haben zwei Kreuze gemacht.
6 Wähler haben nur Katja gewählt, 5 haben nur Sonja gewählt.

Aufgabe 1.8

Meuselwitz hat 80 Einwohner.

Aufgabe 1.9

1.) 4096

2.) 128

3.) 22

4.) 4

Aufgabe 1.10

Gefragt ist die Anzahl aller Teilmengen von M, die das Element a enthalten. Das sind 8 Stück.

Aufgabe 1.11

{a#1, a#2, a#3, a&1, a&2, a&3}

Aufgabe 1.12

$\mathcal{B}^2 \times \{-\} \times \mathcal{Z}^3 \times \{-\} \times \mathcal{B}^2$

Aufgabe 1.13

1. .) Es gibt $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ Möglichkeiten, ein 3-Gang-Menü zusammenzustellen.
2. .) Es gibt $3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 35$ Möglichkeiten, ein 2-Gang-Menü, bestehend aus Vorspeise und Hauptgericht oder Hauptgericht und Dessert zusammenzustellen.

Aufgabe 1.14

1. .) $\binom{20}{5} = 15504$
2. .) Es gibt $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 1260$ Möglichkeiten. Die Reihenfolg, in der die Drei auswählen, ist übrigens egal. Wenn etwa erst Birgit, dann Carla und zum Schluss Arne auswählt, erhält man $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 1260$.

Aufgabe

Aufgabe 1.15

Es gibt

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{8}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{8}{1} + \binom{5}{5} \cdot \binom{8}{0} = 321$$

Möglichkeiten.

Es gibt

Aufgabe

Aufgabe 1.16

Sei M eine Menge mit n Elementen.

Dann gilt: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller k-elementiger Teilmengen von M.

Dann ist

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

die Anzahl aller Teilmengen von M, also gleich $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

10.2 Lösungen zu Kapitel 2

Aufgabe

Aufgabe 2.1

1.) $$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} - \{2\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array}$$

2.) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x}$

3.) ist gültig

4.) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Aufgabe

Aufgabe 2.2

1.) Menge der ungeraden ganzen Zahlen
2.) Menge der Quadratzahlen $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
3.) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
4.) $\mathbb{R}_0^+$
5.) $\mathbb{R}^+$
6.) $(-7, -1]$

Aufgabe

Aufgabe 2.3

Nur 2.) ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion lautet:

$$f: \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

x	1	2	3	4	5
$f^{-1}(x)$	e	c	a	b	d

Aufgabe

Aufgabe 2.4

1.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \frac{x-1}{2}$

2.) $f: [0,\infty) \to [1,\infty)$, $\quad x \mapsto x^2+1$

3.) ist nicht umkehrbar

4.) $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{x}$

10.3 Lösungen zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

1.), 2.), 5.) und 6.) sind Aussagen, die anderen nicht.

Aufgabe 3.2

3.), 5.) und 6.) sind korrekt, die anderen nicht.

Aufgabe 3.3

1.) und 2.) sind korrekt, die anderen nicht.

Aufgabe 3.4

1.)

A	$\neg A$	$A \rightarrow \neg A$
0	1	1
1	0	0

2.)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

3.)

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1

1	0	1	1
1	1	1	1

4.)

A	B	$A \to B$	$A \land (A \to B)$	$A \land (A \to B) \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

5.)

A	B	C	$B \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Aufgabe

Aufgabe 3.5

a) $J \lor (M \land \neg F)$

b)

J	M	F	$M \land \neg F$	$J \lor (M \land \neg F)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Aufgabe

Aufgabe 3.6

$(A \wedge \neg B) \vee C$ oder dazu äquivalente Formeln.

Aufgabe

Aufgabe 3.7

$(A \wedge (B \vee C \vee D)) \vee (B \wedge C \wedge D)$ oder dazu äquivalente Formeln.

Aufgabe

Aufgabe 3.8

1.) Ulf hat als Einziger gelogen und er war auch der Missetäter.
2.) Patrick hat als Einziger die Wahrheit gesagt und Lena war die Täterin.

10.4 Lösungen zu Kapitel 4

Aufgabe

Aufgabe 4.1

Oft gibt es mehrere Möglichkeiten, Regeln auf einen konkreten Ausdruck anzuwenden. In einigen Fällen sind hier mehrere alternative Lösungswege angegeben. Anwendungen der Regeln (2) und (3), Kommutativ- und Assoziativgesetz, werden nicht explizit aufgeführt.

a) Erste Möglichkeit: Anwendung (8) «außen».

$$\begin{array}{rcll} \neg(A \wedge \neg(A \wedge B)) & \equiv & \neg A \vee \neg\neg(A \wedge B) & (8) \\ & \equiv & \neg A \vee (A \wedge B) & (9) \\ & \equiv & \neg A \vee B & (13) \end{array}$$

a) Zweite Möglichkeit: Anwendung (8) «innen».

$$\begin{array}{rcll} \neg(A \wedge \neg(A \wedge B)) & \equiv & \neg(A \wedge (\neg A \vee \neg B)) & (8) \\ & \equiv & \neg(A \wedge \neg B) & (13) \\ & \equiv & \neg A \vee B & (8+9) \end{array}$$

b) Erste Möglichkeit: Anwendung (6) außen

$$
\begin{aligned}
A \vee (B \wedge (A \vee C)) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee A \vee C) && (6)\\
&\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) && (1)\\
&\equiv A \vee (B \wedge C) && (6)
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die letzte Vereinfachung muss nicht durchgeführt werden. Die Formel in der vorletzten Zeile wäre als Endergebnis auch zulässig. b) Zweite Möglichkeit: Anwendung (6) innen

$$
\begin{aligned}
A \vee (B \wedge (A \vee C)) &\equiv A \vee (B \wedge A) \vee (B \wedge C) && (6)\\
&\equiv A \vee (B \wedge C) && (4)
\end{aligned}
$$

c) Im ersten Schritt wird Regel (6) von rechts nach links angewandt («ausklammern»)

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) &\equiv A \wedge (B \vee (\neg B \wedge C)) && (6)\\
&\equiv A \wedge (B \vee C) && (13)
\end{aligned}
$$

d) Im ersten Schritt wird Regel (6) von rechts nach links angewandt («ausklammern»)

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) &\equiv A \wedge (B \vee C \vee (\neg B \wedge \neg C)) && (6)\\
&\equiv A \wedge (B \vee C \vee \neg B) && (13)\\
&\equiv A \wedge (1 \vee C) && (7)\\
&\equiv A \wedge 1 && (10)\\
&\equiv A && (5)
\end{aligned}
$$

e) Erste Möglichkeit: Anwendung (6) außen

$$
\begin{aligned}
A \vee (B \wedge (\neg A \vee C)) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee C) && (6)\\
&\equiv (A \vee B) \wedge 1 && (7, 10)\\
&\equiv A \vee B && (5)
\end{aligned}
$$

e) Zweite Möglichkeit: Anwendung (6) innen

$$
\begin{aligned}
A \vee (B \wedge (\neg A \vee C)) &\equiv A \vee (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge C) && (6)\\
&\equiv A \vee B \vee (B \wedge C) && (13)\\
&\equiv A \vee B && (4)
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
A \wedge \neg(B \wedge \neg(A \wedge C)) &\equiv A \wedge (\neg(B \vee (A \wedge C)) && (8, 9)\\
&\equiv (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) && (6, 1)\\
&\equiv A \wedge (\neg B \vee C) && (6)
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die letzte Vereinfachung muss nicht durchgeführt werden. Die Formel in der vorletzten Zeile wäre als Endergebnis auch zulässig.

g)

$$
\begin{aligned}
(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) &\equiv (\neg A \vee B) \rightarrow (\neg B \vee C) && (11, 11)\\
&\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) && (11)\\
&\equiv (A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee C && (8, 9)\\
&\equiv \neg B \vee C && (4)
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
((A \to B) \to \neg A) \to \neg B \quad &\equiv \quad ((\neg A \lor B) \to \neg A) \to \neg B && (11)\\
&\equiv \quad (\neg(\neg A \lor B) \lor \neg A) \to \neg B && (11)\\
&\equiv \quad ((A \land \neg B) \lor \neg A) \to \neg B && (8, 9)\\
&\equiv \quad (\neg B \lor \neg A) \to \neg B && (13)\\
&\equiv \quad \neg(\neg B \lor \neg A) \lor \neg B && (11)\\
&\equiv \quad (B \land A) \lor \neg B && (8)\\
&\equiv \quad A \lor \neg B && (13)\\
&\equiv \quad B \to A && (11)
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die letzte Vereinfachung muss nicht durchgeführt werden. Die Formel in der vorletzten Zeile wäre als Endergebnis auch zulässig.

Aufgabe

Aufgabe 4.2

Tautologien sind b), d), e) und f); Kontradiktion ist c); weder T noch K ist a).

Aufgabe

Aufgabe 4.3

Beweis durch Vereinfachung der linken und der rechten Seiten.

	Linke Seite	Rechte Seite	Jeweils Vereinfacht zu
1.)	$A \land (A \to B)$	$B \land (B \to A)$	$A \land B$
2.)	$A \leftrightarrow B$	$(A \lor B) \to (A \land B)$	$(\neg A \land \neg B) \lor (A \land B)$
3.)	$(\neg A) \leftrightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$	$(A \land \neg B) \lor (A \land \neg B)$
4.)	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	$(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C)$ $\lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C)$
5.)	$A \to (B \land C)$	$(A \to B) \land (A \to C)$	$(\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C)$
6.)	$A \leftrightarrow B$	$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$	$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

Aufgabe

Aufgabe 4.4

- In DNF sind a), c) und f)
- In KNF sind c), e) und f)
- weder noch sind b) und d)

Aufgabe

Aufgabe 4.5

a)

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A) \\
\equiv\ & (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A) \quad (11, 11, 11) \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge A) \\
& \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C \wedge A) \\
& (B \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg B \wedge A) \\
& \vee (B \wedge C \wedge \neg C) \vee (B \wedge C \wedge A) \\
\equiv\ & (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)
\end{aligned}
$$

b) $\neg A \vee \neg B \vee C$

c) $\neg A \vee \neg B \vee C$

d) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge C \wedge E)$

Aufgabe

Aufgabe 4.6

a) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

b) $(A \vee C \vee E) \wedge (\neg B \vee C \vee E) \wedge (\neg D \vee E)$

Aufgabe

Aufgabe 4.7

Kanonische DNF:

$$(\neg J \wedge \neg M \wedge \neg F) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge F) \vee (\neg J \wedge M \wedge F)$$

Aufgabe

Aufgabe 4.8

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C \wedge D)$$

Aufgabe

Aufgabe 4.9

J = Herr Müller joggt; R = Herr Müller raucht; F = Herr Müller sieht fern. Aus den vier Aussagen ergeben sich folgende (mit «und» zu verknüpfende) Formeln:

1.) $J \to R \vee F$
2.) $\neg F \to \neg J \vee \neg R$
3.) $\neg R \to \neg J \vee \neg F$
4.) $\neg J \vee \neg R \vee \neg F$

Durch Umformung ergibt sich zunächst die kanonische KNF

$$(\neg J \vee R \vee F) \wedge (\neg J \vee \neg R \vee F) \wedge (\neg J \vee R \vee \neg F) \wedge (\neg J \vee \neg R \vee \neg F)\,,$$

die sich zu $\neg J$ vereinfachen lässt. Herr Müller geht also keinesfalls joggen. Ob er hingegen rauchen wird oder fernsehen, das wissen nur die Götter.

Aufgabe 4.10

Es kommen nur Anne und Birte.

Aufgabe 4.11

Ähnlich wie in Aufgabe 4.9: Klaus muss auf jeden Fall Rosen mitbringen. (Das gehört sich auch so!)

Aufgabe 4.12

Ähnlich wie in Aufgabe 4.9: Herr Konopka schwimmt nicht, wandert nicht und fährt auch nicht Fahrrad.

10.5 Lösungen zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1

Die zu der Wahrheitstafel gehörige aussagenlogische Formel in kanonischer DNF lautet:

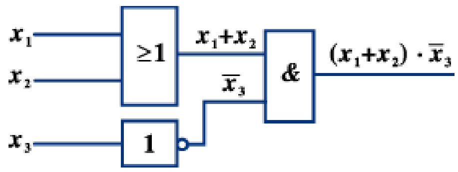
$$B = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3)\,.$$

Äquivalente Umformungen gemäß den Axiomen der Boole'schen Algebra liefern:

$$\begin{aligned}
B &= ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot \bar{x}_2) + (x_1 \cdot x_2)) \cdot \bar{x}_3 && \text{Distributivgesetz} \\
&= ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2))) \cdot \bar{x}_3 && \text{Distributivgesetz} \\
&= ((\bar{x}_1 \cdot x_2) + x_1) \cdot \bar{x}_3 && \text{Tautologie} \\
&= (x_1 + x_2) \cdot \bar{x}_3 && \text{Distributivgesetz, Tautologie}
\end{aligned}$$

(Formeln s. Kapitel <u>Die Gesetze der Aussagenlogik</u>)

Der entsprechende Bauplan hat die folgende Gestalt:



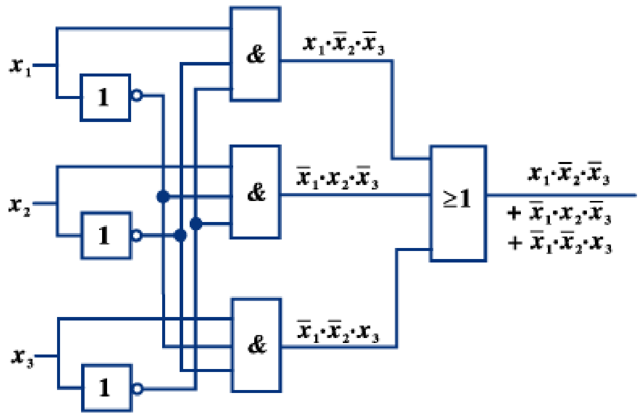
Aufgabe

Aufgabe 5.2

a) Die zugehörige Boole'sche Funktion in DNF lautet

$B = (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3)$

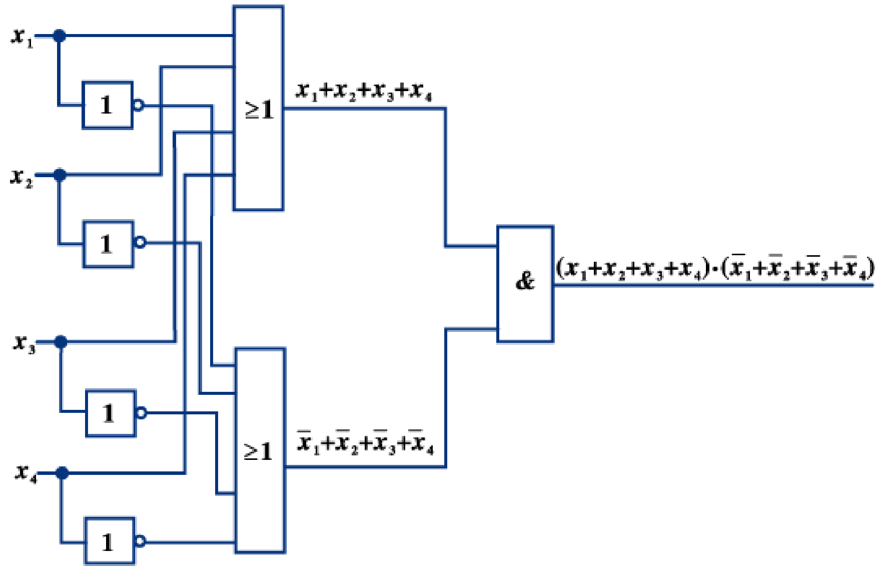
und der entsprechende Bauplan stellt sich wie folgt dar:



b) De zugehörige Boole'sche Funktion in KNF lautet:

$B = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$

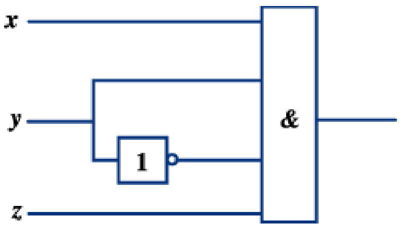
und der entsprechende Bauplan stellt sich wie folgt dar:



Aufgabe 5.3

a) $(x \cdot \bar{y}) + (y \cdot z)$

b) $\overline{(x \cdot \bar{y}) + \overline{y \cdot z})} = x \cdot \bar{y} \cdot y \cdot z = 0$



10.6 Lösungen zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1

1.) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	2.) nicht möglich	3.) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
4.) $\begin{pmatrix} 6 & 11 & 4 \\ 6 & 11 & 0 \end{pmatrix}$	5.) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	

Aufgabe 6.2

Folgende zwei Produkte sind definiert:

$$A^\top \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.3

Folgende Produkte sind definiert:

$$A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.4

Aufgabe

Allgemeines Schema:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.5

Aufgabe

Es gilt:

$$A = 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, v = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$A \cdot v = 6 \cdot 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 42 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

Aufgabe

Die Multiplikation einer $m \times n$-Matrix mit einer $n \times k$-Matrix benötigt $m \cdot n \cdot k$ Multiplikationen.

Die Variante $(A \cdot B) \cdot C$ in der Aufgabe erfordert daher 1,2 Millionen Multiplikationen, während die Variante $A \cdot (B \cdot C)$ lediglich 22000 Multiplikationen erfordert.

Aufgabe 6.7

Aufgabe

Die Matrix A ist eine 3×4-Matrix.

Aufgabe 6.8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

Die folgende Matrix A stellt die Zuordnung der Rohstoffe zu den Biersorten dar:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 10 & 3 \\ 10 & 15 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor v realisiert die Kundenbestellung:

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der Rohstoffe, die für die Bestellung benötigt werden, ergibt sich aus:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 96 \\ 50 \\ 236 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Teil stellt die Matrix B die Rohstoffpreise bei den zwei Lieferanten dar:

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 9 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Die Rohstoffpreise für die 4 Biersorten ergeben sich durch:

$$A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 216 & 218 \\ 299 & 307 \\ 300 & 314 \\ 224 & 219 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.10

Die Überganmgsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,3 & 0,15 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Der Startvektor:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

Nach einem Monat:

$$v_1 = M \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,21 \\ 0,53 \end{pmatrix}$$

Nach einem Jahr:

$$v_{12} = M^{12} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1759 \\ 0{,}1868 \\ 0{,}6373 \end{pmatrix}$$

10.7 Lösungen zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1

1.) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2.) $\mathbb{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

3.) $\mathbb{L} = \emptyset$

4.) $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

5.) $\mathbb{L} = \emptyset$

6.) $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 7.2

Es gilt $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genau dann, wenn das Gleichungssystem

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

(mindestens) eine Lösung für die Unbekannten x, y und z hat. Daraus ergibt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung $x = 3, y = -1, z = -2$ und daraus folgt $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Aufgabe

Aufgabe 7.3

1.) nicht abgeschlossen
2.) abgeschlossen
3.) nicht abgeschlossen
4.) nicht abgeschlossen, weil die Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Aufgabe

Aufgabe 7.4

Ja, die Menge $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter Matrixmultiplikation. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Elemente von $\mathcal{M}$. Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

Aufgabe

Aufgabe 7.5

1.) Die Menge M_1 ist ein Vektorraum, denn sie ist abgeschlossen unter Vektoraddition und skalarer Multiplikaiton (lässt sich leicht nachrechnen).
2.) Die Menge M_2 ist kein Vektorraum, denn sie enthält nicht den Nullvektor.
3.) siehe 2.)
4.) Die Menge M_4 ist kein Vektorraum, denn sie ist nicht abgeschlossen unter skalarer Multiplikation. Ist $v \in M_4$ und $v \neq \mathbf{0}$, so ist $(-1) \cdot v$ ganz sicher kein Element von M_4.

Aufgabe

Aufgabe 7.6

1.) nicht invertierbar, da nicht quadratisch

2.) nicht invertierbar, weil $\det A_2 = 0$

3.) invertierbar; $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4.) invertierbar; $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

5.) nicht invertierbar, weil $\det A_5 = 0$

6.) invertierbar; $A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 7.7

1.) Wir multiplizieren die Gleichung $A \cdot u = b$ mit A^{-1} und erhalten

$$A^{-1} \cdot A \cdot u = A^{-1} \cdot b$$

und wegen $A^{-1} \cdot A = E$ folgt daraus

$$u = A^{-1} \cdot b\,.$$

2.) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Aufgabe 7.8

1.) 45

2.) -6

Aufgabe

Aufgabe 7.9

Die folgenden vier Matrizen haben die gewünschte Eigenschaft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Aufgabe 7.10

Mithilfe der beiden Sätze aus Abschnitt 7.9 ergibt sich:

$$\begin{aligned} A \cdot B \text{ ist invertierbar } &\Leftrightarrow \det(A \cdot B) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ und } \det(B) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar und } B \text{ ist invertierbar.} \end{aligned}$$

Aufgabe

Aufgabe 7.11

Es gilt

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

und daraus folgt sofort die Behauptung.

10.8 Lösungen zu Kapitel 8

Aufgabe

Aufgabe 8.1

C_1 kann einen Bitfehler erkennen, C_2 kann keinen Bitfehler erkennen, C_3 kann zwei Bitfehler erkennen.

Aufgabe

Aufgabe 8.2

$C = \{0000, 1110, 1100, 1000, 0010, 0110, 0100, 1010\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.3

$C = \{0000, 1101, 1001, 0111, 0100, 1010, 1110, 0011\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.4

1.) $C = \{000000, 001011, 010101, 011110, 100110, 101101, 110011, 111000\}$

2.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 8.5

1.) $|C_1|$ ist keine Zweierpotenz.
2.) C_2 enthält nicht das Nullwort.
3.) $1000 + 0100 \notin C_3$

Aufgabe

Aufgabe 8.6

Prinzipiell können alle Teilaufgaben bewiesen werden, indem man die Abgeschlossenheit zeigt. Bei C_2 und C_3 ist dies allerdings recht mühsam.

Alternativ kann man auch jeweils ein Erzeugendensystem oder eine Generator- oder eine Prüfmatrix angeben. Dafür gibt es jeweils viele Möglichkeiten. Im Folgenden sind für jeden Code ein Erzeugendensystem und eine Prüfmatrix aufgeführt. Es gibt jedoch noch viel mehr Möglichkeiten!

Code	**Erzeugendensystem**	**Prüfmatrix**
C_1	$C_1 = \langle 10101, 01010 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
C_2	$C_1 = \langle 00100, 01010, 10001 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
C_3	$C_1 = \langle 00101, 01000, 10010 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe

Aufgabe 8.7

1.) Der Code C_1 ist nicht linear, denn er enthält nicht das Nullwort.
2.) Der Code C_2 ist nicht linear, denn $11000 \in C_2$ und $00111 \in C_2$, aber $11000 + 00111 \notin C_2$
3.) der Code C_3 ist linear. Er ist identisch mit dem Code C_2 aus Aufgabe 8.6.

Aufgabe

Aufgabe 8.8

Wegen $|C| = 8 = 2^3$ hat eine Baiss 3 Elemente. Aus diesem Grund scheiden M_1 und M_3 aus. Die Menge M_4 ist nicht linear unabhängig (00100 + 01110 = 01010), scheidet also ebenfalls aus. Die Menge M_2 ist linear unabhängig und nach dem Satz «Lineare Unabhängigkeit und Dimension» aus Abschnitt 8.6 eine Basis von C.

Aufgabe

Aufgabe 8.9

- Die Menge M_1 besteht aus vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und ist somit nach dem Satz «Lineare Unabhängigkeit und Dimension» aus Abschnitt 8.6 linear abhängig und erst recht keine Basis.
- Die Menge M_3 besteht aus nur 2 Elementen und kann nach dem selben Satz keine Basis sein.
- Die Menge M_2 ist linear unabhängig und nach dem selben Satz eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe

Aufgabe 8.10

$C = \{000000, 111100, 110010, 011001, 001110, 100101, 101011, 010111\}$

Aufgabe

Aufgabe 8.11

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten. Wegen $|C| = 16 = 2^4$ muss eine Basis 4 Elemente enthalten. Eine solche Möglichkeit ist

$$B = \{10000, 11100, 01110, 00111\}$$

Aufgabe

Aufgabe 8.12

- Für das erste Element der Basis gibt es $16-1=15$ Möglichkeiten.
- Für das zweite Element gibt es $16-2=14$ Möglichkeiten.
- Für das dritte Element gibt es $16-4=12$ Möglichkeiten.
- Für das vierte Element gibt es $16-8=8$ Möglichkeiten.

Insgesamt sind dies $15\cdot 14\cdot 12\cdot 8=20160$ Möglichkeiten.

10.9 Lösungen zu Kapitel 9

Aufgabe 9.1

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$

Aufgabe 9.2

Betrag	**Steigungswinkel**
$\lvert u\rvert=2\sqrt{2}$	$\alpha_u=45^\circ$
$\lvert v\rvert=2$	$\alpha_v=-60^\circ$
$\lvert w\rvert=2$	$\alpha_w=-150^\circ$

Aufgabe 9.3

$v=\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}, t=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Aufgabe 9.4

1.) $\alpha=90^\circ$, Linksdrehung (gegen den Uhrzeigersinn)
2.) $\alpha=36,87^\circ$, Rechtsdrehung (im Uhrzeigersinn)

Aufgabe 9.5

Siehe Abschnitt 9.1.3.1). Wir untersuchen die Orientierung der Winkel $\angle BAP, \angle CBP$ und $\angle ACP$. Falls alle Winkel die selbe Orientierung haben, liegt der Punkt P innerhalb des Dreiecks ABC.

1.) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = \det(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}) = 19 > 0$

2.) $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}) = \det(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = 1 > 0$

3.) $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = \det(\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 6 > 0$ Alle drei Winkel haben die selbe Orientierung, der Punkt P liegt also innerhalb des Dreiecks ABC.

Aufgabe

Aufgabe 9.6

Wir untersuchen die Orientierung der Winkel $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ und $\angle CDA$. Falls alle Winkel die selbe Orientierung haben, ist das Viereck konvex, wenn ein Winkel eine andere Orientierung hat als die drei anderen, so ist das Viereck konkav (Siehe dazu auch Abschnitt 9.1.3.1).

1.) $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \det(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}) = -65 < 0$

2.) $\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \det(\begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}) = -25 < 0$

3.) $\det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \det(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}) = 15 > 0$

4.) $\det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \det(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}) = -25 < 0$

Es handelt sich daher um ein konkaves Viereck.

Alternativer Lösungsansatz: Man bestimmt den Diagonalenvektor $\overrightarrow{AC}$ und prüft, ob die Punkte B und D von $\overrightarrow{AC}$ aus gesehen auf der selben Seite oder auf unterschiedlichen Seiten liegen. Im ersten Fall ist das Viereck konkav. Im zweiten Fall muss man eine analoge Prüfung für den Diagonalenvektor $\overrightarrow{BD}$ und die Punkte A und C durchführen.

Aufgabe

Aufgabe 9.7

Es ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

und

$$F = \frac{1}{2} \cdot \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4$$

Aufgabe

Aufgabe 9.8

In Aufgabe 9.6 hatten wir gesehen: Das Viereck ist konkav. Offenbar ist der «Knick» bei C. Dann verläuft die Diagonale AC innerhalb des Dreicks, die Diagonale BD jedoch außerhalb. Somit gilt

$$F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ACD} = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 25.$$

Aufgabe

Aufgabe 9.9

Eine mögliche Darstellung ist: $g\colon \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe

Aufgabe 9.10

$d(P, g) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$

Aufgabe

Aufgabe 9.11

$S(1\,|\,1)$

Aufgabe

Aufgabe 9.12

1.) A'(0|6), B'(10|0), C'(4|15)
2.) A'(1,73|1), B'(2,5|-4,33), C'(5,33|0,77)

Aufgabe

Aufgabe 9.13

1.) $B(-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $C(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\sqrt{3})$

2.) Alle Seiten haben die Länge $\sqrt{3}$.

3.) $F = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe

Aufgabe 9.14

Es ist die Matrix der Spiegelung an der x-Achse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Aufgabe 9.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Aufgabe 9.16

1.) $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.) $[uvw] = -15$

Aufgabe

Aufgabe 9.17

1.) $E\colon \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

2.) $n = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

3.) $6x - 2y + 11z = 19$

Aufgabe

Aufgabe 9.18

$S(-4|-6|1)$

Aufgabe

Aufgabe 9.19

Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen. Man erhält eine Lösung, indem man drei Punkte A, B und C bestimmt, deren Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen, beispielsweise A(0|0|0), B(1|0|-1) und C(0|1|2) und daraus die Parameterform der Ebene ableitet. In diesem Fall wäre das

$$E: \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe

Aufgabe 9.20

Zunächst legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt A. (Es könnte auch jeder der anderen drei Eckpunkte der Pyramide sein, S scheint mir als Koordinatenurspung jedoch nicht geeignet zu sein.) Es ergibt sich:

$$A(0|0|0), B(230|0|0), C(230|230|0), D(0|230|0), S(115|115|140)$$

Nun bestimmen wir die Normalenvektoren der vier Flächen (jeweils n_i der Normalenvektor von F_i). Es ergibt sich

$$n_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -32200 \\ 26450 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 32200 \\ 0 \\ 26450 \end{pmatrix}$$

$$n_3 = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32200 \\ 26450 \end{pmatrix}$$

$$n_4 = \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} -32200 \\ 0 \\ 26450 \end{pmatrix}$$

a) Der Sehstrahl ergibt sich zu

$$s = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$s \cdot n_1 > 0, s \cdot n_2 > 0, s \cdot n_3 > 0, s \cdot n_4 < 0$$

Der Passagier kann alle Flächen außer F_4 sehen.

b) Die Fläche F_4 kann er erst ab etwa 213,6 m von S entfernt sehen.

11 Anhang: Begriffsübersicht

Begriffe

Begriff	**Symbol**	**Erklärung**
Abbildung		synonym für Funktion. Wird meist im Kontext der Algebra und linearen Algebra gebraucht.
abgeschlossen		Eine Menge M ist abgeschlossen unter einer Verknüpfung •, falls aus $a, b \in M$ folgt, dass auch $a \cdot b \in M$
Äquivalenz, logische	$A \equiv B$	zwei Formeln sind logische äquivalent, wenn sie in jeder Zeile der Wahrheitstafel jeweils die selben Werte haben
Code	C	hier im Skript: Kurzwort für Binärer Blockcode. Ein Code der Länge n ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}_2^n$.
Code, linearer		Code, der ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ ist.
Code, Block~		Code, bei dem alle Codewörter gleich lang sind.
Code, Paritäts~		Code, der aus allen Binärwörtern der Länge n mit einer geraden Anzahl von Einsen besteht.
Code, Binär~		Code, dessen Wörter Binärwörter (d.h. bestehend aus den Zeichen 0 und 1) sind.
Definitionsbereich einer Funktion f		Menge aller Objekte, für die die Funktion f definiert ist.
Determinante	$\det A$	Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet
Ebene	E	Zweidimensionales ebenes Objekt im Raum
Ebene, Stützvektor einer ~		Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene
Ebene, Richtungsvektor einer ~		beliebiger Vektor in Richtung der Ebene

Ebene, Normalenvektor einer ~		normierter Vektor senkrecht zur Ebene
Ebene, Parameterform einer ~	$u + \langle v, w \rangle$	u ist Stütz-, v und w sind Richtungsvektorenb von E
Ebene, Gleichungsform einer ~		Gleichung der Form $ax + by + cz = d$
Ebene, Ursprungs~		Ebene durch den Ursprung
Fixpunkt		Ein Fixpunkt einer Funktion f ist ein Punkt x mit $f(x) = x$
Funktion	$f\colon A \to B$	Eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein eindeutiges $f(x) \in B$ zuordnet. Synonym zum Begriff «Abbildung».
Funktion, Umkehr~	f^{-1}	Eine Funktion, die die Wirkung der Funktion $f\colon A \to B$ rückgängig macht. Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.
Funktion, umkehrbare		die Funktion f heißt umkehrbar, wenn die Umkehrfunktion f^{-1} existiert.
Gerade	g, h	Eindimensionales geradliniges Objekt in der Ebene oder im Raum
Gerade, Parameterform einer ~		$g\colon u + \langle v \rangle$. Der Vektor u ist der Stützvektor, v der Richtungsvektor der Geraden.
Gerade, Stützvektor einer ~		Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Geraden
Gerade, Richtungsvektor einer ~		Vektor in Richtung der Geraden
Gerade, Ursprungs~		Gerade durch den Ursprung

Gleichungssystem		Menge von Gleichungen
Gleichungssystem, lineares	LGS	Ein Gleichungssystem der Form $A \cdot u = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, u \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. A ist die Koeffizientenmatrix, u der Vektor der Unbekannten und b der Vektor der rechten Seiten.
Gleichungssystem, homogenes	Ein LGS der Form $A \cdot u = \mathbf{0}$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, u \in \mathbb{R}^n$.	
HAU		Abkürzung für die fiktive Henrik-Abel-Universität, die in vielen Aufgaben immer wieder auftaucht. Anmerkung: Niels Henrik Abel war ein berühmter norwegischer Mathematiker
Klause, Königsberger		Fiktives Restaurant in der Königsberger Straße, die in vielen Aufgaben immer wieder auftaucht. Anmerkung: Die sieben Brücken von Königsberg waren Anlass für den großen Schweizer Mathematiker Leonhard Euler , das so genannte Königsberger Brückenproblem zu lösen.
Kontradiktion		Eine logische Formel ist eine Kontradiktion, wenn sie logisch äquivalent zum Wahrheitswert 0 (falsch) ist.
Kreuzprodukt	$v \times w$	Operation, die zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ zuordnet.
lineare Hülle	$\langle M \rangle$	einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$: Menge aller Linearkombinationen der Vektoren in M
Linearkombination		... der Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ ist ein Ausdruck der Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$
linear unabhängige Menge		Menge von Vektoren, die keine →überflüssigen Elemente enthält
Matrix	$A, B, \ldots, M$	ein rechteckiges Zahlenschema

Matrix, quadratische		ein quadratisches Zahlenschema (eine $n \times n$-Matrix)
Matrix, transponierte	$A^\top$	die transponierte Matrix zu A. Die Zeilen von A sind die Spalten von $A^\top$
Matrix, inverse	A^{-1}	die inverse Matrix zu A. A muss quadratisch sein. Es gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
Matrix, invertierbare		die Matrix A ist invertierbar, wenn die Inverse A^{-1} existiert.
Matrix, Generator~	G	Durchläuft w alle Wörter aus $\mathbb{Z}_2^k$, so durchläuft $G \cdot w$ alle Wörter des Codes C.
Matrix, Prüf~	H	Ein Wort w ist genau dann ein Codewort, wenn $H \cdot w = \mathbf{0}\}$ ist.
Matrix, Dimension einer ~	$m \times n$	m = Anzahl der Zeilen, n = Anzahl der Spalten
Matrix, Einheits~	E	quadratische Matrix, die in der absteigenden Diagonalen lauter Einsen und sonst überall nur Nullen hat.
orthogonal		Zwei Vektoren (oder Geraden) sind orthogonal, wenn sie einen rechten Winkel einschließen.
Pivot-Element		Beim Gauß-Algorithmus: Diagonalelement in der aktuellen Spalte.
Pivot-Zeile		Beim Gauß-Algorithmus: Die Zeile, in der sich das Pivot-Element befindet.
Projektion		geometrische Transformation, die ein räumliches Objekt in ein ebenes Objekt abbildet
Relation		Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.
Skalar	$\lambda, \mu, \ldots$	eine (reelle) Zahl
skalare Multiplikation	λv	Multiplikation Skalar mal Vektor. Das Ergebnis ist ein Vektor.

Skalarprodukt	$v \cdot w$	Multiplikation Vektor mal Vektor. Das Ergebnis ist ein Skalar. Der Malpunkt wird nie weggelassen!
Spann		Synonym für lineare Hülle
Spatprodukt	$[uvw]$	Operation, die 3 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ einen Skalar zuordnet
Steigungswinkel		eines Vektors v oder einer Geraden g in der Ebene: Winkel zwischen v bzw. g und der x-Achse
Tautologie		Eine logische Formel ist eine Tautologie, wenn sie logisch äquivalent zum Wahrheitswert 1 (wahr) ist.
Teufelsbarsch		Fiktiver Fisch, der in einem Beispiel auftaucht(!)
überflüssig		Ein Vektor v heißt überflüssig in einer Menge M, wenn $\langle M - \{v\}\rangle = \langle M\rangle$ ist.
Unterraum	U	Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum ist
Vektor	$u, v, w, \ldots$	Synonym für Spaltenvektor
Vektor, normierter ~		Vektor der Länge 1
Vektor, Orts~		... eines Punktes P: Ein Vektor der Form $\overrightarrow{OP}$
Vektor, Spalten~	Eine $m \times 1$-Matrix, d.h. eine Matrix mit nur einer einzigen Spalte	
Vektor, Zeilen~	$u, v, w, \ldots$	Eine $1 \times n$-Matrix, d.h. eine Matrix mit nur einer einzigen Zeile
Vektor, Betrag eines ~	$\|v\|$	$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
Vektorprodukt		synonym für Kreuzprodukt

Vektorraum	$V, W, U, \ldots$	Menge von Vektoren (gleicher Dimension), die →abgeschlossen unter Vektoraddition und skalarer Multiplikation ist.
Vektorraum, Dimension eines ~	$\dim V$	Anzahl der Elemente einer Basis von V
Vektorraum, Basis eines ~	B	Minimales Erzeugendensystem des Vektorraums
Vektorraum, Erzeugendensystem eines ~		Menge von Vektoren, deren lineare Hülle gleich V ist

Symbole und Notationen

Symbol	**Erklärung**
$:=$	$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Das, was links von $:=$ steht, wird definiert durch das, was rechts steht.
$\emptyset$	leere Menge
$\lvert M \rvert$	Mächtigkeit der endlichen Menge M (= Anzahl ihrer Elemente)
$A \cap B$	Schnittmenge
$A \cup B$	Vereinigungsmenge
$A - B$	Differenzmenge
$\overline{A}$	Komplementmenge
$a \in A$	a ist Element der Menge A
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von M
$A \times B$	kartesisches Produkt der Mengen A und B
A^n	n-faches kart. Produkt der Menge A mit sich, $A^n = A \times \cdot \times A$
$f : A \to B$	Funktion mit Namen f, Definitionsbereich A und Wertevorrat B
$x \mapsto f(x)$	Funktionsvorschrift, die angibt, wie der Funktionswert von x zu berechnen ist
f^{-1}	Umkehrfunktion von f

$n!$	Fakultät von n
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
$A \wedge B$	logisches «und» (Konjunktion)
$A \vee B$	logisches «oder» (Disjunktion)
$\neg A$	logisches «nicht» (Negation)
$A \rightarrow B$	logisches «wenn ... dann» (Implikation)
$A \leftrightarrow B$	logisches «genau dann, wenn» (Äquivalenz)
$A \oplus B$	logisches «entweder ... oder» (Exklusives Oder)
$A \equiv B$	logische Äquivalenz
$A \vDash B$	logische Implikation
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit reellen Komponenten.
$\mathbb{R}^{n}$	Kurzform für $\mathbb{R}^{m \times 1}$. Menge aller Spaltenvektoren mit n reellen Komponenten.
$\mathbb{Z}_2$	Menge $\{0, 1\}$ mit der Addition 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0 und der Multiplikation 0·0=0, 0·1=1·0=0, 1·1=1.
$\mathbb{Z}_2^{m \times n}$	Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{Z}_2$.
$\mathbb{Z}_2^{n}$	Kurzform für $\mathbb{Z}_2^{n \times 1}$. Menge aller Spaltenvektoren mit n Komponenten aus $\mathbb{Z}_2$.
$[1:n]$	Menge aller ganzer Zahlen zwischen 1 und n (also $\{1, 2, \ldots, n\}$
$A^{\top}$	transponierte Matrix zu A
A^{-1}	inverse Matrix zu A
$a_{i\,*}$	i-ter Zeilenvektor der Matrix A
$a_{*\,j}$	j-ter Spaltenvektor der Matrix A
A^{n}	n-te Potenz der Matrix A, also $A \cdot A \cdots A$ (n -mal)
E_n (kurz E)	$n \times n$ -Einheitsmatrix
$\mathbb{L}(A, b)$	Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot u = b$

$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$	lineare Hülle (= Menge aller Linearkombinationen) der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$
$\overrightarrow{PQ}$	Vektor vom Punkt P zum Punkt Q
O	Der Koordinatenursprung
$v \times w$	Kreuzprodukt der Vektoren v und w
$[uvw]$	Spatprodukt der Vektoren u, v und w
$P(a\|b)$	Punkt in einem ebenen Koordinatensystem mit den Koordinaten a und b
$P(a\|b\|c)$	Punkt in einem räumlichen Koordinatensystem mit den Koordinaten a, b und c
$\hat{v}$	$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$.
$\|v\|$	Betrag (Länge) des Vektors v
$S(\lambda, \mu)$	Matrix der (ebenen) Skalierung mit den Faktoren λ und μ
$R(\varphi)$	Matrix der ebenen Rotation um den Winkel φ

I Literaturverzeichnis

II Abbildungsverzeichnis

III Medienverzeichnis

IV Aufgabenverzeichnis

V Index