

Lógica Computacional

Álgebra de Conjuntos

Profª. Ms. Adriane Ap. Loper

- Unidade de Ensino: Álgebra de Conjuntos
- Competência da Unidade Conhecer a teoria de conjuntos, simbologia associada, negação de sentenças, operações entre conjuntos, propriedades, produto cartesiano.
- Resumo: Conhecer a teoria de conjuntos, simbologia associada, negação de sentenças, operações entre conjuntos, propriedades.
- Palavras-chave: Conjuntos; Operações entre conjuntos; Conjuntos numéricos, produto cartesiano.
- Título da Teleaula: Álgebra de Conjuntos
- Teleaula nº: 02

Contextualização

- ✓ A Álgebra de Conjuntos é um importante ramo da Matemática e com aplicações em diferentes áreas de conhecimento, entre elas a Computação.
- ✓ A linguagem de conjuntos se caracteriza por ser uma linguagem clara, concisa, rigorosa e que não dá margens a interpretações equivocadas.
- ✓ Por apresentar essas características, ela é utilizada na organização de informações e resolução de problemas ligados a várias áreas, como a computação.



Contextualizando

- ✓ Considere, por exemplo, situações em que seja necessário contabilizar o número de subconjuntos (possibilidades) derivados de outro conjunto; identificar a quantidade de elementos que gozam de determinada característica e/ou propriedade; e estudar relações entre conjuntos.
- ✓ Compreender a linguagem de conjuntos possibilitará a abordagem desses problemas
- ✓ Vamos aprender?



Contextualizando

- ✓ Você sabe o que é a cardinalidade de um conjunto?
- ✓ Você sabe demonstrar a igualdade entre dois conjuntos?
- ✓ Você sabe determinar e identificar todos os subconjuntos derivados de um determinado conjunto?
- ✓ Profissionais da área da computação constantemente se deparam com situações desse tipo.
- ✓ Vamos compreender um pouco mais?



Teoria de Conjuntos

Sua missão

- ✓ Você foi contratado por uma grande empresa do setor de Tecnologia da Informação (TI) e está trabalhando em uma equipe no desenvolvimento de um aplicativo para telefones móveis.
- ✓ Você ficou responsável por elaborar diferentes chaves de acesso para esse aplicativo, e durante esse trabalho, você se deparou com o problema de identificar quantos e quais são os subconjuntos derivados de um conjunto constituído por quatro elementos arbitrários $\{1, 2, 3, 4\}$.
- ✓ As possíveis combinações (subconjuntos) encontradas deverão ser apresentadas para o restante da equipe que utilizará essas informações para finalizar o layout da tela.



Fonte: Shutterstock

Sua missão

- inicial do aplicativo.
- ✓ Você conseguiria determinar quantos subconjuntos podem ser formados, independentemente do seu "tamanho" (número de elementos) a partir da conjugação dos quatro elementos arbitrários?
 - ✓ Você saberia identificar todos esses subconjuntos? Determinar quantos subconjuntos podem ser formados, independentemente do seu "tamanho" (número de elementos) e identificá-los (um a um) é uma tarefa que exige raciocínio combinatório, metodologia e organização.
 - ✓ Para resolver tal problema, será necessário compreender o significado de subconjunto e as relações entre conjuntos.



Fonte: Shutterstock

Teoria de Conjuntos

Conjunto: podemos entender intuitivamente como sendo uma coleção, um agrupamento, uma reunião ou um grupo de elementos que possui alguma característica em comum. Conjuntos podem ser definidos como coleções não ordenadas de objetos que podem ser, de alguma forma, relacionados (FERREIRA, 2001).

Pode-se ter:

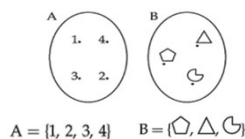
Conjunto finito: conjunto dos estados do Brasil;

Conjunto infinito: conjunto dos números ímpares.

Geralmente usa-se letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos.

Teoria de Conjuntos

Conjunto: coleção qualquer de objetos, números, formas ou outros elementos com características semelhantes e que pode receber o nome que se desejar.



Conjunto

Conjunto dos números reais: \mathbb{R}



$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Tipos especiais de conjuntos

Conjunto unitário: contém um único elemento Exemplo: $A = \{4\}$

Conjunto vazio: \emptyset – não possui elementos Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

Conjunto universo: \mathcal{U} – conjunto ao qual pertence todos os elementos que pretendemos utilizar Exemplo: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ e $A = \{x \in \mathcal{U} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

\mathbb{N} = conjunto de todos os números inteiros não negativos. Perceba que $0 \in \mathbb{N}$.

\mathbb{Z} = conjunto de todos os números inteiros.

\mathbb{Q} = conjunto de todos os números racionais.

\mathbb{R} = conjunto de todos os números reais.

\mathbb{C} = conjunto de todos os números complexos.

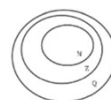
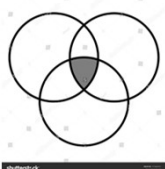


Diagrama de Venn

Os diagramas de Venn consistem em círculos (que podem estar intersectados), os quais representam os conjuntos. No interior dos círculos são listados os elementos do conjunto.

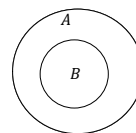


Fonte: Shutterstock

SUBCONJUNTOS

A é subconjunto de B se, e somente se, todos os elementos de A pertencerem a B .

$$A=B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$



Subconjuntos

Um problema recorrente envolvendo subconjuntos diz respeito à determinação do número de subconjuntos de um determinado conjunto. Por exemplo, quantos subconjuntos tem o conjunto $A=\{a,b,c\}$?

Uma maneira para resolver esse problema é listar todas as possibilidades.

Como a cardinalidade de A é igual a 3; $|A|=3$, qualquer subconjunto de A pode ter de zero a três elementos. $2^{|A|}=2^3=8$

Consideremos o Quadro 2.1 com a descrição de todas as possibilidades:

Subconjuntos

Quadro 2.1 | Subconjuntos de A (cardinalidade 3)

Número de elementos	Subconjuntos	Número de subconjuntos
0	\emptyset	1
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	3
2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	3
3	$\{a, b, c\}$	1
Total		8

Aplicativo para telefones móveis

Em primeiro lugar, vamos elucidar o significado da palavra arbitrário. Quando dizemos que x é um elemento arbitrário de um conjunto A , queremos dizer que x pode ser qualquer elemento de A e não podemos fazer qualquer outra suposição sobre x .

Denotando o conjunto $\{1,2,3,4\}$ por A , podemos determinar a sua cardinalidade. Temos que $|A|=4$, logo, o número de subconjuntos de A é igual a $2^{|A|}=2^4=16$. Resta, agora, identificar todos esses 16 subconjuntos. Como a cardinalidade de A é igual a 4, podemos ter subconjuntos com 0, 1, 2, 3 ou 4 elementos. Por exemplo, $\{1, 3, 4\}$ é subconjunto de A , pois $\{1,3,4\} \subseteq A$. $\{2,3\}$ também é subconjunto de A , pois $\{2,3\} \subseteq A$.

Para identificar todos os subconjuntos de A , vamos elaborar uma lista (Quadro 2.2):

Quadro 2.2 | Subconjuntos de A (cardinalidade 4)

Número de elementos	Subconjuntos	Número de subconjuntos
0	\emptyset	1
1	{1}, {2}, {3}, {4}	4
2	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}	6
3	{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}	4
4	{1, 2, 3, 4}	1
Total		16

Álgebra de conjuntos

Contextualizando

- ✓ Você foi contratado por uma grande empresa do setor de Tecnologia da Informação (TI) e está trabalhando em uma equipe de desenvolvimento de um aplicativo para telefones móveis.
- ✓ No desenvolvimento desse aplicativo, por sua vez, surgiu um novo problema: a equipe de desenvolvimento de software percebeu que alguns comandos de busca desse aplicativo (ações solicitadas pelo usuário para sua execução) direcionam a busca do usuário para o Banco de Dados A, enquanto outros comandos direcionam a busca do usuário para o Banco de Dados B e, ainda, há comandos que realizam essa busca em ambos os Bancos de Dados (A e B).



Fonte: Shutterstock

Contextualizando

- ✓ Considere que há 20 comandos que direcionam a busca do usuário para o Banco de Dados A, que no total há 60 comandos distintos, e que 12 comandos direcionam a busca para os Bancos de Dados A e B.
- ✓ Você saberia informar quantos desses 60 comandos realizam a busca no Banco de Dados B?
- ✓ Você deverá apresentar a representação e resolução desse problema à equipe de desenvolvimento de software para que ela decida sobre a viabilidade de unificação desses Bancos de Dados.

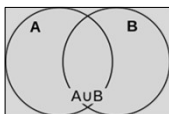


Fonte: Shutterstock

Operações com conjuntos – União U

União de conjuntos : dados os conjuntos A e B , a união de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A **ou** a B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Operações com conjuntos – União U

- ✓ Um novo conjunto de alunos pode ser definido como consistindo em todos os alunos que sejam estudantes do curso de Análise e Desenvolvimento de Sistemas ou Matemática (ou ambos).
- ✓ Esse conjunto é chamado de união de A e B.
- ✓ Segundo Gersting (1995), a operação de união de A e B pode ser denotada como $A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemplo 1: a união $A \cup B$ compreende todos os alunos que cursam Análise e Desenvolvimento de Sistemas (A) ou Matemática (B) ou ambos os cursos.

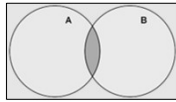
Exemplo 2: Sejam os conjuntos $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ e $B = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, o conjunto $A \cup B$ consiste no conjunto formado por todos os elementos de A e de B.

$$A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}.$$

Operações com conjuntos – Intersecção \cap

Intersecção de conjuntos : dados os conjuntos A e B , a intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Operações com conjuntos – Intersecção \cap

Exemplo 3: Sejam os conjuntos $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ e $B = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, o conjunto $A \cap B$ consiste no conjunto formado pelos elementos comuns aos conjuntos A e B .

$$A \cap B = \{13, 14, 15\}.$$

Teoria de Conjuntos

1) Um dos conteúdos abordados são as operações de conjuntos. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, o conjunto $B = \{2, 5\}$ e $C = \{2, 6\}$, a operação de união e intersecção entre os três conjuntos, são respectivamente:

- a) $U = \{1, 2, 3\}; \cap = \{\emptyset\}$
- b) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \cap = \{0, 2\}$
- c) $U = \{\emptyset\}; \cap = \{\emptyset\}$
- d) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \cap = \{2\}$
- e) $U = \{1, 2, 5, 6\}; \cap = \{0, 2\}$

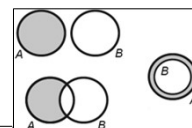
Resposta: Os elementos dos conjuntos A e B e C que fazem união são: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ reunindo todos os elementos de ambos conjuntos. Já a intersecção é dada pelo $\{2\}$, está presente tanto no conjunto A , como no B e no C .

Álgebra de conjuntos

Operações com conjuntos – Diferença ($-$)

Diferença de conjuntos: dados os conjuntos A e B , a diferença de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A , mas não a B .

$$A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Operações com conjuntos – Diferença (-)

Sejam A e B dois conjuntos, de acordo com Scheinerman (2015), a diferença $A - B$ é o conjunto de todos os elementos de A que não estão em B, ou seja: $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

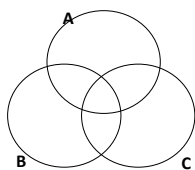
Considere, por exemplo, os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Para determinarmos a diferença $A - B$ temos de verificar quais elementos pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B, ou seja, $A - B = \{1, 2, 3\}$.

Analogamente, podemos definir o conjunto $B - A$, que consiste em todos os elementos pertencentes a B, mas que não pertencem ao conjunto A, ou seja, $B - A = \{6, 7\}$.

Marca	Nº de consumidores
A	105
B	200
C	160
A e B	25
A e C	25
B e C	40
A, B e C	5
Nenhuma	120

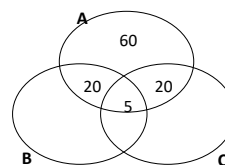
(PUC – RJ) Uma população consome 3 marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados ao lado. Determine o número de pessoas consultadas.

Marcas A, B e C: 5
Apenas A e B: $25 - 5 = 20$
Apenas A e C: $25 - 5 = 20$

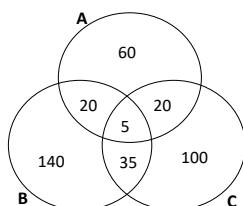


► Apenas A:
 $105 - 5 - 20 - 20 = 60$

Apenas B e C: $40 - 5 = 35$
Apenas B: $200 - 5 - 20 - 35 = 140$
Apenas C: $160 - 5 - 35 - 20 = 100$



Nenhuma marca: 120
Total: $120 + 60 + 140 + 100 + 20 + 20 + 35 + 5 = 500$



**Aplicativo para
telefones móveis**

Sabendo que há 20 comandos que direcionam a busca do usuário para o Banco de Dados A, que no total há 60 comandos distintos e que há 12 comandos que direcionam a busca para os Bancos de Dados A e B, como você determinaria quantos desses 60 comandos realizam a busca no Banco de Dados B?

Lembre-se de que você deverá apresentar a representação e resolução desse problema à equipe de desenvolvimento de software para que juntos decidam sobre a viabilidade de unificação desses Bancos de Dados.

Trata-se de um problema envolvendo operações de conjuntos. Uma vez que $A = 20$, $A \cap B = 12$ e $A \cup B = 60$, é preciso saber quanto é B .

Podemos recorrer ao método de contagem chamado inclusão-exclusão, que consiste em:

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

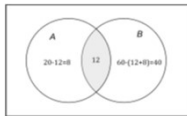
Assim, temos que:

$$60 = 20 + B - 12$$

$$B = -60 + 20 + 12 \rightarrow B = 52$$

Portanto, dos 60 comandos existentes, há 52 comandos que realizam a busca no Banco de Dados B (incluindo 12 comandos que também realizam a busca no Banco de Dados A).

Para apresentar esse resultado à equipe de desenvolvimento de software, você pode recorrer a um diagrama de Venn:



O diagrama permite ainda aferir que 8 comandos efetuam a busca APENAS no Banco de Dados A enquanto que 40 comandos efetuam a busca APENAS no Banco de Dados B.

Aplicações de teoria dos conjuntos

Contextualizando

Como funcionário de uma grande empresa do setor de Tecnologia da Informação (TI), você se depara agora com uma situação inusitada: após trabalhar com o desenvolvimento de um aplicativo para telefones móveis, você e sua equipe foram contemplados com um curso de aprimoramento profissional na área de lógica computacional.

E um dos desafios do curso consiste em representar uma relação arbitrária de três conjuntos, utilizando diferentes esquemas de representação, como as representações diagramáticas (com diagramas) e tabular (com tabelas). Você já compreende algumas relações entre conjuntos, mas sua missão agora é apresentar de maneira original uma relação



Contextualizando

arbitrária entre três conjuntos A, B e C, ou seja, você deverá elaborar um esquema que indique se um determinado elemento pertence ao conjunto A, B ou C, considerando todas as interseções possíveis.

Após elaborar sua solução, você deverá realizar uma apresentação para a sua equipe para demonstrar o esquema de representação escolhido e explicar sua interpretação.

Conseguir pensar nas relações entre conjuntos de maneira genérica é um componente importante daquilo que chamamos de raciocínio computacional.

Além disso, saber representar tais relações de uma forma inteligível, que se faça compreender por outras pessoas de sua equipe de trabalho, é um exercício importante, pois muitas vezes não conseguimos expressar nossas ideias no papel.

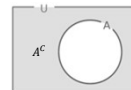
Operações com conjuntos – Complementar

- ✓ Uma nova relação que aprenderemos é a operação denominada complemento ou complementar de um conjunto.
- ✓ O complemento de um conjunto é um conceito estreitamente relacionado com a operação de diferença de conjuntos.
- ✓ O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (HOUAISS, 2009) define complemento como um elemento que se integra a um todo para completá-lo ou aperfeiçoá-lo.
- ✓ Relacionando essa definição com a Teoria de Conjuntos, podemos, de forma simplista, assumir que o complemento de um conjunto significa preencher o que falta.

Operações com conjuntos – Complementar

Complementar : dados dois conjuntos A e B , tais que $B \subset A$ chama-se complementar de B em relação a A (C_A^B ou \bar{B} ou $(A^c)_B$) o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B .

$$A^c = C_U^A = U - A$$



Operações com conjuntos – Complementar

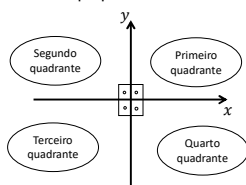
Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$.
O complemento de B em relação a A consiste no conjunto constituído por todos os elementos pertencentes a A que não pertencem a B .
Temos, portanto:
 $C_A^B = \{4, 6, 7, 10\}$.
Em outras palavras, podemos dizer que o complemento de B em relação a A consiste no conjunto formado por elementos que pertencem exclusivamente a A , quando comparados com os elementos de B .

Produto Cartesiano

- ✓ Outra aplicação que estudaremos no âmbito da Teoria de Conjuntos é a operação denominada produto cartesiano.
- ✓ Um conjunto, por si só, não é objeto de muito interesse até que se faça algo com seus elementos (GERSTING, 1995). Podemos, por exemplo, realizar diversas operações aritméticas sobre os elementos de um determinado conjunto numérico.

Plano Cartesiano

É formado por uma região geométrica plana, cortada por duas retas perpendiculares entre si.



Retas perpendiculares formam ângulos de 90° entre si!

Abscissas e Ordenadas

Reta horizontal: eixo das abscissas – representado por x , $x \in \mathbb{R}$.

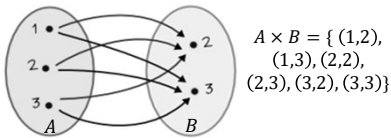
Reta vertical: eixo das ordenadas – representado por y , $y \in \mathbb{R}$.

Ponto de encontro das retas x e y : origem – indicado pelo par ordenado $(0,0)$, ou seja, $x = 0$ e $y = 0$.

Par ordenado: par (x,y) , no qual o primeiro elemento pertence ao domínio (ou ao 1º conjunto) e o segundo elemento pertence a imagem (ou ao 2º conjunto).

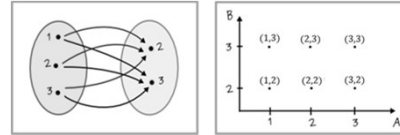
Produto Cartesiano

O produto cartesiano ($A \times B$) dos conjuntos A e B é formado pelos pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.
 $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$



Diagramas e Plano Cartesiano

Representação em diagramas e no plano cartesiano:



$$A \times B = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$$

Produto Cartesiano

Considere os conjuntos $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{6, 7, 8\}$.

Vamos definir os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$.

$$A \times B = \{ (4,6), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8), (6,6), (6,7), (6,8) \}$$

$$B \times A = \{ (6,4), (6,5), (6,6), (7,4), (7,5), (7,6), (8,4), (8,5), (8,6) \}$$

Note que $A \times B \neq B \times A$.

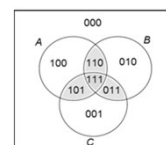
Isso acontece porque a operação produto cartesiano não é uma operação comutativa.

Representação de um conjunto

O Diagrama de Venn, além ser um esquema para ajudar o raciocínio, também consiste em uma representação diagramática capaz de atender a todas as possíveis relações lógicas entre as classes em estudo, sendo úteis, inclusive, para demonstrar relações arbitrárias entre conjuntos (NOVAES, 2014).

Portanto, vamos utilizar um Diagrama de Venn para demonstrar uma relação arbitrária entre três conjuntos A , B e C .

Utilizaremos uma numeração binária, composta apenas pelos algarismos 0 e 1, em que o primeiro algarismo é 0 ou 1, conforme um objeto desse compartimento pertença ou não ao conjunto A , o segundo algarismo é 0 ou 1, conforme um objeto desse compartimento pertença ou não ao conjunto B e o terceiro algarismo é 0 ou 1, conforme um objeto desse compartimento pertença ou não ao conjunto C .



A numeração binária mostra que $2^3 = 8$ compartimentos esgotam todas as possibilidades lógicas para um objeto do universo. O número 100 (lê-se: um, zero, zero) representa objetos que pertençam exclusivamente ao conjunto A, o número 010 (zero, um, zero) representa objetos que pertençam exclusivamente ao conjunto B e o número 001 (zero, zero, um) representa objetos que pertençam exclusivamente ao conjunto C. Já o número 000 (zero, zero, zero) representa objetos que não pertençam a nenhum dos conjuntos A, B e C. Temos ainda as intersecções:

$$\begin{aligned} 110 &= A \cap B \cap C^c \\ 101 &= A \cap B^c \cap C \\ 001 &= A^c \cap B \cap C \\ 111 &= A \cap B \cap C \end{aligned}$$

Vejamos na Figura como ficaria a tabela-verdade para representação dessa relação:

	$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \cap C$	$x \in A \cup (B \cap C)$
000	F	F	F	F	F
001	F	F	V	F	F
010	F	V	F	F	F
011	F	V	V	V	V
100	V	F	F	F	V
101	V	F	V	F	V
110	V	V	F	F	V
111	V	V	V	V	V

Você sabia que podemos aplicar esses conhecimentos em diversas áreas?



Fonte: <https://pflar.com/en/2003/>

Recapitulando

- ✓ Teoria dos Conjuntos;
- ✓ Álgebra dos Conjuntos;
- ✓ Aplicação da Teoria dos Conjuntos.