Note Title 10/4/2019

Lezione 4-10

Note Title 10/4/2019

leone.slavich@gmail.com

Webpage: people.dm.unipi.it/slavich → pagina del corso

Ricevimento: Mercoledì 14:30.

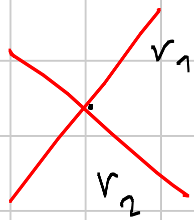
Mandare una mail almeno 24h prima.

- Reciproca posizione di due rette nel piano.

Date due rette r_1, r_2 nel piano, ci sono 3 possibilità:

- r_1 e r_2 coincidono $r_1 = r_2$ (l'intersezione sono ∞ punti).
- r_1 è parallela a r_2 (l'intersezione è l'insieme $\emptyset$)

- r_1 e r_2 sono incidenti (l'intersezione è un unico punto).



Caso 1. Se di r_1 e r_2 conosco la forma cartesiana, allora per intersecarle metto le equazioni cartesiane che le definiscono a sistema.

Esempio: $r_1 : 2x + 3y + 5 = 0$

$r_2 : y = -x + 2$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ -y - 9 = 0 \quad {\scriptstyle 2R_2 - R_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 11 \\ y = -9 \end{array}$$

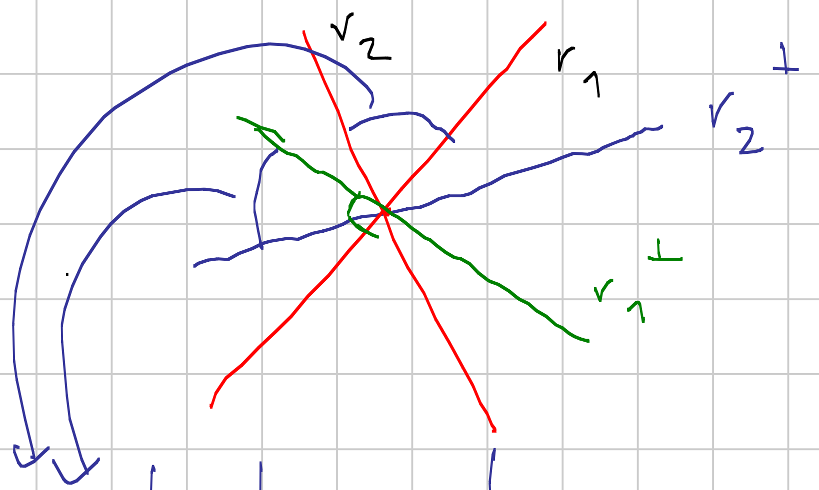
Quindi $x = 11$, $y = -9$ è l'unica soluzione del sistema.

$\Rightarrow$ Le rette r_1 e r_2 sono incidenti nel punto $(11, -9)$.

- Vogliamo calcolare l'angolo tra le due rette.

Se voglio l'angolo tra r_1 e r_2 è comodo averle in forma parametrica. (Posso calcolare l'angolo tra le direzioni).

Oss: Angolo tra due rette nel piano è uguale all'angolo tra i vettori ortogonali $\perp$ alle due direzioni.



questi due angoli sono uguali

Se abbiamo una retta in forma cartesiana $ax + by + c = 0 = r$, il vettore perpendicolare alla direzione di r e' il vettore (a, b).

$2x + 3y + 5 = 0 \longrightarrow v_1 = (2, 3)$

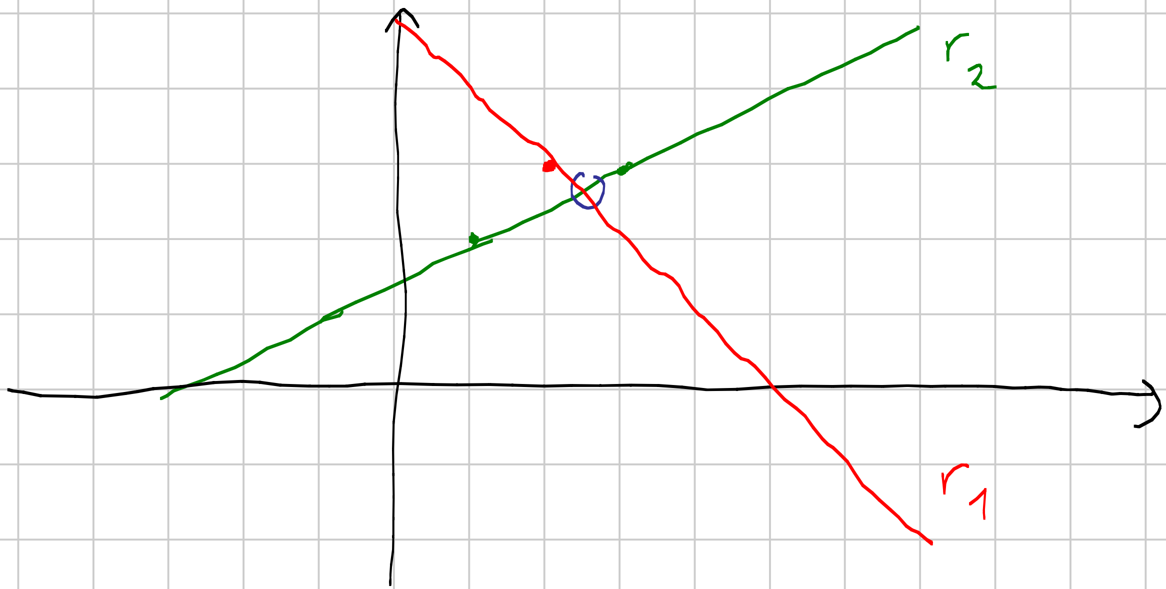
$x + y - 2 = 0 \longrightarrow v_2 = (1, 1)$

$$\cos(\text{angolo tra le due rette}) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}$$

Caso 2: Mi viene data la forma parametrica di r_1 e r_2.

$r_1 = (2,3) + t(-1,1)$

$r_2 = (1,2) + t \cdot (2,1)$



1° modo: porto le rette in forma cartesiana e lavoro lì

2°: Scrivere le due rette in forma parametrica usando 2 parametri diversi:

parametro t.

$r_1 : (2-t, 3+t)$ $\qquad$ $r_2 : (1+2s, 2+s)$ – parametro s

Cerchiamo t ed s che siano soluzioni:

$$\begin{cases} 2-t = 1+2s \\ 3+t = 2+s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2s+t = 1 \\ -s+t = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2s+t = 1 \\ 3t = -1 \end{cases}$$

$t = -\frac{1}{3}$, sostituendo nella 1a equaz. $s = \frac{2}{3}$

Sostituendo i valori di t ed s nella parametrizzazione trovo il punto di intersezione

$r_1 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ $\quad$ $r_2 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$

sostituendo $t = -\frac{1}{3}$ nella param. di r_1

sostituendo $s = \frac{2}{3}$ nella param. di r_2

- Caso 3. Conosco r_1 in forma cartesiana e r_2 in forma parametrica

1° modo: le porto entrambe nella stessa forma. (meglio di no).

2° modo: $r_1 : x - 2y + 3 = 0$ $\quad r_2 = (5, 1) + t(-3, 2)$

$$r_2 : (\underbrace{5 - 3t}_{= x}, \underbrace{1 + 2t}_{= y})$$

Sostituiamo nell'equazione cartesiana di r_1 i valori di x e y nella parametrizzazione di r_2 e otteniamo:

$$(5-3t)-2\cdot(1+2t)+3=0$$

$5-3t-2-4t+3=0 \qquad 7t=6, \qquad t=\frac{6}{7} \rightarrow$ unica soluzione

$\downarrow$

rette incidenti.

Per trovare l'intersezione, sostituiamo il valore trovato per t nella parametrizzazione di r_2. (Verificare che risolva l'eq. cartesiana per r_1).

Esercizio: Trovare b in modo che:

$r_1: x - y + 3 = 0$

$r_2: (-1,3) + t(1,b) \rightsquigarrow (\underbrace{-1+t}_{=x}, \underbrace{3+bt}_{=y}) =$

siano parallele.

Sostituendo troviamo $-1 + t - (3 + bt) + 3 = 0$

$$-1 + t - \cancel{3} - bt + \cancel{3} = 0 \rightsquigarrow$$

Vogliamo che questa non abbia soluzioni in t

prendiamo $b = 1$ e otteniamo $-1 = 0$ (non ha soluzioni)

Per $b = 1$ r_1 e r_2 sono $//$.

Altro modo

→ trovare la direzione di r_2: $(1,b)$

" " " " r_1: $(1,1)$ → (calcolata dalla forma implicita).

$\underset{v_1}{(1,-1)}$ è direzione ortogonale a r_1 $\quad \underset{v_2}{(1,1)}$ è ortogonale a v_1 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

⇒ $v_2 = (1,1)$ è ~~vera~~ direzione di r_1.

Affinché le rette siano // è necessario $(1,b)$ e $(1,1)$ siano multipli l'uno dell'altro. In questo caso succede se e solo se $b=1$.

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore ortogonale è dato da $v' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

RETTE NELLO SPAZIO.

Rette nello spazio si trattano bene in forma parametrica.

- Rette per l'origine: sono tutti i multipli di un vettore $\vec{v} \neq 0$ in $\mathbb{R}^3$.

$\{t \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ non nullo}\}$.

- Retta per un punto qualsiasi: basta cambiare il p.to di partenza

Esempio: $(1, 0, 2) + t \cdot (5, -1, 6) = (1+5t, -t, 2+6t)$

In generale sarà del tipo $\underbrace{\vec{w}}_{\text{p.to di partenza}} + \overset{\text{parametro}}{t} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{direzione}}$ $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq 0$

<u>Esercizio</u>: Scrivere la retta r nello spazio passante per $\underset{P}{(5, 1, -3)}$ e $\underset{Q}{(2, 4, -3)}$

$r: P + t \cdot (Q - P) =$

$= (5,1,-3) + t\,(-3,3,0)$

$= (5,1,-3) + t\,(-1,1,0)$ – cambiato il rappresentante delle direzioni

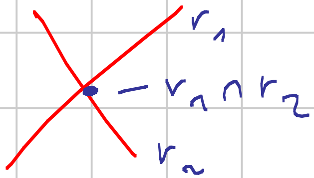
$= (2,4,-3) + t\,(-1,1,0)$ – cambiato il p.to di partenza

} vanno bene sono la stessa retta

∘ Mutua posizione di due rette (r_1 e r_2) nello spazio.

1) coincidenti $r_1 = r_2$ (infinite intersezioni)

2) incidenti



(un'unica intersezione)

3) parallele  (nessuna $\cap$, direzioni "multiple")

4) Sghembe  (nessuna $\cap$, direzioni diverse (non multiple).

$$\text{Esempio: } \underbrace{(2+t,\,-1,\,3-t)}_{r_1 \;=\; (2,-1,3)+t(1,0,-1)} = \underbrace{(2,1,-1)+t(5,1,3)}_{r_2}$$

direzioni non sono multipli

$$\begin{cases} 2+t = 2+5\cdot s \\ -1 = 1+s \\ 3-t = -1+3s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 5s - t = 0 \\ s = -2 \\ 3s+t = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = -10 \\ s = -2 \\ t = 10 \end{cases}$$

non ha soluzioni
$\Downarrow$
r_1, r_2 sono sghembe.

Esempio: $r_1 : (5-t, 2t, 1+3t)$ $\quad r_2 : (t, -t, at)$

dipende da $a \in \mathbb{R}$.

passa per l'origine.

Trovare (se esistono) valori di a per cui r_1 e r_2 sono incidenti.

$$\begin{cases} 5-t=s \\ 2t=-s \\ 1+3t=a\cdot s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s+t=5 \\ s+2t=0 \\ a\cdot s-3t=1 \end{cases}$$

R_2-R_1 $\quad t=-5 \quad s=10$

sostituendo nella 3a equaz.

ottengo $a\cdot 10+15=1$

$\rightarrow 10\cdot a=-14 \quad a=-\frac{7}{5}$

Piani nello spazio: $\longrightarrow$ Forma cartesiana

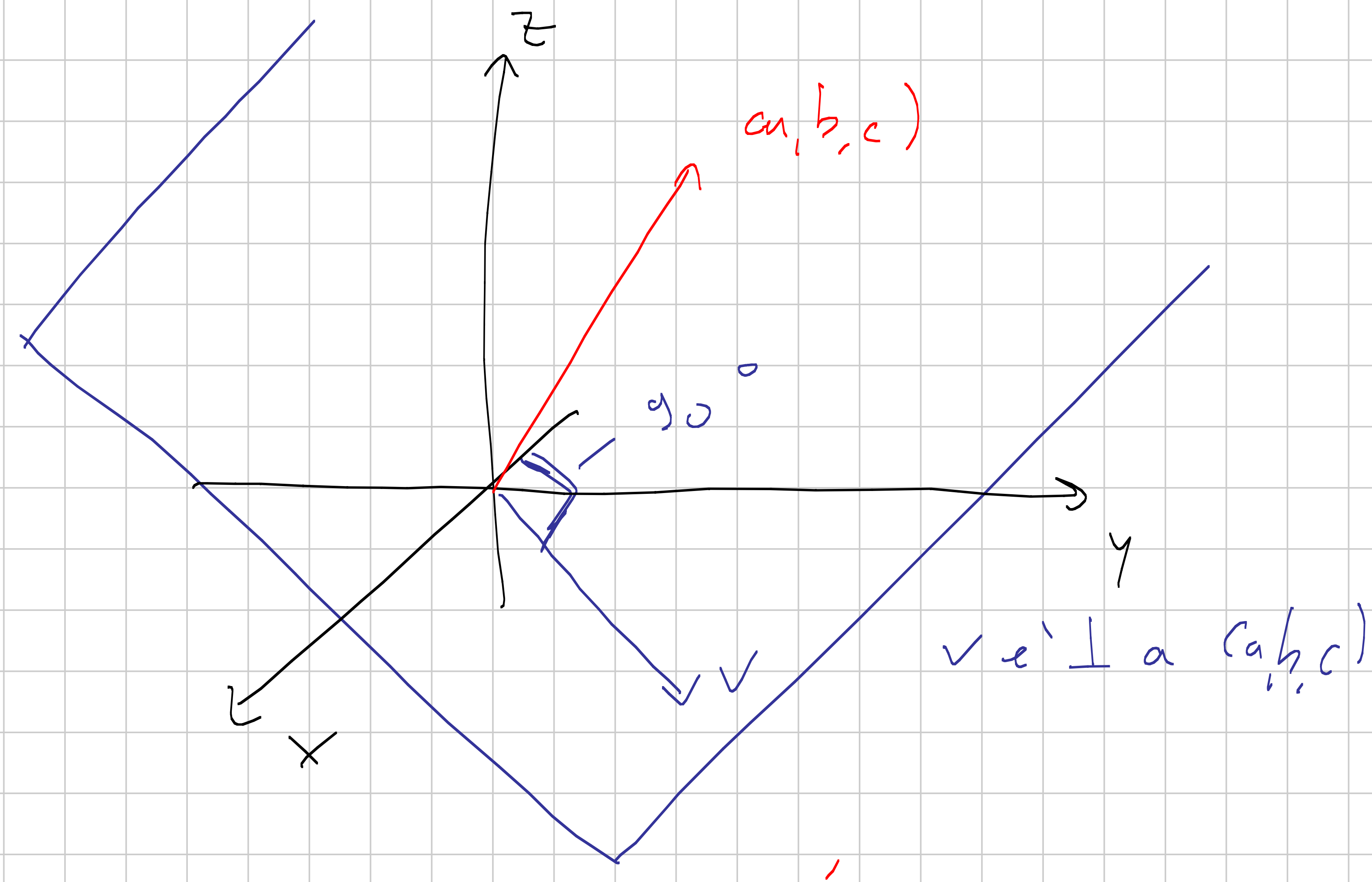
$\longrightarrow$ Forma parametrica.

Piani passanti per l'origine.

Eq. cartesiana: $ax + by + cz = 0$ $\quad (a, b, c)$ = vettore ortogonale al piano

$a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

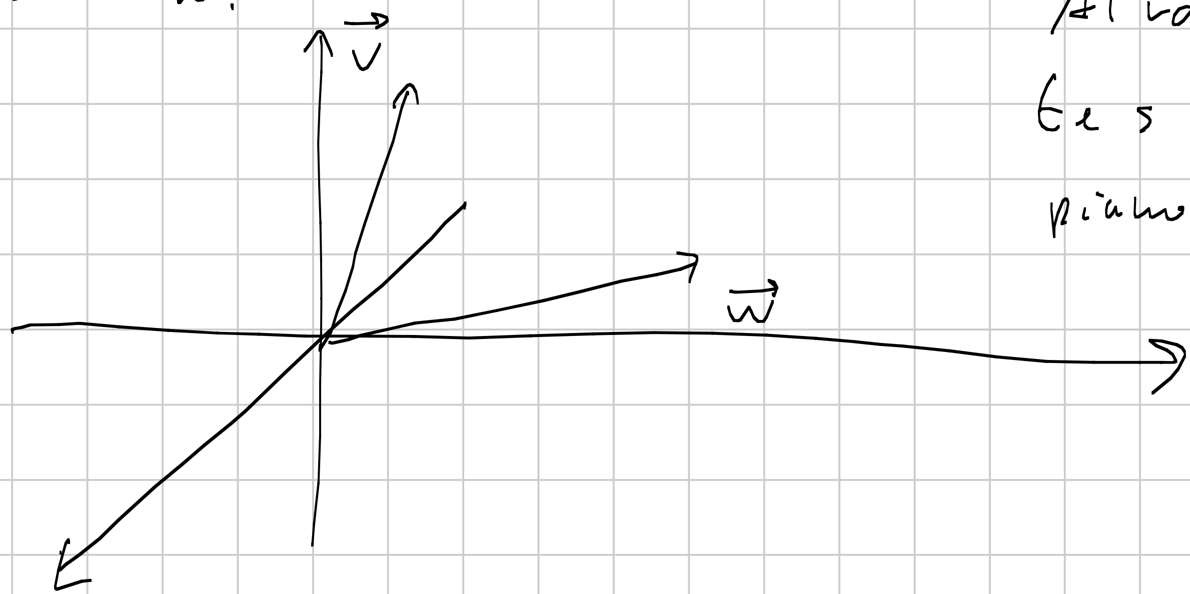
Sono i vettori (x, y, z) nello spazio che sono $\perp$ al vettore (a, b, c) non nullo dato



z
(a, b, c)
90°
y
x
v
v e' ⊥ a (a, b, c)

Eq. parametrica di un piano per l'origine.

$t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$, dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$ non nulli e non multipli l'uno dell'altro.



Al variare di t e s otterrò il piano passante per l'origine, $\vec{v}$, e $\vec{w}$

Piani che non passano per l'origine.

Eq. cartesiana $ax+by+cz+d=0$ → passa per l'origine $\Leftrightarrow d=0$.

Eq. parametrica: $\vec{u} + t\cdot\vec{v} + s\vec{w}$

punto di partenza

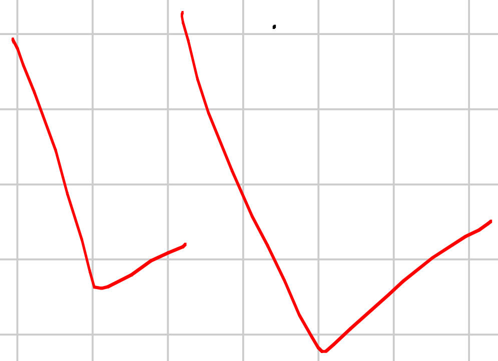
"due direzioni nello spazio che generano il piano a partire da $\vec{u}$".

Mutua posizione di due piani nello spazio:

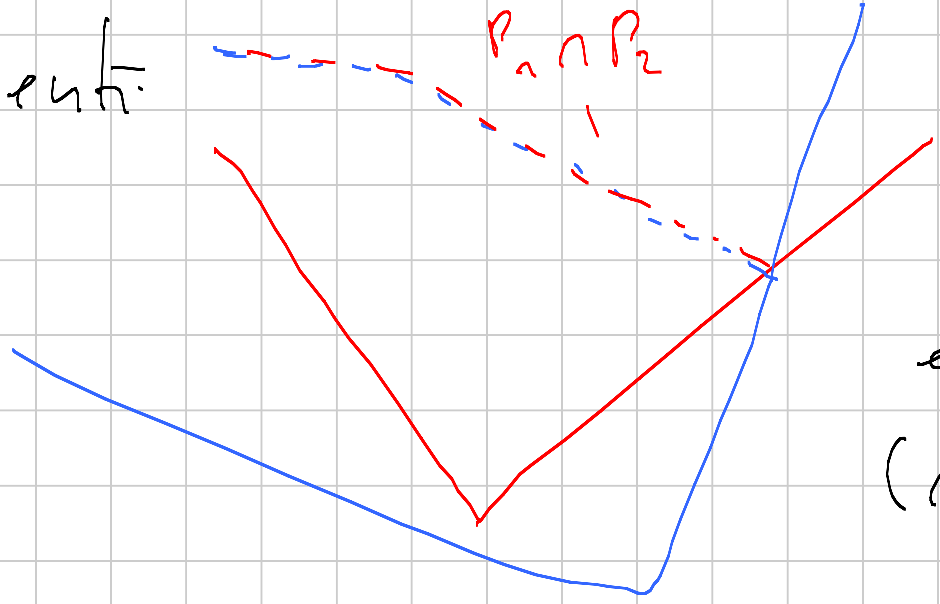
- Dati P_1 e P_2 piani in $\mathbb{R}^3$ questi possono essere

1) Coincidenti ($P_1 = P_2$, infinite intersezioni, dipendente da 2 parametri)

2) Paralleli ($P_1 // P_2$, nessuna intersezione)



3) Piani incidenti



$P_1 \cap P_2$ è fatta di ∞ punti ed è una retta

($\cap$ si parametrizza con 1 parametro).