Lezione 25-10

Note Title 10/25/2019

Esercitazione: cambiamenti di base

V sp. vettoriale $\dim(V) = n$

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

se $v \in V$ allora v si scrive in modo unico

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$$

M matrice di cambiamento di base da B_1 a B_2 è

la matrice $n \times n$ tale che $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \forall v \in V$

coordinate rispetto alla base B_1

coordinate di v rispetto a B_2.

Esercizio: $V = \mathbb{R}^2$, $B_0 = \{ \underset{v_1}{(1,0)}, \underset{v_2}{(0,1)} \}$, $B_1 = \{ \underset{w_1}{(2,3)}, \underset{w_2}{(1,5)} \}$

$M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ La prima colonna ha come coefficienti le coordinate di v_1 rispetto a B_2

La seconda colonna ha come coeff. le coordinate di v_2 rispetto a B_2

Vogliamo scrivere $v_1 = a w_1 + b w_2$, cioè $(1,0) = a \cdot (2,3) + b \cdot (1,5)$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 5b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -7a = -5 \end{cases} \rightarrow a = \frac{5}{7} \nearrow b = 1 - 2a = 1 - \frac{10}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$ – matrice di cambiamento di base

- Per $v_2 = (0,1)$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 5b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -7a = 1 \end{cases} \quad a = -\frac{1}{7} \quad b = -2a = \frac{2}{7}$$

verificare che

$v_2 = a \cdot w_1 + b \cdot w_2$

$V = \mathbb{R}^2$ $\qquad B_1 = \{ \underbrace{(2,3)}_{v_1}, \underbrace{(1,5)}_{v_2} \}$ $\qquad B_2 = \{ \underbrace{(-3,4)}_{w_1}, \underbrace{(1,-3)}_{w_2} \}$

1a colonna:

Cerchiamo a, b t.c. $v_1 = a w_1 + b w_2$

$$\begin{cases} -3a + b = 2 \\ 4a - 3b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + b = 2 \\ -5a = 9 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{9}{5} \nearrow b = 2 + 3a = 2 - \frac{27}{5} = -\frac{17}{5}$$

2a colonna:

$$\begin{cases} -3a+b=1 \\ 4a-3b=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a+b=1 \\ -5a=8 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{8}{5} \rightarrow b=1+3a=1-\frac{24}{5}=-\frac{19}{5}$$

N matrice cambiamento di base

$$N=\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

partenza

Oss: Se M è la matrice di cambio di base da B_0 a B_1; arrivo

e N è la matrice di cambio di base da B_1 a B_2

allora la matrice di cambio base da B_0 a B_2 è $N \cdot M$

matrice 2° cambio di base

matrice 1° cambio base

$V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$.

Base di $V = \{1, x, x^2\}$

$3 + 4x - 2x^2$ ha coordinate $(3, 4, -2)$ rispetto alla "base canonica".

$$B_1 = \{ \underbrace{x^2}_{v_1}, \underbrace{x^2 + x}_{v_2}, \underbrace{x^2 + x + 1}_{v_3} \}$$

$$B_2 = \{ x^2 + x, x^2 + x + 1, x \}$$

verificare che sono basi.

1a colonna: $x^2 = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + cx$ $\quad (a,b,c) = (1,0,-1)$

poiché $x^2 = (x^2+x) - x$

$$x^2 = (x^2+x) - x = 1\cdot(x^2+x) + 0\cdot(x^2+x+1) - 1\cdot x$$

2a colonna $x^2+x = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + c\cdot x$ $\quad (a,b,c) = (1,0,0)$

3a colonna $x^2+x+1 = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + c\cdot x$ $\quad (a,b,c) = (0,1,0)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo v_i

i-esimo vettore della base di partenza.

Le coordinate di v_i rispetto alla base di partenza sono $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

M matrice di cambio base

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

– i-esima colonna di M

- Somme, intersezioni e determinazione di basi

X sp. vett. V, W sottospazi vettoriali di X.

Determinare $V+W$, $V \cap W$, calcolarne le dimensioni e calcolarne basi.

- $X = \mathbb{R}^3$, $V = \mathrm{Span}\{\underbrace{(1,2,3)}_{v_1}\}$, $W = \mathrm{Span}\{\underbrace{(1,1,0)}_{w_1}, \underbrace{(0,2,1)}_{w_2}\}$

$\dim V = 1 \quad \dim W = 2$

Formula di Grassmann: $\dim(V+W) = \underset{\overset{\|}{1}}{\dim(V)} + \underset{\overset{\|}{2}}{\dim(W)} - \dim(V \cap W)$

2 casi possibili: A) $\underset{\overset{\|}{W}}{\dim(V+W)} = 2$ allora $\underset{\overset{\|}{V}}{\dim(V\cap W)} = 1 \rightsquigarrow$ caso in cui $V \subset W$

B) $\underset{\overset{\|}{\mathbb{R}^3}}{\dim(V+W)} = 3$, allora $\underset{\overset{\|}{\{\underline{0}\}}}{\dim(V\cap W)} = 0$

Verifichiamo se $v_1 \in W$, cioè verifichiamo se $v_1 \in \mathrm{Span}\{w_1, w_2\}$

Cerchiamo a, b t.c. $v_1 = a w_1 + b w_2$.

$$(1,2,3) = a(1,1,0) + b(0,2,-1) \iff$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+2b = 2 \\ -b = 3 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ \qquad a+2b = -5 \neq 2 \\ b = -3 \end{array}\right\}$$

Il sistema non ha soluzioni

Quindi $v_1 \notin \operatorname{Span}\{w_1, w_2\} = W$.

Siamo nel caso B) $\quad V \cap W = \{\underline{0}\} \quad V + W = \mathbb{R}^3$

$$\text{base } \{\underbrace{w_1, w_2}_{\text{base di } W}, \underbrace{v_1}_{\text{base di } V}\}$$

- $X = \mathbb{R}^4$

$$V = \text{Span}\{\underset{v_1}{(0,0,1,1)}, \underset{v_2}{(0,1,1,0)}, \underset{v_3}{(1,1,0,0)}\}$$

$$W = \text{Span}\{\underset{w_1}{(1,0,1,0)}, \underset{w_2}{(0,1,0,1)}\}$$

$\dim V = 3$, $\dim W = 2$ $\dim X = 4$

$V + W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ $w_1 \overset{?}{\in} \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

SI

Cerchiamo a, b, c. t.c. $w_1 = a v_1 + b v_2 + c v_3$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b + c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$a = 0$

$a = 0$, $c = 1$

2a equaz. $b = +1$

3a equaz. $b = -1$

→ non c'è soluzione

$\Rightarrow w_1 \notin \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, w_3, w_1\} = \mathbb{R}^4 = X \Rightarrow V + W = X = \mathbb{R}^4.$$

$$\dim(V+W) = 4 = \underbrace{\dim(V)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=2.} - \underbrace{\dim(V \cap W)}_{=1}$$

- Caso V in forma cartesiana, W dato da base.

$$X = \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z\}, \quad W = \mathrm{Span}\{\underbrace{(1,-1,1)}_{w_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{w_2}\}$$

$\dim V = 2 \qquad \dim W = 2.$

Metodo 1) Ricondursi al caso precedente: Calcoliamo una base di V, ad esempio

$$\{\underbrace{(1,0,2)}_{=v_1}, \underbrace{(0,1,3)}_{=v_2}\}$$

Metodo 2): $w_1 \notin V$, $w_2 \notin V \longrightarrow$ non significa che $V \cap W = \{\underline{0}\}$

$$\dim(V+W) = \underbrace{\dim(V)}_{=2} + \underbrace{\dim(W)}_{=2} - \dim(V\cap W)$$

caso A) $\dim(V+W) = 3$ e quindi $\dim(V\cap W) = 1$

B) $\dim(V+W) = 2$ $\dim(V\cap W) = 2$,

Caso B) si verifica $\Leftrightarrow V = W$ → ma non succede! Poiché $w_1 \notin V$

Siamo nel caso A) poiché $w_1 \notin V$, $w_2 \notin V$

$\dim(V \cap W) = 1$. Vogliamo trovare una base di $V \cap W$.

Cerchiamo a, b non entrambi nulli tali che $a w_1 + b w_2 \in V$

$a w_1 + b w_2 = (a, b-a, a) \in V \iff$

$a \cdot (1,-1,1) + b \cdot (0,1,0) = (a, b-a, a)$

$2a + 3(b-a) = a \iff 2a + 3b - 3a - a = 0 \Rightarrow 3b - 2a = 0$

Trovo soluzione non nulla $(a,b) = (3,2)$

$V \cap W = \mathrm{Span}\{3w_1 + 2w_2\} = \mathrm{Span}\{(3,-1,3)\}$

- Se avete caso V in forma cartesiana
  W in forma cartesiana $\Big\}$ → calcolare una base e ricondursi al caso precedente.

Dimensione di nucleo e immagine di applicazioni lineari.

Sia $f: V \to W$ è applicazione lineare tra V e W sp. vettoriali.

$$Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = \underline{0} \}, \quad Im(f) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ t.c. } f(v) = w \}.$$

$Ker(f) \subseteq V$

vett. nullo di W.

Formula: $\dim(Im(f)) = \dim(V) - \dim(Ker(f))$.

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x,y) = (x-y,\ 2x+y)$ $\quad \varphi$ è lineare.

$(x,y) \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ non ha soluzioni $\overset{\text{non}}{\vee}$ nulle.

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 0$ — φ è iniettiva

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 2$ — φ è surgettiva

(In generale): Dati $\varphi : V \to W$.

Se $\dim V \gneqq \dim W$ φ non può essere iniettiva

Se $\dim V \lneqq W$ φ non può surgettiva

- Se $\dim V = \dim W$ φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ φ è surgettiva

  $\hookrightarrow$ Segue da formula per dimensione di nucleo e immagine.

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x,y,z) = (x-y,\, y-z,\, z-x)$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

Ha soluzione $(1,1,1)$

$x = y = z$ In questo caso $(x,y,z) \in \ker\varphi \iff (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$

$\dim(\ker\varphi) = 1$

$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Span}\left\{ \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}}_{\text{non sono lin. indip.}}$$

Base di $\operatorname{Im}(\varphi)$ sarà data

da (ad esempio) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

In generale, data $f: V \to W$ lineare e $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$

generano $\mathrm{Im}(f)$.