【低延迟】高频做市策略初探

原创 蒙玺研究 蒙玺投资 2020-09-03

收录于话题
#蒙玺研究 8个

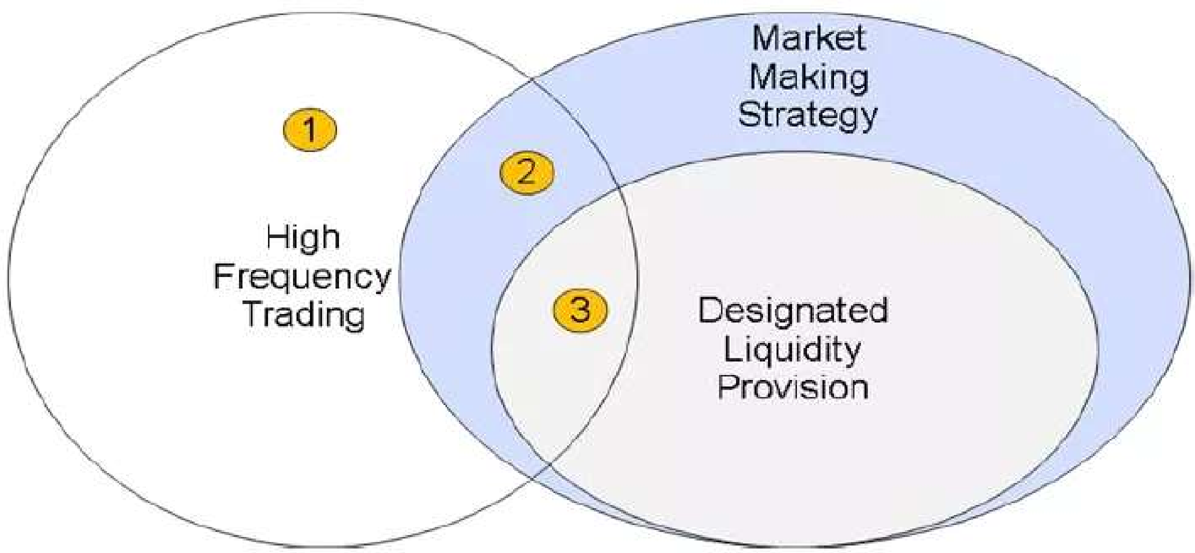
蒙玺研究

我们在之前的推送中介绍了低延迟交易的基本因子和模型，本次推送主要介绍低延迟策略中非常重要的一种：低延迟做市策略(Market Making Strategy)。

通过探讨经典做市模型及其进一步优化，得到了做市商报单价格的近似最优解。

本公众号将定期发布蒙玺投资的内部研究成果，欢迎关注。

低延迟交易策略中非常重要的一类策略类型就是低延迟做市策略(Market Making Strategy)。做市策略是指做市商在买卖双方同时报价，利用买卖间的价差获利的策略。做市策略既有交易所指定的有做市义务的机构采用，也有通过自愿提供流动性来获利的其他机构采用。



图片来源: High-Frequency Trading

上图描述了低延迟交易策略和做市策略的相互关系。图中②部分指的是没有做市义务的低延迟做市策略。市场上绝大多数低延迟交易机构都没有做市义务，本文的讨论主要基于这个细分类别。

做市商通过同时双向报价，利用成交价格在买卖价差之间的窄幅波动获利。低延迟做市策略的盈利来源是小幅度且高频率的价格波动，为实现这一目的则必须紧跟着市场价格的变化频繁地进行挂撤单。虽然做市商希望在买卖双向的报价能同时成交，但并非两边报价总能在短时间内匹配成交。如果市场行情出现大幅单边波动时，做市策略很可能由于逆向选择(Adverse Selection)只有与市场趋势相反的报单成交，从而导致单边净头寸积累造成巨大的库存风险，从而产生大幅度亏损。

所以，一个优秀的做市策略的核心在于如何解决库存风险，如何根据标的资产的市场状态(流动性、波动率等)进一步地确定最优的买卖报单价格。

1

带库存惩罚项的经典做市模型

我们假定标的资产在时刻t的参考价格(reference price)或公允价格(fair price)为 S_t ，价格的运动服从标准差为 σ 的算数布朗运动 W_t ，并且在参考价格 S_t 距离 δ 的位置，标的资产在市场中买卖的流动性消耗报单(市价单)到达服从概率强度为 $Aexp(k\delta)$ 的点过程，其中A和k是两个正常数，可以从统计学上表征标的资产的流动性。根据以上假设我们得到：

$$dS_t = \sigma dW_t$$

根据Avellaneda和Stoikov提出的模型，标的资产市场中的做市商会持续报出买单(bid price)及卖单(ask price)价格 S_t^b 和 S_t^a 。在时刻t，做市商持有的标的资产净头寸q为：

$$q_t = N_t^b - N_t^a$$

这里的 N^b 和 N^a 是独立于价格运动过程 W_t 的点过程，分别代表做市商买入和卖出标的资产的数量。此时，市价单到达目标价的概率显然取决于做市商的报单价格 S_t^b 和 S_t^a 。Avellaneda-Stoikov (AS)模型中，分别与 N^b 和 N^a 相关的强度 λ_b 和 λ_a 取决于报价与参考价格之间的差额(即 $\delta_t^b = S_t - S_t^b$ 和 $\delta_t^a = S_t^a - S_t$)并具有以下形式：

$$\lambda^b(\delta^b) = Ae^{-k\delta^b} = Aexp(-k(s - s^b))$$

$$\lambda^a(\delta^a) = Ae^{-k\delta^a} = Aexp(-k(s^a - s))$$

从模型公式中可以的到，对于正值 δ_b 和 δ_a ，距离参考价越近，订单执行的概率及速率都更大。

由于做市商持续参标的资产的交易，持有的现金资产会有如下动态变化：

$$dX_t = (S_t + \delta_t^a)dN_t^a - (S_t - \delta_t^b)dN_t^b$$

根据以上假设建模，经典的 Avellaneda-Stoikov 做市模型可以根据自身的净头寸计算出基准价格，然后根据市场的成交概率，围绕这个基准价格做市商得到最优的买卖报价。这个模型虽然能够较好地模拟市价单的成交情况，增加了库存惩罚项，但面对极端行情仍然存在巨大的库存风险。因此为了更好地优化库存管理，Olivier 和Charles等人提出了根据做市商风险厌恶程度，增加库存的最大值限Q。在库存达到最值时，即停止向增加库存方向报价,而只做反方向报价,从而限制库存的进一步增加。

此时，我们建立目标函数，做市商期望在基准时间T内使P&L最大化。我们使用常数绝对风险厌恶效用函数(CARA)进行优化：

$$\sup_{(\delta_t^a)_t,(\delta_t^b)\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[-exp(-\gamma(X_T+q_TS_T))]$$

这里 $\mathcal{A}$ 是上面定义的可预测过程的集合， γ 是量化做市商风险厌恶程度的绝对风险规避系数， X_T 是在时间T处的现金量， q_TS_T 是在时间T的标的资产库存价值。

在求解以上优化问题中，我们引入Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程，可以通过求解由以下方程组成的偏微分方程组：

当|q| < Q：

$$\begin{aligned}&\partial_t u(t,x,q,s)+\tfrac{1}{2}\sigma^2\partial_{ss}^2u(t,x,q,s)\\&+\sup_{\delta^b}\lambda^b(\delta^b)[u(t,x-s+\delta^b,q+1,s)-u(t,x,q,s)]\\&+\sup_{\delta^a}\lambda^a(\delta^a)[u(t,x+s+\delta^a,q-1,s)-u(t,x,q,s)]=0\end{aligned}$$

当|q|=Q：

$$\begin{aligned}&\partial_t u(t,x,Q,s)+\tfrac{1}{2}\sigma^2\partial_{ss}^2u(t,x,q,Q,s)\\&+\sup_{\delta^a}\lambda^a(\delta^a)[u(t,x+s+\delta^a,Q-1,s)-u(t,x,Q,s)]=0\end{aligned}$$

当|q|= -Q：

$$\begin{aligned}&\partial_t u(t,x,-Q,s)+\tfrac{1}{2}\sigma^2\partial_{ss}^2u(t,x,q,-Q,s)\\&+\sup_{\delta^b}\lambda^b(\delta^b)[u(t,x-s+\delta^b,-Q+1,s)-u(t,x,-Q,s)]=0\end{aligned}$$

限制条件为：

$$\begin{aligned}&q\in\{-Q,\ldots,Q\}for(t,s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2\\&\forall_q\in\{-Q,\ldots,Q\},u(T,x,q,s)=-exp(-\gamma(x+qs))\end{aligned}$$

可以得到：

$$\begin{aligned}\delta_t^{b*}&\simeq\frac{1}{\gamma}ln(1+\frac{\gamma}{k})+\frac{1+2q}{2}\gamma\sigma^2(T-t)\\\delta_t^{a*}&\simeq\frac{1}{\gamma}ln(1+\frac{\gamma}{k})+\frac{1-2q}{2}\gamma\sigma^2(T-t)\end{aligned}$$

做市商围绕参考价格进行最优报价，其中买单报价为 $r-\delta_b$ ，卖单报价为 $r+\delta_a$ 。这里会存在几种极端情况，例如当买单最优报价高于了市场中标的资产的挂单卖一价时(卖单最优报价同理)，这时候做市场可能就会直接使用市价单进行平仓交易。另外，由于AS模型中累计库存惩罚项只体现在基准价格r中，为优化库存管理，当|q|=Q时，做市商将不再向库存增加方向报单。

2

结合市场实际状态进一步优化做市策略

上面第一部分介绍了经典的AS做市模型，并添加了与做市商风险偏好相关的库存优化。然而，我们在研究过程中对参考价格运动假设服从布朗运动的假设与实际是存在较大偏差的，很多时候，标的资产的市场价格运动时存在一定的趋势，即应该有：

$$dS_t = \mu d_t + \sigma dW_t$$

其中 μ 为价格运动中的趋势强度。

与经典AS做市模型的最优解解法相似，我们将 S_t 过程假设替换，可以得到做市商的近似最优解为：

$$\delta_{\infty}^{b*}(q) \simeq \frac{1}{\gamma} ln(1+\frac{\gamma}{k}) + [-\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} + \frac{2q+1}{2}]\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma}{2kA}(1+\frac{\gamma}{k})^{1+\frac{k}{\gamma}}}$$

$$\delta_{\infty}^{a*}(q) \simeq \frac{1}{\gamma} ln(1+\frac{\gamma}{k}) + [\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - \frac{2q-1}{2}]\sqrt{\frac{\sigma^2\gamma}{2kA}(1+\frac{\gamma}{k})^{1+\frac{k}{\gamma}}}$$

这里参考价格r的结果与经典模型一致。

3

总结

通过对标的资产市场进行建模，在一定假设条件下，我们得到了做市商报单价格的近似最优解。在实际运用过程中，我们要结合具体交易标的的特点、微观结构，我们期望的交易周期和自身的风险偏好来具体计算模型中的各个参数及变量。

首先，我们需要得到当前时刻t，交易的标的资产的参考价格(公允价格)。一般情况下，我们使用midprice来近似当前时刻的参考价格 S_t ，即：

$$S_t = midprice = \frac{bidprice1+askprice1}{2}$$

例如，当标的资产的orderbook如下：

	price	size
Ask1	101	50
Bid1	100	100

此时，可以得到：

$S_t = midprice = \frac{bidprice1+askprice1}{2} = 100.5$ 。

在具体运用的过程中， S_t 可能有很多更好的近似算法，例如，引入盘口size信息当做权重参与计算，可能会得到更好的交易结果。

接下来，我们需要得到描述交易标的市场状态的参数变量A，k，σ。这里，我们观察公式可以知道，A，k都是表征市场流动性的特征变量， $A \propto \lambda$ ，而 $k \propto \frac{1}{\lambda}$ ，这里A越大，意味着市价单强度越高，击穿限价指令簿的概率也就越大，k越小意味着orderbook的单位size越小，限价指令簿被击穿的概率也就越大。于是我们可以将A理解为限价指令簿击穿概率系数，k为限价指令簿厚度系数。在计算A，k时，需要通过统计具体标的资产单位时间内市价单击穿某个价位的概率，并代入公式:

$$\lambda(\delta) = Aexp(-k\delta) = Aexp(-k(|s-s\prime|))$$

而 σ 反映的是标的资产市场波动率，在计算 σ 时我们可以统计标的资产单位时间内的价格波动来得到具体的参数值。这里我们做一些小小的优化提示，因为标的资产市场受到很多宏观因素和其他因素的影响，A，k， σ 值通常是不稳定的，我们有时可以通过滚动更新(rolling update)的方式将参数自适应。

最后，我们将在模型中加入趋势校正项，计算参数 μ 的值。在一般假设价格服从布朗运动的过程中，单位时间内价格变化的期望始终为0，然而现实中并非如此。因此我们可以结合普通打对价成交的taking策

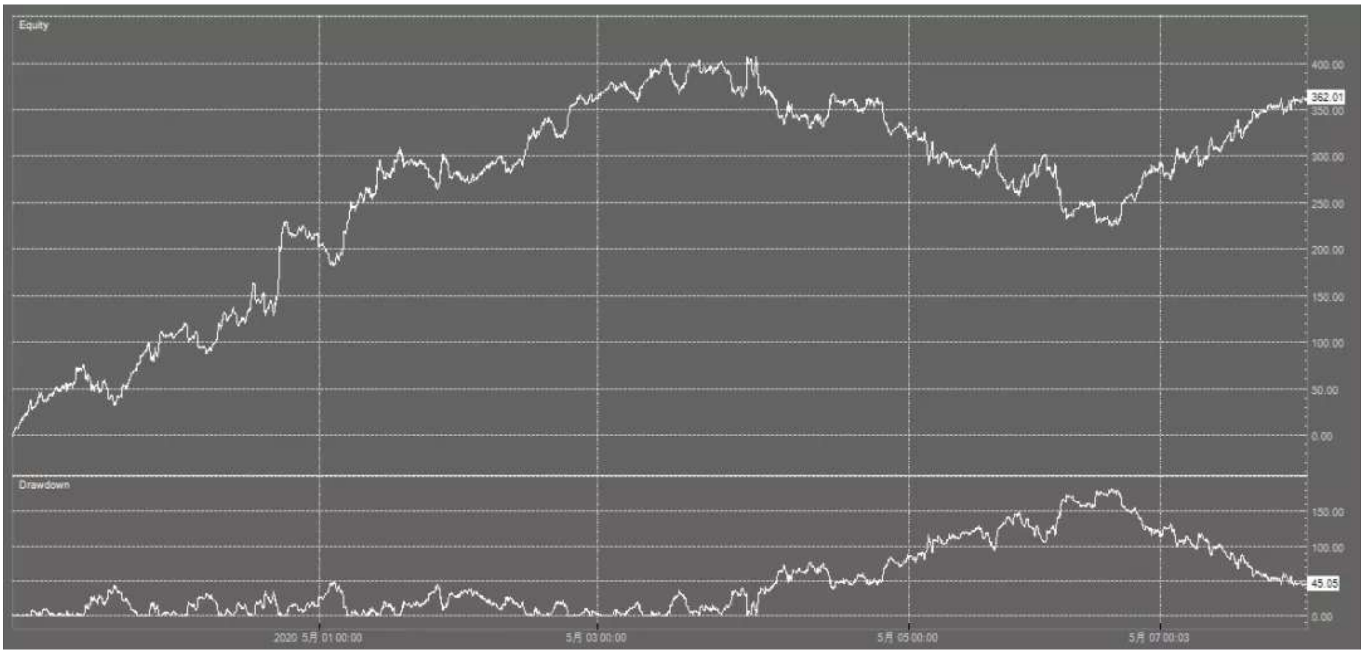
略对价格变化期望的预测，使用因子模型进行计算，得到当前市场环境下，单位时间后价格的变化期望，即我们所需要的 μ 值。这里，我们提供两个经典的预测因子，可以通过自己的预测模型进行拟合 μ 值：

$$OIR(orderimbalancesratio) = \frac{bidsize1-askprize1}{bidprize1+askprize1}$$

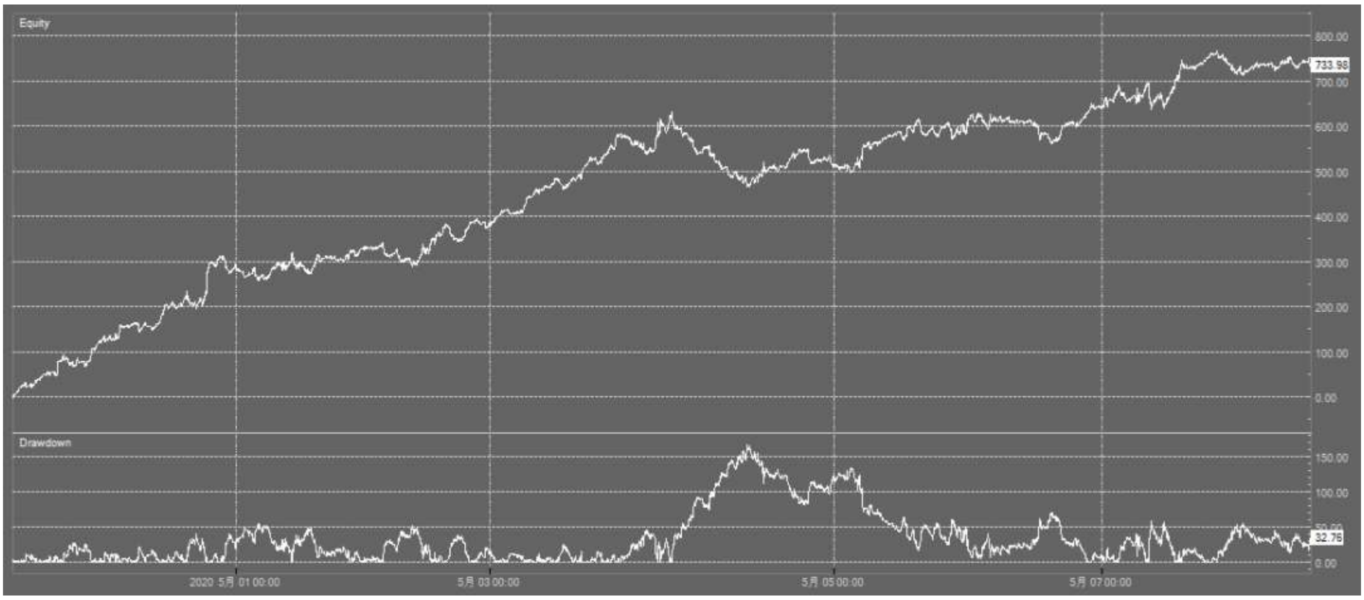
$$RS(relativespread) = \frac{spread}{midprice} = \frac{2*(askprice1-bidprice1)}{askprice1+bidprice1}$$

至此，我们做市策略的基础参数值就全部确定了。

回测表现：



图一.未引入趋势项表现



图二.引入趋势项表现

根据经典AS做市模型，引入与做市商风险偏好相关，优化库存管理的最大库存限制，并加入市场趋势项，得到了我们初步的做市模型系统框架。这里，其实还有很大的优化空间值得探索。例如，做市场报单带来的市场冲击是否需要考虑引入补偿项；如何更精确地模拟出挂单的撮合情况；如何根据库存情况动态调整挂单的模式；趋势项的计算存在巨大的优化空间(因子、模型)等等。

参考资料：

1. Gomber P, Arndt B, Lutat M, et al: High-Frequency Trading. (2011)
2. Ho, T., Stoll, H.R.: Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. Journal of Financial Economics 9(1), 47–73 (1981).
3. Avellaneda, M., Stoikov, S.: High-frequency trading in a limit order book. Quantitative Finance 8(3), 217–224 (2008).
4. Olivier G, Charles L, Joaquin F: Dealing with the Inventory Risk A solution to the market making problem. Mathematics and financial economics (2013)
5. 华泰期货研究所量化组(201905)，《股指期货高频做市策略的库存风险管理》