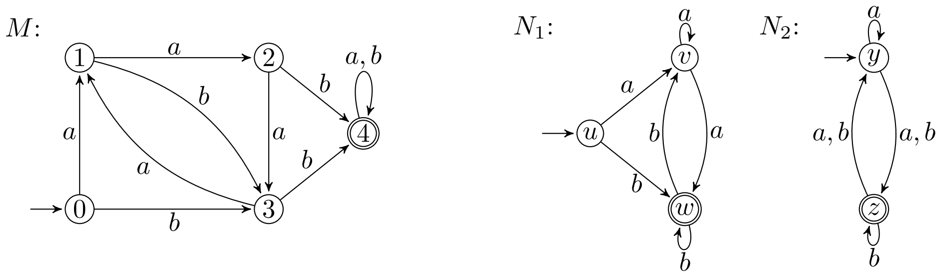
Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 27. 2. 2020 um 12 Uhr (Einlass) in RUD26 0'115 und 0'110.
- Nachklausurtermin: 7. 4. 2020 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'115 (und 0'110); die Nachklausur kann ohne Teilnahme an der ersten Klausur geschrieben werden.
- Anmeldung in Agnes nur mit Übungsschein (d.h. 120 schriftliche Punkte + 5 bestandene MC-Tests ab Blatt 2 oder alter ÜS) bis 20.2.2020 (Klausur) bzw. 31.3.2020 (Nachklausur).
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Hilfsmittel sind nicht zugelassen: keine Notizen, keine Skripte, keine elektronischen Hilfsmittel
- Bitte bringen Sie Ihren Studierenden- und einen gültigen **amtlichen** Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit, ein Foto auf der CampusCard genügt **nicht**.
- Diese Probeklausur ist umfangreicher als die Klausur.
- Es finden vorab Extratutorien statt (siehe Moodle-Kurs).

Aufgabe 1 ***38 Punkte***

Betrachten Sie den DFA M sowie die NFAs N_1 und N_2:



(a) Zeigen Sie, dass M ein Minimal-DFA für die Sprache $L = L(M)$ ist.

(b) Definieren Sie den Begriff der Restsprache L_w für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$.

(c) Beschreiben Sie, wie sich aus M ein Minimal-DFA für die Restsprache L_{aa} konstruieren lässt.

(d) Geben die den Index sowie ein Repräsentantensystem für die Nerode-Relation $\sim_L$ an.

(e) Wandeln Sie N_1 mit dem Potenzmengenverfahren in einen äquivalenten DFA um.

(f) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(N_1)$ an.

(g) Konstruieren Sie einen NFA N für die Sprache $L(N_1)L(N_2)$ nach dem Verfahren aus der Vorlesung.

(h) Geben Sie ohne Begründung einen NFA für die Sprache $L(N_1) \cap L(N_2)$ an (Sie müssen kein Verfahren aus der Vorlesung nutzen).

(i) Zeigen Sie, dass die Sprache $L_1 = \{a^n b^m a^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$ **nicht** regulär ist.

Aufgabe 2 Sei $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. ***11 Punkte***

Sei R_1 die Äquivalenzrelation auf A mit den Äquivalenzklassen $\{1,2,3,4\}$ und $\{5,6,7,8\}$. Sei weiter R_2 die Ordnung auf A mit

$$R_2 = \{(4,1),(1,6),(6,2),(6,3),(7,5),(8,5)\}^* \text{ und } R = R_1 \cap R_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt $E \cap O$ einer Äquivalenzrelation E und einer Ordnung O ebenfalls eine Ordnung ist.

(b) Geben Sie das Hasse-Diagramm von R an.

(c) Hat die Menge $H = \{7,8\}$ bzgl. R ein Supremum bzw. Infimum? Falls ja, geben Sie jeweils den Wert an, falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Aufgabe 3 ***22 Punkte***

Sei $G = (\{A,B,C,D,E,F,G\},\{a,b\},P,A)$ mit

$$\begin{array}{llll} P: & A \to F, G, DE, bC & B \to E, F, b & C \to E, G, AA \\ & D \to C & E \to CA & F \to B, ab \\ & G \to D, a & & \end{array}$$

(a) Welche Bedingungen müssen die Regeln einer kontextfreien Grammatik erfüllen?

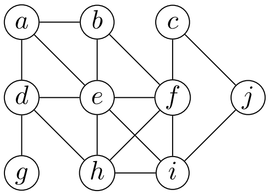
(b) Wandeln Sie die kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform um. Nutzen Sie das Verfahren aus der Vorlesung.

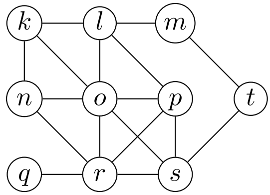
(c) Entscheiden Sie, ob die Sprache $L_1 = \left\{ w2w2w \;\middle|\; w \in \{0,1\}^* \right\}$ kontextfrei ist oder nicht. Beweisen Sie.

(d) Entscheiden Sie, ob die Sprache $L_2 = \left\{a^n b^m b^n a^m \;\middle|\; n, m \geq 0\right\}$ kontextfrei ist oder nicht. Beweisen Sie.

Bemerkung: Falls Sie eine(n) Grammatik/Automaten angeben, ist auch deren/dessen Korrektheit zu zeigen, d.h., dass genau die Wörter aus L_1 bzw. L_2 akzeptiert oder erzeugt werden.

Aufgabe 4 Betrachten Sie folgende Graphen: ***30 Punkte***

$G:$ 

$H:$ 

Betrachten Sie weiter das Problem CliqueFree:

Gegeben: (G, k, l), mit $G = (V, E)$ ist ein Graph und $k, l \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ der Größe $\|V'\| = l$, die keine Clique C der Größe k von G als Teilmenge hat (d.h. für alle Cliquen C der Größe k gilt: $C \nsubseteq V'$)?

(a) Zeigen Sie, dass G und H nicht isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass G' und H' isomorph sind, wobei G' und H' aus G und H entstehen, wenn j bzw. t mitsamt ihren Kanten entfernt werden.

(c) Geben Sie 4 Cliquen C_1, C_2, C_3, C_4 in G an, die alle Knoten abdecken, d.h. $\bigcup_{i=1}^{4} C_i = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

(d) Geben Sie die Cliquenzahl $\omega(G)$ und die Stabilitätszahl $\alpha(G)$ von G an. Zeigen Sie, dass Ihre Angaben korrekt sind.

(e) Welche der Tripel $(G, 5, 10)$, $(G, 4, 9)$ und $(G, 2, 5)$ sind positive Instanzen von CliqueFree? Begründen Sie.

(f) Zeigen Sie, dass CliqueFree NP-hart und co -NP-hart ist, indem Sie zeigen, dass sowohl IS als auch $\overline{\text{Clique}}$ in Polynomialzeit auf CliqueFree reduzierbar sind.

(g) Geben Sie mit Begründung jeweils an, ob G einen Hamiltonpfad bzw. Hamiltonkreis enthält.

Aufgabe 5 ***13 Punkte***

(a) Definieren Sie formal das spezielle Halteproblem K. Sie brauchen $M_w(x)$, für $w, x \in \{0,1\}^*$, nicht zu definieren.

(b) Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie entscheidbar, semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar, oder nicht einmal semi-entscheidbar ist. Begründen Sie.

- $L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x \in \{0,1\}^* : \quad |x| \leq |w| \text{ und } M_w(x) \text{ hält nicht} \\ \text{innerhalb von } |w| \text{ Schritten} \end{array} \right\}$
- $L_2 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x \in \{0,1\}^* : \quad M_w(x) \text{ hält nicht} \\ \text{innerhalb von } |w| \text{ Schritten} \end{array} \right\}$
- $L_3 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \exists x \in \{0,1\}^* : \quad M_w(x) \text{ hält nicht} \right\}$

Aufgabe 6 ***14 Punkte***

Betrachten Sie die DTM $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a\}, \{a, A, \sqcup\}, \delta, p, \varnothing)$ mit δ:

$q_0 a$	$\to$	$q_1 AR$	(1)	$q_0 A$	$\to$	$q_0 aR$	(2)	$q_1 a$	$\to$	$q_1 aR$	(3)
$q_1 A$	$\to$	$q_2 AL$	(4)	$q_1 \sqcup$	$\to$	$q_2 \sqcup L$	(5)	$q_2 A$	$\to$	$q_2 AN$	(6)
$q_2 a$	$\to$	$q_3 \sqcup L$	(7)	$q_3 a$	$\to$	$q_3 aL$	(8)	$q_3 A$	$\to$	$q_0 aR$	(9)

(a) Geben Sie die haltende Rechnung von M bei Eingabe aa sowie 10 Schritte der Rechnung von M bei Eingabe aaa an ($K_{aaa} = K_0 \vdash \ldots \vdash K_{10}$).

(b) Geben Sie die partielle Funktion $f : \{a\}^* \to \{a, A, \sqcup\}^* \cup \{\uparrow\}$ an, die M berechnet.

(c) Beschreiben Sie ohne Begründung, wie M zu einer DTM M' zu modifizieren ist, damit $L(M') = \mathrm{dom}(f)$ gilt.

(d) Beschreiben Sie ohne Begründung, wie sich M' weiter zu einer DTM M'' mit $L(M'') = \mathrm{dom}(f)$ modifizieren lässt, die alle Eingaben entscheidet.

Erinnerung: Es gilt $\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \{a\}^* \;\middle|\; f(x) \neq \uparrow\right\}$.

Aufgabe 7 ***22 Punkte***

Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr sind und begründen Sie ihre Antwort.

(a) Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine DTM. Definieren Sie, was es heißt, dass M die Eingabe $x \in \Sigma^*$ bzw. eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidet. Sie können erkennen und akzeptieren als bekannt voraussetzen.

(b) Die Sprache $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \overline{\mathrm{PCP}} \leq L(M_w)\right\}$ ist entscheidbar.

(c) Die Sprache $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \textsc{Sat} \leq^p L(M_w)\right\}$ ist NP-vollständig.

(d) $L_3 = \left\{F\#G \;\middle|\; \text{genau eine der Formeln } F, G \text{ liegt in } \textsc{Sat}\right\}$ ist NP-hart.

(e) Das folgende Problem $\textsc{TransClique}$ liegt in P:

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Ist die Relation $\{(u, v) \mid u = v \text{ oder } \{u, v\} \in E\}$ transitiv und hat G eine Clique der Größe k?