Probeklausur: Lösungsvorschläge

Bearbeitung des Bonus-MC-Tests bis 12. 2. 2018, 23:59 Uhr

Aufgabe 1 — ***13 Punkte***

Betrachten Sie die beiden folgenden DFAs M_1 und M_2.

(a) Geben Sie explizite Beschreibungen und reguläre Ausdrücke für die Sprachen $A = L(M_1)$ und $B = L(M_2)$ an.

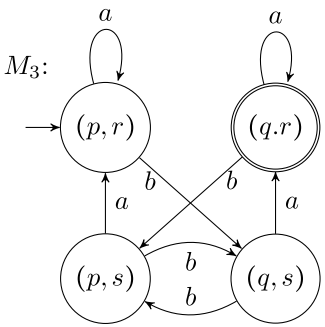
(b) Konstruieren Sie aus M_1 und M_2 einen DFA M_3 für die Sprache $A \cap B$. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

(c) Geben Sie einen DFA M_4 für die Sprache $A \cup B$ an, der höchstens vier Zustände hat.

Lösung:

(a) $A = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_b(x) \equiv_2 1\}$, reg. Ausdruck: $a^*ba^*(ba^*ba^*)^*$,
$B = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ endet nicht mit } b\}$, reg. Ausdruck: $\varepsilon|(a|b)^*a$

(b) Kreuzproduktautomat mit $E = \{(q,r)\}$



(c) Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, (p,r), E)$. Dann ist $M_4 = (Z, \Sigma, \delta, (p,r), \{(q,r), (p,r), (q,s)\})$ eine Lösung. Hinweis: M_4 ist nicht die einzige Lösung (auch nicht mit genau 4 Zuständen), da (q,s) und (q,r) verschmelzbar sind.

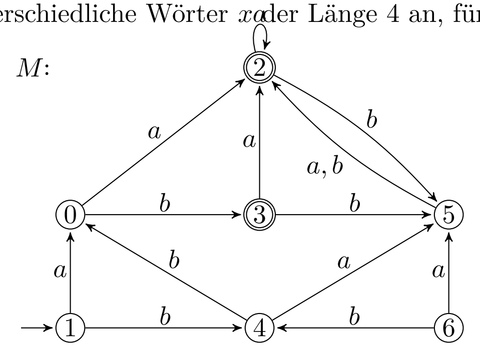
Aufgabe 2 — ***18 Punkte***

Betrachten Sie den folgenden DFA M und $L = L(M)$.

(a) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

(b) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Nerode-Relation $\sim_L$ an.

(c) Geben Sie 4 unterschiedliche Wörter x der Länge 4 an, für die $x \sim_L bbaaab$ gilt.

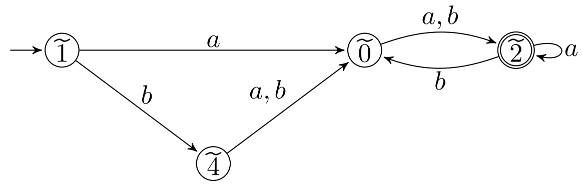


Lösung:

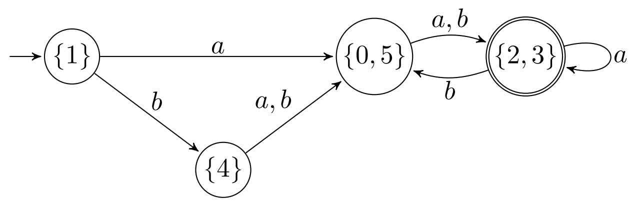
(a) Der Zustand 6 ist nicht erreichbar. Betrachte im folgenden den Automaten, den man nach Entfernen des Zustands 6 erhält.
(In der folgenden Tabelle stehen alle Möglichkeiten durch Komma getrennt drin. Zu beachten: Aus Eintrag (4,0) folgt Eintrag (4,1).)

1	a,b				
2	ε	ε			
3	ε	ε			
4	a,b	ba,bb	ε	ε	
5		a,b	ε	ε	a,b
	0	1	2	3	4

Somit entsprechen die Zustände 0 und 5 einer Äquivalenzklasse; ebenso die Zustände 2 und 3. Die Zustände 1 und 4 entsprechen jeweils einer separaten Äquivalenzklasse.



bzw.



(b) z.B. $\{\varepsilon, a, b, aa\}$

(c) Es gilt für alle Wörter der Länge 4, die durch folgende reguläre Ausdrücke beschrieben werden: $a(a|b)ab$ oder $b(a|b)(a|b)b$

Aufgabe 3 ***16 Punkte***

Betrachten Sie auf der Grundmenge $A = \{1,2,3,4\}$ die Relationen

$$R = \{(1,2),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3)\} \text{ und}$$
$$S = Id_A \cup \{(2,3),(3,2)\}\ .$$

(a) Geben Sie an, wie viele Paare zu R und S jeweils mindestens hinzugefügt werden müssen, damit diese transitiv bzw. semikonnex werden.

(b) Sind die Relationen $S' = S \setminus \{(3,2)\}$ bzw. $R' = R \cup Id_A$ Ordnungen? Falls nein, begründen Sie, falls ja, geben Sie (sofern vorhanden) das Infimum der Menge $\{2,3\}$ bezüglich der Ordnung an.

(c) Geben Sie eine Relation P auf der Grundmenge $C = \{a,b,c,d\}$ mit $\{(c,a),(a,d)\} \subseteq P$ an, sodass (A,R) und (C,P) isomorph sind.

Lösung:

(a) transitiv: S:0, R:1(Begr.: $(1,3)$ fehlt in R)
semikonnex: R:4, S:5 ; (Begr.: $\binom{4}{2} = 6$ Paarmengen $\{u,v\}$ mit $u \neq v$, $u,v \in A$. Für jede solche muss mindestens eine Kante in R bzw. S sein. 2 bzw. 1 Paarmenge sind durch R bzw. S bereits abgedeckt.) (Es gab volle Punkte auch ohne Begr.)

(b) S' ist Ordnung, Das Infimum bzgl. $\{2,3\}$ ist 2.
R' ist keine Ordnung, da es wegen $1R'2R'3$ und $1 \not{R}' 3$ nicht transitiv ist.

(c) $P = \{(c,a),(a,d),(a,a),(d,a),(d,d)\}$

Aufgabe 4 ***22 Punkte***

Die *lexikographische Striktordnung* $<$ auf $\{0,1\}^*$ ist wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \leq |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Betrachten Sie die Sprachen

$$L_1 = \left\{x\#y \,\middle|\, x,y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|,\ x < y\right\} \quad \text{und}$$
$$L_2 = \left\{x\#y \,\middle|\, x,y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|,\ x < y^R\right\}.$$

(a) Geben Sie eine eindeutige Typ-2-Grammatik für L_2 an und den Syntaxbaum für das Wort $w = 11000\#10011$ an.

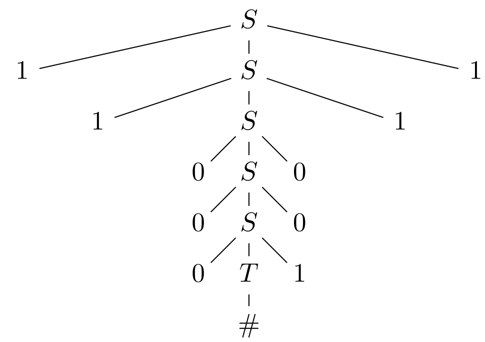
(b) Zeigen Sie, dass L_1 nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu Wörter der Form $0^l 1^l \# 0^{l-1} 1 0^l$.

(c) Gibt es eine Sprache A mit $L_1 \cap A \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$? Begründen Sie kurz.

(d) Gibt es eine Sprache $A \in \mathsf{REG}$ mit $L_2 \cap A \notin \mathsf{CFL}$? Begründen Sie kurz.

Lösung:

(a) $G = (\{S,T\},\{0,1,\#\},P,S)$ mit
$P : S \to 0S0, 1S1, 0T1; T \to 0T0, 1T1, 0T1, 1T0, \#$



(b) Ann.: $L_1 \in \mathsf{CFL}$, dann ex. PZ l bzgl. des PL für kfr. Sprachen. Dann ist $z = 0^l 1^l \# 0^{l-1} 1 0^l \in L_1$, aber nicht pumpbar. Eine Zerlegung $z = uvwxy$ nach Bedingung 1 und 2 der Komklusion des PL für z müsste v aus dem ersten Einsblock und x aus dem zweiten Nullblock und zudem mit $|u| = |v|$ wählen, sonst ist entweder $|vwx| \leq l$ verletzt, das gepumpte Wort enthält nicht genau eine $\#$ oder die Wörter vor und nach der Raute haben verschiedene Längen. Dann hat das Wort uv^2wx^2y aber mehr Nullen am Anfang des Teilwortes nach $\#$ als am Anfang des ersten Teilworts vor $\#$, ist also nicht in L_1. Widerspruch, also hat L_1 keine endliche Pumpingzahl und ist daher nicht in CFL.

(c) Ja, z.B. $A = L(0^*\#1^*)$.

(d) Nein, denn CFL ist unter Schnitt mit REG abgeschlossen.

Aufgabe 5 ***15 Punkte***

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie.

(a) $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) = L(G) \text{ für eine kontextfreie Grammatik } G\right\}$

(b) $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) = L(G) \text{ für eine Grammatik } G\right\}$

(c) $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \text{ führt zweimal hintereinander dieselbe Kopfbew. aus}\right\}$

Lösung:

(a) $L_1 = L_{\mathsf{CFL}}$. Da $\emptyset \neq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{RE}$ ist L_1 nach Satz von Rice nicht in REC. Die Sprache ist auch nicht in RE, dies lässt sich mit derselben Reduktion, wie in 77.i zeigen.

(b) $L_2 = \{0,1\}^* \in \mathsf{REC}$, da für jede Sprache A aus RE eine Grammatik G existiert mit $L(G) = A$.

(c) $L_3 \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$: L_3 kann nicht in REC sein, da sich das spezielle Halteproblem darauf reduzieren lässt ($w \mapsto w'$) mit $M_{w'}$: ersetze bei der Simulation von $M_w(w)$ jeweils die N durch $LNRN$, alle L durch LN und R durch RN. Falls $M_w(w)$ hält, führe NN aus. L_3 ist offensichtlich in RE (simulieren und prüfen, hier eigentlich nicht gefragt).

Aufgabe 6 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = \{a \in \{0,1\}^n \mid \#_1(a) = 1\}$ ***20 Punkte***

Geben Sie für folgende Probleme an, ob sie in P liegen oder NP-hart oder co-NP-hart sind. Begründen Sie.

(a) **Gegeben:** Ein Graph G.
Gefragt: Enthält G zwei Pfade, sodass jeder Knoten von G auf genau einem dieser Pfade liegt?

(b) **Gegeben:** Ein zusammenhängender Graph G.
Gefragt: Enthält G zwei Wege, sodass jede Kante von G von genau einem dieser Wege durchlaufen wird?

(c) **Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel F mit n Variablen.
Gefragt: Ist $F \in \textsc{Sat}$ und gilt $F(a) = 1$ für alle $a \in S_n$?

(d) **Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel F mit n Variablen.
Gefragt: Ist $F \in \textsc{Taut}$ und gilt $F(a) = 1$ für alle $a \in S_n$?

Lösung:

(a) NP-hart wegen Reduktion von Hamiltonpfad: Bilde G auf die disjunkte Vereinigung G' von G mit P_2 (Pfad der Länge 1) ab.
Wenn G einen Hamiltonpfad P enthält, sind P und P_2 zwei Pfade, sodass jeder Knoten von G' auf einem der beiden liegt. Umgekehrt muss bei jedem solchen Pfadpaar P_2 einer der Pfade sein und der andere ein Hamiltonpfad von G sein.

(b) In P: Akzeptiere, wenn der Eingabegraph G (zusammenhängend ist und) höchstens 4 Knoten mit ungeradem Grad hat.
Wenn diese Bedingung erfüllt ist, lassen sich die zwei geforderten Wege z.B. wie folgt konstruieren: Zwischen den Knoten ungeraden Grades können kantendisjunkte Wege gefunden werden (z.B. durch kürzeste Wege, und wenn im ersten Anlauf nicht kantendisjunkt, Paarung der ungerade Knoten ändern). Im Restgraphen G' (nach Entfernen der Kanten der beiden Wege) haben alle Knoten geraden Grad. In jeder Zusammenhangskomponente von G' existiert folglich eine Eulertour. Da der Graph zusammenhängend ist, muss jede dieser Zusammenhangskomponenten mindestens einen Knoten mit einem der beiden anfangs gefundenen Wege gemeinsam haben, und kann an dieser Stelle in diesen eingefügt werden.

(c) In P, da der zweite Teil der Konjunktion bereits $F \in \textsc{Sat}$ impliziert. Folglich genügt es, F auf den n Elementen von S^n zu evaluieren.

(d) co -NP-hart, da der zweite Teil der Konjunktion bereits von $F \in \textsc{Taut}$ impliziert wird. Folglich ist das Problem exakt $\overline{\textsc{Taut}}$, von dem in der Übung gezeigt wurde, dass es polynomialzeitäquivalent zu $\overline{\textsc{Sat}}$ ist.

Aufgabe 7 ***10 Punkte***

Geben Sie **zusammenhängende** Graphen G_i für $i \in \{1,2\}$ mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften an:

(a) G_1 hat genau 7 Knoten und $\chi(G_1) = 4$.

(b) G_2 mit $\alpha(G_2) = \beta(G_2) = 6$.

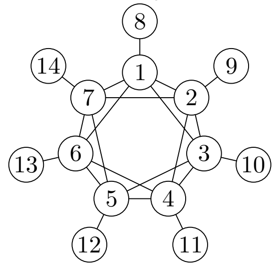
Lösung:

(a) K_4 und P_4, die genau einen Knoten gemeinsam haben.

(b) C_{12} oder $K_{6,6}$

Aufgabe 8 ***16 Punkte***

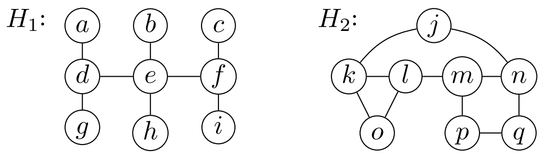
Betrachten Sie den nebenstehenden Graphen G.



(a) Bestimmen Sie folgende Parameter. Begründen Sie.

(1) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,
(2) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$.

(b) Ist H_i für $i \in \{1,2\}$ isomorph zu einem Subgraphen von G? Falls ja, geben Sie einen solchen Subgraphen G_i von G **oder** einen Isomorphismus von H_i nach G_i an, falls nein, begründen Sie.



Lösung:

(a) (3) $\mu(G) = 7$, da $\big\{\{i, i+7\} \,\big|\, 1 \le i \le 7\big\}$ ein Matching ist und $2\mu(G) \le n(G) = 14$ gelten muss.

(5) $\omega(G) = 3$, denn: eine 3-Clique ist $\{1,2,7\}$ und es kann keine 4-Clique geben. Diese kann nur Knoten aus $\{1,\ldots,7\}$ enthalten. Wäre z.B. 1 in einer solchen, dann müssten 3 seiner Nachbarn eine 3-Clique bilden. Zwischen den 4 Nachbarn $6,7,2,3$ gibt es aber insgesamt nur 3 Kanten und diese bilden kein Dreieck. Analog lässt sich dies wegen der Symmetrie für alle Knoten $i \le 7$ argumentieren.

(b) Für H_1 betrachte folgenden Isomorphismus:
$f_1 = \{(a,8),(b,9),(c,10),(d,1),(e,2),(f,3),(g,7),(h,4),(f,5)\}$ Der Graph H_2 besitzt 8 Knoten, die alle Grad ≥ 2 haben. In G gibt es aber nur 7 Knoten mit Grad ≥ 2, also kann H_2 zu keinem Subgraphen von G isomorph sein.