

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σουλίου

3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων Ημ/νία Παράδοσης 6/1/2019

Άσκηση 1: Υποβρύχιο Τρίτων

Είναι μια αχόμα συνηθισμένη μέρα στο υποβρύχιο Τρίτων, μέχρι να χτυπήσει ξαφνικά το τηλέφωνο του Σημαιοφόρου βάρδιας. Στην άλλη άχρη της γραμμής βρίσκεται ο Υπασπιστής του Επιτελάρχη που απαιτεί να του σταλεί άμεσα $2 \, \mathrm{KP}$ σε τριγωνικό ραντάρ! Επικρατεί σύγχυση, καθώς κανένα από τα μέλη του πληρώματος δεν γνωρίζει τι είναι αυτό. Κανένα, εκτός βέβαια από εσάς, που ως έμπειρος τεχνικός, αναλαμβάνετε να εκπληρώσετε το αίτημα και να σώσετε την ημέρα!

Αφού λοιπόν ανοίξατε το τριγωνικό ραντάρ, εμφανίζεται μπροστά σας ένα πλέγμα διαστάσεων $N\times M$. Παρατηρώντας το πλέγμα, μπορείτε να διακρίνετε K πιλοτικές διαβάσεις. Μια πιλοτική διάβαση είναι μια ακμή που συνδέει δύο κουτάκια του πλέγματος μεταξύ τους. Οι μόνες κινήσεις, που μπορεί να πραγματοποιήσει το υποβρύχιο, είναι να μετακινηθεί κατά ένα κουτάκι προς τα αριστερά ή κατά ένα κουτάκι προς τα πάνω. Αν το υποβρύχιο βρίσκεται σε κουτάκι από όπου ξεκινά πιλοτική διάβαση, τότε πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη πιλοτική διάβαση και να μετακινηθεί στο κουτάκι όπου αυτή καταλήγει. Οπότε, αν δεν θέλουμε το υποβρύχιο να ακολουθήσει μια πιλοτική διάβαση, τότε το υποβρύχιο δεν πρέπει να περάσει από κουτάκι όπου βρίσκεται η αρχή της διάβασης (διαφορετικά θα είναι υποχρεωμένο να την ακολουθήσει). Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο να περάσει το υποβρύχιο από το κουτάκι όπου καταλήγει μια πιλοτική διάβαση.

Το περιεχόμενο του σήματος έχει σχοπό να επιβεβαιώσει ότι οι χινήσεις του υποβρυχίου δεν είναι εύχολα προβλέψιμες. Πρέπει λοιπόν να γράψουμε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το πλήθος όλων των μονοπατιών που αχολουθούν τους παραπάνω χανόνες, χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτιχές διαβάσεις, χαι οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχιχή του θέση, στο χάτω-δεξιά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτιχό είναι το χουτάχι (N-1,M-1)), στην τελιχή του θέση, στο πάνω δεξιά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτιχό είναι το χουτάχι (0,0)). Το σήμα φυσιχά θα περιέχει τον συνολιχό αριθμό αυτών των μονοπατιών mod 1000000103, ώστε να μην ανησυχούμε για υποχλοπές.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, τους αριθμούς N, M, K και X. Σε καθεμία από τις επόμενες K γραμμές θα δίνεται ένα ζευγάρι μη-αρνητικών ακέραιων s και e, χωρισμένων με ένα κενό διάστημα, που ορίζουν μια πιλοτική διάβαση. Θεωρώντας ότι το κάτω-δεξιά κουτάκι έχει συντεταγμένες (N-1, M-1) και το πάνω-αριστερά έχει συντεταγμένες (0,0), το s δηλώνει ότι η πιλοτική διάβαση ξεκινά από το κουτάκι με συντεταγμένες s.x=s/M, $s.y=s \bmod M$ και καταλήγει στο κουτάκι με συντεταγμένες e.x=e/M, $e.y=e \bmod M$. Θα ισχύει ότι $s.x \ge e.x$ και $s.y \ge e.y$ (με τουλάχιστον μία από τις δύο ανισότητες να είναι αυστηρές) και ότι μια η αρχή και το τέλος μια πιλοτικής διάβασης δεν συμπίπτουν με την αρχή ή το τέλος μια άλλης.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας θα τυπώνει στο standard output το πλήθος (mod 1000000103) όλων των μονοπατιών που χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, στο κάτω-δεξιά σημείο (N-1,M-1), στην τελική του θέση, στο πάνω δεξιά σημείο (0,0).

| Περιορισμοί: | Παραδείγματα Εισόδου: | Παράδ. Εξόδου: |
|-----------------------------------|-----------------------|----------------|
| $2 \le N, M \le 180$ | 4720 | 37 |
| $0 \le X \le K \le 100$ | 16 8 | |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: $1 \sec$. | 25 17 | |
| Όριο μνήμης: 64 ΜΒ. | | |
| | 8 6 3 1 | 458 |
| | 37 24 | |
| | 25 12 | |
| | 28 21 | |

Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Στην μαχρινή Λεφτούπολη, μία τράπεζα διαχινεί χάθε μέρα μεγάλα ποσά χρημάτων. Για τις χρηματαποστολές, χρησιμοποιεί ένα συνεχτιχό υποδίχτυο του οδιχού διχτύου της πόλης. Προχειμένου να μειώσει τις πιθανότητες ληστείας, χάθε πρωί εφαρμόζει μέτρα ασφαλείας στους δρόμους του υποδιχτύου αυτού. Τα μέτρα ασφαλείας έχουν χόστος c_e για χάθε δρόμο e. Για αχόμα μεγαλύτερη ασφάλεια, η τράπεζα αλλάζει χαθημερινά το υποδίχτυο που χρησιμοποιεί με βάση έναν σύνθετο αλγόριθμο που χαθιστά εξαιρετιχά δύσχολη την πρόβλεψη του υποδιχτύου. Ωστόσο, ο χαινούριος διευθυντής προχειμένου να μειώσει το χόστος αυτής της διαδιχασίας, αποφάσισε ότι το δίχτυο που θα επιλέγεται θα είναι υποχρεωτιχά ελάχιστου χόστους. Μία συμμορία ληστών, μαθαίνοντας την πληροφορία αυτή, αποφασίζει να αναλύσει το οδιχό δίχτυο της πόλης χαι να προσδιορίσει με αχρίβεια τους πιθανούς δρόμους που θα χρησιμοποιήσει η χρηματαποστολή.

Η συμμορία σας προσφέρει σημαντική αμοιβή για ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει ποιοι δρόμοι θα χρησιμοποιηθούν σίγουρα για χρηματαποστολές, ποιοι σίγουρα όχι και ποιοι είναι αβέβαιοι.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετιχούς ακέραιους N και M που αντιστοιχούν στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των δρόμων του δικτύου. Οι κόμβοι του δικτύου αριθμούνται από 1 μέχρι N. Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα υπάρχουν τρεις φυσιχοί αριθμοί a_e, b_e, c_e που δηλώνουν ότι ο δρόμος $e = \{a_e, b_e\}$ έχει κόστος c_e . Το δίκτυο είναι μη κατευθυνόμενο, θα είναι συνεκτιχό και δεν θα περιέχει αναχυκλώσεις ή πολλαπλές αχμές.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output, σε τρεις διαδοχικές γραμμές, το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάθε συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, το πλήθος των ακμών που δεν ανήκουν σε κανένα συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους και το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάποιο συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, αλλά όχι σε όλα.

| Περιορισμοί: | Παραδείγματα Εισόδου: | Παραδ. Εξόδου: |
|---------------------------------------|-----------------------|----------------|
| $2 \le N \le 50.000$ | 3 3 | 0 |
| $N-1 \le M \le 500.000$ | 1 2 1 | 0 |
| $1 \le c_e \le 200$ | 1 3 1 | 3 |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. | 2 3 1 | |
| Όριο μνήμης: 64 ΜΒ. | | |
| | 3 3 | 2 |
| Στο 60% των αρχείων, ϑ α | 1 2 1 | 1 |
| υπάρχουν το πολύ 500 αχμές | 1 3 1 | 0 |
| ίδιου βάρους. | 2 3 2 | |