

Лабораторная работа №1 по мат. анализу

Тема: предел последовательности, точные границы, частичные пределы.

Цель работы: научиться работать с определением предела, критерием точных границ, частичными пределами как аналитически, так и численно.

Задание: для данной последовательности x_n найти множество частичных пределов, верхний и нижний пределы, точные границы, наибольший и наименьший элементы. Проверить определение предела для некоторой сходящейся подпоследовательности. Проверить критерий точной грани.

Порядок работы:

Часть 1. Аналитический метод

1. Исследовать данную последовательность x_n на сходимость. Для этого выделить сходящиеся подпоследовательности, найти множество частичных пределов. Найти верхний и нижний пределы. Выяснить, сходится ли x_n .
2. Найти точные нижнюю и верхнюю грани выделенных подпоследовательностей. Провести дополнительное исследование при необходимости (монотонность). Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim} x_n$, $\underline{\lim} x_n$.
3. Имеет ли x_n наибольший и наименьший элементы? Найти их, если есть.
4. Выберите одну сходящуюся подпоследовательность. Запишите для нее определение предела и покажите, что оно выполнено (найдите по любому $\varepsilon > 0$ номер n_0 , начиная с которого члены выбранной подпоследовательности попадают в ε -окрестность предела).

Часть 2. Численный метод

1. Построить график последовательности x_n (первые 100 точек). Отметить на графике найденные аналитически $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim} x_n$, $\underline{\lim} x_n$ (горизонтальными линиями).
2. Выделить одну сходящуюся подпоследовательность, отметить ее точки на графике другим цветом.
3. По данному $\varepsilon > 0$ (используйте, например, значения 0,01; 0,001 и 0,0001) найдите номер n_0 , начиная с которого члены выбранной подпоследовательности попадают в ε -окрестность предела. Постройте график подпоследовательности, начиная с найденного номера n_0 (100 точек), отметьте на графике значение предела (горизонтальной линией).
4. Для исходной последовательности x_n выберите одну из точных границ, которая не достигается. Проверьте выполнение критерия точной грани. Программа должна по заданному $\varepsilon > 0$ (используйте, например, значения 0,01; 0,001 и 0,0001) находить номер m такой, что $x_m > \sup x_n - \varepsilon$ (аналогично для $\inf x_n$). Отметьте найденную точку на графике из п. 2.1 (если требуется, измените диапазон отображаемых номеров).

Для определения своего варианта нужно взять свой номер из общей таблицы и найти остаток от деления его на 20.

Варианты заданий:

1. $x_n = \frac{n}{n+1} (2 + (-1)^n).$
2. $x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos (-1)^n.$
3. $x_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi.$
4. $x_n = \left(2 + \cos \frac{\pi n}{2}\right) \cdot \frac{3n-1}{n+2}.$
5. $x_n = (3 - (-1)^n) \cdot \frac{2n+5}{n+2}.$
6. $x_n = \left(2 + \sin \frac{\pi n}{2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1}.$
7. $x_n = \operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{2n+3}{n+2}.$
8. $x_n = \left(1 + \sin \frac{\pi n}{2}\right) \cdot n.$
9. $x_n = \arcsin \frac{3+(-1)^n}{4} \cdot \frac{5n-1}{3n+5}.$
10. $x_n = \arcsin \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{6n-5}{2n+4}.$
11. $x_n = \operatorname{arctg} \sqrt{2+(-1)^n} \cdot \frac{n}{2n+5}.$
12. $x_n = \left(1 + \sin \frac{\pi n}{2}\right) \cdot \frac{n-3}{n+5}.$
13. $x_n = \frac{2n+1}{n+2} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{2+(-1)^n}.$
14. $x_n = \frac{4n+5}{3n-2} \cdot \arccos \frac{3+(-1)^n}{4}.$
15. $x_n = \frac{5n-7}{3n-2} \cdot \arccos \frac{1+(-1)^n}{2}.$
16. $x_n = \frac{5n-7}{2n+5} \cdot \cos \frac{2+(-1)^n}{6} \pi.$
17. $x_n = \frac{3n+5}{6n-2} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{2+(-1)^n}{4}}.$
18. $x_n = \operatorname{arctg} (-1)^n \cdot \frac{4n-2}{n}.$
19. $x_n = \frac{n+5}{n+3} \cdot \arccos \sqrt{\frac{2+(-1)^n}{4}}.$
20. $x_n = \frac{5n-7}{3n+11} \cdot \arcsin (-1)^n.$