TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

STUDIUM PLUS DUALES STUDIUM

Hausübung 3 – Leon Knauf

a) Herleitung der DGL

Grundlegend berechnet sich die Spannung $U_A$mittels folgender Formel:

$$U_A = U_{R_A} + U_{L_A} + U_{ind}$$

Diese Spannungen werden mit den folgenden Formeln definiert:

$$U_{R_A} = i_A * R_A$$

$$U_{L_A} = L_A * \frac{di_A}{dt}$$

$$U_{ind} = \psi * \omega$$

Nach dem Einsetzen erhält man folgende Gleichung:

$$U_A = i_A * R_A + L_A * \frac{di_A}{dt} + \psi * \omega$$

Nun lässt dich der Strom i_A wie folgt aus dem Motormoment berechnen: $i_A = \frac{M_M}{\psi}$

Das Motormoment ist Summe aus Lastmoment $M_{L(t)}$ und Trägheitsmoment $M_T = J * \frac{d\omega}{dt}$

Somit ergibt sich für U_A:

$$U_A = \frac{M_{L(t)} + J * \frac{d\omega}{dt}}{\psi} * R_A + L_A * \frac{M_{L(t)} + J * \frac{d\omega}{dt}}{\psi} * \frac{d}{dt} + \psi * \omega$$

$$U_A = \frac{M_{L(t)} * R_A}{\psi} + \frac{R_A * J * d\omega}{\psi * dt} + \frac{L_A * M_{L(t)} * d}{\psi * dt} + \frac{L_A * J * d^2\omega}{\psi * dt^2} + \psi * \omega$$

$$U_A = \frac{L_A}{\psi} * \frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{L_A * J}{\psi} * \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_A}{\psi} * M_{L(t)} + \frac{R_A * J}{\psi} * \frac{d\omega}{dt} + \psi * \omega$$

b) DGL für die IR-Kompensation

Durch Einsetzen von $U_A = U_{A0} + k * i_A$ mit den o.g. Formeln für i_A und $M_M$ergibt sich:

$$U_{A0} + k * \frac{M_{L(t)} + J * \frac{d\omega}{dt}}{\psi} = \frac{L_A}{\psi} * \frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{L_A * J}{\psi} * \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_A}{\psi} * M_{L(t)} + \frac{R_A * J}{\psi} * \frac{d\omega}{dt} + \psi * \omega$$

Zuletzt muss diese lediglich in die Normalform umgeformt werden:

$$U_{A0} + \frac{k * M_{L(t)}}{\psi} + \frac{k * J}{\psi} * \dot{\omega} = \frac{L_A}{\psi} * \frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{L_A * J}{\psi} * \ddot{\omega} + \frac{R_A}{\psi} * M_{L(t)} + \frac{R_A * J}{\psi} * \dot{\omega} + \psi * \omega$$

$$-\frac{L_A * J}{\psi} * \ddot{\omega} + \frac{k * J}{\psi} * \dot{\omega} - \frac{R_A * J}{\psi} * \dot{\omega} - \psi * \omega = \frac{L_A}{\psi} * \frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{R_A}{\psi} * M_{L(t)} - U_{A0} - \frac{k * M_{L(t)}}{\psi}$$

Bringt man nun den Faktor vor $\ddot{\omega}$ auf die andere Seite, erhält man die Normalform:

$$\ddot{\omega} + \frac{k}{L_A} * \dot{\omega} - \frac{R_A}{L_A} * \dot{\omega} + \frac{\psi}{L_A * J} * \omega = -\frac{1}{J}\frac{dM_{L(t)}}{dt} - \frac{R_A}{L_A * J} * M_{L(t)} + \frac{\psi}{L_A * J} * U_{A0} + \frac{k * M_{L(t)}}{L_A * J}$$

$$\ddot{\omega} + k_1 * \dot{\omega} + \mathrm{k}_2 * \omega = \frac{\psi}{L_A * J} * U_{A0} - \left(\frac{1}{\mathrm{J}}\frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{R_A - k}{L_A * J} * M_{L(t)}\right)$$

$$k_1 = \frac{R_A - k}{L_A} \qquad k_2 = \frac{\psi^2}{L_A * J}$$

c) Welches System stellt die linke Seite der DGL dar?

Die linke Seite der DGL beschreibt das System des Motors, während die rechte Seite die Umgebungsbedingen des Motors wie die angelegte Spannung und das Lastmoment beschreibt.

d) Welcher Größe entspricht dem Faktor k_1?

Die allgemeine DGL einer gedämpften Schwingung lautet: $\ddot{x} + 2 * \delta * \dot{x} + \omega_0^2 * x = 0$

Daraus lässt sich bestimmen, dass k_1 gleich der Hälfte der Abklingkonstante δ sein muss. In unserem Fall gilt also:

$$2 * \delta = k_1 = 1/\tau = \frac{R_A - k}{L_A}$$

e) Mit $k = R_A$ wird $k_1 = 0$. Was bedeutet das für das Systemverhalten?

Die Abklingkonstante δ gibt an, wie schnell die Schwingung abklingt. Ist $\delta = 0$ klingt die Schwingung nicht ab, da keine Dämpfung vorliegt. Dadurch wird das System ungedämpft in einer Sinusfunktion schwingen.

f) Welcher Größe entspricht dem Faktor k_2?

Aus der allgemeinen Gleichung einer gedämpften Schwingung (siehe Aufgabenteil d.) lässt sich der Faktor k_2 als das Quadrat der Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises definieren. Es gilt:

$$\omega_0^2 = k_2 = \frac{\psi^2}{L_A * J}$$

g) Überführen Sie die DGL zweiter Ordnung in zwei DGLs erster Ordnung.

Zuerst erfolgt eine Umformung der DGL:

$$\ddot{\omega} = -k_1 * \dot{\omega} - \mathrm{k}_2 * \omega + \frac{\psi}{L_A * J} * U_{A0} - \left(\frac{1}{\mathrm{J}}\frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{R_A - k}{L_A * J} * M_{L(t)}\right)$$

Mit der Substitution $\ddot{\omega} = \dot{a}$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\dot{a} = -k_1 * \mathrm{a} - \mathrm{k}_2 * \omega + \frac{\psi}{L_A * J} * U_{A0} - \left(\frac{1}{\mathrm{J}}\frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{R_A - k}{L_A * J} * M_{L(t)}\right)$$

$$\dot{\omega} = a$$

Zuletzt wird das System in die Matrix Schreibweise umgewandelt:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{R_A - k}{L_A} \qquad k_2 = \frac{\psi^2}{L_A * J} \qquad k_3 = \frac{\psi}{L_A * J} * U_{A0} - \left(\frac{1}{J}\frac{dM_{L(t)}}{dt} + \frac{R_A - k}{L_A * J} * M_{L(t)}\right)$$

■ i) Entspricht das Verhalten der Interpretation?

Die Interpretation des Faktors k_1 lässt dich mittels der Simulation belegen, da bei $R_A = k$, also $k_1 = 0$ eine ungedämpfte Schwingung zu beobachten ist.

Außerdem ist zu beobachten, wie mit sinkendem k also steigendem k_1 die Schwingung immer stärker gedämpft wird.

Liest man von dieser Schwingung die Periodendauer ab, erhält man in etwa $T = 29{,}77ms$. Daraus lässt sich wie folgt k_2 berechnen:

$$k_2 = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{29{,}77 * 10^{-3}s}\right)^2 = 44554{,}6s^2$$

Berechnet man k_2 aus den angegebenen Systemparametern, erhält man folgenden Wert:

$$k_2 = \frac{\psi^2}{L_A * J} = \frac{(15 * 10^{-3}Vs)^2}{10 * 10^{-3}H * 5 * 10^{-7}kgm^2} = 45000s^2$$

Die minimale Abweichung ist auf die Ablesegenauigkeit zurückzuführen, grundsätzlich entspricht der Faktor k_2 aber, wie vermutet, der quadrierten Eigenfrequenz.