Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе №2

Название: Интервальные оценки.

Дисциплина: Математическая статистика.

Студент ИУ7-64Б (Группа) ________ (Подпись, дата) Л.Е.Тартыков (И.О. Фамилия)

Преподаватель ________ (Подпись, дата) М.А.Велищанский (И.О. Фамилия)

Москва, 2022

1 Задание

1.1 Цель работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.2 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть: X - случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$

Односторонней нижней (верхней) γ-доверительной границей для параметра θ называется статистика $\underline{\theta}(\vec{X})$ (соответственно $\overline{\theta}(\vec{X})$) такая, что $P\{\theta > \underline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$ (соответственно $P\{\theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$)

γ-доверительным интервалом для параметра θ называется реализация (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, т.е. интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $\vec{X}_n$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

2.2.1 Вычисление границ γ-доверительного интервала для математического ожидания

Нижняя граница интервала для математического ожидания при известной дисперсии приведена в формуле (2.1).

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \tag{2.1}$$

Верхняя граница интервала для математического ожидания при известной дисперсии приведена в формуле (2.2).

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \tag{2.2}$$

где:

- $\overline{X}$ – среднее значение выборки;
- n – число опытов;
- $S(\vec{X}_n)$ – точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}_n$;
- $t_\alpha(n-1)$ квантиль уровня α для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы;
- α – величина, равная $\dfrac{(1-\gamma)}{2}$.

2.2.2 Вычисление границ γ-доверительного интервала для дисперсии

Нижняя граница интервала для дисперсии приведена в формуле (2.3).

$$\underline{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{h^{n-1}_{1-\alpha}} \tag{2.3}$$

Верхняя граница интервала для дисперсии приведена в формуле (2.4).

$$\overline{\sigma^2}(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{h^{n-1}_{\alpha}}, \tag{2.4}$$

где:

- n – объем выборки;
- h^{n-1}_α – квантиль уровня α распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы;
- α – величина, равная $\dfrac{(1-\gamma)}{2}$.

3 Практическая часть

3.1 Код программы

Модуль разработанных алгоритмов представлен на листинге 3.1

Листинг 3.1 – Модуль разработанных алгоритмов

```
##Тартыков Лев ИУ7-64Б, 2022 г
pkg load statistics;
clc;
clear all;

function main()
    [error_read_file, x] = load_data("data.txt");
    if (error_read_file != 0)
        return;
    endif
    gamma = input_gamma();
    find_parametres(x, gamma);
    plot_graphs(x, gamma);
endfunction

function [error, x] = load_data(file_name)
    x = []; i = 1; error = 0;
    file = fopen(file_name, "r");
    if (file == -1)
        error = -1;
    else
        end_file = 0;
        while (end_file == 0)
            if (feof(file))
                end_file = 1;
            else
                x(i) = fscanf(file, '%f', [1,1]);
                fscanf(file, '%c', [1, 1]);
                i++;
            endif
        endwhile
    endif
    fclose(file);
endfunction

function [gamma] = input_gamma()
    gamma = input('Введите значение уровня доверия: ');
endfunction
```

```
function find_parametres(x, gamma)
    alpha = (1 + gamma) / 2;
    count_x = length(x);
    mu = find_mu(x, count_x)
    S_2 = find_S_2(x, mu, count_x)

    mu_low = find_mu_low(mu, sqrt(S_2), count_x, alpha)
    mu_high = find_mu_high(mu, sqrt(S_2), count_x, alpha)

    sigma_2_low = find_DX_low(S_2, count_x, alpha)
    sigma_2_high = find_DX_high(S_2, count_x, alpha)
endfunction

function plot_graphs(x, gamma)
    count_x = length(x); alpha = (1 + gamma) / 2;
    mu_array = []; mu_low_array = []; mu_high = [];
    sigma_2_array = []; sigma_2_low_array = []; sigma_2_high_array = [];

    for i = 1: count_x
        mu = find_mu(x(1:i), i);
        S_2 = find_S_2(x(1:i), mu, i);

        mu_array(i) = mu;
        sigma_2_array(i) = S_2;
        mu_low_array(i) = find_mu_low(mu, sqrt(S_2), i, alpha);
        mu_high_array(i) = find_mu_high(mu, sqrt(S_2), i, alpha);

        sigma_2_low_array(i) = find_DX_low(S_2, i, alpha);
        sigma_2_high_array(i) = find_DX_high(S_2, i, alpha);
    endfor

    mu = find_mu(x, count_x);
    S_2 = find_S_2(x, mu, count_x);

    figure
    subplot(1, 2, 1);
    hold on;
    plot([1,count_x], [mu, mu]);
    plot((1:count_x), mu_array);
    plot((1:count_x), mu_low_array);
    plot((1:count_x), mu_high_array);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('mu(x_N)','mu(x_n)','mu_low(xn)','mu_high(xn)');
    hold off;

    subplot(1, 2, 2);
```

```
    hold on;
    plot((1:count_x), (zeros(1, count_x) + S_2));
    plot((1:count_x), sigma_2_array);
    plot((1:count_x), sigma_2_low_array);
    plot((1:count_x), sigma_2_high_array);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('S_2(x_N)','S_2(x_n)','sigma_low(xn)','sigma_high(xn)');
    hold off;

endfunction

function [mu] = find_mu(x, count_x)
    mu = sum(x) / count_x;
endfunction

function [S_2] = find_S_2(x, mu, count_x)
    S_2 = sum((x - mu).^2) / (count_x - 1);
endfunction

function [mu_low] = find_mu_low(avg_x, S, n, alpha)
    mu_low = avg_x - tinv(alpha, n-1) * S / sqrt(n);
endfunction

function [mu_high] = find_mu_high(avg_x, S, n, alpha)
    mu_high = avg_x + tinv(alpha, n-1) * S / sqrt(n);
endfunction

function [sigma_2_low] = find_DX_low(S_2, n, alpha)
    sigma_2_low = S_2 * (n - 1) / chi2inv(1 - alpha, n-1);
endfunction

function [sigma_2_high] = find_DX_high(S_2, n, alpha)
    sigma_2_high = S_2 * (n - 1) / chi2inv(alpha, n-1);
endfunction

main();
```

3.2 Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

Согласно варианту 15, результаты расчетов для выборки приведены в формулах (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6).

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -3.6762 \tag{3.1}$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 0.8664 \tag{3.2}$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -3.8170 \tag{3.3}$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -3.5353 \tag{3.4}$$

$$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 1.0875 \tag{3.5}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 0.7088 \tag{3.6}$$

На рисунке 3.1 представлены график прямой $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функции объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

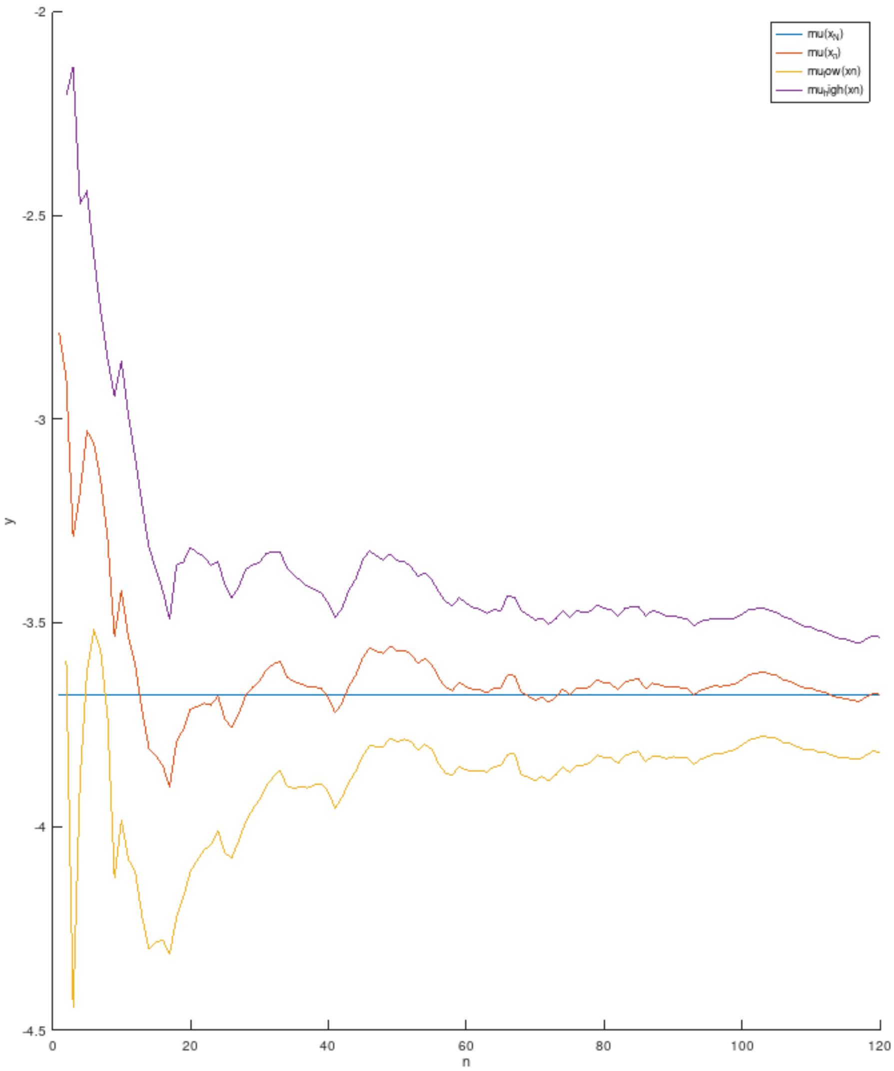

Рисунок 3.1 – График прямой $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функции объема n выборки.

На рисунке 3.1 представлены график прямой $z = S^2(\vec{x}_N)$ и функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функции объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

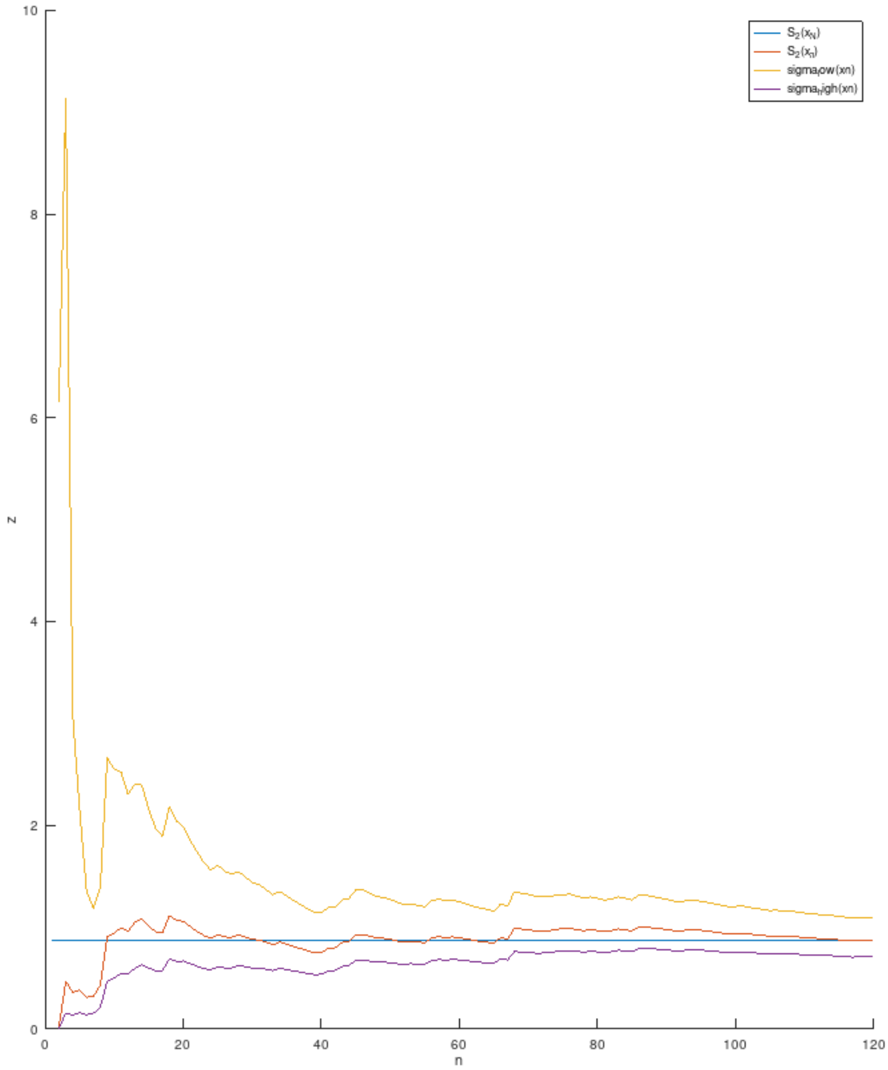

Рисунок 3.2 – График прямой $z = S^2(\vec{x}_N)$ и функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функции объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.